Лекция 30. Сильная гравитация и слабый электромагнетизм

А. А. Кецарис*

(28 мая 2014)

В этой Лекции мы приводим аргументы в пользу существования дополнительных проявлений гравитации и электромагнетизма и даем вывод уравнений, призванных описывать эти проявления. При этом мы постулируем аналогию между гравитацией и электромагнетизмом.

I. ВВЕДЕНИЕ

Наряду с другими единая теория взаимодействий должна прояснить следующий вопрос. Существует невероятное различие между силами гравитационного взаимодействия и других взаимодействий, в первую очередь электрического взаимодействия. С другой стороны оба взаимодействия, гравитационное и электрическое, подчиняются закону обратных квадратов, что можно расценить, как указание на единство природы гравитации и электромагнетизма. Настоящая лекция посвящена решению указанной проблемы. Мы исходим из предположения о том, что поля, как гравитационное, так и электромагнитное, описываются уравнениями двух типов (см. Лекцию 29). Уравнения первого типа формулируются по отношению к первой производной от коэффициентов связности или потенциалов поля Γ^i_{kl}, A_i. Уравнения второго типа формулируются по отношению к второй производной от указанных величин или по отношению к первой производной от тензора кривизны или тензора электромагнитного поля. При этом первому типу уравнений соответствует *слабая* гравитация и *слабый* электромагнетизм, а второму типу уравнений соответствует *сильная* гравитация и *сильный* электромагнетизм. Пользуясь этой терминологией, отметим, что современной физике сильная гравитация и слабый электромагнитизм не известны, она оперирует только со слабой гравитацией и сильным электромагнетизмом. Отсюда и возникает столь разительное различие между известными силами гравитационного и электрического взаимодействий. Причина того, что сильная гравитация нам не известна, видимо, состоит в том, что в своей практической деятельности мы не сталкиваемся с природным источником сильной гравитации в концентрированном виде. Причина того, что слабый электромагнетизм нам не известен, состоит, видимо, в том, что мы не имеем средств для обнаружения столь малых сил на фоне сильного электромагнитного взаимодействия.

Известное нам гравитационное взаимодействие (в нашей терминологии *слабое* гравитационное взаимодействие) описывается уравнением[1]

$$\mu\, c\, \frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) + \mu\, c\, \Gamma^i{}_{kl}\, \frac{dx^k}{ds}\, \frac{dx^l}{dt} = 0\,. \qquad (1)$$

Коэффициенты связности $\Gamma^i{}_{kl}$, зависящие от источников гравитационного поля, с которыми взаимодействует плотность массы μ, определяются уравнением Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\, R\, g_{ik} = \chi\, T_{ik}\,. \qquad (2)$$

Здесь

$$\chi = \frac{2G}{c^4}\,,$$

где

$$G = 80 \cdot 10^{-11}\, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} - \text{гравитационная постоянная}\,,$$

c – скорость света.

В том случае, если гравитационное поле вызвано распределенной плотностью массы, тензор энергии-импульса имеет вид:

$$T^{ik} = \mu_1 c\, \frac{dx^i}{ds}\, \frac{dx^k}{dt}\,, \qquad (3)$$

где μ_1 плотность массы, с которой взаимодействует плотность массы μ.

Уравнение движения (1) следует из вариационного принципа

$$\delta S = -\delta \int \left(\mu\, c\, \frac{dx_i}{ds}\, \frac{dx^i}{dt}\right)\, \frac{\sqrt{-g}}{c}\, d\Omega = 0 \qquad (4)$$

при варьировании координат плотности массы.

Уравнение гравитационного поля (2) следует из вариационного принципа

$$\delta(S_g + S_{mg}) = 0 \qquad (5)$$

при варьировании метрического тензора. Здесь S_g – действие гравитационного поля. Для него

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\chi} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}\right) \delta g^{ik}\, \frac{\sqrt{-g}}{c}\, d\Omega\,. \qquad (6)$$

* ketsaris@mail.ru; http://toe-physics.org

[1] уравнением движения

S_{mg} – действие, ответственное за взаимодействие гравитационного поля и материи. Для него

$$\delta S_{mg} = \frac{1}{2} \int T_{ik} \delta g^{ik} \, \frac{\sqrt{-g}}{c} \, d\Omega \,. \tag{7}$$

Известное нам электромагнитное взаимодействие (в нашей терминологии *сильное* электромагнитное взаимодействие) описывается уравнением движения

$$\mu \, c \, \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{ds} \right) - \frac{1}{c} F^i{}_k j^k = 0 \,. \tag{8}$$

Тензор электромагнитного поля $F^i{}_k$, зависящий от источников электромагнитного поля, с которыми взаимодействует плотность тока j^k, определяется уравнением Максвелла:

$$F^{li}{}_{,l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} \, j_1^i \,. \tag{9}$$

Здесь $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \, \dfrac{\text{А} \cdot \text{сек}}{\text{В} \cdot \text{м}}$ – диэлектрическая постоянная, j_1^i – плотность тока, с которой взаимодействует плотность тока j^i.

Уравнение движения (8) следует из вариационного принципа

$$\delta S = -\delta \int \left(\mu \, c \frac{dx_i}{ds} \, \frac{dx^i}{dt} + \frac{1}{c} \, A_i \, j^i \right) \, \frac{1}{c} \, d\Omega = 0 \tag{10}$$

при варьировании координат плотности массы и заряда.

Уравнение электромагнитного поля (9) следует из вариационного принципа

$$\delta S = -\delta \int \left(\frac{1}{c} \, A_i \, j_1^i + \varepsilon_0 \, \frac{F_{ik} \, F^{ik}}{4} \right) \, \frac{1}{c} \, d\Omega = 0 \tag{11}$$

при варьировании потенциалов электромагнитного поля.

Из вариационного принципа следует выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{ik} = \varepsilon_0 \, \left(-F_{il} \, F_k{}^l + g_{ik} \frac{F_{lm} \, F^{lm}}{4} \right) \tag{12}$$

В настоящей лекции мы остановимся на сильной гравитации и слабом электромагнетизме. Для нашего исследования ключевой является *аналогия* между электромагнитным и гравитационным взаимодействиями, которую мы сформулируем, исходя из групп электромагнитного и гравитационного взаимодействий.

II. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ГРУППА И ГРУППА ГРАВИТАЦИИ

Предварительно рассмотрим следующую задачу. Пусть вектор подвергается произвольному линейному преобразованию. Каковы непрерывные группы, осуществляющие такое преобразование? Качественный ответ таков: вектор можно повернуть, не меняя его длины, и, напротив, растянуть (сжать), то есть изменить его длину.

Остановимся на простейшем случае, когда исходный вектор (x, y) и вектор (x', y'), полученный в результате преобразования, находятся в одной плоскости, например, 12. Произвольное линейное преобразование вектора дается соотношением

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Далее воспользуемся матрицами 2×2, приведенными в Лекции 7,

$$\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \,, \quad a = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \,, \quad b = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{-1} & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \,, \quad i = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \text{-1} & \\ \hline \end{array}$$

и разложим по этим матрицам матрицу линейного преобразования

$$l = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = p \cdot \mathit{1} + q \cdot b + r \cdot i + s \cdot a \,.$$

Коэффициенты разложения однозначно связаны с элементами матрицы линейного преобразования

$$\begin{aligned} p - q = P \,, \ \ s + r = Q \,, \\ p + q = S \,, \ \ s - r = R \,. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} p = \frac{P+S}{2} \,, \qquad s = \frac{Q+R}{2} \,, \\ q = \frac{S-P}{2} \,, \qquad p = \frac{Q-R}{2} \,. \end{aligned}$$

Матрицы $\{\mathit{1}, a, b, i\}$ подчиняются законами умножения:

$$\begin{gathered} a^2 = b^2 = \mathit{1} \,, \qquad i^2 = -\mathit{1} \,, \qquad a\,b = -b\,a = i \,, \\ a\,i = i\,a = -b \,, \qquad b\,i = i\,b = -a \,. \end{gathered}$$

Поэтому линейное преобразование является элементом алгебры, построенной на указанных матрицах как на базисных. Обозначим эту алгебру – L. По алгебре L построим соответствующую ей непрерывную группу. Обозначим эту группу $\mathbf{L}$. Базисной матрице b соответствует подгруппа группы $\mathbf{L}$, определяемая следующим преобразованием

$$\begin{aligned} \exp(b\varepsilon) = \operatorname{ch}(\varepsilon) \cdot \mathit{1} + \operatorname{sh}(\varepsilon) \cdot b = \\ = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varepsilon) - \operatorname{sh}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}(\varepsilon) + \operatorname{sh}(\varepsilon) \end{pmatrix} \,. \end{aligned}$$

Полученное преобразование обладает свойством группы. Можно показать, что

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\varepsilon_1)-\mathrm{sh}(\varepsilon_1) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\varepsilon_1)+\mathrm{sh}(\varepsilon_1) \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\varepsilon_2)-\mathrm{sh}(\varepsilon_2) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\varepsilon_2)+\mathrm{sh}(\varepsilon_2) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\mathrm{sh}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\mathrm{sh}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \end{pmatrix}.$$

Обозначим полученную подгруппу $\mathbf{H}_1$. Эта подгруппа является группой гиперболических поворотов, причем гиперболы располагаются между осями координат. Для нас важно, что эта подгруппа не является ортогональной и поэтому не сохраняет длину вектора. При преобразовании координаты вектора целесообразно задавать в "полярной" форме:

$$x = r(\mathrm{ch}(\alpha)-\mathrm{sh}(\alpha))$$
$$y = r(\mathrm{ch}(\alpha)+\mathrm{sh}(\alpha)).$$

В этом случае преобразование вектора сводится к изменению "угла" α

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\varepsilon)-\mathrm{sh}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\varepsilon)+\mathrm{sh}(\varepsilon) \end{pmatrix} \times$$
$$\times\, r \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\alpha)-\mathrm{sh}(\alpha) \\ \mathrm{ch}(\alpha)+\mathrm{sh}(\alpha) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\alpha+\varepsilon)-\mathrm{sh}(\alpha+\varepsilon) \\ \mathrm{ch}(\alpha+\varepsilon)+\mathrm{sh}(\alpha+\varepsilon) \end{pmatrix}$$

Базисной матрице i соответствует подгруппа группы $\mathbf{L}$, определяемая следующим преобразованием

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi)\cdot \mathit{1} + \sin(\varphi)\cdot i =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Это преобразование определяет ортогональную группу – группу поворотов в плоскости, сохраняющую длину вектора. Обозначим ее $\mathbf{U}$.

Базисной матрице a соответствует подгруппа группы $\mathbf{L}$, определяемая следующим преобразованием

$$\exp(a\psi) = \mathrm{ch}(\psi)\cdot \mathit{1} + \mathrm{sh}(\psi)\cdot a =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\psi) & \mathrm{sh}(\psi) \\ \mathrm{sh}(\psi) & \mathrm{ch}(\psi) \end{pmatrix}.$$

Это преобразование определяет неортогональную группу – группу гиперболических поворотов в плоскости, причем гиперболы располагаются между биссектрисами квадрантов системы координат. Обозначим эту группу $\mathbf{H}_2$.

Единичной базисной матрице $\mathit{1}$ соответствует подгруппа группы $\mathbf{L}$, определяемая следующим преобразованием

$$\exp(\mathit{1}\zeta) = \begin{pmatrix} \exp(\zeta) & 0 \\ 0 & \exp(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

где введено обозначение

$$k = \exp(\zeta).$$

Это преобразование определяет группу растяжений (сжатий) вектора. Обозначим эту группу $\mathbf{H}_3$. Для $-\infty < \zeta \le 0$, $0 < k \le 1$ имеем подгруппу сжатий (k – коэффициент сжатия). Для $0 \le \zeta < \infty$, $1 \le k < \infty$ имеем подгруппу растяжений (k – коэффициент растяжения).

Полная группа линейных непрерывных преобразований вектора на плоскости определяется матрицей

$$L = \exp(\mathit{1}\zeta + b\varepsilon + i\varphi + a\psi).$$

Здесь необходимо отметить, что рассмотренный характер подгрупп отнесен к преобразованию векторов, находящихся в евклидовой плоскости, для которой квадрат вектора определяется суммой квадратов координат

$$x^2 + y^2.$$

В том случае, если плоскость является псевдоевклидовой, для которой квадрат вектора определяется разностью квадратов координат, например,

$$x^2 - y^2,$$

характер подгрупп меняется. Так ортогональной подгруппой $\mathbf{U}$, не меняющей длины вектора, становится группа гиперболических поворотов

$$\exp(a\psi) = \mathrm{ch}(\psi)\cdot \mathit{1} + \mathrm{sh}(\psi)\cdot a =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\psi) & \mathrm{sh}(\psi) \\ \mathrm{sh}(\psi) & \mathrm{ch}(\psi) \end{pmatrix}.$$

А группа поворотов

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi)\cdot \mathit{1} + \sin(\varphi)\cdot i =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

становится неортогональной группой, которую в этом случае обозначим $\mathbf{H}_2$.

Кроме того, сделаем следующее замечание относительно инфинитезимальных преобразований[2] рассматриваемых групп. Для этого предварительно дадим следующие определения. Из группы линейных преобразований выделим группу ортогональных преобразований $\mathbf{U}$. Обозначим матрицу ортогональных преобразований

$$u^{a_1}{}_a.$$

Здесь и далее в этом разделе индексы (a, b, c, d) и (a_1, b_1, c_1, d_1) принимают значения 1, 2.

[2] преобразований для малых значений групповых параметров

Неортогональные преобразования объединим и рассмотрим группу неортогональных преобразований

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 \,.$$

Обозначим матрицу неортогональных преобразований

$$h^{a_1}{}_a \,.$$

Квадрат длины вектора запишем в следующем виде

$$x^2 = \delta_{ab}\, x^a\, x^b \,,$$

Здесь компоненты метрического тензора δ_{ab} определяются следующим образом

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 1 \,, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 0 \,.$$

Квадрат длины преобразованного вектора записывается соответственно

$$(x')^2 = \delta_{a_1 b_1}\, x^{a_1}\, x^{b_1} \,,$$

Инфинитезимальное преобразование ортогональной группы запишем следующим образом

$$u^{a_1}{}_a = \delta^{a_1}{}_a + \delta u^{a_1}{}_a \,.$$

Здесь первый символ δ означает символ Кронекера, а второй символ δ означает малое приращение. Аналогично инфинитезимальное преобразование неортогональной группы запишем следующим образом

$$h^{a_1}{}_a = \delta^{a_1}{}_a + \delta h^{a_1}{}_a \,.$$

Ортогональное преобразование

$$x^{a_1} = u^{a_1}{}_a \cdot x^a$$

сохраняет квадрат длины вектора

$$(x')^2 = \delta_{a_1 b_1}\, u^{a_1}{}_a\, u^{b_1}{}_b \cdot x^a \cdot x^b = \delta_{ab}\, x^a\, x^b \,.$$

Отсюда следует условие ортогональности преобразования[3]

$$\delta_{a_1 b_1}\, u^{a_1}{}_a\, u^{b_1}{}_b = \delta_{ab} \,.$$

Для инфинитезимального преобразования имеем

$$\delta_{a_1 b_1}\, \delta^{a_1}_a\, \delta u^{b_1}{}_b + \delta_{a_1 b_1}\, \delta u^{a_1}{}_a\, \delta^{b_1}_b = 0 \,.$$

Или в другом виде

$$\delta u_{ab} + \delta u_{ba} = 0 \,. \tag{13}$$

Это соотношение составляет содержание теоремы Киллинга.

Неортогональное преобразование изменяет квадрат длины преобразуемого вектора

$$(x')^2 = \delta_{a_1 b_1}\, x^{a_1}\, x^{b_1} = \delta_{a_1 b_1}\, h^{a_1}{}_a\, h^{b_1}{}_b\, x^a\, x^b = g_{ab}\; x^a\, x^b \,.$$

Метрический тензор

$$g_{ab} = \delta_{a_1 b_1}\, h^{a_1}{}_a\, h^{b_1}{}_b$$

под действием инфинитезимального преобразования изменяется следующим образом

$$\delta_{ab} + \delta g_{ab} = \delta_{a_1 b_1}\, (\delta^{a_1}{}_a + \delta h^{a_1}{}_a)\, (\delta^{b_1}{}_b + \delta h^{b_1}{}_b) \,.$$

Отсюда

$$\delta g_{ab} = \delta_{a_1 b_1}\, \delta^{a_1}{}_a\, \delta h^{b_1}{}_b + \delta_{a_1 b_1}\, \delta h^{a_1}{}_a\, \delta^{b_1}{}_b \,.$$

Или

$$\delta g_{ab} = \delta h_{ab} + \delta h_{ba} = 2\, \delta h_{ab} \,. \tag{14}$$

Для нас важно следующее. Приращение метрического тензора определяется приращением преобразования неортогональной группы. При этом

$$\delta h_{ab} = \delta h_{ba} \,. \tag{15}$$

Ортогональное преобразование не меняет метрического тензора и его приращение антисимметрично при перестановке индексов.

Перейдем теперь к группам гравитации и электромагнетизма.

1. Группа гравитации

Согласно существующим представлениям каждому типу взаимодействий соответствует определенная группа – группа взаимодействия. Здесь мы будем говорить о двух типах взаимодействий – гравитационном и электромагнитном – и, соответственно, о двух группах – гравитационной и электрической.

С нашей точки зрения группы взаимодействий являются подгруппами общей группы линейных преобразований, применяемых к обобщенному пространству действия и обобщенному пространству-времени. Необходимо отметить, что наше представление о пространственно-временных и внутренних группах (симметриях), согласованное с предыдущим тезисом, состоит в том, что необходимо различать левую группу линейных преобразований, когда последующее преобразование (2) умножено на исходное (1) слева

$$l_{\text{л}} = l_2 \circ l_1 \,,$$

и правую группу линейных преобразований, когда последующее преобразование (2) умножено на исходное (1) справа

$$l_{\text{п}} = l_1 \circ l_2 \,.$$

---

[3] Вид условия ортогональности не меняется при переходе к псевдоевклидовой плоскости.

При этом пространственно-временные симметрии составляют левую группу линейных преобразований и, напротив, внутренние симметрии составляют правую группу линейных преобразований. Такой вывод следует из результатов Лекции 19.

Согласно Эйнштейну гравитация изменяет длину пространственно-временного вектора. Отсюда группа, изменяющая длину вектора, то есть группа гравитации, не может быть ортогональной. Таким образом, группа гравитации это группа неортогональных преобразований $\mathbf{H}$. Обозначим матрицу неортогональных преобразований

$$h^i{}_k\,,$$

где индексы i, k принимают значения 1, 2, 3, 4.

2. Электрическая группа

Из Лекции 19 раздел V следует, что электрическая группа это группа правых поворотов в плоскости 12. В этом случае матрица преобразования имеет вид [4]

$$u^1{}_2\,.$$

В Лекции 5 раздел VI было показано что для включения в единую теорию взаимодействий трех поколений фундаментальных частиц необходимо дважды выполнить циклическую перестановку значений индексов 1, 2, 3. Таким образом, рассматривая электрическую группу, помимо поворотов в плоскости 12 необходимо привлечь повороты в плоскостях 23 и 31. Матрица ортогональных преобразований электрической группы приобретает вид

$$u^a{}_b\,,$$

где индексы a, b принимают значения 1, 2, 3.

Для того, чтобы электрическая группа приобрела релятивистский характер, к геометрическим поворотам необходимо добавить лоренцевы повороты (бусты) в трехмерном пространстве. Поэтому электрической группой следует считать группу правых поворотов в четырехмерном пространстве-времени. Матрица преобразований электрической группы приобретает вид

$$u^i{}_k\,,$$

[4] Насколько нам известно, только привлекая правое умножение, можно вывести матрицу

$$i\cdot\delta^K{}_L\,,$$

ответственную за электромагнитное взаимодействие в теории Дирака. Здесь i – мнимая единица, индексы K, L нумеруют компоненты вектора в алгебре Клиффорда. Именно эта матрица представляет базисный вектор

$$e_{12}\,.$$

где индексы i, k принимают значения 1, 2, 3, 4.

Участие электрической группы $u^i{}_k$ и гравитационной группы $h^i{}_k$ "на равных" в группе линейных преобразований, с нашей точки зрения, есть форма, в которую воплощается мысль о единстве электромагнетизма и гравитациии.

III. ГРАВИТАЦИЯ И И СЛАБЫЙ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

1. Геометрия гравитации и слабого электромагнетизма

1. Коэффициенты связности

Запишем

$$\Gamma_{ikl}=\{ikl\}+[ikl]\,,$$

где

$$\{ikl\}=\Gamma_{<ik>l}+\Gamma_{<li>k}-\Gamma_{<kl>i}\,,$$

$$\Gamma_{<ik>l}=\frac{1}{2}(\Gamma_{ikl}+\Gamma_{kil})\,,$$

и

$$[ikl]=\Gamma_{i[kl]}+\Gamma_{k[li]}-\Gamma_{l[ik]}\,,$$

$$\Gamma_{i[kl]}=\frac{1}{2}(\Gamma_{ikl}-\Gamma_{ilk})\,.$$

Действительно

$$\{ikl\}+[ikl]=\frac{1}{2}(\Gamma_{ikl}+\Gamma_{kil}+\Gamma_{lik}+\Gamma_{ilk}-\Gamma_{kli}-\Gamma_{lki})+$$
$$+\frac{1}{2}(\Gamma_{ikl}-\Gamma_{ilk}+\Gamma_{kli}-\Gamma_{kil}-\Gamma_{lik}+\Gamma_{lki})=\Gamma_{ikl}\,.$$

Далее будем полагать

$$\Gamma_{<ik>l}=\frac{1}{2}g_{ik,l}\,.$$

В результате коэффициенты

$$\{ikl\}=\frac{1}{2}(g_{ik,l}+g_{li,k}-g_{kl,i})$$

представляют собой символы Кристоффеля. Заметим, что

$$\{ikl\}=\{ilk\}\,.$$

Кроме того, будем полагать

$$\Gamma_{i[kl]}=\frac{1}{2}D_i\,u_{kl}\,.$$

Здесь D – дифференциал в искривленном пространстве (см. Лекцию 25).

В результате коэффициенты

$$[ikl] = \frac{1}{2}(D_i\, u_{kl} + D_k\, u_{li} - D_l\, u_{ik})$$

представляют собой символы Риччи. Заметим, что

$$[ikl] = -[kil]\,.$$

Наложим ограничение на символы Риччи, полагая, что имеет место условие

$$D^k u_{ik} = 0\,.$$

Это условие записывается в следующем виде

$$\left[{}^{\,k}_{ik}\right] = 0\,. \tag{16}$$

Сделаем следующие определения. Будем рассматривать символы Кристоффеля как коэффициенты связности *геометрии гравитации.* Или проще - *гравитационные коэффициенты связности.* Для этих коэффициентов введем обозначение

$$\Gamma_{ikl}(h) \equiv \{ikl\}\,.$$

Будем рассматривать символы Риччи с условием (16) как коэффициенты связности *геометрии электромагнетизма.* Или проще - *электрические коэффициенты связности.* Для этих коэффициентов введем обозначение

$$\Gamma_{ikl}(u) \equiv [ikl]\,.$$

В простейшем случае правых поворотов в плоскости 12 электрические коэффициенты связности приобретают вид

$$\Gamma_{i12}(u) = \frac{1}{2} D_i u_{12}\,.$$

2. Тензор кривизны

Для тензора кривизны имеем

$$R^m{}_{ikl} = \Gamma^m{}_{il,k} - \Gamma^m{}_{ik,l} + \Gamma^m{}_{nk}\Gamma^n{}_{il} - \Gamma^m{}_{nl}\Gamma^n{}_{ik}\,.$$

Разобьем коэффициенты связности на символы Кристоффеля и символы Риччи

$$\Gamma^m{}_{il} = \left\{{}^{\,m}_{il}\right\} + \left[{}^{\,m}_{il}\right]$$

и выделим два крайних случая

1.

$$u^i{}_k = \delta^i{}_k\,, \quad \left[{}^{\,m}_{il}\right] = 0\,, \quad \Gamma^m{}_{il} = \left\{{}^{\,m}_{il}\right\}\,.$$

Этот случай мы свяжем с описанием гравитации. Соответствующий ему тензор кривизны назовем гравитационным

$$R^m{}_{ikl}(h) = \left\{{}^{\,m}_{il}\right\}_{,k} - \left\{{}^{\,m}_{ik}\right\}_{,l} + \left\{{}^{\,m}_{nk}\right\}\left\{{}^{\,n}_{il}\right\} - \left\{{}^{\,m}_{nl}\right\}\left\{{}^{\,n}_{ik}\right\}\,.$$

2.

$$h^i{}_k = \delta^i{}_k\,, \quad \left\{{}^{\,m}_{il}\right\} = 0\,, \quad \Gamma^m{}_{il} = \left[{}^{\,m}_{il}\right]\,.$$

Этот случай мы свяжем с описанием слабого электромагнетизма. Соответствующий ему тензор кривизны назовем электрическим

$$R^m{}_{ikl}(u) = \left[{}^{\,m}_{il}\right]_{,k} - \left[{}^{\,m}_{ik}\right]_{,l} + \left[{}^{\,m}_{nk}\right]\left[{}^{\,n}_{il}\right] - \left[{}^{\,m}_{nl}\right]\left[{}^{\,n}_{ik}\right]\,.$$

3. Тензор Риччи

Свертка тензоров кривизны приводит к следующим выражениям для тензора Риччи для случаев гравитации:

$$R_{il}(h) = \left\{{}^{\,k}_{il}\right\}_{,k} - \left\{{}^{\,k}_{ik}\right\}_{,l} + \left\{{}^{\,k}_{nk}\right\}\left\{{}^{\,n}_{il}\right\} - \left\{{}^{\,k}_{nl}\right\}\left\{{}^{\,n}_{ik}\right\}$$

и слабого электромагнетизма

$$R_{il}(u) = \left[{}^{\,k}_{il}\right]_{,k} - \left[{}^{\,k}_{ik}\right]_{,l} + \left[{}^{\,k}_{nk}\right]\left[{}^{\,n}_{il}\right] - \left[{}^{\,k}_{nl}\right]\left[{}^{\,n}_{ik}\right]\,.$$

С учетом принятого нами условия (16) имеем

$$R_{il}(u) = \left[{}^{\,k}_{il}\right]_{,k} - \left[{}^{\,k}_{nl}\right]\left[{}^{\,n}_{ik}\right]\,.$$

4. Скалярная кривизна

Для гравитации

$$R(h) = g^{il}R_{il}(h) = g^{il}(\left\{{}^{\,k}_{il}\right\}_{,k} - \left\{{}^{\,k}_{ik}\right\}_{,l} + \\ + \left\{{}^{\,k}_{nk}\right\}\left\{{}^{\,n}_{il}\right\} - \left\{{}^{\,k}_{nl}\right\}\left\{{}^{\,n}_{ik}\right\})\,.$$

Вариация скалярной кривизны

$$\delta R(h) = \delta g^{il} R_{il}(h)$$

Для слабого электромагнетизма

$$R(u) = u^{il}R_{il}(u) = u^{il}(\left[{}^{\,k}_{il}\right]_{,k} - \left[{}^{\,k}_{nl}\right]\left[{}^{\,n}_{ik}\right])\,.$$

Вариация скалярной кривизны

$$\delta R(u) = \delta u^{il} R_{il}(u) = \delta u^{il}\left[{}^{\,k}_{il}\right]_{,k}\,. \tag{17}$$

2. Аналогия между гравитацией и слабым электромагнетизмом

Вариационному принципу для гравитационного поля (5)

$$\delta(S_g + S_{mg}) = 0$$

поставим в аналогичное соответствие вариационный принцип для слабого электромагнитного поля

$$\delta(S_{we} + S_{mwe}) = 0\,,$$

где S_{we} – действие слабого электромагнитного поля, поставленное в соответствие действию гравитационного поля S_g, а S_{mwe} – действие, ответственное за взаимодействие слабого электромагнитного поля и материи, поставленное в соответствие действию S_{mg}.

Сначала используем декларируемое соответствие для определения действия S_{we}. Исходной для нас является вариация действия гравитационного поля δS_g. Согласно (6) имеем

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\chi}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}\right)\delta g^{ik}\,\frac{\sqrt{-g}}{c}\,d\Omega\,, \qquad (18)$$

Для удобства дальнейшего изложения перепишем это выражение иначе

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\chi}\int R_{ik}(h)\,2\,\delta h^{ik}\,\frac{\sqrt{-g}}{c}\,d\Omega + R(h)\delta\sqrt{-g}\,\frac{1}{c}\,d\Omega\,. \qquad (19)$$

Здесь переписано второе слагаемое и учтено, что[5]

$$\delta g^{ik} = 2\,\delta h^{ik}\,.$$

Воспользовавшись аналогией

$$\delta h^{ik}\sim\delta u^{ik}\,,\quad R_{ik}(h)\sim R_{ik}(u)\,,$$

получим вариацию действия для слабого электромагнитного поля[6]

$$\delta S_{we} = -\frac{1}{\chi}\int R_{ik}(u)\delta u^{ik}\,\frac{1}{c}\,d\Omega\,. \qquad (20)$$

Теперь используем декларируемое соответствие для определения действия S_{mwe}. Исходной для нас является вариация действия, ответственного за взаимодействие гравитационного поля и материи δS_{mg}. Согласно (7) имеем

$$\delta S_{mg} = \frac{1}{2}\int T_{ik}\delta g^{ik}\,\frac{\sqrt{-g}}{c}\,d\Omega\,.$$

Также для удобства дальнейшего изложения перепишем это выражение иначе

$$\delta S_{mg} = \int T_{ik}\,\delta h^{ik}\,\frac{\sqrt{-g}}{c}\,d\Omega\,.$$

Воспользовавшись аналогией

$$\delta h^{ik}\sim\delta u^{ik}\,,$$

получим вариацию действия, ответственного за взаимодействие слабого электромагнитного поля и материи

$$\delta S_{mwe} = \int Q_{ik}\,\delta u^{ik}\,\frac{1}{c}\,d\Omega\,. \qquad (21)$$

[5] Это соотношение обобщает (14).

[6] При этом учтено, что второе слагаемое в (19) не имеет аналогичного слагаемого в δS_{we}, так как для геометрии электромагнитного взаимодействия $-g=1$ и $\delta\sqrt{-g}=0$

Здесь тензор Q_{ik} это электромагнитный аналог тензора энергии-импульса T_{ik}

$$Q_{ik}\sim T_{ik}\,.$$

Он также имеет размерность

$$[Q_{ik}] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}\,,$$

но антисимметричен при перестановке индексов

$$Q_{ik} = -Q_{ki}\,.$$

3. Уравнения слабого электрмагнитного поля

Уравнения слабого электромагнитного поля следуют из вариационного принципа

$$\delta(S_{we}+S_{mwe}) = 0\,.$$

Подставляя сюда (20) и (21), получим уравнения слабого электромагнитного поля в следующем виде

$$R_{[ik]}(u) = \chi\,Q_{ik}\,.$$

Используя (17), это уравнение можно записать иначе

$$\left[{}^{l}{}_{ik}\right]_{,l} = \chi\,Q_{ik}\,.$$

Представленное уравнение соответствует группе правых поворотов в пространстве-времени. Классическому представлению об электромагнитном взаимодействии соответствует подгруппа правых поворотов в плоскости 12. Для этого случая уравнения слабого электромагнитного поля записываются так

$$\left[{}^{i}{}_{12}\right]_{,i} = \chi\,Q_{12}\,. \qquad (22)$$

Постулируем следующее соответствие между электромагнитными коэффициентами связности $\left[{}^{i}{}_{12}\right]$ и потенциалами электромагнитного поля A^i

$$\left[{}^{i}{}_{12}\right] = \frac{k}{r}\cdot A^i\,, \qquad (23)$$

где r – постоянная, имеющая размерность длины, а коэффициент

$$k = \sqrt{\chi\cdot\varepsilon_0}\,. \qquad (24)$$

Кроме того, постулируем следующее соответствие между компонентой тензора Q_{12} и плотностью электрического заряда ρ

$$Q_{12} = \frac{1}{k}\cdot\rho\,. \qquad (25)$$

Подставляя (23) и (25) в уравнение (22), получим уравнение слабого электромагнитного поля в следующем виде

$$A^i{}_{,i} = \chi\cdot\frac{r}{k^2}\cdot\rho\,. \qquad (26)$$

И, после подстановки выражения для k из (24), окончательно получим уравнение слабого электромагнитного поля

$$A^i{}_{,i} = \frac{r}{\varepsilon_0} \cdot \rho \,. \tag{27}$$

Для свободного слабого электромагнитного поля уравнение сводится к калибровке Лоренца

$$A^i{}_{,i} = 0 \,.$$

4. Уравнение движения в слабом электромагнитном поле

Уравнение движения в слабом электромагнитном поле следуют из вариационного принципа

$$\delta(S_m + S_{mwe}) = 0 \,.$$

Здесь S_m – действие распределенной плотности массы

$$S_m = -\int \left(\mu c \frac{dx_i}{ds}\, \frac{dx^i}{dt} \right) \frac{1}{c}\, d\Omega \,, \tag{28}$$

а S_{me} – действие, ответственное за взаимодействие материи со слабым электромагнитным полем. Из предыдущего раздела следует

$$S_{mwe} = \int Q_{12}\, u^{12}\, \frac{1}{c}\, d\Omega \,.$$

Отсюда вариационный принцип записывается следующим образом

$$-\delta \int \left(\mu c \frac{dx_i}{ds}\, \frac{dx^i}{dt} - Q_{12}\, u^{12} \right) \frac{1}{c}\, d\Omega = 0$$

при варьировании координат плотности массы[7]. В настоящей лекции мы выведем уравнение движения в слабом электромагнитном поле, пользуясь аналогией между гравитационным и электромагнитным взаимодействием. Для этого перепишем уравнение движения плотности массы в гравитационном поле (1) следующим образом

$$\mu c \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{ds} \right) + \Gamma^i{}_{kl}(h) T^{kl} = 0 \,, \tag{29}$$

Здесь T^{kl} – тензор энергии-импульса, взаимодействующий с гравитационным полем. Пользуясь аналогией

$$\Gamma^i{}_{kl}(h) \sim \Gamma^i{}_{kl}(u), \quad T^{kl} \sim Q^{kl} \,,$$

запишем уравнение движения заряженной плотности массы в слабом электромагнитном поле

$$\mu c \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{ds} \right) + \Gamma^i{}_{kl}(u) Q^{kl} = 0 \,.$$

Или

$$\mu c \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{ds} \right) + \left[{}^{\,i}{}_{kl} \right] Q^{kl} = 0 \,.$$

Классическому представлению об электромагнетизме соответствует подгруппа правых вращений в плоскости 12. Поэтому уравнение движения в слабом электромагнитном поле записывается следующим образом

$$\mu c \frac{du_i}{dt} + Q^{12} \left[{}^{\,i}{}_{12} \right] = 0 \,.$$

И, учитывая (23) и (25), получим окончательно

$$\mu c \frac{du^i}{dt} + \frac{\rho}{r} \cdot A^i = 0 \,. \tag{30}$$

5. Полное действие для материи и электромагнитного поля

$$S = -\int \left(\mu c \frac{dx_i}{ds}\, \frac{dx^i}{dt} \right) \frac{1}{c}\, d\Omega + \int Q_{ik}\, u^{ik}\, \frac{1}{c}\, d\Omega -$$
$$-\frac{1}{\chi} \int R_{ik}(u) u^{ik}\, \frac{1}{c}\, d\Omega$$
$$-\int \left(\frac{1}{c}\, A_i j^i_1 + \varepsilon_0\, \frac{F_{ik}\, F^{ik}}{4} \right) \frac{1}{c}\, d\Omega \,.$$

6. Полная система уравнений электромагнитного поля

$$A^i{}_{,i} = \frac{r}{\varepsilon_0} \cdot \rho \,, \tag{31}$$

$$F^{li}{}_{,l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i \,. \tag{32}$$

7. Уравнения движения частицы в электромагнитном поле

$$\mu c \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{ds} \right) + \frac{\rho}{r} \cdot A^i - \frac{1}{c} F^i{}_k j^k = 0 \,, \tag{33}$$

---

[7] Заметим, что для вывода уравнения движения вариационный принцип должен быть обобщен на случай произвольного линейного преобразования пространства-времени.

IV. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И СИЛЬНАЯ ГРАВИТАЦИЯ

1. Геометрия электромагнетизма и сильной гравитации

1. Коэффициенты связности

В соответствии с формулой (15) Лекции 25 коэффициенты связности в общем случае могут быть записаны следующим образом.

$$\Gamma^k_{k_1 k_2} = \tilde{l}^k_i \frac{Dl^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}} \,. \tag{34}$$

Здесь $l^i_{k_1}$ – матрица линейного преобразования

$$Dy^i = l^i_{k_1} \cdot dx^{k_1} \,,$$

а $\tilde{l}^k_i$ – матрица, обратная к матрице $l^i_{k_1}$, то есть для нее имеет место

$$\tilde{l}^k_i \cdot l^i_{k_1} = \delta^k_{k_1} \,.$$

Вблизи единицы группы линейных преобразований, то есть, при

$$\tilde{l}^k_i = \delta^k_i$$

коэффициенты связности принимают вид

$$\Gamma^i_{k_1 k_2} = \frac{Dl^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}} \,.$$

Имея в виду, что матрица линейных преобразований может быть записана в виде произведения

$$l^i_k = h^i_n \cdot u^n_k \,,$$

где h^i_n – матрица гравитационной группы, а u^n_k – матрица электрической группы, далее будем рассматривать два крайних случая.

1.

$$u^n_k = \delta^n_k \,, \quad \Gamma^i_{nk}(u) = 0 \,, \quad \Gamma^i_{nk}(h) = \frac{Dh^i_n}{\partial x^k} \,.$$

Этот случай свяжем с описанием сильной гравитации.

2.

$$h^n_k = \delta^n_k \,, \quad \Gamma^i_{nk}(h) = 0 \,, \quad \Gamma^i_{nk}(u) = \frac{Du^i_n}{\partial x^k} \,.$$

Этот случай свяжем с описанием электромагнетизма.

Классическое представление об электромагнитном взаимодействии соответствует подгруппе правых поворотов в плоскости 12. Для этого случая электрические коэффициенты связности приобретают вид

$$\Gamma^1_{2k} = \frac{Du^1_2}{\partial x^k} \,.$$

Подобно (23) постулируем следующее соответствие между электрическими коэффициентами связности и потенциалами электромагнитного поля

$$\Gamma^1_{2k} = \frac{k}{r} \cdot A_k \,. \tag{35}$$

2. Тензор кривизны

Для тензора кривизны имеем

$$R^l{}_{mik} = \Gamma^l{}_{mk,i} - \Gamma^l{}_{mi,k} + \Gamma^l{}_{ni} \cdot \Gamma^n{}_{mk} - \Gamma^l{}_{nk} \cdot \Gamma^n{}_{mi} \,.$$

В соответствии с разбиением коэффициентов связности, рассмотренном в предыдущем разделе, выделим два крайних случая

1.

$$u^n_k = \delta^n_k \,, \quad \Gamma^i_{nk}(u) = 0 \,, \quad \Gamma^i_{nk}(h) = \frac{Dh^i_n}{\partial x^k} \,.$$

Этот случай мы свяжем с описанием сильной гравитации. Соответствующий ему тензор кривизны назовем гравитационным:

$$\begin{aligned} R^l{}_{mik}(h) = \left(\Gamma^l{}_{mk}(h)\right)_{,i} - \left(\Gamma^l{}_{mi}(h)\right)_{,k} + \\ + \Gamma^l{}_{ni}(h) \cdot \Gamma^n{}_{mk}(h) - \Gamma^l{}_{nk}(h) \cdot \Gamma^n{}_{mi}(h) \,. \end{aligned} \tag{36}$$

2.

$$h^n_k = \delta^n_k \,, \quad \Gamma^i_{nk}(h) = 0 \,, \quad \Gamma^i_{nk}(u) = \frac{Du^i_n}{\partial x^k} \,.$$

Этот случай мы свяжем с описанием электромагнетизма. Соответствующий ему тензор кривизны назовем электрическим:

$$\begin{aligned} R^l{}_{mik}(u) = \left(\Gamma^l{}_{mk}(u)\right)_{,i} - \left(\Gamma^l{}_{mi}(u)\right)_{,k} + \\ + \Gamma^l{}_{ni}(u) \cdot \Gamma^n{}_{mk}(u) - \Gamma^l{}_{nk}(u) \cdot \Gamma^n{}_{mi}(u) \,. \end{aligned}$$

Классическое представление об электромагнитном взаимодействии соответствует подгруппе правых поворотов в плоскости 12. Для этого случая электрический тензор кривизны приобретает вид

$$\begin{aligned} R^1{}_{2ik}(u) = \left(\Gamma^1{}_{2k}(u)\right)_{,i} - \left(\Gamma^1{}_{2i}(u)\right)_{,k} + \\ + \Gamma^1{}_{ni}(u) \cdot \Gamma^n{}_{2k}(u) - \Gamma^1{}_{nk}(u) \cdot \Gamma^n{}_{2i}(u) \,. \end{aligned}$$

Или

$$R^1{}_{2ik}(u) = \frac{\partial \Gamma^1{}_{2k}(u)}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^1{}_{2i}(u)}{\partial x^k} \,.$$

Отсюда, воспользовавшись соответствием между электрическими коэффициентами связности и потенциалами электромагнитного поля (35), получим соответствие между электрическим тензором кривизны и тензором электромагнитного поля

$$R^1{}_{2ik}(u) = \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{k}{r} \cdot F_{ik} \,. \tag{37}$$

Здесь F_{ik} – тензор электромагнитного поля.

2. Аналогия между электромагнетизмом и сильной гравитацией

Вариационному принципу для электромагнитного поля

$$\delta(S_e + S_{me}) = 0$$

поставим в аналогичное соответствие вариационный принцип для сильного гравитационного поля

$$\delta(S_{sg} + S_{msg}) = 0\,,$$

где S_{sg} – действие сильного гравитационного поля, поставленное в соответствие действию электромагнитного поля S_e, а S_{msg} – действие, ответственное за взаимодействие сильного гравитационного поля и материи, поставленное в соответствие действию S_{me}.

Сначала используем декларируемое соответствие для определения действия S_{sg}. Исходной для нас является вариация действия электромагнитного поля δS_e. Согласно (11) имеем

$$S_e = -\int \varepsilon_0\, \frac{F_{ik}\, F^{ik}}{4}\, \frac{1}{c}\, d\Omega\,. \tag{38}$$

Воспользуемся соотношением

$$F_{ik} = \frac{r}{k} \cdot R^1{}_{2ik}(u)\,,$$

вытекающим из (37), и перепишем действие (38) по отношению к электрическому тензору кривизны

$$S_e = -\int \varepsilon_0\, \frac{r^2}{k^2} \frac{R^1{}_{2ik}\, R_1{}^{2ik}}{4}\, \frac{1}{c}\, d\Omega\,. \tag{39}$$

Здесь учтем выражение для k (24). Получим

$$S_e = -\frac{r^2}{\chi} \int \frac{R^1{}_{2ik}\, R_1{}^{2ik}}{4}\, \frac{1}{c}\, d\Omega\,. \tag{40}$$

Воспользуемся аналогией между электрическими и гравитационными величинами и, в частности,

$$R^1{}_{2ik}(u) \sim R^l{}_{mik}(h)\,.$$

Получим действие для сильного гравитационного поля

$$S_{sg} = -\frac{r^2}{\chi} \int \frac{R^l{}_{mik}(h)\, R_l{}^{mik}(h)}{4}\, \frac{\sqrt{-g}}{c}\, d\Omega\,. \tag{41}$$

Теперь используем декларируемое соответствие для определения действия S_{msg}. Исходным для нас является действие, ответственное за взаимодействие электромагнитного поля и материи S_{me}. Согласно (11) имеем

$$S_{me} = -\int \frac{1}{c}\, A_i j^i\, \frac{\sqrt{-g}}{c}\, d\Omega\,. \tag{42}$$

Далее воспользуемся соотношением

$$A_i = \frac{r}{k} \cdot \Gamma^1{}_{2i}(u)\,, \tag{43}$$

вытекающим из(35), и аналогией между электрическими и гравитационными величинами и, в частности,

$$\Gamma^1{}_{2i}(u) \sim \Gamma^l{}_{mi}(h)\,.$$

В результате действию S_{me} поставим а соответствие действие

$$S_{msg} = -\int \Gamma^l{}_{mi}(h) \cdot M_l{}^{mi}(h)\, \frac{\sqrt{-g}}{c}\, d\Omega\,. \tag{44}$$

Здесь $M_l{}^{mi}(h)$ плотность тензора момента. Она имеет размерность

$$[M_l{}^{mi}(h)] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}\,.$$

Иначе говоря, мы постулируем следующее аналогичное соответствие

$$\frac{1}{c}\, \frac{r}{k} \cdot \Gamma^1{}_{2i}(u)\, j^i \sim \Gamma^l{}_{mi}(h) \cdot M_l{}^{mi}(h)\,,$$

или

$$j^i \sim \frac{c \cdot k}{r}\, M_l{}^{mi}(h)\,.$$

3. Уравнения сильного гравитационного поля

На основании аналогии между электромагнетизмом и сильной гравитацией, рассмотренной в предыдущем разделе, действие, позволяющее найти уравнения поля сильной гравитации, имеет вид

$$S = S_{msg} + S_{sg} = \\ -\int \left[\Gamma^l{}_{mi}(h) M_l{}^{mi}(h) + \frac{r^2}{\chi} \frac{R^l{}_{mik}(h)\, R_l{}^{mik}(h)}{4} \right] \frac{\sqrt{-g}}{c}\, d\Omega\,.$$

Уравнения поля сильной гравитации следуют из вариационного принципа

$$\delta S = 0$$

при варьировании коэффициентов связности. Таким образом,

$$\delta S = -\int \Bigg[\delta\Gamma^l{}_{mi}(h) \cdot M_l{}^{mi}(h) + \\ + \frac{r^2}{\chi} \frac{\delta R^l{}_{mik}(h)\, R_l{}^{mik}(h)}{2} \Bigg] \frac{\sqrt{-g}}{c}\, d\Omega\,.$$

При варьировании второго слагаемого в выражении для действия учтено, что

$$R^l{}_{mik}(h)\, \delta R_l{}^{mik}(h) = \delta R^l{}_{mik}(h)\, R_l{}^{mik}(h)\,.$$

Используя выражение для тензора кривизны (36), вычислим вариацию тензора кривизны

$$\delta R^l{}_{mik} = \frac{\partial \delta \Gamma^l{}_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta \Gamma^l{}_{mi}}{\partial x^k} + \\ +\delta\Gamma^l{}_{ni}\cdot\Gamma^n{}_{mk} + \Gamma^l{}_{ni}\cdot\delta\Gamma^n{}_{mk} - \\ -\delta\Gamma^l{}_{nk}\cdot\Gamma^n{}_{mi} - \Gamma^l{}_{nk}\cdot\delta\Gamma^n{}_{mi}\,.$$

Используя эту вариацию, запишем выражение $\delta R^l{}_{mik}(h)\, R_l{}^{mik}(h)$ следующим образом

$$\delta R^l{}_{mik}\, R_l{}^{mik} = \\ = \left(\frac{\partial(\delta\Gamma^l{}_{mk})}{\partial x^i} + \delta\Gamma^l{}_{ni}\cdot\Gamma^n{}_{mk} + \Gamma^l{}_{ni}\cdot\delta\Gamma^n{}_{mk}\right) R_l{}^{mik} - \\ - \left(\frac{\partial(\delta\Gamma^l{}_{mi})}{\partial x^k} + \delta\Gamma^l{}_{nk}\cdot\Gamma^n{}_{mi} + \Gamma^l{}_{nk}\cdot\delta\Gamma^n{}_{mi}\right) R_l{}^{mik}\,.$$

В первом слагаемом в правой части поменяем местами индексы i и k, и учтем, что

$$R_l{}^{mki} = -R_l{}^{mik}\,.$$

В результате получим

$$\delta R^l{}_{mik}\, R_l{}^{mik} = \\ = -2\left(\frac{\partial(\delta\Gamma^l{}_{mi})}{\partial x^k} + \delta\Gamma^l{}_{nk}\cdot\Gamma^n{}_{mi} + \Gamma^l{}_{nk}\cdot\delta\Gamma^n{}_{mi}\right) R_l{}^{mik}\,.$$

Используя это выражение, перепишем вариацию действия следующим образом

$$\delta S = -\int\left[\delta\Gamma^l{}_{mi}(h)\cdot M_l{}^{mi}(h) - \frac{r^2}{\chi}\left(\frac{\partial(\delta\Gamma^l{}_{mi})}{\partial x^k} + \right.\right. \\ \left.\left. + \delta\Gamma^l{}_{nk}\cdot\Gamma^n{}_{mi} + \Gamma^l{}_{nk}\cdot\delta\Gamma^n{}_{mi}\right) R_l{}^{mik}\right] \frac{\sqrt{-g}}{c}\, d\Omega\,.$$

Преобразуем второе слагаемое подинтегрального выражения в два этапа.

1. Сначала рассмотрим следующую часть этого слагаемого

$$\frac{\partial(\delta\Gamma^l{}_{mi})}{\partial x^k}\, R_l{}^{mik}\sqrt{-g}\,.$$

Используя дифференцирование по частям, запишем ее следующим образом

$$\frac{\partial(\delta\Gamma^l{}_{mi}\, R_l{}^{mik}\sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{\partial(R_l{}^{mik}\sqrt{-g})}{\partial x^k}\delta\Gamma^l{}_{mi}\,.$$

В соответствии с теоремой Гаусса интегрирование первого слагаемого в этом выражении сводится к интегрированию по гиперповерхности, ограничивающей 4-объем Ω. Как обычно, полагается, что на геометрической граничной поверхности поле отсутствует, а временных границах поле не меняется, то есть вариация коэффициентов связности равна нулю. Поэтому вклад первого слагаемого в вариацию действия отсутствует и поэтому далее будем рассматривать только второе слагаемое в этом выражении

$$-\frac{\partial(R_l{}^{mik}\sqrt{-g})}{\partial x^k}\delta\Gamma^l{}_{mi}\,.$$

В нем выполним необходимое дифференцирование

$$-\frac{\partial R_l{}^{mik}}{\partial x^k}\sqrt{-g}\delta\Gamma^l{}_{mi} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}R_l{}^{mik}\sqrt{-g}\delta\Gamma^l{}_{mi}$$

и учтем, что

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k} = \Gamma^n{}_{kn}\,.$$

В результате рассматриваемая часть второго слагаемое подинтегрального выражения приобретает вид

$$-\left(R_l{}^{mik}{}_{,k} + \Gamma^k{}_{nk}R_l{}^{min}\right)\delta\Gamma^l{}_{mi}\sqrt{-g}\,. \tag{45}$$

2. Теперь рассмотрим другую часть этого слагаемого

$$\left(\delta\Gamma^l{}_{nk}\cdot\Gamma^n{}_{mi}\, R_l{}^{mik} + \Gamma^l{}_{nk}\cdot\delta\Gamma^n{}_{mi}\, R_l{}^{mik}\right)\sqrt{-g}\,.$$

После переобозначения индексов получим

$$-\left(-\Gamma^n{}_{lk}R_n{}^{mik} + \Gamma^m{}_{nk}R_l{}^{nik}\right)\delta\Gamma^l{}_{mi}\sqrt{-g}\,. \tag{46}$$

Объединяя обе части (45) и (46) слагаемого, получим[8]

$$-(R_l{}^{mik}{}_{,k} - \Gamma^n{}_{lk}R_n{}^{mik} + \Gamma^m{}_{nk}R_l{}^{nik} + \\ +\Gamma^i{}_{nk}R_l{}^{mnk} + \Gamma^k{}_{nk}R_l{}^{min})\,\delta\Gamma^l{}_{mi}\sqrt{-g}\,.$$

Или

$$-R_l{}^{mik}{}_{;k}\,\delta\Gamma^l{}_{mi}\sqrt{-g}\,.$$

После подстановки этого выражения в вариацию действия, получим вариационный принцип в следующем виде

$$\delta S = -\int\left(M_l{}^{mi} + \frac{r^2}{\chi}R_l{}^{mik}{}_{;k}\right)\delta\Gamma^l{}_{mi}\frac{\sqrt{-g}}{c}\,d\Omega = 0\,.$$

Отсюда следует уравнение сильного гравитационного поля

$$R_l{}^{mik}{}_{;k} = -\frac{\chi}{r^2}\cdot M_l{}^{mi}\,. \tag{47}$$

---

[8] Здесь учтено, что

$$\Gamma^i{}_{nk}R_l{}^{mnk} = 0\,,$$

так как коэффициенты связности симметричны по индексам n и k, а тензор кривизны антисимметричен по этим индексам.

4. Замечание относительно постоянной r

Перепишем уравнения слабого электромагнитного поля и сильного гравитационного поля

$$A^i{}_{,i} = \frac{r}{\varepsilon_0} \cdot \rho \,,$$
$$R_l{}^{mik}{}_{;k} = -\frac{\chi}{r^2} \cdot M_l{}^{mi} \,.$$

Из них видно, что чем меньше постоянная r, тем слабее слабый электромагнетизм и тем сильнее сильная гравитация.

5. Тензор энергии-импульса гравитационного поля

Аналогия между электромагнитным полем и полем сильной гравитации позволяет записать выражение для тензора энергии-импульса гравитационного поля, аналогичное выражению для тензора энергии-импульса электромагнитного поля (12). Напомним, что для действия физической системы, записанного в виде

$$S = \int \Lambda \frac{\sqrt{-g}}{c} \, d\Omega \,,$$

тензор энергии-импульса в частном случае записывается следующим образом

$$T_{ik} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{ik}} + \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} \Lambda \,.$$

Если учесть, что

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{ik} \,,$$

то имеем[9]

$$T_{ik} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{ik}} - g_{ik} \Lambda \,.$$

Для поля сильной гравитации имеем

$$\Lambda = -\frac{r^2}{\chi} \frac{R_{lmik} \, R_{pstr} \, g^{lp} \, g^{ms} \, g^{it} \, g^{kr}}{4} \,.$$

Отсюда получим выражение для тензора энергии-импульса гравитационного поля[10]

$$T_{ik} = \frac{r^2}{\chi} \left(-2 R_{ilmn} \, R_k{}^{lmn} + g_{ik} \frac{R^l{}_{mnp} \, R_l{}^{mnp}}{4} \right) . \quad (48)$$

[9] В общем случае тензор энергии импульса записывается так

$$T_{ik} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{ik}} + \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} \Lambda - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right) .$$

Однако, последнее слагаемое для поля сильной гравитации равно нулю.

[10] При выводе учтено, что $R_{iklm} = R_{lmik}$.

6. Полная система уравнений гравитационного поля

Соберем вместе уравнения, описывающие как слабую так и сильную гравитацию

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R \, g_{ik} = \chi \, T_{ik} \,, \quad (49)$$
$$R_l{}^{mik}{}_{;k} = -\frac{\chi}{r^2} \cdot M_l{}^{mi} \,. \quad (50)$$

7. Уравнения движения частицы в гравитационном поле

Аналогия между сильным гравитационным полем и электромагнитным полем позволяет, отталкиваясь от уравнения движения заряженной плотности массы в электромагнитном поле (8), обобщить уравнение движения плотности массы в гравитационном поле (1). В результате имеем

$$\mu c \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{ds} \right) + \mu c \Gamma^i{}_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt} - R^l{}_m{}^i{}_k M_l{}^{mk} = 0 \,. \quad (51)$$

V. ЭКСТАЗ

Москва! Я вижу тебя в небоскребах!

М. А. Булгаков, “Накануне”, 12 июня 1924

Утром из подмосковного космопорта стартует аппарат. Без грохота, огня и перегрузок, отталкиваясь от Земли. В аппарате семья, решившая провести выходной на Луне. Полпути аппарат движется ускоренно, а полпути замедленно. В обоих случаях ускорение равно g, поэтому путешественники не испытывают дискомфорта, связанного с невесомостью. Время полета до Луны составляет 2 часа. Развлекшись и сняв лунный закат, семья к вечеру возвращается домой.