Лекция 3. Можно ли *вывести* матрицы Дирака?

А. А. Кецарис

(5 июня 2003 г.)

В этой лекции мы попытаемся вывести матрицы Дирака из правил умножения в алгебре Клиффорда.

I. ВВЕДЕНИЕ

Мы предположили, что структурные матрицы искомой алгебры действия как-то связаны с матрицами Дирака. Но сами структурные матрицы определяются законами умножения алгебры (в нашем случае законами умножения векторов в алгебре Клиффорда). Следовательно, между этими законами и матрицами Дирака должна быть взаимосвязь. Если нам удастся вывести матрицы Дирака, исходя из законов умножения алгебры, принятой за алгебру действия, то это будет свидетельством в пользу нашего замысла. А если учесть, что строгий вывод матриц Дирака в настоящее время отсутствует, то получение такого вывода само по себе представляет интерес.

II. ТЕНЗОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И КОВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ

Назовем *контравариантными* векторы

$$S = e_K \cdot S^K ,$$

которыми представлена алгебра действия $\mathbb{S}$. Соответственно саму алгебру $\mathbb{S}$ мы будем называть *контравариантной*. Наряду с контравариантной алгеброй действия $\mathbb{S}$ мы будем рассматривать *ковариантную* алгебру действия, которую обозначим $\widetilde{\mathbb{S}}$. Ее векторы мы обозначим

$$\widetilde{S} = S_K \cdot E^K ,$$

где S_K – координаты ковариантного вектора, E^K – базисные векторы ковариантной алгебры действия. Связь между контра и ковариантными алгебрами действия установим с помощью следующих преобразований

$$S_I = \delta_{IK} \cdot S^K , \quad E^I = a^{IK} \cdot e_K ,$$

где δ_{IK} – символ Кронеккера, а a^{IK} – нетривиальный тензор, который назовем *тензором преобразования**. В Лекции 8 мы покажем, тензор преобразований есть метрический тензор в алгебре Клиффорда.

Матрицы Дирака мы свяжем с регулярным представлением ковариантной алгебры действия $\widetilde{\mathbb{S}}$.

III. РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ В КОВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЕ ДЕЙСТВИЯ

Зададим закон умножения базисных векторов в ковариантной алгебре действия $\widetilde{\mathbb{S}}$ следующим образом:

$$E^I \circ E^K = C^{IK}{}_L \cdot E^L , \tag{1}$$

где $C^{IK}{}_L$ есть структурные постоянные ковариантной алгебры действия $\widetilde{\mathbb{S}}$.

Как и прежде будем полагать, что алгебра $\widetilde{\mathbb{S}}$ является ассоциативной. То есть, произведение нескольких векторов не зависит от порядка умножения сомножителей. Это условие может быть сведено к условию ассоциативности

$$\widetilde{S}_1 \circ (\widetilde{S}_2 \circ \widetilde{S}_3) = (\widetilde{S}_1 \circ \widetilde{S}_2) \circ \widetilde{S}_3 .$$

Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов

$$E^I \circ (E^K \circ E^N) = (E^I \circ E^K) \circ E^N$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (1), получим

$$C^{KN}{}_L \cdot (E^I \circ E^L) = C^{IK}{}_L \cdot (E^L \circ E^N) .$$

Откуда

$$C^{KN}{}_L \cdot C^{IL}{}_M = C^{IK}{}_L \cdot C^{LN}{}_M . \tag{2}$$

Сравнивая это выражение с самим законом умножения базисных векторов (1), заключаем, что базисным векторам E^I можно поставить в соответствие структурные матрицы $C^{IL}{}_M$. При этом $\circ$-умножению базисных векторов ставится в соответствие обычное умножение матриц в обратном порядке. Это соответствие

---

*Тензор преобразования определен, если определены произведения базисных векторов в контра и ковариантной алгебрах.

составляет *регулярное (присоединенное) представление* алгебры $\widetilde{\mathbb{S}}$ и обозначается:

$$E^I \sim C^{IK}{}_L \,.$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. В регулярном представлении произвольному вектору алгебры $\widetilde{S} = S_I \, E^I$ соответствует матрица

$$S^K{}_L = S_I \cdot C^{IK}{}_L \,. \tag{3}$$

IV. КОВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ КАК АЛГЕБРА КЛИФФОРДА.

В соответствии с нашей программой также будем рассматривать ковариантную алгебру действия как алгебру Клиффорда. В этом случае ковариантную алгебру действия будем называть ковариантной алгеброй Клиффорда и обозначать $\widetilde{\mathbb{C}}$, а обозначение $\widetilde{\mathbb{S}}$ оставим для общего случая. Базисные векторы для ковариантной алгебры Клиффорда будем обозначать $\mathcal{E}^I$, оставляя обозначение E^I для общего случая.

Перепишем закон умножения базисных векторов (1) для принятых обозначений:

$$\mathcal{E}^I \circ \mathcal{E}^K = C^{IK}{}_L \, \mathcal{E}^L \,, \tag{4}$$

где $C^{IK}{}_L$ есть структурные постоянные* ковариантной алгебры действия $\widetilde{\mathbb{C}}$.

Итак в соответствии с принятой нами программой мы имеем алгебру Клиффорда, построенную на шестнадцати базисных векторах $\mathcal{E}^I$, где индекс I пробегает значения от 0 до 15. Укажем эти векторы и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\mathcal{E}_0$. Для него имеет место правило умножения

$$\mathcal{E}^0 \circ \mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0 \,.$$

- $\mathcal{E}^i$, где индекс i пробегает значения от 1 до 4. Эти векторы являются *образующими*. Для них имеют место правила умножения

$$\mathcal{E}^i \circ \mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0 \circ \mathcal{E}^i = \mathcal{E}^i \,.$$
$$\mathcal{E}^i \circ \mathcal{E}^i = \operatorname{sign} \mathcal{E}^i \,,$$

  где

$$\operatorname{sign} \mathcal{E}^1 = \operatorname{sign} \mathcal{E}^2 = \operatorname{sign} \mathcal{E}^3 = -\operatorname{sign} \mathcal{E}^4 = \mathcal{E}^0 \,.$$

- Векторы $\mathcal{E}^{ik} = \mathcal{E}^k \circ \mathcal{E}^i$, $(i \neq k)$, для которых выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – условие антикоммутативности произведения

$$\mathcal{E}^{ik} = -\mathcal{E}^{ki} \,.$$

  Остальные правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\mathcal{E}^{ik} \circ \mathcal{E}^{ik} = -\mathcal{E}^i \circ (\mathcal{E}^k \circ \mathcal{E}^k) \circ \mathcal{E}^i = -\operatorname{sign} \mathcal{E}^i \circ \operatorname{sign} \mathcal{E}^k \,.$$

- Векторы $\mathcal{E}^{ikl} = \mathcal{E}^i \circ \mathcal{E}^k \circ \mathcal{E}^l$, $(i \neq k \,, \, i \neq l \,, \, k \neq l)$, для которых выполняются следующие правила перестановки индексов, вытекающие из из условий ассоциативности и антикоммутативности

$$\mathcal{E}^{ikl} = \mathcal{E}^{kli} = \mathcal{E}^{lik} = -\mathcal{E}^{kil} = -\mathcal{E}^{ilk} = -\mathcal{E}^{lki} \,.$$

  Остальные правила умножения этих векторов также следуют из из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\mathcal{E}^{ikl} \circ \mathcal{E}^{ikl} = -\mathcal{E}^i \circ (\mathcal{E}^k \circ (\mathcal{E}^l \circ \mathcal{E}^l) \circ \mathcal{E}^k) \circ \mathcal{E}^i = \\ -\operatorname{sign} \mathcal{E}^i \circ \operatorname{sign} \mathcal{E}^k \circ \operatorname{sign} \mathcal{E}^l \,.$$

- Вектор $\mathcal{E}^{iklm} = \mathcal{E}^m \circ \mathcal{E}^l \circ \mathcal{E}^k \circ \mathcal{E}^i$., $(i \neq k \,, \, i \neq l \,, \, i \neq m \,, \, k \neq l \,, \, k \neq m \,, \, l \neq m)$. Для этого вектора выполняются следующие правила перестановки индексов, вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности

$$\mathcal{E}^{iklm} = \mathcal{E}^{ilmk} = \mathcal{E}^{imkl} = -\mathcal{E}^{ilkm} = \\ -\mathcal{E}^{ikml} = -\mathcal{E}^{imlk} = -\mathcal{E}^{klmi} = -\mathcal{E}^{kmil} = \\ -\mathcal{E}^{kilm} = \mathcal{E}^{kmli} = \mathcal{E}^{klim} = \mathcal{E}^{kiml} = \\ \mathcal{E}^{lmik} = \mathcal{E}^{likm} = \mathcal{E}^{lmki} = -\mathcal{E}^{limk} = \\ -\mathcal{E}^{lmki} = -\mathcal{E}^{lkim} = -\mathcal{E}^{mikl} = -\mathcal{E}^{mkli} = \\ -\mathcal{E}^{mlik} = \mathcal{E}^{mkil} = \mathcal{E}^{milk} = \mathcal{E}^{mlki} \,.$$

  Остальные правила умножения, в которых участвует этот вектор, также следуют из из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\mathcal{E}^{iklm} \circ \mathcal{E}^{iklm} = \\ \mathcal{E}^i \circ (\mathcal{E}^k \circ (\mathcal{E}^l \circ (\mathcal{E}^m \circ \mathcal{E}^m) \circ \mathcal{E}^l) \circ \mathcal{E}^k) \circ \mathcal{E}^i = \\ \operatorname{sign} \mathcal{E}^i \circ \operatorname{sign} \mathcal{E}^k \circ \operatorname{sign} \mathcal{E}^l \circ \operatorname{sign} \mathcal{E}^m \,.$$

В том случае, когда необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства алгебры Клиффорда, мы будем использовать обозначение $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ вместо обозначения $\widetilde{\mathbb{C}}$. Это особенно полезно при выделении подалгебры алгебры Клиффорда. Например, подалгебру с тремя образующими базисными векторами (например, $\mathcal{E}^1$, $\mathcal{E}^2$, $\mathcal{E}^3$), удобно обозначать $\widetilde{\mathbb{C}}_3$.

*Обозначение структурных постоянных оставим прежним.

В соответствии с нашим общим замыслом мы должны для указанных базисных векторов $\mathcal{E}^I$, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре Клиффорда, найти из (4) структурные матрицы ${C^{IK}}_L$ и сравнить их с матрицами Дирака.

V. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ КОВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.

Далее рассмотрим структурные матрицы, которыми представляются базисные векторы алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}$:

$$\mathcal{E}^I \sim {C^{IK}}_L \,.$$

Здесь номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который может быть представлен этой матрицей. Индекс K нумерует строки, а индекс L нумерует столбцы структурной матрицы.

1. Действительное представление ковариантной алгебры Клиффорда.

Из (4) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно установить номер структурной матрицы в соответствии с номером базисного вектора. Затем для вычисления элемента структурной матрицы с номером I, расположенного в строке с номером K и в столбце с номером L, необходимо базисный вектор, номер которого совпадает с номером *строки* матрицы, умножить *слева* на базисный вектор, номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер L указанного базисного вектора определит номер столбца, на пересечении которого с рассматриваемой строкой, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Теперь вычислим структурные матрицы ${C^{IK}}_L$ по приведенному алгоритму для двух случаев

1. подалгебра $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ с тремя образующими базисными векторами $\mathcal{E}^1$, $\mathcal{E}^2$, $\mathcal{E}^3$;

2. алгебра $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ с четырьмя образующими базисными векторами $\mathcal{E}^1$, $\mathcal{E}^2$, $\mathcal{E}^3$, $\mathcal{E}^4$.

Для подалгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов*:

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности

$$\begin{aligned}\tilde{S} = S_{32}\,\mathcal{E}^{32} + S_{13}\,\mathcal{E}^{13} + S_{21}\,\mathcal{E}^{21} + S_0\,\mathcal{E}^0 \\ + S_1\,\mathcal{E}^1 + S_2\,\mathcal{E}^2 + S_3\,\mathcal{E}^3 + S_{123}\,\mathcal{E}^{123}\,.\end{aligned} \tag{5}$$

В результате получим действительные матрицы 8×8 представления базисных векторов $\mathcal{E}^I$. (См. Раздел V 4).

Для алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов, обобщающего предыдущий порядок индексов,

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= S_{32}\mathcal{E}^{32} + S_{13}\mathcal{E}^{13} + S_{21}\mathcal{E}^{21} + S_0\mathcal{E}^0 \\ &+ S_{42}\mathcal{E}^{42} + S_{14}\mathcal{E}^{14} + S_{1324}\mathcal{E}^{1324} + S_{34}\mathcal{E}^{34} \\ &+ S_1\mathcal{E}^1 + S_2\mathcal{E}^2 + S_3\mathcal{E}^3 + S_{123}\mathcal{E}^{123} \\ &+ S_{134}\mathcal{E}^{134} + S_{234}\mathcal{E}^{234} + S_4\mathcal{E}^4 + S_{124}\mathcal{E}^{124}\,.\end{aligned}$$

В результате получим действительные матрицы 16×16 представления базисных векторов $\mathcal{E}^I$. (См. Раздел V 4).

Помимо действительного представления будем использовать *комплексное* и *кватернионное* представления базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

2. Комплексное представление ковариантной алгебры Клиффорда.

1. подалгебра $\widetilde{\mathbb{C}}_3$.

Остановимся на вопросе о представлении произведения алгебр Клиффорда. Алгебру Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}_n$ можно записать в виде произведения $\widetilde{\mathbb{C}}_m \times \widetilde{\mathbb{C}}_{(n-m)}$. И затем представить алгебру $\widetilde{\mathbb{C}}_n$ как алгебру $\widetilde{\mathbb{C}}_m$ над полем гиперчисел $\widetilde{\mathbb{C}}_{(n-m)}$. Например вектор $\tilde{S} = S_I\,\mathcal{E}^I$ алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{S} = \mathcal{E}^{13}\circ(S_{32}\mathcal{E}^{21} + S_{13}\mathcal{E}^0) + \mathcal{E}^0\circ(S_{21}\mathcal{E}^{21} + S_0\mathcal{E}^0) \\ + \mathcal{E}^2\circ(S_1\mathcal{E}^{21} + S_2\mathcal{E}^0) + \mathcal{E}^{123}\circ(S_3\mathcal{E}^{21} + S_{123}\mathcal{E}^0)\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Эта запись соответствует записи алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в виде произведения $\widetilde{\mathbb{C}}_2\times\widetilde{\mathbb{C}}_1$. Базисными векторами алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_2$ являются

$$\mathcal{E}^{13}\,,\quad \mathcal{E}^0\,,\quad \mathcal{E}^2\,,\quad \mathcal{E}^{123}\,;$$

---

*Приведенный порядок индексов оправдан тем, что для него структурные матрицы алгебры Клиффорда представлены матрицами Дирака (см. далее). С математической точки зрения порядок индексов несущественен вследствие аддитивности сложения компонент вектора, но с физической точки зрения указанному порядку индексов нужно придавать определенное значение.

базисными векторами алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_1$ являются

$$\mathcal{E}^{21}\,, \quad \mathcal{E}^{0}\,.$$

Пространство $\widetilde{\mathbb{C}}_1$ можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору $\mathcal{E}^{21}$ алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_1$ поставим в соответствие мнимую единицу i с обратным знаком*, имея в виду, что $\operatorname{sign}\mathcal{E}^{21}=-1$, а базисному вектору $\mathcal{E}^{0}$ алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_1$ поставим в соответствие действительную единицу. В результате получим вектор алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в комплексном представлении

$$\begin{aligned}\tilde{S}&=\mathcal{E}^{13}\circ(-S_{32}\,i+S_{13})+\mathcal{E}^{0}\circ(-S_{21}\,i+S_{0})\\&+\mathcal{E}^{2}\circ(-S_{1}\,i+S_{2})+\mathcal{E}^{123}\circ(-S_{3}\,i+S_{123})\,.\end{aligned}\qquad(7)$$

Комплексное представление дается матрицами 4×4, в которых блоки заменены базисными единицами 1 и i (см.Раздел V 4).

2. алгебра $\widetilde{\mathbb{C}}_4$.

Комплексное представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned}\tilde{S}&=\mathcal{E}^{13}\circ(S_{32}\mathcal{E}^{21}+S_{13}\mathcal{E}^{0})+\mathcal{E}^{0}\circ(S_{21}\mathcal{E}^{21}+S_{0}\mathcal{E}^{0})\\&+\mathcal{E}^{14}\circ(S_{42}\mathcal{E}^{21}+S_{14}\mathcal{E}^{0})+\mathcal{E}^{34}\circ(S_{1324}\mathcal{E}^{21}+S_{34}\mathcal{E}^{0})\\&+\mathcal{E}^{2}\circ(S_{1}\mathcal{E}^{21}+S_{2}\mathcal{E}^{0})+\mathcal{E}^{123}\circ(S_{3}\mathcal{E}^{21}+S_{123}\mathcal{E}^{0})\\&+\mathcal{E}^{234}\circ(S_{134}\mathcal{E}^{21}+S_{234}\mathcal{E}^{0})+\mathcal{E}^{124}\circ(S_{4}\mathcal{E}^{21}+S_{124}\mathcal{E}^{0})\,.\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ в виде произведения $\widetilde{\mathbb{C}}_3\times\widetilde{\mathbb{C}}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ являются

$$\mathcal{E}^{13}\,,\mathcal{E}^{0}\,,\mathcal{E}^{14}\,,\mathcal{E}^{34}\,,\mathcal{E}^{2}\,,\mathcal{E}^{123}\,,\mathcal{E}^{234}\,,\mathcal{E}^{124}\,;$$

базисными векторами алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_1$ являются

$$\mathcal{E}^{21}\,, \quad \mathcal{E}^{0}\,.$$

Заменяя базисный вектор $\mathcal{E}^{21}$ мнимой единицей с обратным знаком $(-i)$, а базисный вектор $\mathcal{E}^{0}$ действительной единицей, получим вектор алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ в комплексном представлении

$$\begin{aligned}\tilde{S}&=\mathcal{E}^{13}\circ(-S_{32}\,i+S_{13})+\mathcal{E}^{0}\circ(-S_{21}\,i+S_{0})\\&+\mathcal{E}^{14}\circ(-S_{42}\,i+S_{14})+\mathcal{E}^{34}\circ(-S_{1324}\,i+S_{34})\\&+\mathcal{E}^{2}\circ(-S_{1}\,i+S_{2})+\mathcal{E}^{123}\circ(-S_{3}\,i+S_{123})\\&+\mathcal{E}^{234}\circ(-S_{134}\,i+S_{234})+\mathcal{E}^{124}\circ(-S_{4}\,i+S_{124})\,.\end{aligned}$$

*Этот выбор найдет обоснование в разделе VIC.

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 8×8, в которых соответствующие блоки заменены базисными единицами 1 и i (см. Раздел V 4).

Сделаем замечание, на котором остановимся в дальнейшем. Отметим особенность базисного вектора $\mathcal{E}^{21}$. Он играет ключевую роль в организации комплексного представления. Именно этому вектору ставится в соответствие отрицательная мнимая единица. Имея в виду это соответствие, назовем базисный вектор $\mathcal{E}^{21}$ *основным.* Однако, с алгебраической точки зрения направления $\mathcal{E}^{13}$ и $\mathcal{E}^{32}$ эквивалентны направлению $\mathcal{E}^{21}$ и также могут быть приняты за основное. Для того, чтобы отличить эти случаи от предыдущего, будем обозначать мнимую единицу через j, если за основное направление принят вектор $\mathcal{E}^{13}$, и обозначать мнимую единицу через k, если за основное направление принят вектор $\mathcal{E}^{32}$.

3. Кватернионное представление ковариантной алгебры Клиффорда.

1. подалгебра $\widetilde{\mathbb{C}}_3$.

Кватернионное† представление базисных векторов основано на следующем разложении вектора

$$\begin{aligned}\tilde{S}&=(S_{32}\,\mathcal{E}^{32}+S_{13}\,\mathcal{E}^{13}+S_{21}\,\mathcal{E}^{21}+S_{0}\,\mathcal{E}^{0})\circ\mathcal{E}^{0}\\&+(S_{1}\,\mathcal{E}^{32}+S_{2}\,\mathcal{E}^{13}+S_{3}\,\mathcal{E}^{21}+S_{123}\,\mathcal{E}^{0})\circ\mathcal{E}^{123}\,.\end{aligned}\qquad(8)$$

Эта запись соответствует записи алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в виде произведения $\widetilde{\mathbb{C}}_1\times\widetilde{\mathbb{C}}_2$. Базисными векторами алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_1$ являются $\mathcal{E}^{0},\mathcal{E}^{123}$, базисными векторами алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_2$ являются $\mathcal{E}^{32},\mathcal{E}^{13},\mathcal{E}^{21},\mathcal{E}^{0}$.

Записи алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в виде произведения $\widetilde{\mathbb{C}}_1\times\widetilde{\mathbb{C}}_2$ соответствует представление базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в пространстве подалгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_1$ над полем гиперчисел, составляющих алгебру $\widetilde{\mathbb{C}}_2$.

†Напомним, что кватернионы это числа вида

$$\alpha_0\cdot q^0+\alpha_1\cdot q^1+\alpha_2\cdot q^2+\alpha_3\cdot q^3\,,$$

где α_0, α_1, α_2, α_3 – действительные числа, а q^0, q^1, q^2, q^3 – базисные кватернионы, для которых выполняются следующие правила умножения:

$$\begin{gathered}q^0\circ q^0=q^0\,,\qquad q^i\circ q^i=-q^0\,,\\q^0\circ q^i=q^i\circ q^0=q^i\,,\quad(i=1,2,3)\,,\\q^1\circ q^2=-q^2\circ q^1=q^3\,,\\q^2\circ q^3=-q^3\circ q^2=q^1\,,\\q^3\circ q^1=-q^1\circ q^3=q^2\,.\end{gathered}$$

Причем базисные гиперчисла изоморфны базисным векторам $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^{0}$, которые могут рассматриваться как кватернионы, так как

$$\operatorname{sign} \mathcal{E}^{32} = \operatorname{sign} \mathcal{E}^{13} = \operatorname{sign} \mathcal{E}^{21} = -1 \,, \operatorname{sign} \mathcal{E}^{0} = 1 \,.$$

Для базисных кватернионов используем соответственно следующие обозначения *

$$-i \cdot \sigma^1, \quad -i \cdot \sigma^2, \quad -i \cdot \sigma^3, \quad 1 \,.$$

Заменяя базисные векторы $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}$, $\mathcal{E}^{0}$ кватернионами, получим вектор алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в кватернионном представлении

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & (-S_{32} \cdot i\,\sigma^1 - S_{13} \cdot i\,\sigma^2 - S_{21} \cdot i\,\sigma^3 + S_0) \circ \mathcal{E}^0 \\ & +(-S_1 \cdot i\,\sigma^1 - S_2 \cdot i\,\sigma^2 - S_3 \cdot i\,\sigma^3 + S_{123}) \circ \mathcal{E}^{123} \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2, в которых соответствующие блоки заменены $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ (см. Раздел V 4).

2. алгебра $\widetilde{\mathbb{C}}_4$.

Кватернионное представление базисных векторов основано на разложении вектора

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & (S_{32}\,\mathcal{E}^{32} + S_{13}\,\mathcal{E}^{13} + S_{21}\,\mathcal{E}^{21} + S_0\,\mathcal{E}^{0}) \circ \mathcal{E}^0 \\ & + (S_{42}\,\mathcal{E}^{32} + S_{14}\,\mathcal{E}^{13} + S_{1324}\,\mathcal{E}^{21} + S_{34}\,\mathcal{E}^{0}) \circ \mathcal{E}^{34} \\ & + (S_{1}\,\mathcal{E}^{32} + S_{2}\,\mathcal{E}^{13} + S_{3}\,\mathcal{E}^{21} + S_{123}\,\mathcal{E}^{0}) \circ \mathcal{E}^{123} \\ & + (S_{134}\,\mathcal{E}^{32} + S_{234}\,\mathcal{E}^{13} + S_{4}\,\mathcal{E}^{21} + S_{124}\,\mathcal{E}^{0}) \circ \mathcal{E}^{124} \,. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ в виде произведения $\widetilde{\mathbb{C}}_2 \times \widetilde{\mathbb{C}}_2$. Базисными векторами одной алгебры $\mathbb{C}_2$ являются $\mathcal{E}^{0}$, $\mathcal{E}^{34}$, $\mathcal{E}^{123}$, $\mathcal{E}^{124}$; базисными векторами другой алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_2$ являются $\mathcal{E}^{32}$, $\mathcal{E}^{13}$, $\mathcal{E}^{21}$, $\mathcal{E}^{0}$. Как и прежде, заменяя базисные векторы $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}$, $(\mathcal{E}^{0})$ кватернионами, получим вектор алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ в кватернионном представлении

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & (-S_{32} \cdot i\,\sigma^1 - S_{13} \cdot i\,\sigma^2 - S_{21} \cdot i\,\sigma^3 + S_0) \circ \mathcal{E}^0 \\ & + (-S_{42} \cdot i\,\sigma^1 - S_{14} \cdot i\,\sigma^2 - S_{1324} \cdot i\,\sigma^3 + S_{34}) \circ \mathcal{E}^{34} \\ & + (-S_{1} \cdot i\,\sigma^1 - S_{2} \cdot i\,\sigma^2 - S_{3} \cdot i\,\sigma^3 + S_{123}) \circ \mathcal{E}^{123} \\ & + (-S_{134} \cdot i\,\sigma^1 - S_{234} \cdot i\,\sigma^2 - S_{4} \cdot i\,\sigma^3 + S_{124}) \circ \mathcal{E}^{124} \,. \end{aligned}$$

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4, в которых соответствующие блоки заменены $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ (см. Раздел V 4).

---

*Этот выбор найдет обоснование в разделе VIB.

4. Структурные матрицы ковариантной алгебры Клиффорда.

Приведем структурные матрицы алгебры Клиффорда, которые реализуют регулярное представление базисных векторов:

$$\mathcal{E}^I \sim C^{IK}{}_L \,.$$

При преобразовании матриц $C^{IK}{}_L$ от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \qquad i = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}\,,$$

что равносильно замене действительных матриц 2×2 вида

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline -b & a \\ \hline\end{array}$$

на комплексные числа.

При преобразовании матриц $C^{IK}{}_L$ от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathbb{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad \sigma^1 = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \quad \sigma^2 = \begin{array}{|c|c|}\hline & -i \\ \hline i & \\ \hline\end{array}\,, \quad \sigma^3 = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,.$$

Матрицы σ^1, σ^2, σ^3 представляют собой *матрицы Паули* (с той разницей, что по соображениям симметрии в качестве σ^3 взята матрица с противоположным знаком).

1. Подалгебра $\widetilde{\mathbb{C}}_3$

$$\mathcal{E}^0 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & 1 & & & & & & & \\ 13 & & 1 & & & & & & \\ 21 & & & 1 & & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & & \\ \hline 1 & & & & & 1 & & & \\ 2 & & & & & & 1 & & \\ 3 & & & & & & & 1 & \\ 123 & & & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} = \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline 1 & & & & 13 \\ & 1 & & & 0 \\ \hline & & 1 & & 2 \\ & & & 1 & 123 \\ \hline \end{array} = \mathit{1} \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline \mathbb{1} & & 0 \\ \hline & \mathbb{1} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^1 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & & & -1 \\ 13 & & & & & & & 1 & \\ 21 & & & & & & -1 & & \\ 0 & & & & & 1 & & & \\ \hline 1 & & & & 1 & & & & \\ 2 & & & -1 & & & & & \\ 3 & & 1 & & & & & & \\ 123 & -1 & & & & & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline & & & -1 & 13 \\ & & -1 & & 0 \\ \hline & 1 & & & 2 \\ 1 & & & & 123 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline & -\sigma^1 & 0 \\ \hline \sigma^1 & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^2 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & & -1 & \\ 13 & & & & & & & & -1 \\ 21 & & & & & 1 & & & \\ 0 & & & & & & 1 & & \\ \hline 1 & & & 1 & & & & & \\ 2 & & & & 1 & & & & \\ 3 & -1 & & & & & & & \\ 123 & & -1 & & & & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline & & & i & 13 \\ & & -i & & 0 \\ \hline & -i & & & 2 \\ i & & & & 123 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline & -\sigma^2 & 0 \\ \hline \sigma^2 & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{3} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&&& 1 \\ 13 &&&&& -1 \\ 21 &&&&&&&& -1 \\ 0 &&&&&&& 1 \\ \hline 1 && -1 \\ 2 & 1 \\ 3 &&&& 1 \\ 123 &&& -1 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline && 1 && 13 \\ &&& -1 & 0 \\ \hline -1 &&&& 2 \\ & 1 &&& 123 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|c} 0 & 123 & \\ \hline & -\sigma^{3} & 0 \\ \hline \sigma^{3} & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 && 1 \\ 13 & -1 \\ 21 &&&& -1 \\ 0 &&& 1 \\ \hline 1 &&&&&& 1 \\ 2 &&&&& -1 \\ 3 &&&&&&&& -1 \\ 123 &&&&&&& 1 \\ \hline \end{array} = (-i) \begin{array}{|cc|cc|c} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline -1 &&&& 13 \\ & 1 &&& 0 \\ \hline && -1 && 2 \\ &&& 1 & 123 \\ \hline \end{array} = (-i) \begin{array}{|c|c|c} 0 & 123 & \\ \hline \sigma^{3} & & 0 \\ \hline & \sigma^{3} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&& -1 \\ 13 &&&& -1 \\ 21 & 1 \\ 0 && 1 \\ \hline 1 &&&&&&& -1 \\ 2 &&&&&&&& -1 \\ 3 &&&&& 1 \\ 123 &&&&&& 1 \\ \hline \end{array} = (-i) \begin{array}{|cc|cc|c} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline & -i &&& 13 \\ i &&&& 0 \\ \hline &&& -i & 2 \\ && i && 123 \\ \hline \end{array} = (-i) \begin{array}{|c|c|c} 0 & 123 & \\ \hline \sigma^{2} & & 0 \\ \hline & \sigma^{2} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{32} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&& -1 \\ 13 &&& 1 \\ 21 && -1 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 &&&&&&&& -1 \\ 2 &&&&&&& 1 \\ 3 &&&&&& -1 \\ 123 &&&&& 1 \\ \hline \end{array} = (-i) \begin{array}{|cc|cc|c} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline & 1 &&& 13 \\ 1 &&&& 0 \\ \hline &&& 1 & 2 \\ && 1 && 123 \\ \hline \end{array} = (-i) \begin{array}{|c|c|c} 0 & 123 & \\ \hline \sigma^{1} & & 0 \\ \hline & \sigma^{1} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&& 1 \\ 13 &&&&&& 1 \\ 21 &&&&&&& 1 \\ 0 &&&&&&&& 1 \\ \hline 1 & -1 \\ 2 && -1 \\ 3 &&& -1 \\ 123 &&&& -1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline && 1 && 13 \\ &&& 1 & 0 \\ \hline -1 &&&& 2 \\ & -1 &&& 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|c} 0 & 123 & \\ \hline & \mathbb{1} & 0 \\ \hline -\mathbb{1} & & 123 \\ \hline \end{array}$$

2. Алгебра $\widetilde{\mathbb{C}}_4$

$$\mathcal{E}^{0} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc} & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline 32 & 1 \\ 13 && 1 \\ 21 &&& 1 \\ 0 &&&& 1 \\ \hline 42 &&&&& 1 \\ 14 &&&&&& 1 \\ 1324 &&&&&&& 1 \\ 34 &&&&&&&& 1 \\ \hline 1 &&&&&&&&& 1 \\ 2 &&&&&&&&&& 1 \\ 3 &&&&&&&&&&& 1 \\ 123 &&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline 134 &&&&&&&&&&&&& 1 \\ 234 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\ 4 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ 124 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline \end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|c} 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline 1 &&&&&&&& 13 \\ & 1 &&&&&&& 0 \\ && 1 &&&&&& 14 \\ &&& 1 &&&&& 34 \\ \hline &&&& 1 &&&& 2 \\ &&&&& 1 &&& 123 \\ &&&&&& 1 && 234 \\ &&&&&&& 1 & 124 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline \mathbb{1} &&&& 0 \\ & \mathbb{1} &&& 34 \\ \hline && \mathbb{1} && 123 \\ &&& \mathbb{1} & 124 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{1} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc} & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline 32 &&&&&&&&&&&& -1 \\ 13 &&&&&&&&&&& 1 \\ 21 &&&&&&&&&& -1 \\ 0 &&&&&&&&& 1 \\ \hline 42 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\ 14 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ 1324 &&&&&&&&&&&&&& -1 \\ 34 &&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline 1 &&&& 1 \\ 2 &&& -1 \\ 3 && 1 \\ 123 & -1 \\ \hline 134 &&&&&&&& 1 \\ 234 &&&&&&& -1 \\ 4 &&&&&& 1 \\ 124 &&&&& -1 \\ \hline \end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c} 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline &&&&& -1 &&& 13 \\ &&&& -1 &&&& 0 \\ &&&&&&& -1 & 14 \\ &&&&&& -1 && 34 \\ \hline & 1 &&&&&&& 2 \\ 1 &&&&&&&& 123 \\ &&& 1 &&&&& 234 \\ && 1 &&&&&& 124 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c} 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline && -\sigma^{1} && 0 \\ &&& -\sigma^{1} & 34 \\ \hline \sigma^{1} &&&& 123 \\ & \sigma^{1} &&& 124 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&& -1 &&&& & \\
13 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
21 &&&& &&&& & 1 &&&& &&& \\
0 &&&& &&&& && 1 &&&& && \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
14 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
1324 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
34 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\ \hline
1 &&& 1 & &&&& &&&& &&&& \\
2 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
3 & -1 &&& &&&& &&&& &&&& \\
123 && -1 && &&&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& &&& 1 & &&&& &&&& \\
234 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
4 &&&& & -1 &&& &&&& &&&& \\
124 &&&& && -1 && &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&& i &&& 13 \\
&&&& -i &&&& 0 \\
&&&&&&& i & 14 \\
&&&&&& -i && 34 \\ \hline
& -i &&&&&&& 2 \\
i &&&&&&&& 123 \\
&&& -i &&&&& 234 \\
&& i &&&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& -\sigma^2 && 0 \\
&&& -\sigma^2 & 34 \\ \hline
\sigma^2 &&&& 123 \\
& \sigma^2 &&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}^4 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\
13 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
21 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
0 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\ \hline
42 &&&& &&&& && -1 && &&&& \\
14 &&&& &&&& & 1 &&& &&&& \\
1324 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
34 &&&& &&&& &&& 1 & &&&& \\ \hline
1 &&&& && -1 && &&&& &&&& \\
2 &&&& & 1 &&& &&&& &&&& \\
3 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
123 &&&& &&& 1 & &&&& &&&& \\ \hline
134 && -1 && &&&& &&&& &&&& \\
234 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\
4 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
124 &&& 1 & &&&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= -i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&&& 1 && 13 \\
&&&&&&& 1 & 0 \\
&&&& 1 &&&& 14 \\
&&&&& 1 &&& 34 \\ \hline
&& 1 &&&&&& 2 \\
&&& 1 &&&&& 123 \\
1 &&&&&&&& 234 \\
& 1 &&&&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= -i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& \mathbb{1} & 0 \\
&& \mathbb{1} && 34 \\ \hline
& \mathbb{1} &&& 123 \\
\mathbb{1} &&&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}^3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& & 1 &&& &&&& \\
13 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
21 &&&& &&&& &&& -1 & &&&& \\
0 &&&& &&&& && 1 && &&&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& & 1 && \\
14 &&&& &&&& &&&& -1 &&& \\
1324 &&&& &&&& &&&& &&& -1 \\
34 &&&& &&&& &&&& && 1 & \\ \hline
1 & & -1 && &&&& &&&& &&&& \\
2 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\
3 &&& 1 & &&&& &&&& &&&& \\
123 && -1 && &&&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& & -1 && &&&& &&&& \\
234 &&&& 1 &&& &&&& &&&& \\
4 &&&& &&& 1 & &&&& &&&& \\
124 &&&& && -1 && &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& 1 &&&& 13 \\
&&&&& -1 &&& 0 \\
&&&&&& 1 && 14 \\
&&&&&&& -1 & 34 \\ \hline
-1 &&&&&&&& 2 \\
& 1 &&&&&&& 123 \\
&& -1 &&&&&& 234 \\
&&& 1 &&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& -\sigma^3 && 0 \\
&&& -\sigma^3 & 34 \\ \hline
\sigma^3 &&&& 123 \\
& \sigma^3 &&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}^{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 && 1 && &&&& &&&& &&&& \\
13 & -1 &&& &&&& &&&& &&&& \\
21 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
0 &&& 1 & &&&& &&&& &&&& \\ \hline
42 &&&& && 1 && &&&& &&&& \\
14 &&&& & -1 &&& &&&& &&&& \\
1324 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
34 &&&& &&& 1 & &&&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& && 1 && &&&& \\
2 &&&& &&&& & -1 &&& &&&& \\
3 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
123 &&&& &&&& &&& 1 & &&&& \\ \hline
134 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
234 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
4 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
124 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\ \hline
\end{array}$$

$$= -i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
-1 &&&&&&&& 13 \\
& 1 &&&&&&& 0 \\
&& -1 &&&&&& 14 \\
&&& 1 &&&&& 34 \\ \hline
&&&& -1 &&&& 2 \\
&&&&& 1 &&& 123 \\
&&&&&& -1 && 234 \\
&&&&&&& 1 & 124 \\ \hline
\end{array}
= -i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\sigma^3 &&&& 0 \\
& \sigma^3 &&& 34 \\ \hline
&& \sigma^3 && 123 \\
&&& \sigma^3 & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$
\mathcal{E}^{13} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&& -1 & &&&& &&&& &&&& \\
13 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
21 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\
0 && 1 && &&&& &&&& &&&& \\ \hline
42 &&&& &&& -1 & &&&& &&&& \\
14 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
1324 &&&& & 1 &&& &&&& &&&& \\
34 &&&& && 1 && &&&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &&& -1 & &&&& \\
2 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
3 &&&& &&&& & 1 &&& &&&& \\
123 &&&& &&&& && 1 && &&&& \\ \hline
134 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
234 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
4 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
124 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; -i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & -i & & & & & & & 13 \\
i & & & & & & & & 0 \\
 & & & -i & & & & & 14 \\
 & & i & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & -i & & & 2 \\
 & & & & i & & & & 123 \\
 & & & & & & & -i & 234 \\
 & & & & & & i & & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; -i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\sigma^2 & & & & 0 \\
 & \sigma^2 & & & 34 \\ \hline
 & & \sigma^2 & & 123 \\
 & & & \sigma^2 & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}^{14} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&& 1 & &&&& &&&& \\
13 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
21 &&&& & 1 &&& &&&& &&&& \\
0 &&&& && 1 && &&&& &&&& \\ \hline
42 &&& 1 & &&&& &&&& &&&& \\
14 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
1324 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\
34 && 1 && &&&& &&&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
2 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
3 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
123 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\ \hline
134 &&&& &&&& &&& -1 & &&&& \\
234 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
4 &&&& &&&& & -1 &&& &&&& \\
124 &&&& &&&& && -1 && &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; 1
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & 1 & & & & & 13 \\
 & & 1 & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & & & 14 \\
1 & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 2 \\
 & & & & & & -1 & & 123 \\
 & & & & & -1 & & & 234 \\
 & & & & -1 & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; 1
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & \sigma^1 & & & 0 \\
\sigma^1 & & & & 34 \\ \hline
 & & & -\sigma^1 & 123 \\
 & & -\sigma^1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}^{32} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
13 &&& 1 & &&&& &&&& &&&& \\
21 && -1 && &&&& &&&& &&&& \\
0 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\ \hline
42 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
14 &&&& &&& 1 & &&&& &&&& \\
1324 &&&& && -1 && &&&& &&&& \\
34 &&&& & 1 &&& &&&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
2 &&&& &&&& &&& 1 & &&&& \\
3 &&&& &&&& && -1 && &&&& \\
123 &&&& &&&& & 1 &&& &&&& \\ \hline
134 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
234 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
4 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\
124 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; -i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & 1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & 1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; -i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\sigma^1 & & & & 0 \\
 & \sigma^1 & & & 34 \\ \hline
 & & \sigma^1 & & 123 \\
 & & & \sigma^1 & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}^{42} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
13 &&&& &&& -1 & &&&& &&&& \\
21 &&&& && -1 && &&&& &&&& \\
0 &&&& & 1 &&& &&&& &&&& \\ \hline
42 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
14 &&& -1 & &&&& &&&& &&&& \\
1324 && -1 && &&&& &&&& &&&& \\
34 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
2 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
3 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
123 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\ \hline
134 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
234 &&&& &&&& &&& 1 & &&&& \\
4 &&&& &&&& && 1 && &&&& \\
124 &&&& &&&& & -1 &&& &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; 1
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & i & & & & & 13 \\
 & & -i & & & & & & 0 \\
 & i & & & & & & & 14 \\
-i & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & -i & 2 \\
 & & & & & & i & & 123 \\
 & & & & & -i & & & 234 \\
 & & & & i & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; 1
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -\sigma^2 & & & 0 \\
-\sigma^2 & & & & 34 \\ \hline
 & & & \sigma^2 & 123 \\
 & & \sigma^2 & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\mathcal{E}^{34} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&& -1 \\
13 &&&&&& -1 \\
21 &&&&&&& 1 \\
0 &&&&&&&& 1 \\ \hline
42 & -1 \\
14 && -1 \\
1324 &&& 1 \\
34 &&&& 1 \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&& 1 \\
2 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\
3 &&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
123 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
134 &&&&&&&&& 1 \\
234 &&&&&&&&&& 1 \\
4 &&&&&&&&&&& -1 \\
124 &&&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&& -1 \\
0 &&&& 1 \\
14 & -1 \\
34 && 1 \\ \hline
2 &&&&&&& 1 \\
123 &&&&&&&& -1 \\
234 &&&&& 1 \\
124 &&&&&& -1 \\ \hline
\end{array} = \mathit{1} \begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 && \sigma^3 \\
34 & \sigma^3 \\ \hline
123 &&&& -\sigma^3 \\
124 &&& -\sigma^3 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}^{124} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&& -1 \\
13 &&&&&&&&&&&&&& -1 \\
21 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
0 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
42 &&&&&&&&& -1 \\
14 &&&&&&&&&& -1 \\
1324 &&&&&&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
1 &&&&& -1 \\
2 &&&&&& -1 \\
3 &&&&&&& 1 \\
123 &&&&&&&& 1 \\ \hline
134 & -1 \\
234 && -1 \\
4 &&& 1 \\
124 &&&& 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&&& 1 \\
14 &&&&& -1 \\
34 &&&&&& 1 \\ \hline
2 &&& -1 \\
123 &&&& 1 \\
234 & -1 \\
124 && 1 \\ \hline
\end{array} = \mathit{1} \begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& \sigma^3 \\
34 &&& \sigma^3 \\ \hline
123 && \sigma^3 \\
124 & \sigma^3 \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}^{123} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&&&& 1 \\
21 &&&&&&&&&&& 1 \\
0 &&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&& 1 \\
14 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
1 & -1 \\
2 && -1 \\
3 &&& -1 \\
123 &&&& -1 \\ \hline
134 &&&&& -1 \\
234 &&&&&& -1 \\
4 &&&&&&& -1 \\
124 &&&&&&&& -1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&& 1 \\
0 &&&&&& 1 \\
14 &&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&&& 1 \\ \hline
2 & -1 \\
123 && -1 \\
234 &&& -1 \\
124 &&&& -1 \\ \hline
\end{array} = \mathit{1} \begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&& \mathbb{1} \\
34 &&&& \mathbb{1} \\ \hline
123 & -\mathbb{1} \\
124 && -\mathbb{1} \\ \hline
\end{array}$$

$$\mathcal{E}^{134} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
21 &&&&&&&&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&& 1 \\
14 &&&&&&&&&&& -1 \\
1324 &&&&&&&&&& -1 \\
34 &&&&&&&&& 1 \\ \hline
1 &&&&&&&& 1 \\
2 &&&&&&& -1 \\
3 &&&&&& -1 \\
123 &&&&& 1 \\ \hline
134 &&&& 1 \\
234 &&& -1 \\
4 && -1 \\
124 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&&& i \\
0 &&&&&&& -i \\
14 &&&&&& i \\
34 &&&&& -i \\ \hline
2 &&&& i \\
123 &&& -i \\
234 && i \\
124 & -i \\ \hline
\end{array} = (-\mathit{1}) \begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& \sigma^2 \\
34 &&& \sigma^2 \\ \hline
123 && \sigma^2 \\
124 & \sigma^2 \\ \hline
\end{array}$$

$$
\mathcal{E}^{234} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
\hline
32 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
13 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
21 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
0 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
\hline
42 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
14 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
1324 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
34 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
\hline
1 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
3 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
123 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
\hline
134 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
234 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
4 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
124 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\
\hline
13 & & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & 1 & \\
14 & & & & & & 1 & & \\
34 & & & & & 1 & & & \\
\hline
2 & & & & 1 & & & & \\
123 & & & 1 & & & & & \\
234 & & 1 & & & & & & \\
124 & 1 & & & & & & & \\
\hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
\hline
0 & & & & \sigma^1 \\
34 & & & \sigma^1 & \\
\hline
123 & & \sigma^1 & & \\
124 & \sigma^1 & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}^{1324} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
\hline
32 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
13 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
\hline
42 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
14 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & \\
34 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
1 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
\hline
134 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
234 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
124 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\
\hline
13 & & & -1 & & & & & \\
0 & & & & -1 & & & & \\
14 & -1 & & & & & & & \\
34 & & -1 & & & & & & \\
\hline
2 & & & & & & & 1 & \\
123 & & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & 1 & & & \\
124 & & & & & & 1 & & \\
\hline
\end{array}
= i
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
\hline
0 & & -\mathbb{1} & & \\
34 & -\mathbb{1} & & & \\
\hline
123 & & & & \mathbb{1} \\
124 & & & \mathbb{1} & \\
\hline
\end{array}
$$

VI. СЖАТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.

Итак, мы получили следующее. Структурные матрицы ковариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в комплексном представлении совпадают с 8 матрицами Дирака γ^0, γ^1, γ^2, γ^3, γ^{21}, γ^{13}, γ^{32}, γ^{123}. Кроме того, для алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ мы получили 16 структурных матриц, близких по духу к матрицам Дирака, но отличных от них прежде всего размерностью. Так в комплексном представлении это матрицы 8×8 Необходимо отметить, что получить все 16 матриц Дирака, используя наш подход, то есть исходя из регулярного представления базисных векторов алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}_4$, невозможно принципиально. Тем не менее, для того, чтобы понять место матриц Дирака в квантовой теории, исходя из нашего подхода, необходимо найти путь к их вычислению. Этот путь таков. Допустим, что имеет место вырождение компонент вектора действия. Иначе говоря, будем полагать, что часть компонент вектора действия не отличима от другой части компонент. Такое вырождение назовем *сжатием.*

Ему соответствует регулярное представление базисных векторов алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре $\widetilde{\mathbb{C}}_{n-k}$, где $k < n$. Такое представление будем называть *сжатым.* Далее оно будет использовано для вывода матриц Дирака и Паули. Матрицы представления в этом случае назовем *сжатыми.*

Для примера рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре $\widetilde{\mathbb{C}}_{n-1}$.

Разобьем базисные векторы $\mathcal{E}^I$ алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_n$ на две группы $\mathcal{E}^{I_1}$ и $\mathcal{E}^{I_2}$ с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы $\mathcal{E}^{I_1}$ образовывали алгебру $\widetilde{\mathbb{C}}_{n-1}$. В силу симметрий алгебры Клиффорда соотношения (4) принимают вид

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^{I_1} \circ \mathcal{E}^{K_1} &= C^{I_1 K_1}{}_{L_1} \cdot \mathcal{E}^{L_1}\,, && (10)\\
\mathcal{E}^{I_2} \circ \mathcal{E}^{K_1} &= C^{I_2 K_1}{}_{L_2} \cdot \mathcal{E}^{L_2}\,, && (11)\\
\mathcal{E}^{I_1} \circ \mathcal{E}^{K_2} &= C^{I_1 K_2}{}_{L_2} \cdot \mathcal{E}^{L_2}\,, \\
\mathcal{E}^{I_2} \circ \mathcal{E}^{K_2} &= C^{I_2 K_2}{}_{L_1} \cdot \mathcal{E}^{L_1}\,.
\end{aligned}
$$

Будем полагать, что приближенно при вычислении матриц представления базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_n$ в алгебре $\widetilde{\mathbb{C}}_{n-1}$ базисные векторы $\mathcal{E}^{L_2}$ в правой части уравнения (11) можно заменить на базисные векторы $\mathcal{E}^{L_1}$ с помощью соотношения

$$
\mathcal{E}^{L_2} = P^{L_2}{}_{L_1} \cdot \mathcal{E}^{L_1}\,, \qquad (12)
$$

где $P^{L_2}{}_{L_1}$ есть матрица соответствий. Тогда соотношение (11) принимает вид:

$$
\mathcal{E}^{I_2} \circ \mathcal{E}^{K_1} = C^{I_2 K_1}{}_{L_2} \cdot P^{L_2}{}_{L_1} \cdot \mathcal{E}^{L_1}\,. \qquad (13)
$$

Соотношения (10) и (13) позволяют получить матрицы представления базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре $\widetilde{\mathbb{C}}_{n-1}$, причем базисные векторы подалгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_{n-1}$ представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно.

Аналогичным образом можно рассмотреть сжатое представление базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_n$ в ее подалгебре $\widetilde{\mathbb{C}}_{n-k}$, где $k < n$.

1. Первое сжатое представление. Матрицы Дирака.

Рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ в ее подалгебре $\widetilde{\mathbb{C}}_3$, построенной на базисных векторах $\mathcal{E}^{32}$, $\mathcal{E}^{13}$, $\mathcal{E}^{21}$, $\mathcal{E}^{0}$, $\mathcal{E}^{1}$, $\mathcal{E}^{2}$, $\mathcal{E}^{3}$, $\mathcal{E}^{123}$. Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (13) соотношение (12) определяется тем, что базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ понижается вдвое и равна 8×8 в действительном представлении, 4×4 в комплексном представлении и 2×2 в кватернионном представлении. В результате будем иметь

$$\mathcal{E}^{0} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124} \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & 1 & & & & & & & \\ 13 & & 1 & & & & & & \\ 21 & & & 1 & & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & & \\ \hline 1 & & & & & 1 & & & \\ 2 & & & & & & 1 & & \\ 3 & & & & & & & 1 & \\ 123 & & & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{c|cc|cc|} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline 13 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \hline 2 & & & 1 & \\ 123 & & & & 1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{c|c|c|} & 0 & 123 \\ \hline 0 & \mathbb{1} & \\ \hline 123 & & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{1} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124} \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & & & -1 \\ 13 & & & & & & & 1 & \\ 21 & & & & & & -1 & & \\ 0 & & & & & 1 & & & \\ \hline 1 & & & & 1 & & & & \\ 2 & & & -1 & & & & & \\ 3 & & 1 & & & & & & \\ 123 & -1 & & & & & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{c|cc|cc|} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline 13 & & & & -1 \\ 0 & & & -1 & \\ \hline 2 & & 1 & & \\ 123 & 1 & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{c|c|c|} & 0 & 123 \\ \hline 0 & & -\sigma^1 \\ \hline 123 & \sigma^1 & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{2} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124} \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & & -1 & \\ 13 & & & & & & & & -1 \\ 21 & & & & & 1 & & & \\ 0 & & & & & & 1 & & \\ \hline 1 & & & 1 & & & & & \\ 2 & & & & 1 & & & & \\ 3 & -1 & & & & & & & \\ 123 & & -1 & & & & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{c|cc|cc|} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline 13 & & & & i \\ 0 & & & -i & \\ \hline 2 & & -i & & \\ 123 & i & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{c|c|c|} & 0 & 123 \\ \hline 0 & & -\sigma^2 \\ \hline 123 & \sigma^2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{3} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124} \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & 1 & & \\ 13 & & & & & -1 & & & \\ 21 & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & 1 & \\ \hline 1 & & -1 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & & & \\ 3 & & & & 1 & & & & \\ 123 & & & -1 & & & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{c|cc|cc|} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline 13 & & & 1 & \\ 0 & & & & -1 \\ \hline 2 & -1 & & & \\ 123 & & 1 & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{c|c|c|} & 0 & 123 \\ \hline 0 & & -\sigma^3 \\ \hline 123 & \sigma^3 & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{4} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124} \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & & & -1 & & \\ 13 & & & & & 1 & & & \\ 21 & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & 1 & \\ \hline 1 & & -1 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & & & \\ 3 & & & & -1 & & & & \\ 123 & & & 1 & & & & & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{c|cc|cc|} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline 13 & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \\ \hline 2 & 1 & & & \\ 123 & & 1 & & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{c|c|c|} & 0 & 123 \\ \hline 0 & & \mathbb{1} \\ \hline 123 & \mathbb{1} & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124} \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & 1 & & & & & & \\ 13 & -1 & & & & & & & \\ 21 & & & & -1 & & & & \\ 0 & & & 1 & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & 1 & & \\ 2 & & & & & -1 & & & \\ 3 & & & & & & & & -1 \\ 123 & & & & & & & 1 & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{c|cc|cc|} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline 13 & -1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \hline 2 & & & -1 & \\ 123 & & & & 1 \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{c|c|c|} & 0 & 123 \\ \hline 0 & \sigma^3 & \\ \hline 123 & & \sigma^3 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124} \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & -1 & & & & & \\ 13 & & & & -1 & & & & \\ 21 & 1 & & & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & -1 & \\ 2 & & & & & & & & -1 \\ 3 & & & & & 1 & & & \\ 123 & & & & & & 1 & & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{c|cc|cc|} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline 13 & & -i & & \\ 0 & i & & & \\ \hline 2 & & & & -i \\ 123 & & & i & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{c|c|c|} & 0 & 123 \\ \hline 0 & \sigma^2 & \\ \hline 123 & & \sigma^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{32} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124} \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & -1 & & & & \\ 13 & & & 1 & & & & & \\ 21 & & -1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & -1 \\ 2 & & & & & & & 1 & \\ 3 & & & & & & -1 & & \\ 123 & & & & & 1 & & & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{c|cc|cc|} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline 13 & & 1 & & \\ 0 & 1 & & & \\ \hline 2 & & & & 1 \\ 123 & & & 1 & \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{c|c|c|} & 0 & 123 \\ \hline 0 & \sigma^1 & \\ \hline 123 & & \sigma^1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{14} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124} \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & 1 & & & & & \\ 13 & & & & 1 & & & & \\ 21 & 1 & & & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & -1 & \\ 2 & & & & & & & & -1 \\ 3 & & & & & -1 & & & \\ 123 & & & & & & -1 & & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{c|cc|cc|} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline 13 & & 1 & & \\ 0 & 1 & & & \\ \hline 2 & & & & -1 \\ 123 & & & -1 & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{c|c|c|} & 0 & 123 \\ \hline 0 & \sigma^1 & \\ \hline 123 & & -\sigma^1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{42} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124} \\ & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & & & & 1 & & & & \\ 13 & & & -1 & & & & & \\ 21 & & -1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & -1 \\ 2 & & & & & & & 1 & \\ 3 & & & & & & 1 & & \\ 123 & & & & & -1 & & & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{c|cc|cc|} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline 13 & & i & & \\ 0 & -i & & & \\ \hline 2 & & & & -i \\ 123 & & & i & \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{c|c|c|} & 0 & 123 \\ \hline 0 & -\sigma^2 & \\ \hline 123 & & \sigma^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{34} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \substack{42\\32} & \substack{14\\13} & \substack{1324\\21} & \substack{34\\0} & \substack{134\\1} & \substack{234\\2} & \substack{4\\3} & \substack{124\\123} \\ \hline 32 & -1 &&&&&&& \\ 13 && -1 &&&&&& \\ 21 &&& 1 &&&&& \\ 0 &&&& 1 &&&& \\ \hline 1 &&&&& 1 &&& \\ 2 &&&&&& 1 && \\ 3 &&&&&&& -1 & \\ 123 &&&&&&&& -1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline -1 &&&& 13 \\ & 1 &&& 0 \\ \hline && 1 && 2 \\ &&& -1 & 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|c} 0 & 123 & \\ \hline \sigma^3 & & 0 \\ \hline & -\sigma^3 & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \substack{42\\32} & \substack{14\\13} & \substack{1324\\21} & \substack{34\\0} & \substack{134\\1} & \substack{234\\2} & \substack{4\\3} & \substack{124\\123} \\ \hline 32 &&&&& 1 &&& \\ 13 &&&&&& 1 && \\ 21 &&&&&&& 1 & \\ 0 &&&&&&&& 1 \\ \hline 1 & -1 &&&&&&& \\ 2 && -1 &&&&&& \\ 3 &&& -1 &&&&& \\ 123 &&&& -1 &&&& \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline && 1 && 13 \\ &&& 1 & 0 \\ \hline -1 &&&& 2 \\ & -1 &&& 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|c} 0 & 123 & \\ \hline & \mathbb{1} & 0 \\ \hline -\mathbb{1} & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{124} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \substack{42\\32} & \substack{14\\13} & \substack{1324\\21} & \substack{34\\0} & \substack{134\\1} & \substack{234\\2} & \substack{4\\3} & \substack{124\\123} \\ \hline 32 &&&&& -1 &&& \\ 13 &&&&&& -1 && \\ 21 &&&&&&& 1 & \\ 0 &&&&&&&& 1 \\ \hline 1 & -1 &&&&&&& \\ 2 && -1 &&&&&& \\ 3 &&& 1 &&&&& \\ 123 &&&& 1 &&&& \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline && -1 && 13 \\ &&& 1 & 0 \\ \hline -1 &&&& 2 \\ & 1 &&& 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|c} 0 & 123 & \\ \hline & \sigma^3 & 0 \\ \hline \sigma^3 & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{134} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \substack{42\\32} & \substack{14\\13} & \substack{1324\\21} & \substack{34\\0} & \substack{134\\1} & \substack{234\\2} & \substack{4\\3} & \substack{124\\123} \\ \hline 32 &&&&&&&& 1 \\ 13 &&&&&&& -1 & \\ 21 &&&&&& -1 && \\ 0 &&&&& 1 &&& \\ \hline 1 &&&& 1 &&&& \\ 2 &&& -1 &&&&& \\ 3 && -1 &&&&&& \\ 123 & 1 &&&&&&& \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &&& i & 13 \\ && -i && 0 \\ \hline & i &&& 2 \\ -i &&&& 123 \\ \hline \end{array} = (-1) \begin{array}{|c|c|c} 0 & 123 & \\ \hline & \sigma^2 & 0 \\ \hline \sigma^2 & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{234} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \substack{42\\32} & \substack{14\\13} & \substack{1324\\21} & \substack{34\\0} & \substack{134\\1} & \substack{234\\2} & \substack{4\\3} & \substack{124\\123} \\ \hline 32 &&&&&&& 1 & \\ 13 &&&&&&&& 1 \\ 21 &&&&& 1 &&& \\ 0 &&&&&& 1 && \\ \hline 1 &&& 1 &&&&& \\ 2 &&&& 1 &&&& \\ 3 & 1 &&&&&&& \\ 123 && 1 &&&&&& \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &&& 1 & 13 \\ && 1 && 0 \\ \hline & 1 &&& 2 \\ 1 &&&& 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|c} 0 & 123 & \\ \hline & \sigma^1 & 0 \\ \hline \sigma^1 & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}^{1324} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & \substack{42\\32} & \substack{14\\13} & \substack{1324\\21} & \substack{34\\0} & \substack{134\\1} & \substack{234\\2} & \substack{4\\3} & \substack{124\\123} \\ \hline 32 && -1 &&&&&& \\ 13 & 1 &&&&&&& \\ 21 &&&& -1 &&&& \\ 0 &&& 1 &&&&& \\ \hline 1 &&&&&& 1 && \\ 2 &&&&& -1 &&& \\ 3 &&&&&&&& 1 \\ 123 &&&&&&& -1 & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline -1 &&&& 13 \\ & -1 &&& 0 \\ \hline && 1 && 2 \\ &&& 1 & 123 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|c} 0 & 123 & \\ \hline -\mathbb{1} & & 0 \\ \hline & \mathbb{1} & 123 \\ \hline \end{array}$$

Эти матрицы и есть матрицы Дирака, приведенные в разделе 1V Лекции 2.

Таким образом, мы вычислили матрицы Дирака и установили, что они есть структурные матрицы алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ для сжатого представления этой алгебры в алгебре $\widetilde{\mathbb{C}}_3$. Такое представление будем называть *первым сжатым* и обозначать

$$R_1 : \widetilde{\mathbb{C}}_4 \to \widetilde{\mathbb{C}}_3 \,\{\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^{0}, \mathcal{E}^{1}, \mathcal{E}^{2}, \mathcal{E}^{3}, \mathcal{E}^{123}\}.$$

2. Второе сжатое представление. Матрицы Паули.

Рассмотрим сжатое представление

$$R_2 : \widetilde{\mathbb{C}}_4 \to \widetilde{\mathbb{C}}_2 \,\{\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^{0}\}.$$

которое будем называть *вторым сжатым* представлением. Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (13) соотношение (12) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14, 1324, 34)$, $(134, 234, 4, 124)$ и $(1, 2, 3, 123)$ заменяются на базисные векторы с индексами $(32, 13, 21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц представления базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна 4×4 в действительном представлении, 2×2 в комплексном представлении и 1×1 в кватернионном представлении.

Ограничимся тем, что приведем матрицы регулярного представления образующих базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ в алгебре $\widetilde{\mathbb{C}}_2$. Имеем

$$\mathcal{E}^{1} \sim \begin{array}{c|cc|cc|} & \substack{1\\32} & \substack{2\\13} & \substack{3\\21} & \substack{123\\0} \\ \hline 32 &&&& -1 \\ 13 &&& 1 & \\ \hline 21 && -1 && \\ 0 & 1 &&& \\ \hline \end{array} = (-i) \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} = (-i)\,\sigma^1$$

$$\mathcal{E}^{2} \sim \begin{array}{c|cc|cc|} & \substack{1\\32} & \substack{2\\13} & \substack{3\\21} & \substack{123\\0} \\ \hline 32 &&& -1 & \\ 13 &&&& -1 \\ \hline 21 & 1 &&& \\ 0 && 1 && \\ \hline \end{array} = (-i) \begin{array}{|c|c|} \hline & -i \\ \hline i & \\ \hline \end{array} = (-i)\,\sigma^2$$

$$\mathcal{E}^{3} \sim \begin{array}{c|cc|cc|} & \substack{1\\32} & \substack{2\\13} & \substack{3\\21} & \substack{123\\0} \\ \hline 32 && 1 && \\ 13 & -1 &&& \\ \hline 21 &&&& -1 \\ 0 &&& 1 & \\ \hline \end{array} = (-i) \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = (-i)\,\sigma^3$$

$$\mathcal{E}^{4} \sim \begin{array}{c|cc|cc|} & \substack{134\\32} & \substack{234\\13} & \substack{4\\21} & \substack{124\\0} \\ \hline 32 && -1 && \\ 13 & 1 &&& \\ \hline 21 &&&& -1 \\ 0 &&& 1 & \\ \hline \end{array} = (-i) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = (-i)\,\mathbb{1}$$

Таким образом, базисные векторы $\mathcal{E}^1$, $\mathcal{E}^2$, $\mathcal{E}^3$, представлены в алгебре $\widetilde{\mathbb{C}}_2$ матрицами Паули. В результате для базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ получим

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{E}^{32} \sim -i\,\sigma^1\,, & \mathcal{E}^{42} \sim -1\,\sigma^2\,, \\
\mathcal{E}^{13} \sim -i\,\sigma^2\,, & \mathcal{E}^{14} \sim 1\,\sigma^1\,, \\
\mathcal{E}^{21} \sim -i\,\sigma^3\,, & \mathcal{E}^{1324} \sim -i\,\mathbb{1}\,, \\
\mathcal{E}^{0} \sim 1\,\mathbb{1}\,, & \mathcal{E}^{34} \sim 1\,\sigma^3\,,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{E}^{1} \sim -i\,\sigma^1\,, & \mathcal{E}^{134} \sim -1\,\sigma^2\,, \\
\mathcal{E}^{2} \sim -i\,\sigma^2\,, & \mathcal{E}^{234} \sim 1\,\sigma^1\,, \\
\mathcal{E}^{3} \sim -i\,\sigma^3\,, & \mathcal{E}^{4} \sim -i\,\mathbb{1}\,, \\
\mathcal{E}^{123} \sim 1\,\mathbb{1}\,, & \mathcal{E}^{124} \sim 1\,\sigma_3\,.
\end{array}$$

В рассматриваемом представлении только базисные векторы $\mathcal{E}^{32}$, $\mathcal{E}^{13}$, $\mathcal{E}^{21}$, $\mathcal{E}^{0}$ представлены точно. Соотношения

$$\begin{array}{l}
\mathcal{E}^{32} \sim -i\,\sigma^1\,, \\
\mathcal{E}^{13} \sim -i\,\sigma^2\,, \\
\mathcal{E}^{21} \sim -i\,\sigma^3\,, \\
\mathcal{E}^{0} \sim 1\,\mathbb{1}
\end{array}$$

можно рассматривать как соответствие между указанными базисными векторами и кватернионами. Именно такое соответствие было постулировано в разделе VC.

3. Третье сжатое представление.

Рассмотрим сжатое представление

$$R_3 : \widetilde{\mathbb{C}}_4 \to \widetilde{\mathbb{C}}_1\,\{\mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^{0}\}$$

которое будем называть *третьим сжатым* представлением. Для этого положим, что соотношение (12) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42,14)$, $(1324,34)$, $(134,234)$, $(4,124)$, $(1,2)$, $(3,123)$, $(32,13)$ заменяются на векторы с индексами $(21,0)$ соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна 2×2 в действительном представлении, 1×1 в комплексном представлении. В результате для базисных векторов алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ получим

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{E}^{32} \sim -i\,, & \mathcal{E}^{1} \sim -i\,, & \mathcal{E}^{42} \sim -i\,, & \mathcal{E}^{134} \sim -i\,, \\
\mathcal{E}^{13} \sim 1\,, & \mathcal{E}^{2} \sim 1\,, & \mathcal{E}^{14} \sim 1\,, & \mathcal{E}^{234} \sim 1\,, \\
\mathcal{E}^{21} \sim -i\,, & \mathcal{E}^{3} \sim -i\,, & \mathcal{E}^{1324} \sim -i\,, & \mathcal{E}^{4} \sim -i\,, \\
\mathcal{E}^{0} \sim 1\,, & \mathcal{E}^{123} \sim 1\,, & \mathcal{E}^{34} \sim 1\,, & \mathcal{E}^{124} \sim 1
\end{array}$$

В рассматриваемом представлении вектор $\mathcal{E}^{21}$ и только он представляется точно мнимой единицей. В этом и заключается смысл мнимой единицы, вводимой в квантовой механике Шредингера.

Полученное здесь соотношение

$$\mathcal{E}^{21} \sim -i$$

подтверждает соответствие, постулированное в разделе VB.

VII. ВЫВОДЫ

- 8 структурных матриц ковариантной алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ в комплексном представлении совпадают с 8 матрицами Дирака γ^0, γ^1, γ^2, γ^3, γ^{21}, γ^{13}, γ^{32}, γ^{123}.

- К мнимой единице, комплексным числам мы приходим, вводя блочные матрицы

$$1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \qquad i = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}\,.$$

  Таким образом, загадочная роль мнимой единицы, комплексных величин и пространства Гильберта в квантовой механике объясняется правилами умножения базисных векторов в алгебре действия.

- 16 структурных матриц ковариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ обобщают 16 матриц Дирака, отличаясь от них прежде всего размерностью. Так в комплексном представлении это матрицы 8×8, в то время как матрицы Дирака имеют размерность 4×4.

- Если предположить вырождение части компонент вектора ковариантной алгебры действия $\widetilde{\mathbb{C}}_4$, то структурные матрицы алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ сводятся к полному набору матриц Дирака.

- Усиление вырождения компонент вектора сначала приводит к структурным матрицам в виде матриц Паули, а затем к действительной и мнимой единицам.