Лекция 29. Преобразования динамических переменных. Уравнения динамики

А. А. Кецарис*
(5 декабря 2012)

В этой Лекции рассматривается вывод уравнений динамики с учетом калибровочного поля. Уравнения выводятся исходя из обобщенного метода канонических преобразований. При этом используются перестановочные соотношения операторов дифференцирования, являющиеся следствием алгебраической структуры кинематического пространства.

I. ВВЕДЕНИЕ

Далее рассмотрим вывод уравнений динамики в общем случае. Основой для такого вывода являются обобщенные канонические преобразования динамических переменных. Предварительно напомним как в классической механике на основании канонических преобразований выводятся уравнения динамики.

В классической механике действие S является функцией времени t и геометрических координат x^a

$$S(t,\, x)\,.$$

Кроме действия к динамическим переменным относятся

$$\text{импульс} - p_a(t,\, x) = \frac{\partial S(t,\, x)}{\partial x^a} \quad \text{и}$$

$$\text{функция Гамильтона} - H(t,\, x) = -\frac{\partial S(t,\, x)}{\partial t}\,.$$

Преобразование функции Гамильтона, так называемое *каноническое* преобразование[1], задается следующим образом

$$H'(t,\, x) = \mathcal{H}(t,\, x,\, p(t,\, x),\, H(t,\, x))\,.$$

Из закона сохранения энергии вытекает, что каноническое преобразование должно удовлетворять условию[2]

$$\frac{\partial H'(t,\, x)}{\partial x^a} = 0\,.$$

Или

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t,\, x,\, p,\, H)}{\partial x^a} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_b}\frac{\partial p_b(t,\, x)}{\partial x^a} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H}\frac{\partial H(t,\, x)}{\partial x^a} = 0\,.$$

Преобразуем это выражение, выполнив следующие перестановки дифференциальных операторов

$$\frac{\partial p_b(t,\, x)}{\partial x^a} = \frac{\partial^2 S(t,\, x)}{\partial x^a \partial x^b} = \frac{\partial^2 S(t,\, x)}{\partial x^b \partial x^a} = \frac{\partial p_a(t,\, x)}{\partial x^b}$$

и

$$\frac{\partial H(t,\, x)}{\partial x^a} = -\frac{\partial^2 S(t,\, x)}{\partial x^a \partial t} = -\frac{\partial^2 S(t,\, x)}{\partial t \partial x^a} = -\frac{\partial p_a(t,\, x)}{\partial t}\,.$$

Получим

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t,\, x,\, p,\, H)}{\partial x^a} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_b}\frac{\partial p_a(t,\, x)}{\partial x^b} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H}\frac{\partial p_a(t,\, x)}{\partial t} = 0\,.$$

Положим, что это выражение есть не что иное, как следующее тождество

$$-\frac{dp_a(t,\, x(t))}{dt} + \frac{\partial p_a(t,\, x)}{\partial t} + \frac{\partial p_a(t,\, x)}{\partial x^b}\frac{dx^b(t)}{dt} = 0\,.$$

Это возможно, если выполняются следующие уравнения

$$\frac{dp_a(t,\, x(t))}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(t,\, x,\, p,\, H)}{\partial x^a}\,,$$

$$\frac{dx^b(t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}(t,\, x,\, p,\, H)}{\partial p_b}\,,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t,\, x,\, p,\, H)}{\partial H} = -1\,.$$

Эти уравнения составляют *канонические* уравнения классической механики или уравнения Гамильтона.

Наше обобщение метода канонических преобразований, используемого в классической механике, состоит прежде всего в том, что перестановка дифференциальных операторов, с которой приходится иметь дело при выводе уравнений динамики, является нетривиальной. Перестановочные соотношения, полученные в Лекции 28, позволяют записать правую часть в уравнениях динамики.

II. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим действие как функцию кинематических переменных

$$S(x_0, l_0, a_0)\,.$$

* ketsaris@mail.ru; http://toe-physics.org

[1] Название *каноническое* используется потому, что это преобразование приводит к каноническим уравнениям классической механики.

[2] Действительно, в этом случае

$$\frac{dH'(t,\, x(t))}{dt} = \frac{\partial H'(t,\, x)}{\partial t}$$

и для функции Гамильтона, не зависящей от времени, имеет место закон сохранения энергии

$$\frac{dH'(x(t))}{dt} = 0\,.$$

Обозначим преобразованное действие следующим образом

$$S'(x,l,a)\,.$$

Преобразование

$$S(x_0,l_0,a_0) \to S'(x,l,a)$$

представим в виде последовательности преобразований:

$$S(x_0,l_0,a_0) \overset{1}{\to} S(x,l,a) \overset{2}{\rightsquigarrow} S'(x,l,a)\,,$$

где обозначение $\overset{1}{\to}$ отражает преобразование аргумента, а $\overset{2}{\rightsquigarrow}$ – преобразование функции. Иначе говоря $\overset{1}{\to}$ есть преобразование кинематических переменных, а $\overset{2}{\rightsquigarrow}$ – преобразование динамической переменной – действия – S.

Преобразование действия зададим в виде:

$$S'(x,l,a) = \mathcal{S}(x,l,a,S(x,l,a))$$

с начальными условиями

$$S'(x,1,0) = \mathcal{S}(x,1,0,S(x,1,0)) = S(x,1,0)\,.$$

Аналогичным образом введем преобразования других динамических переменных – импульса, момента и второго момента

$$\begin{aligned} p(x,l,a) &= P(S) = \frac{\partial S(x,l,a)}{Dx} \\ m(x,l,a) &= M(S) = \frac{\partial S(x,l,a)}{Dl} \\ w(x,l,a) &= W(S) = \frac{\partial S(x,l,a)}{Da} \end{aligned}$$

Эти преобразования зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} p'(z) &= \mathcal{P}(z,S(z),p(z),m(z),w(z)) \\ m'(z) &= \mathcal{M}(z,S(z),p(z),m(z),w(z)) \\ w'(z) &= \mathcal{W}(z,S(z),p(z),m(z),w(z))\,, \end{aligned}$$

где кинематические переменные (x,l,a) обозначены символом z. К преобразованиям динамических переменных необходимо добавить преобразования кинематических переменных: $z = \mathcal{Z}(z_0)$. Или в развернутом виде

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{X}(x_0,l_0,a_0) \\ l &= \mathcal{L}(x_0,l_0,a_0) \\ a &= \mathcal{A}(x_0,l_0,a_0)\,. \end{aligned}$$

Назовем случай, когда $z=(x)$, *первым приближением*. В этом случае преобразования таковы:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \mathcal{S}(x,S(x)) \\ p'(x) &= \mathcal{P}(x,S(x),p(x)) \\ x(x_0) &= \mathcal{X}(x_0)\,. \end{aligned}$$

Назовем случай, когда $z=(x,l)$, *вторым приближением*. В этом случае преобразования таковы:

$$\begin{aligned} S'(x,l) &= \mathcal{S}(x,l,S(x,l)) \\ p'(x,l) &= \mathcal{P}(x,l,S(x,l),p(x,l),m(x,l)) \\ m'(x,l) &= \mathcal{M}(x,l,S(x,l),p(x,l),m(x,l)) \\ x &= \mathcal{X}(x_0,l_0) \\ l' &= \mathcal{L}(x_0,l_0)\,. \end{aligned}$$

И, наконец, общий случай, когда $z=(x,l,a)$, назовем *третьим приближением*.

III. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

1. Первое приближение

Потребуем, чтобы преобразования ${p'}^N{}_K(x) = \mathcal{P}^N{}_K(x,S(x),p(x))$ удовлетворяли условию

$$\frac{D{p'}^K{}_K(x)}{Dx^I} = 0\,.$$

Выведем отсюда уравнения динамики для первого приближения. Таким образом, исходим из

$$\frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,S,p)}{Dx^I} + \frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,S,p)}{\partial S^N}\cdot p^N{}_I + \frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{\partial p^K{}_L}\cdot\frac{\partial p^K{}_L(x)}{Dx^I} = 0\,.$$

Учтем, что

$$\frac{\partial p^K{}_L(x)}{Dx^I} = \frac{\partial p^K{}_I(x)}{Dx^L} + [P_I, P_L]S^K\,.$$

Получим

$$\frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,S,p)}{Dx^I} + \frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,S,p)}{\partial S^N}\cdot p^N{}_I + \frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{\partial p^K{}_L}\cdot [P_I,P_L]S^K + \frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{\partial p^K{}_L}\cdot\frac{\partial p^K{}_I(x)}{Dx^L} = 0\,.$$

Рассматривая это условие как следующее тождество

$$-\frac{\partial p^K{}_I(x_0)}{\partial x_0{}^K} + \frac{\partial p^K{}_I(x)}{Dx^L}\cdot\frac{Dx^L(x_0)}{\partial x_0{}^K} = 0\,,$$

получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p^K{}_I(x_0)}{\partial x_0{}^K} = -\left(\frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{Dx^I} + \frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{\partial S^N}\cdot p^N{}_I + \frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{\partial p^K{}_L}\cdot [P_I,P_L]S^K\right),\\
&\frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{\partial p^K{}_L} = \frac{Dx^L(x_0)}{\partial x_0{}^K}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Подставляя второе соотношение в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p^K{}_I(x_0)}{\partial x_0{}^K} = -\left(\frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{Dx^I} + \frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{\partial S^N}\cdot p^N{}_I + \frac{Dx^L(x_0)}{\partial x_0{}^K}\cdot [P_I,P_L]S^K\right), \tag{2}$$

которое назовем *первым уравнением динамики первого уровня для первого приближения*. Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений рассмотрено в разделе IV.1.

2. Второе приближение

Потребуем, чтобы преобразования

$$\begin{aligned}
p'(x,l) &= \mathcal{P}(x,l,S(x,l),p(x,l),m(x,l))\\
m'(x,l) &= \mathcal{M}(x,l,S(x,l),p(x,l),m(x,l))
\end{aligned}$$

удовлетворяли условиям

$$\frac{Dp'(x,l)}{Dx} = 0\,,\qquad \frac{Dp'(x,l)}{Dl} = 0\,,\qquad \frac{Dm'(x,l)}{Dx} = 0\,,\qquad \frac{Dm'(x,l)}{Dl} = 0\,.$$

Выведем отсюда уравнения динамики для второго приближения. Таким образом, исходим из

$$\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{Dx} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot p + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l)}{Dx} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l)}{Dx} = 0\,, \tag{3}$$

$$\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{Dl} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot m + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l)}{Dl} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l)}{Dl} = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{Dx} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot p + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l)}{Dx} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l)}{Dx} = 0\,, \tag{5}$$

$$\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{Dl} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot m + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l)}{Dl} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l)}{Dl} = 0\,. \tag{6}$$

Если в (3) и (5) учесть, что

$$\frac{\partial p(x,l)}{Dx} = \frac{\partial\partial S(x,l)}{DxDx} = \frac{\partial\partial S(x,l)}{DxDx} + [P,P]S = \frac{\partial p(x,l)}{Dx} + [P,P]S\,,$$
$$\frac{\partial m(x,l)}{Dx} = \frac{\partial\partial S(x,l)}{DxDl} = \frac{\partial\partial S(x,l)}{DlDx} + [P,M]S = \frac{\partial p(x,l)}{Dl} + [P,M]S\,,$$

а в (4) и (6) учесть, что

$$\frac{\partial p(x,l)}{Dl} = \frac{\partial\partial S(x,l)}{DlDx} = \frac{\partial\partial S(x,l)}{DxDl} + [M,P]S = \frac{\partial m(x,l)}{Dx} + [M,P]S\,,$$
$$\frac{\partial m(x,l)}{Dl} = \frac{\partial\partial S(x,l)}{DlDl} = \frac{\partial\partial S(x,l)}{DlDl} + [M,M]S = \frac{\partial m(x,l)}{Dl} + [M,M]S\,,$$

то получим

$$\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{Dx} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot p + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l)}{Dx} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{p}\cdot[P,P]S + {} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot\frac{\partial p(x,l)}{Dl} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot[P,M]S = 0\,, \tag{7}$$

$$\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{Dl} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial s}\cdot m + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot\frac{\partial m(x,l)}{Dx} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot[M,P]S + {} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l)}{Dl} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot[M,M]S = 0\,, \tag{8}$$

$$\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{Dx} + \frac{\delta\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\delta\partial S}\cdot p + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l)}{Dx} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot[P,P]S + {} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot\frac{\partial p(x,l)}{Dl} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot[P,M]S = 0\,, \tag{9}$$

$$\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{Dl} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot m + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot\frac{\partial m(x,l)}{Dx} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot[M,P]S + {} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l)}{Dl} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot[M,M]S = 0\,. \tag{10}$$

1. *Уравнения динамики первого уровня*

К уравнениям динамики первого уровня отнесены уравнения, которые являются следствием условий

$$\frac{Dp'(x,l)}{Dx} = 0\,, \qquad \frac{Dp'(x,l)}{Dl} = 0\,.$$

Рассматривая (7) как следующее тождество

$$-\frac{\partial p(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0} + \frac{\partial p(x,l)}{Dx}\cdot\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial p(x,l)}{Dl}\cdot\frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} = 0\,,$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial p(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0} = -\left(\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{Dx} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot p + {} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot[P,P]S + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot[P,M]S\right) \tag{11}$$
$$\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial p} = \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\,,$$
$$\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial m} = \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\,.$$

Подставляя два последних соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0} = -\left(\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{Dx} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot p + \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\cdot[P,P]S + \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\cdot[P,M]S\right). \qquad (12)$$

которое назовем *первым уравнением динамики первого уровня во втором приближении.* Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений рассмотрено в разделе IV.3.2.1.

Рассматривая (8) как следующее тождество

$$-\frac{\partial m(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0} + \frac{\partial m(x,l)}{Dx}\cdot\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial m(x,l)}{Dl}\cdot\frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} = 0\,,$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial m(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0} &= -\left(\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{Dl} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot m + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot[M,P]S + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot[M,M]S\right) \qquad (13)\\ \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial p} &= \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\,,\\ \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial m} &= \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\,.\end{aligned}$$

Подставляя два последних соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial m(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0} = -\left(\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{Dl} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot m + \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\cdot[M,P]S + \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\cdot[M,M]S\right), \qquad (14)$$

которое назовем *вторым уравнением динамики первого уровня во втором приближении.* Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений рассмотрено в разделе IV.3.2.2.

2. *Уравнения динамики второго уровня*

К уравнениям динамики второго уровня отнесены уравнения, которые являются следствием условий

$$\frac{Dm'(x,l)}{Dx} = 0\,, \qquad \frac{Dm'(x,l)}{Dl} = 0\,.$$

Рассматривая (9) как следующее тождество

$$-\frac{\partial p(x(l_0),l(l_0))}{\partial l_0} + \frac{\partial p(x,l)}{Dx}\cdot\frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial p(x,l)}{Dl}\cdot\frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} = 0\,,$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x(l_0),l(l_0))}{\partial l_0} &= -\left(\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{Dx} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot p + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot[P,P]S + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot[P,M]S\right) \qquad (15)\\ \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial p} &= \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\,,\\ \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial m} &= \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\,.\end{aligned}$$

Подставляя два последних соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p(x(l_0),l(l_0))}{\partial l_0} = -\left(\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{Dx} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot p + \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\cdot[P,P]S + \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\cdot[P,M]S\right), \qquad (16)$$

которое назовем *первым уравнением динамики второго уровня во втором приближении*. Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений рассмотрено в разделе V.1.

Рассматривая (10) как следующее тождество

$$-\frac{\partial m(x(l_0),l(l_0))}{\partial l_0}+\frac{\partial m(x,l)}{Dx}\cdot\frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}+\frac{\partial m(x,l)}{Dl}\cdot\frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}=0\,,$$

получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m(x(l_0),l(l_0))}{\partial l_0}&=-\Bigg(\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{Dl}+\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot m+\\
&\quad+\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial p}\cdot[M,P]S+\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial m}\cdot[M,M]S\Bigg) \qquad (17)\\
\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial p}&=\frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\,,\\
\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial m}&=\frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\,.
\end{aligned}$$

Подставляя два последних соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial m(x(l_0),l(l_0))}{\partial l_0}=-\left(\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{Dl}+\frac{D\mathcal{M}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot m+\frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\cdot[M,P]S+\frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\cdot[M,M]S\right), \qquad (18)$$

которое назовем *вторым уравнением динамики второго уровня во втором приближении* Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений рассмотрено в разделе V.2.

3. Общий случай – третье приближение

Потребуем, чтобы преобразования

$$\begin{aligned}
p'(z)&=\mathcal{P}(z,S(z),p(z),m(z),w(z))\,,\\
m'(z)&=\mathcal{M}(z,S(z),p(z),m(z),w(z))\,,\\
w'(z)&=\mathcal{W}(z,S(z),p(z),m(z),w(z))\,,
\end{aligned}$$

удовлетворяли условиям

$$\begin{aligned}
&\frac{Dp'(x,l,a)}{Dx}=0\,, \qquad \frac{Dp'(x,l,a)}{Dl}=0\,, \qquad \frac{Dp'(x,l,a)}{Da}=0\,,\\
&\frac{Dm'(x,l,a)}{Dx}=0\,, \qquad \frac{Dm'(x,l,a)}{Dl}=0\,, \qquad \frac{Dm'(x,l,a)}{Da}=0\,,\\
&\frac{Dw'(x,l,a)}{Dx}=0\,, \qquad \frac{Dw'(x,l,a)}{Dl}=0\,, \qquad \frac{Dw'(x,l,a)}{Da}=0\,.
\end{aligned}$$

Отсюда следуют уравнения динамики в общем случае. Таким образом, при выводе уравнений исходим из соотношений

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dx}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot p+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dx}=0\,, \qquad (19)$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dl}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot m+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dl}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dl}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dl}=0\,, \qquad (20)$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Da}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot w+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Da}=0\,, \qquad (21)$$

$$\frac{D\mathcal{M}}{Dx}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot p+\frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dx}=0\,, \qquad (22)$$

$$\frac{D\mathcal{M}}{Dl}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot m+\frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dl}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dl}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dl}=0\,, \tag{23}$$

$$\frac{D\mathcal{M}}{Da}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot w+\frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Da}=0\,, \tag{24}$$

$$\frac{D\mathcal{W}}{Dx}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot p+\frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dx}=0\,, \tag{25}$$

$$\frac{D\mathcal{W}}{Dl}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot m+\frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dl}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dl}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dl}=0\,, \tag{26}$$

$$\frac{D\mathcal{W}}{Da}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot w+\frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Da}=0\,. \tag{27}$$

В (19), (22) и (25) учтем, что

$$\frac{\partial p(x,l,a)}{Dx}=\frac{\partial\partial S}{DxDx}=\frac{\partial\partial S}{DxDx}+[P,P]S=\frac{\partial p}{Dx}+[P,P]S\,,^{3}$$

$$\frac{\partial m(x,l,a)}{Dx}=\frac{\partial\partial S}{DxDl}=\frac{\partial\partial S}{DlDx}+[P,M]S=\frac{\partial p}{Dl}+[P,M]S\,,$$

$$\frac{\partial w(x,l,a)}{Dx}=\frac{\partial\partial S}{DxDa}=\frac{\partial\partial S}{DaDx}+[P,W]S=\frac{\partial p}{Da}+[P,M]S\,.$$

В (20), (23) и (26) учтем, что

$$\frac{\partial p(x,l,a)}{Dl}=\frac{\partial\partial S}{DlDx}=\frac{\partial\partial S}{DxDl}+[M,P]S=\frac{\partial m}{Dx}+[M,P]S\,,$$

$$\frac{\partial m(x,l,a)}{Dl}=\frac{\partial\partial S}{DlDl}=\frac{\partial\partial S}{DlDl}+[M,M]S=\frac{\partial m}{Dl}+[M,M]S\,,$$

$$\frac{\partial w(x,l,a)}{Dl}=\frac{\partial\partial S}{DlDa}=\frac{\partial\partial S}{DaDl}+[M,W]S=\frac{\partial m}{Da}+[M,W]S\,.$$

В (21), (24) и (27) учтем, что

$$\frac{\partial p(x,l,a)}{Da}=\frac{\partial\partial S}{DaDx}=\frac{\partial\partial S}{DxDa}+[W,P]S=\frac{\partial w}{Dx}+[W,P]S\,,$$

$$\frac{\partial m(x,l,a)}{Da}=\frac{\partial\partial S}{DaDl}=\frac{\partial\partial S}{DlDa}+[W,M]S=\frac{\partial w}{Dl}+[W,M]S\,,$$

$$\frac{\partial w(x,l,a)}{Da}=\frac{\partial\partial S}{DaDa}=\frac{\partial\partial S}{DaDa}+[W,W]S=\frac{\partial w}{Da}+[W,W]S\,.$$

---

[3] Напомним, что полная запись этого выражения с учетом индексов имеет вид:

$$\frac{\partial p^{K}{}_{L}(x,l,a)}{Dx^{I}}=\frac{\partial\partial S^{K}(x,l,a)}{Dx^{I}Dx^{L}}=\frac{\partial\partial S^{K}(x,l,a)}{Dx^{L}Dx^{I}}+[P_{I},P_{L}]S^{K}\,.$$

В результате получим

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dx}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot p+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot[P,P]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dl}+ \\ +\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot[P,M]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot[P,W]S=0\,, \tag{28}$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dl}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot m+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot[M,P]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dl}+ \\ +\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot[M,M]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot[M,W]S=0\,, \tag{29}$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Da}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot w+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot[W,P]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dl}+ \\ +\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot[W,M]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot[W,W]S=0\,, \tag{30}$$

$$\frac{D\mathcal{M}}{Dx}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot p+\frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot[P,P]S+\frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dl}+ \\ +\frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot[P,M]S+\frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot[P,W]S=0\,, \tag{31}$$

$$\frac{D\mathcal{M}}{Dl}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot m+\frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot[M,P]S+\frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dl}+ \\ +\frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot[M,M]S+\frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot[M,W]S=0\,, \tag{32}$$

$$\frac{D\mathcal{M}}{Da}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot w+\frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot[W,P]S+\frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dl}+ \\ +\frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot[W,M]S+\frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot[W,W]S=0\,, \tag{33}$$

$$\frac{D\mathcal{W}}{Dx}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot p+\frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot[P,P]S+\frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Dl}+ \\ +\frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot[P,M]S+\frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot\frac{\partial p(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot[P,W]S=0\,, \tag{34}$$

$$\frac{D\mathcal{W}}{Dl}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot m+\frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot[M,P]S+\frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Dl}+ \\ +\frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot[M,M]S+\frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot\frac{\partial m(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot[M,W]S=0\,, \tag{35}$$

$$\frac{D\mathcal{W}}{Da}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot w+\frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dx}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot[W,P]S+\frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Dl}+ \\ +\frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot[W,M]S+\frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,l,a)}{Da}+\frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot[W,W]S=0\,. \tag{36}$$

1. *Уравнения динамики первого уровня*

К уравнениям динамики первого уровня относятся уравнения, являющиеся следствием условий

$$\frac{Dp'(x,l,a)}{Dx}=0\,,\qquad \frac{Dp'(x,l,a)}{Dl}=0\,,\qquad \frac{Dp'(x,l,a)}{Da}=0\,.$$

Рассматривая (28) как следующее тождество

$$-\frac{\partial p(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}+\frac{\partial p(x,l,a)}{Dx}\cdot\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial p(x,l,a)}{Dl}\cdot\frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial p(x,l,a)}{Da}\cdot\frac{Da(x_0)}{\partial x_0}=0\,,$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial p(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}=-\left(\frac{D\mathcal{P}}{Dx}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot p+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot[P,P]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot[P,M]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot[P,W]S\right), \tag{37}$$
$$\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}=\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\,,\qquad\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}=\frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\,,\qquad\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}=\frac{Da(x_0)}{\partial x_0}\,.$$

Подставляя три последние соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}=-\left(\frac{D\mathcal{P}}{Dx}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot p+\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\cdot[P,P]S+\frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\cdot[P,M]S+\frac{Da(x_0)}{\partial x_0}\cdot[P,W]S\right), \tag{38}$$

которое назовем *первым уравнением динамики первого уровня*. Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений рассмотрено в разделе V.1.

Рассматривая (29) как следующее тождество

$$-\frac{\partial m(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}+\frac{\partial m(x,l,a)}{Dx}\cdot\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial m(x,l,a)}{Dl}\cdot\frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial m(x,l,a)}{Da}\cdot\frac{Da(x_0)}{\partial x_0}=0\,,$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial m(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}=-\left(\frac{D\mathcal{P}}{Dl}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot m+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot[M,P]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot[M,M]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot[M,W]S\right), \tag{39}$$
$$\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}=\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\,,\qquad\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}=\frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\,,\qquad\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}=\frac{Da(x_0)}{\partial x_0}\,.$$

Подставляя три последних соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial m(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}=-\left(\frac{D\mathcal{P}}{Dl}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot m+\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\cdot[M,P]S+\frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\cdot[M,M]S+\frac{Da(x_0)}{\partial x_0}\cdot[M,W]S\right) \tag{40}$$

которое назовем *вторым уравнению динамики первого уровня*. Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений выполнено в разделе V.2.

Рассматривая (30) как следующее тождество

$$-\frac{\partial w(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}+\frac{\partial w(x,l,a)}{Dx}\cdot\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial w(x,l,a)}{Dl}\cdot\frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial w(x,l,a)}{Da}\cdot\frac{Da(x_0)}{\partial x_0}=0\,,$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial w(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}=-\left(\frac{D\mathcal{P}}{Da}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot w+\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}\cdot[W,P]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}\cdot[W,M]S+\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}\cdot[W,W]S\right), \tag{41}$$
$$\frac{D\mathcal{P}}{\partial p}=\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\,,\qquad\frac{D\mathcal{P}}{\partial m}=\frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\,,\qquad\frac{D\mathcal{P}}{\partial w}=\frac{Da(x_0)}{\partial x_0}\,.$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial w(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}=-\left(\frac{D\mathcal{P}}{Da}+\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot w+\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\cdot[W,P]S+\frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\cdot[W,M]S+\frac{Da(x_0)}{\partial x_0}\cdot[W,W]S\right), \tag{42}$$

которое назовем *третьим уравнением динамики первого уровня*. Последующее преобразование этого уравнения выполнено в разделе V.3.

2. Уравнения динамики второго уровня

К уравнениям динамики второго уровня относятся уравнения, являющиеся следствием условий

$$\frac{Dm'(x,l,a)}{Dx} = 0\,, \qquad \frac{Dm'(x,l,a)}{Dl} = 0\,, \qquad \frac{Dm'(x,l,a)}{Da} = 0\,.$$

Рассматривая (31) как следующее тождество

$$-\frac{\partial p(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} + \frac{\partial p(x,l,a)}{Dx}\cdot\frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial p(x,l,a)}{Dl}\cdot\frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial p(x,l,a)}{Da}\cdot\frac{Da(l_0)}{\partial l_0} = 0\,.$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial p(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} = -\left(\frac{D\mathcal{M}}{Dx} + \frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot p + \frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot[P,P]S + \frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot[P,M]S + \frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot[P,W]S\right), \tag{43}$$

$$\frac{D\mathcal{M}}{\partial p} = \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{M}}{\partial m} = \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{M}}{\partial w} = \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}\,.$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} = -\left(\frac{D\mathcal{M}}{Dx} + \frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot p + \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\cdot[P,P]S + \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\cdot[P,M]S + \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}\cdot[P,W]S\right), \tag{44}$$

которое назовем *первым уравнением динамики второго уровня*. Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений рассмотрено в разделе VI.1.

Рассматривая (32) как следующее тождество

$$-\frac{\partial m(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} + \frac{\partial m(x,l,a)}{Dx}\cdot\frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial m(x,l,a)}{Dl}\cdot\frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial m(x,l,a)}{Da}\cdot\frac{Da(l_0)}{\partial l_0} = 0\,.$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial m(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} = -\left(\frac{D\mathcal{M}}{Dl} + \frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot m + \frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot[M,P]S + \frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot[M,M]S + \frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot[M,W]S\right), \tag{45}$$

$$\frac{D\mathcal{M}}{\partial p} = \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{M}}{\partial m} = \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{M}}{\partial w} = \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}\,.$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial m(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} = -\left(\frac{D\mathcal{M}}{Dl} + \frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot m + \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\partial p\cdot[M,P]S + \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\cdot[M,M]S + \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}\cdot[M,W]S\right), \tag{46}$$

которое назовем *вторым уравнением динамики второго уровня*. Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений выполнено в разделе VI.2

Рассматривая (33) как следующее тождество

$$-\frac{\partial w(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} + \frac{\partial w(x,l,a)}{Dx}\cdot\frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial w(x,l,a)}{Dl}\cdot\frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial w(x,l,a)}{Da}\cdot\frac{Da(l_0)}{\partial l_0} = 0\,.$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial w(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} = -\left(\frac{D\mathcal{M}}{Da} + \frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot w + \frac{D\mathcal{M}}{\partial p}\cdot[W,P]S + \frac{D\mathcal{M}}{\partial m}\cdot[W,M]S + \frac{D\mathcal{M}}{\partial w}\cdot[W,W]S\right), \tag{47}$$

$$\frac{D\mathcal{M}}{\partial p} = \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{M}}{\partial m} = \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{M}}{\partial w} = \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}\,.$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial w(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} = -\left(\frac{D\mathcal{M}}{Da} + \frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot w + \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\cdot[W,P]S + \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\cdot[W,M]S + \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}\cdot[W,W]S\right), \tag{48}$$

которое назовем *третьим уравнением динамики второго уровня*. Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений приведено в разделе VI.3.

3. Уравнения динамики третьего уровня

К уравнениям динамики третьего уровня относятся уравнения, являющиеся следствием условий

$$\frac{Dw'(x,l,a)}{Dx} = 0\,, \qquad \frac{Dw'(x,l,a)}{Dl} = 0\,, \qquad \frac{Dw'(x,l,a)}{Da} = 0\,.$$

Рассматривая (34) как следующее тождество

$$-\frac{\partial p(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial a_0} + \frac{\partial p(x,l,a)}{Dx}\cdot\frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial p(x,l,a)}{Dl}\cdot\frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial p(x,l,a)}{Da}\cdot\frac{Da(a_0)}{\partial a_0} = 0\,.$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial p(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial a_0} = -\left(\frac{D\mathcal{W}}{Dx} + \frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot p + \frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot[P,P]S + \frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot[P,M]S + \frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot[P,W]S\right), \tag{49}$$

$$\frac{D\mathcal{W}}{\partial p} = \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{W}}{\partial m} = \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{W}}{\partial w} = \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}\,.$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial a_0} = -\left(\frac{D\mathcal{W}}{Dx} + \frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot p + \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}\cdot[P,P]S + \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}\cdot[P,M]S + \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}\cdot[P,W]S\right), \tag{50}$$

которое назовем *первым уравнением динамики третьего уровня*. Последующее преобразование этого уравнения приведено в разделе VII.1.

Рассматривая (35) как следующее тождество

$$-\frac{\partial m(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial a_0} + \frac{\partial m(x,l,a)}{Dx}\cdot\frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial m(x,l,a)}{Dl}\cdot\frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial m(x,l,a)}{Da}\cdot\frac{Da(a_0)}{\partial a_0} = 0\,,$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial m(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial a_0} = -\left(\frac{D\mathcal{W}}{Dl} + \frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot m + \frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot[M,P]S + \frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot[M,M]S + \frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot[M,W]S\right), \tag{51}$$

$$\frac{D\mathcal{W}}{\partial p} = \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{W}}{\partial m} = \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{W}}{\partial w} = \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}\,.$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial m(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial a_0} = -\left(\frac{D\mathcal{W}}{Dl} + \frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot m + \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}\cdot[M,P]S + \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}\cdot[M,M]S + \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}\cdot[M,W]S\right), \tag{52}$$

которое назовем *вторым уравнением динамики третьего уровня*. Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений приведено в разделе VII.2.

Рассматривая (36) как следующее тождество

$$-\frac{\partial w(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial a_0} + \frac{\partial w(x,l,a)}{Dx}\cdot\frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial w(x,l,a)}{Dl}\cdot\frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial w(x,l,a)}{Da}\cdot\frac{Da(a_0)}{\partial a_0} = 0\,,$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial w(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial a_0} = -\left(\frac{D\mathcal{W}}{Da} + \frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot w + \frac{D\mathcal{W}}{\partial p}\cdot[W,P]S + \frac{D\mathcal{W}}{\partial m}\cdot[W,M]S + \frac{D\mathcal{W}}{\partial w}\cdot[W,W]S\right), \tag{53}$$

$$\frac{D\mathcal{W}}{\partial p} = \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{W}}{\partial m} = \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}\,, \qquad \frac{D\mathcal{W}}{\partial w} = \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}\,.$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial w(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial a_0} = -\left(\frac{D\mathcal{W}}{Da} + \frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot w + \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}\cdot[W,P]S + \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}\cdot[W,M]S + \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}\cdot[W,W]S\right), \tag{54}$$

которое назовем *третьим уравнением динамики третьего уровня*. Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений приведено в разделе VII.3.

Перейдем к формированию уравнений динамики с учетом перестановочных соотношений, полученных в Лекции 28.

IV. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПЕРВОГО УРОВНЯ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

В методическом плане полезно сначала рассмотреть уравнения динамики для простых частных случаев, а затем перейти к более сложному общему случаю. В этом разделе мы рассмотрим уравнения динамики первого уровня для первого и второго приближений, для динамики вне калибровочного поля и с учетом калибровочного поля.

1. Первое приближение. Калибровочное поле отсутствует

Исходим из уравнения (2):

$$\frac{\partial p^K{}_I(x_0)}{\partial x_0{}^K} = -\left(\frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{Dx^I} + \frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{\partial S^N}\cdot p^N{}_I + \frac{D\mathcal{P}^M{}_M(x,S,p)}{\partial p^K{}_L}\cdot [P_I,P_L]S^K\right), \tag{55}$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями, полученными в Лекции 28 (формула (1)),

$$[P_I(P_L)] = P_N\cdot C^N{}_{[IL]}\,.$$

В результате получим первое уравнение динамики для первого приближения:

$$\frac{\partial p^K{}_I(x_0)}{\partial x_0{}^K} = -\frac{D\mathcal{P}}{Dx^I} - \frac{D\mathcal{P}}{\partial S^N}\cdot p^N{}_I - p^K{}_N\cdot C^N{}_{[IL]}\cdot\frac{Dx^L}{\partial x_0{}^K}\,,$$

где введено обозначение $\mathcal{P} = \mathcal{P}^K{}_K(x,S,p)$.

2. Второе приближение. Калибровочное поле отсутствует

1. *Первое уравнение динамики*

Во втором приближении первое уравнение имеет вид (12):

$$\frac{\partial p(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0} = -\left(\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{Dx} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot p + \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\cdot[P,P]S + \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\cdot[P,M]S\right).$$

Запишем это уравнение в индексной форме:

$$\frac{\partial p^K{}_M(x_0)}{\partial x_0{}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{\partial S^A}\cdot p^A{}_M - \frac{Dx^Q}{\partial x_0{}^K}\cdot[P_M(P_Q)]S^K - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0{}^K}\cdot[P_M(M^I{}_Q)]S^K\,. \tag{56}$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями, полученными в Лекции 28 (формула (5)):

$$[P_M(P_Q)] = P_I\cdot C^I{}_{[MQ]} + M^P{}_L\cdot C^L{}_{P[MQ]}\,,$$
$$[P_M(M^I{}_Q)] = P_Q\cdot\delta^I{}_M\,.$$

В результате получим

$$\frac{\partial p^K{}_M(x_0,l(x_0))}{\partial x_0{}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{\partial S^A}\cdot p^A{}_M -$$
$$-\frac{Dx^Q}{\partial x_0{}^K}\cdot P_I(S^K)\cdot C^I{}_{[MQ]} - \frac{Dx^Q}{\partial x_0{}^K}\cdot M^P{}_L(S^K)\cdot C^L{}_{P[MQ]} - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0{}^K}\cdot P_Q(S^K)\cdot\delta^I{}_M\,.$$

Отсюда следует первое уравнение динамики:

$$\frac{\partial p^K{}_M(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0{}^K} = -\frac{D\mathcal{P}}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{P}}{\partial S^A}\cdot p^A{}_M - \frac{Dx^Q}{\partial x_0{}^K}\cdot p^K{}_I\cdot C^I{}_{[MQ]} - \frac{Dx^Q}{\partial x_0{}^K}\cdot m^{KP}{}_L\cdot C^L{}_{P[MQ]} - \frac{Dl^Q{}_M}{\partial x_0{}^K}\cdot p^K{}_Q\,, \tag{57}$$

где введено обозначение $\mathcal{P} = \mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)$.

2. Второе уравнение динамики

Во втором приближении второе уравнение имеет вид (14):

$$\frac{\partial m(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0} = -\left(\frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{Dl} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,S,p,m)}{\partial S}\cdot m + \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\cdot [M,P]S + \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\cdot [M,M]S\right).$$

Запишем это уравнение в индексной форме:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial m^{KL}{}_M(x(x_0),l(x_0))}{\partial {x_0}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{Dl^M{}_L} - \\ &\frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{\partial S^A}\cdot m^{AL}{}_M - \frac{Dx^Q}{\partial {x_0}^K}\cdot [M^L{}_M(P_Q)]S^K - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial {x_0}^K}\cdot [M^L{}_M(M^I{}_Q)]\,.\end{aligned} \tag{58}$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями, полученными в Лекции 28 (формула (5)):

$$\begin{aligned}[][M^L{}_M(P_Q)] &= -P_M\cdot\delta^P{}_Q\,,\\ [M^L{}_M(M^I{}_Q)] &= M^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - M^I{}_M\cdot\delta^L{}_Q\,.\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial m^{KL}{}_M(x(x_0),l(x_0))}{\partial {x_0}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{Dl^M{}_L} - \\ &-\frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{\partial S^A}\cdot m^{AL}{}_M - \frac{Dx^L}{\partial {x_0}^K}\cdot P_M(S^K) + \frac{Dl^Q{}_I}{\partial {x_0}^K}\cdot\left(M^L{}_Q(S^K)\cdot\delta^I{}_M - M^I{}_M(S^K)\cdot\delta^L{}_Q\right).\end{aligned}$$

Отсюда следует второе уравнение динамики в окончательном виде:

$$\frac{\partial m^{KL}{}_M(x(x_0),l(x_0))}{\partial {x_0}^K} = -\frac{D\mathcal{P}}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{P}}{\partial S^A}\cdot m^{AL}{}_M + \frac{Dx^L}{\partial {x_0}^K}\cdot p^K{}_M - \frac{Dl^I{}_M}{\partial {x_0}^K}\cdot m^{KL}{}_I + \frac{Dl^L{}_N}{\partial {x_0}^K}\cdot m^{KN}{}_M\,. \tag{59}$$

3. Второе приближение. Уравнения динамики в калибровочном поле.

1. Первое уравнение динамики

Для вывода первого уравнения динамики в калибровочном поле в (56) используем перестановочные соотношения, полученные в Лекции 28 (формула (7)):

$$\begin{aligned}[][P_M(P_Q)] &= P_I\cdot T^I{}_{[MQ]} + M^P{}_L\cdot F^L{}_{P[MQ]}\,,\\ [P_M(M^I{}_Q)] &= P_Q\cdot\delta^I{}_M + M^N{}_P\cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M\,.\end{aligned} \tag{60}$$

где

$$\begin{aligned}T^I{}_{[MQ]} &= C^I{}_{[MQ]} - A^I{}_{[MQ]}\,,\\ G^P{}_{NQ}{}^I{}_M &= A^P{}_{NQ}\cdot\delta^I{}_M - A^I{}_{NM}\cdot\delta^P{}_Q + A^P{}_{QM}\cdot\delta^I{}_N\,,\\ F^L{}_{P[MQ]} &= A^L{}_{P[MQ]} + A^L{}_{T[Q}\cdot A^T{}_{|P|M]} + A^L{}_{PT}\cdot T^T{}_{[MQ]} + C^L{}_{P[MQ]}\,.\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial p^K{}_M(x(x_0),l(x_0))}{\partial {x_0}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{\partial S^A}\cdot p^A{}_M - \\ &\quad - \frac{Dx^Q}{\partial {x_0}^K}\cdot\left(P_I(S^K)\cdot T^I{}_{[MQ]} + M^P{}_L(S^K)\cdot F^L{}_{P[MQ]}\right) - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial {x_0}^K}\cdot\left(P_Q(S^K)\cdot\delta^I{}_M + M^N{}_P(S^K)\cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M\right).\end{aligned}$$

Отсюда следует первое уравнение динамики в калибровочном поле в окончательном виде:

$$\frac{\partial p^K{}_M(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0{}^K} = -\frac{D\mathcal{P}}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{P}}{\partial S^A}\cdot p^A{}_M - \frac{Dx^Q}{\partial x_0{}^K}\cdot\left(p^K{}_I\cdot T^I{}_{[MQ]} + m^{KP}{}_L\cdot F^L{}_{P[MQ]}\right) - \\ - \frac{Dl^Q{}_M}{\partial x_0{}^K}\cdot p^K{}_Q - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0{}^K}\cdot m^{KN}{}_P\cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M\,,$$

где введено обозначение $p^K{}_M = p^K{}_M(x,l(x))$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)$.

Или в развернутом виде

$$\frac{\partial p^K{}_M(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0{}^K} = -\frac{D\mathcal{P}}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{P}}{\partial S^A}\cdot p^A{}_M - p^K{}_I\cdot\frac{Dx^Q}{\partial x_0{}^K}\cdot\left(T^I{}_{[MQ]} - \frac{Dl^I{}_M}{Dx^Q}\right) - \\ - m^{KN}{}_I\cdot\frac{Dx^Q}{\partial x_0{}^K}\cdot\left(A^L{}_{P[MQ]} + A^L{}_{T[Q}\cdot A^T{}_{|P|M]} + \quad + A^L{}_{PT}\cdot T^T{}_{[MQ]} + C^L{}_{P[MQ]}\right) - \\ - m^{KN}{}_P\cdot\frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0{}^K}\cdot\left(A^P{}_{NQ}\cdot\delta^I{}_M - A^I{}_{NM}\cdot\delta^P{}_Q + A^P{}_{QM}\cdot\delta^I{}_N\right). \tag{61}$$

2. *Второе уравнение динамики*

Второе уравнение динамики в калибровочном поле для второго приближения получим, подставляя в (57) перестановочные соотношения, полученные в Лекции 28 (формула (7)):

$$[M^L{}_M(P_Q)] = -P_M\cdot\delta^L{}_Q - M^N{}_I\cdot G^I{}_{NM}{}^L{}_Q\,, \tag{62}$$
$$[M^L{}_M(M^I{}_Q)] = M^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - M^I{}_M\cdot\delta^L{}_Q\,,$$

где

$$G^I{}_{NM}{}^L{}_Q = A^I{}_{NM}\cdot\delta^L{}_Q - A^L{}_{NQ}\cdot\delta^I{}_M + A^I{}_{MQ}\cdot\delta^L{}_N\,.$$

В результате получим

$$\frac{\partial m^{KL}{}_M(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0{}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{P}^K{}_K(x,l,S,p,m)}{\partial S^A}\cdot m^{AL}{}_M - \\ - \frac{Dx^Q}{\partial x_0{}^K}\cdot\left(-P_M(S^K)\cdot\delta^L{}_Q - M^N{}_I(S^K)\cdot G^I{}_{NM}{}^L{}_Q\right) - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0{}^K}\cdot\left(M^L{}_Q(S^K)\cdot\delta^I{}_M - M^I{}_M(S^K)\cdot\delta^L{}_Q\right).$$

Отсюда следует второе уравнение динамики в калибровочном поле в окончательном виде:

$$\frac{\partial m^{KL}{}_M(x(x_0),l(x_0))}{\partial x_0{}^K} = -\frac{D\mathcal{P}}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{P}}{\partial S^A}\cdot m^{AL}{}_M + \frac{Dx^L}{\partial x_0{}^K}\cdot p^K{}_M + \\ + \frac{Dx^Q}{\partial x_0{}^K}\cdot m^{KN}{}_I\cdot G^I{}_{NM}{}^L{}_Q - \frac{Dl^I{}_M}{\partial x_0{}^K}\cdot m^{KL}{}_I + \frac{Dl^L{}_N}{\partial x_0{}^K}\cdot m^{KN}{}_M\,. \tag{63}$$

V. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПЕРВОГО УРОВНЯ

Здесь рассмотрим уравнения динамики первого уровня в общем случае. Напомним, что указанные уравнения являются следствием следующих условий

$$\frac{Dp'(x,l,a)}{Dx} = 0\,, \qquad \frac{Dp'(x,l,a)}{Dl} = 0\,, \qquad \frac{Dp'(x,l,a)}{Da} = 0\,.$$

1. Первое уравнение динамики

Первое уравнение динамики первого уровня имеет вид (38):

$$\frac{\partial p(x(x_0))}{\partial x_0} = -\left(\frac{D\mathcal{P}(x,l,a,S,p,m,w)}{Dx} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,a,S,p,m,w)}{\partial S}\cdot p + \right. \\ \left. + \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\cdot[P,P]S + \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\cdot[P,M]S + \frac{Da(x_0)}{\partial x_0}\cdot[P,W]S\right).$$

Запишем это уравнение в индексной форме для вектора действия S^K:

$$\frac{\partial p^K{}_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial {x_0}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{\partial S^A}\cdot p^A{}_M - \\ - \frac{Dx^Q}{\partial {x_0}^K}\cdot[P_M(P_Q)]S^K - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial {x_0}^K}\cdot[P_M(M^I{}_Q)]S^K - \frac{Da^Q{}_{LI}}{\partial {x_0}^K}\cdot[P_M(W^{LI}{}_Q)]S^K\,.$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями, полученными в Лекции 28 (формулы (27), (29), (32)):

$$\begin{aligned}
&[P_M(P_Q)] = P_I\cdot T^I{}_{[MQ]} + M^N{}_I\cdot(F^I{}_{N[MQ]} - B^Q{}_{L[MQ]}) + W^{IL}{}_N\cdot F^N{}_{LI[MQ]}\,,\\
&[P_M(M^I{}_Q)] = P_Q\cdot\delta^I{}_M + M^N{}_P\cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M + W^{LP}{}_N\cdot G^N{}_{PLQ}{}^I{}_M\,,\\
&[P_M(W^{IL}{}_Q)] = M^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - W^{NL}{}_Q\cdot A^I{}_{NM} - W^{IL}{}_N\cdot A^N{}_{QM}\,,
\end{aligned} \tag{64}$$

где

$$\begin{aligned}
T^I{}_{[MQ]} &= C^I{}_{[MQ]} - A^I{}_{[MQ]}\,,\\
G^P{}_{NQ}{}^I{}_M &= A^P{}_{NQ}\cdot\delta^I{}_M - A^I{}_{NM}\cdot\delta^P{}_Q + A^P{}_{QM}\cdot\delta^I{}_N\,,\\
F^I{}_{N[MQ]} &= A^I{}_{N[MQ]} + A^I{}_{P[Q}\cdot A^P{}_{|N|M]} + A^I{}_{NP}\cdot T^P{}_{[MQ]} + C^I{}_{N[MQ]}\,,\\
G^N{}_{PLQ}{}^I{}_M &= B^N{}_{PLQ}\cdot\delta^I{}_M - B^I{}_{PLM}\cdot\delta^N{}_Q + B^N{}_{PQM}\cdot\delta^I{}_L\,,\\
F^N{}_{LI[MQ]} &= B^N{}_{LI[MQ]} + B^N{}_{LT[Q}\cdot A^T{}_{|I|M]} + A^N{}_{T[Q}\cdot B^T{}_{|LI|M]} + B^N{}_{LIT}\cdot T^T{}_{[MQ]} + C^N{}_{LI[MQ]}\,.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\frac{\partial p^K{}_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial {x_0}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{\partial S^A}\cdot p^A{}_M - \\ - \frac{Dx^Q}{\partial {x_0}^K}\cdot\Big(P_I(S^K)\cdot T^I{}_{[MQ]} + M^N{}_I(S^K)\cdot F^I{}_{N[MQ]} + W^{IL}{}_N(S^K)\cdot F^N{}_{LI[MQ]}\Big) - \\ - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial {x_0}^K}\cdot\Big(P_Q(S^K)\cdot\delta^I{}_M + M^N{}_P(S^K)\cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M + W^{LP}{}_N(S^K)\cdot G^N{}_{PLQ}{}^I{}_M\Big) - \\ - \frac{Da^Q{}_{LI}}{\partial {x_0}^K}\cdot\Big(M^L{}_Q(S^K)\cdot\delta^I{}_M - W^{NL}{}_Q(S^K)\cdot A^I{}_{NM} - W^{IL}{}_N(S^K)\cdot A^N{}_{QM}\Big)\,.$$

Отсюда следует первое уравнение динамики первого уровня для третьего приближения в окончательном виде:

$$\frac{\partial p_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0} = -\frac{D\mathcal{P}}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot p_M - \frac{Dx^Q}{\partial x_0}\cdot\Big(p_I\cdot T^I{}_{[MQ]} + m^N{}_I\cdot F^I{}_{N[MQ]} + w^{IL}{}_N\cdot F^N{}_{LI[MQ]}\Big) - \\ - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0}\cdot\Big(p_Q\cdot\delta^I{}_M + m^N{}_P\cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M + w^{LP}{}_N\cdot G^N{}_{PLQ}{}^I{}_M\Big) - \\ - \frac{Da^Q{}_{LI}}{\partial x_0}\cdot\Big(m^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - w^{NL}{}_Q\cdot A^I{}_{NM} - w^{IL}{}_N\cdot A^N{}_{QM}\Big)\,, \tag{65}$$

где для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены. Например,

$$\frac{\partial p_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0} = \frac{\partial p^K{}_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial {x_0}^K}\,, \qquad \mathcal{P} = \mathcal{P}^K{}_K(x,l,a,S,p,m,w)\,.$$

2. Второе уравнение динамики

Второе уравнение динамики первого уровня имеет вид (40):

$$\frac{\partial m(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0} = -\Bigg(\frac{D\mathcal{P}(x,l,a,S,p,m,w)}{Dl} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,a,S,p,m,w)}{\partial S}\cdot m + \\ + \frac{Dx^K(x_0)}{\partial x_0}\cdot[M,P]S + \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\cdot[M,M]S + \frac{Da(x_0)}{\partial x_0}\cdot[M,W]S\Bigg)\,.$$

Запишем это уравнение в индексной форме для вектора действия S^K:

$$\frac{\partial m^{KL}{}_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial {x_0}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{\partial S^A}\cdot m^{AL}{}_M - \frac{Dx^Q}{\partial {x_0}^K}\cdot [M^L{}_M(P_Q)]S^K -$$
$$-\frac{Dl^Q{}_I}{\partial {x_0}^K}\cdot [M^L{}_M(M^I{}_Q)]S^K - \frac{Da^Q{}_{NI}}{\partial {x_0}^K}\cdot [M^L{}_M(W^{IN}{}_Q)]S^K\,.$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями, полученными в Лекции 28 (формулы (28), (30), (34)):

$$\begin{aligned} &[M^L{}_M(P_Q)] = -P_M\cdot\delta^L{}_Q - M^N{}_I\cdot G^I{}_{NM}{}^L{}_Q - W^{IP}{}_N\cdot G^N{}_{PIM}{}^L{}_Q\,,\\ &[M^L{}_M(M^I{}_Q)] = M^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - M^I{}_M\cdot\delta^L{}_Q\,,\\ &[M^L{}_M(W^{IN}{}_Q)] = -W^{IN}{}_M\cdot\delta^L{}_Q + W^{LN}{}_Q\cdot\delta^I{}_M\,,\end{aligned} \tag{66}$$

где

$$\begin{aligned} G^I{}_{NM}{}^L{}_Q &= A^I{}_{NM}\cdot\delta^L{}_Q - A^L{}_{NQ}\cdot\delta^I{}_M + A^I{}_{MQ}\cdot\delta^L{}_N\,,\\ G^N{}_{PIM}{}^L{}_Q &= B^N{}_{PIM}\cdot\delta^L{}_Q - B^L{}_{PIQ}\cdot\delta^N{}_M + B^N{}_{PMQ}\cdot\delta^L{}_I\,,\end{aligned}$$

В результате получим

$$\frac{\partial m^{KL}{}_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial {x_0}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{\partial S^A}\cdot m^{AL}{}_M -$$
$$-\frac{Dx^Q}{\partial {x_0}^K}\cdot\Big(-P_M(S^K)\cdot\delta^L{}_Q - M^N{}_I(S^K)\cdot G^I{}_{NM}{}^L{}_Q - W^{IP}{}_N(S^K)\cdot G^N{}_{PIM}{}^L{}_Q\Big) -$$
$$-\frac{Dl^Q{}_I}{\partial {x_0}^K}\cdot\Big(M^L{}_Q(S^K)\cdot\delta^I{}_M - M^I{}_M(S^K)\cdot\delta^L{}_Q\Big) - \frac{Da^Q{}_{NI}}{\partial {x_0}^K}\cdot\Big(-W^{IN}{}_M(S^K)\cdot\delta^L{}_Q + W^{LN}{}_Q(S^K)\cdot\delta^I{}_M\Big)\,.$$

Отсюда следует второе уравнение динамики первого уровня в окончательном виде:

$$\frac{\partial m^L{}_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0} = -\frac{D\mathcal{P}}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot m^L{}_M - \frac{Dx^Q}{\partial x_0}\cdot\Big(-p_M\cdot\delta^L{}_Q - m^N{}_I\cdot G^I{}_{NM}{}^L{}_Q - w^{IP}{}_N\cdot G^N{}_{PIM}{}^L{}_Q\Big) -$$
$$-\frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0}\cdot\Big(m^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - m^I{}_M\cdot\delta^L{}_Q\Big) - \frac{Da^Q{}_{NI}}{\partial x_0}\cdot\Big(-w^{IN}{}_M\cdot\delta^L{}_Q + w^{LN}{}_Q\cdot\delta^I{}_M\Big)\,. \tag{67}$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

3. Третье уравнение динамики

В третьем приближении третье уравнение динамики первого уровня имеет вид (60):

$$\frac{\partial w(x_0)}{\partial x_0} = -\Bigg(\frac{D\mathcal{P}(x,l,a,S,p,m,w)}{Da} + \frac{D\mathcal{P}(x,l,a,S,p,m,w)}{\partial S}\cdot w +$$
$$+\frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}\cdot [W,P]S + \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}\cdot [W,M]S + \frac{Da(x_0)}{\partial x_0}\cdot [W,W]S\Bigg)\,.$$

Запишем это уравнение в индексной форме для вектора действия S^K:

$$\frac{\partial w^{KNL}{}_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial {x_0}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{Da^M{}_{LN}} - \frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{\partial S^A}\cdot w^{ANL}{}_M -$$
$$-\frac{Dx^Q}{\partial {x_0}^K}\cdot [W^{NL}{}_M(P_Q)]S^K - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial {x_0}^K}\cdot [W^{NL}{}_M(M^I{}_Q)]S^K - \frac{Da^Q{}_{PI}}{\partial {x_0}^K}\cdot [W^{NL}{}_M(W^{IP}{}_Q)]S^K\,.$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями, полученными в Лекции 28 (формулы (31), (33), (35)):

$$\begin{aligned} &[W^{NL}{}_M(P_Q)] = -M^L{}_M\cdot\delta^N{}_Q + W^{IL}{}_M\cdot A^N{}_{IQ} + W^{NL}{}_P\cdot A^P{}_{MQ}\,,\\ &[W^{NL}{}_M(M^I{}_Q)] = W^{NL}{}_Q\cdot\delta^I{}_M - W^{IL}{}_M\cdot\delta^N{}_Q\,,\\ &[W^{NL}{}_M(W^{IP}{}_Q)] = 0\,.\end{aligned} \tag{68}$$

В результате получим

$$\frac{\partial w^{KNL}{}_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial {x_0}^K} = -\frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{Da^M{}_{LN}} - w^{ANL}{}_M \cdot \frac{D\mathcal{P}^K{}_K}{\partial S^A} -$$
$$- \frac{Dx^Q}{\partial {x_0}^K} \cdot \Big(-M^L{}_M(S^K)\cdot\delta^N{}_Q + W^{IL}{}_M(S^K)\cdot A^N{}_{IQ} + W^{NL}{}_P(S^K)\cdot A^P{}_{MQ}\Big) -$$
$$- \frac{Dl^Q{}_I}{\partial {x_0}^K} \cdot \Big(W^{NL}{}_Q(S^K)\cdot\delta^I{}_M - W^{IL}{}_M(S^K)\cdot\delta^N{}_Q\Big).$$

Отсюда следует третье уравнение динамики:

$$\frac{\partial w^{NL}{}_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0} = -\frac{D\mathcal{P}}{Da^M{}_{LN}} - \frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot w^{NL}{}_M -$$
$$-\frac{Dx^Q}{\partial x_0}\cdot\Big(-m^L{}_M\cdot\delta^N{}_Q + w^{IL}{}_M\cdot A^N{}_{IQ} + w^{NL}{}_P\cdot A^P{}_{MQ}\Big) - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0}\cdot\Big(w^{NL}{}_Q\cdot\delta^I{}_M - w^{IL}{}_M\cdot\delta^N{}_Q\Big). \tag{69}$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

VI. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВТОРОГО УРОВНЯ

Здесь рассмотрим уравнения динамики второго уровня в общем случае. Напомним, что указанные уравнения являются следствием следующих условий

$$\frac{Dm'(x,l,a)}{Dx} = 0\,, \qquad \frac{Dm'(x,l,a)}{Dl} = 0\,, \qquad \frac{Dm'(x,l,a)}{Da} = 0\,.$$

1. Первое уравнение динамики

Первое уравнение динамики второго уровня имеет вид (44):

$$\frac{\partial p(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} = -\Bigg(\frac{D\mathcal{M}(x,l,a,S,p,m,w)}{Dx} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,a,S,p,m,w)}{\partial S}\cdot p +$$
$$+ \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\cdot[P,P]S + \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\cdot[P,M]S + \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}\cdot[P,W]S\Bigg).$$

Запишем это уравнение в индексной форме для вектора действия $S^K{}_P$:

$$\frac{\partial p^K{}_{PM}(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial (l_0)^K{}_P} = -\frac{D\mathcal{M}^K{}_P{}^P{}_K}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{M}^K{}_P{}^P{}_K}{\partial S^A{}_Q}\cdot p^A{}_{QM} -$$
$$- \frac{Dx^Q}{\partial (l_0)^K{}_P}\cdot[P_M(P_Q)]S^K{}_P - \frac{Dl^K{}_P}{\partial l^K{}_P}\cdot[P_M(M^I{}_Q)]S^K{}_P - \frac{Da^Q{}_{LI}}{\partial (l_0)^K{}_P}\cdot[P_M(W^{IL}{}_Q)]S^K{}_P\,.$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (64). Получим первое уравнение динамики второго уровня в окончательном виде:

$$\frac{\partial p_M(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial (l_0)} = -\frac{D\mathcal{M}}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot p_M -$$
$$- \frac{Dx^Q}{\partial (l_0)}\cdot\Big(p_I\cdot T^I{}_{[MQ]} + m^N{}_I\cdot F^I{}_{N[MQ]} + w^{IL}{}_N\cdot F^N{}_{LI[MQ]}\Big) -$$
$$- \frac{Dl^Q{}_I}{\partial (l_0)}\cdot\Big(p_Q\cdot\delta^I{}_M + m^N{}_P\cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M + w^{LP}{}_N\cdot G^N{}_{PLQ}{}^I{}_M\Big) -$$
$$- \frac{Da^Q{}_{LI}}{\partial (l_0)}\cdot\Big(m^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - w^{NL}{}_Q\cdot A^I{}_{NM} - w^{IL}{}_N\cdot A^N{}_{QM}\Big). \tag{70}$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

2. Второе уравнение динамики

Второе уравнение динамики второго уровня имеет вид (46):

$$\frac{\partial m(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} = -\left(\frac{D\mathcal{M}(x,l,a,S,p,m,w)}{Dl} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,a,S,p,m,w)}{\partial S}\cdot m + \right.$$
$$\left. + \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\cdot[M,P]S + \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\cdot[M,M]S + \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}\cdot[M,W]S\right).$$

Запишем это уравнение в индексной форме для вектора действия $S^K{}_P$:

$$\frac{\partial m^K{}_P{}^L{}_M(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial (l_0)^K{}_P} = -\frac{D\mathcal{M}^K{}_P{}^P{}_K}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{M}^K{}_P{}^P{}_K}{\partial S^A{}_Q}\cdot m^A{}_Q{}^L{}_M -$$
$$- \frac{Dx^Q}{\partial (l_0)^K{}_P}\cdot[M^L{}_M(P_Q)]S^K{}_P - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial (l_0)^K{}_P}\cdot[M^L{}_M(M^I{}_Q)]S^K{}_P - \frac{Da^Q{}_{NI}}{(l_0)^K{}_P}\cdot[M^L{}_M(W^{IN}{}_Q)]S^K{}_P\,.$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (66). Получим второе уравнение динамики второго уровня в окончательном виде:

$$\frac{\partial m^L{}_M(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial (l_0)} = -\frac{D\mathcal{M}}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot m^L{}_M -$$
$$- \frac{Dx^Q}{\partial (l_0)}\cdot\left(-p_M\cdot\delta^L{}_Q - m^N{}_I\cdot G^I{}_{NM}{}^L{}_Q - w^{IP}{}_N\cdot G^N{}_{PIM}{}^L{}_Q\right) -$$
$$- \frac{Dl^Q{}_I}{\partial (l_0)}\cdot\left(m^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - m^I{}_M\cdot\delta^L{}_Q\right) + \frac{Da^Q{}_{NI}}{\partial (l_0)}\cdot\left(-w^{IN}{}_M\cdot\delta^L{}_Q + w^{LN}{}_Q\cdot\delta^I{}_M\right). \qquad (71)$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

3. Третье уравнение динамики

Третье уравнение динамики второго уровня имеет вид (48):

$$\frac{\partial w(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial l_0} = -\left(\frac{D\mathcal{M}(x,l,a,S,p,m,w)}{Da} + \frac{D\mathcal{M}(x,l,a,S,p,m,w)}{\partial S}\cdot w + \right.$$
$$\left. + \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}\cdot[W,P]S + \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}\cdot[W,M]S + \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}\cdot[W,W]S\right).$$

Запишем это уравнение в индексной форме для вектора действия $S^K{}_P$:

$$\frac{\partial w^K{}_P{}^{NL}{}_M(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial (l_0)^K{}_P} = -\frac{D\mathcal{M}^K{}_P{}^P{}_K}{Da^M{}_{LN}} - \frac{D\mathcal{M}^K{}_P{}^P{}_K}{\partial S^A{}_Q}\cdot w^A{}_Q{}^{NL}{}_M -$$
$$- \frac{Dx^Q}{\partial (l_0)^K{}_P}\cdot[W^{NL}{}_M(P_Q)]S^K{}_P - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial (l_0)^K{}_P}\cdot[W^{NL}{}_M(M^I{}_Q)]S^K{}_P - \frac{Da^Q{}_{PI}}{\partial (l_0)^K{}_P}\cdot[W^{NL}{}_M(W^{IP}{}_Q)]S^K{}_P\,.$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (68). Получим третье уравнение динамики второго уровня в окончательном виде:

$$\frac{\partial w^{NL}{}_M(x(l_0),l(l_0),a(l_0))}{\partial (l_0)} = -\frac{D\mathcal{M}}{Da^M{}_{LN}} - \frac{D\mathcal{M}}{\partial S}\cdot w^{NL}{}_M -$$
$$- \frac{Dx^Q}{\partial (l_0)}\cdot\left(-m^L{}_M\cdot\delta^N{}_Q + w^{IL}{}_M\cdot A^N{}_{IQ} + w^{NL}{}_P\cdot A^P{}_{MQ}\right) - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial (l_0)}\cdot\left(w^{NL}{}_Q\cdot\delta^I{}_M - w^{IL}{}_M\cdot\delta^N{}_Q\right). \qquad (72)$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

VII. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ТРЕТЬЕГО УРОВНЯ

Здесь рассмотрим уравнения динамики третьего уровня в общем случае. Напомним, что указанные уравнения являются следствием следующих условий

$$\frac{Dw'(x,l,a)}{Dx} = 0\,, \qquad \frac{Dw'(x,l,a)}{Dl} = 0\,, \qquad \frac{Dw'(x,l,a)}{Da} = 0\,.$$

1. Первое уравнение динамики

Первое уравнение динамики третьего уровня имеет вид (50):

$$\frac{\partial p(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial a_0} = -\left(\frac{D\mathcal{W}(x,l,a,S,p,m,w)}{Dx} + \frac{D\mathcal{W}(x,l,a,S,p,m,w)}{\partial S}\cdot p + \right.$$
$$\left. + \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}\cdot[P,P]S + \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}\cdot + [P,M]S\frac{Da(a_0)}{\partial a_0}\cdot[P,W]S\right).$$

Запишем это уравнение в индексной форме для вектора действия $S^K{}_{PR}$:

$$\frac{\partial p^K{}_{PRM}(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial (a_0)^K{}_{PR}} = -\frac{D\mathcal{W}^K{}_{PR}{}^{RP}{}_K}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{W}^K{}_{PR}{}^{RP}{}_K}{\partial S^A{}_{TS}}\cdot p^A{}_{TSM} -$$
$$-\frac{Dx^Q}{\partial (a_0)^K{}_{PR}}\cdot[P_M(P_Q)]S^K{}_{PR} - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial (a_0)^K{}_{PR}}\cdot[P_M(M^I{}_Q)]S^K{}_{PR} - \frac{Da^Q{}_{LI}}{\partial a^K{}_{PR}}\cdot[P_M(W^{IL}{}_Q)]S^K{}_{PR}\,.$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (48). Получим первое уравнение динамики третьего уровня в окончательном виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_M(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial (a_0)} &= -\frac{D\mathcal{W}}{Dx^M} - p_M\cdot\frac{D\mathcal{W}}{\partial S} - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial (a_0)}\cdot\left(p_I\cdot T^I{}_{[MQ]} + m^N{}_I\cdot F^I{}_{N[MQ]} + w^{IL}{}_N\cdot F^N{}_{LI[MQ]}\right) - \\ &- \frac{Dl^Q{}_I}{\partial (a_0)}\cdot\left(p_Q\cdot\delta^I{}_M + m^N{}_P\cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M + w^{LP}{}_N\cdot G^N{}_{PLQ}{}^I{}_M\right) - \\ &- \frac{Da^Q{}_{LI}}{\partial (a_0)}\cdot\left(m^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - w^{NL}{}_Q\cdot A^I{}_{NM} - w^{IL}{}_N\cdot A^N{}_{QM}\right).\end{aligned} \tag{73}$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

2. Второе уравнение динамики

Второе уравнение динамики третьего уровня имеет вид (52):

$$\frac{\partial m(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial a_0} = -\left(\frac{D\mathcal{W}(x,l,a,S,p,m,w)}{Dl} + \frac{D\mathcal{W}(x,l,a,S,p,m,w)}{\partial S}\cdot m + \right.$$
$$\left. + \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}\cdot[M,P]S + \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}\cdot[M,M]S + \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}\cdot[M,W]S\right).$$

Запишем это уравнение в индексной форме для вектора действия $S^K{}_{PR}$:

$$\frac{\partial m^K{}_{PR}{}^L{}_M(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial (a_0)^K{}_{PR}} = -\frac{D\mathcal{W}^K{}_{PR}{}^{RP}{}_K}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{W}^K{}_{PR}{}^{RP}{}_K}{\partial S^A{}_{TS}}\cdot m^A{}_{TS}{}^L{}_N -$$
$$-\frac{Dx^Q}{\partial (a_0)^K{}_{PR}}\cdot[M^L{}_M(P_Q)]S^K{}_{PR} - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial (a_0)^K{}_{PR}}\cdot[M^L{}_M(M^I{}_Q)]S^K{}_{PR} - \frac{Da^Q{}_{NI}}{\partial a^K{}_{PR}}\cdot[M^L{}_M(W^{IN}{}_Q)]S^K{}_{PR}\,.$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (66). Получим второе уравнение динамики третьего уровня в окончательном виде:

$$\frac{\partial m^L{}_M(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial(a_0)} = -\frac{D\mathcal{W}}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot m^L{}_M -$$
$$-\frac{Dx^Q}{\partial(a_0)}\cdot\Big(-p_M\cdot\delta^L{}_Q - m^N{}_I\cdot G^I{}_{NM}{}^L{}_Q - w^{IP}{}_N\cdot G^N{}_{PIM}{}^L{}_Q\Big) -$$
$$-\frac{Dl^Q{}_I}{\partial(a_0)}\cdot\Big(m^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - m^I{}_M\cdot\delta^L{}_Q\Big) + \frac{Da^Q{}_{NI}}{\partial(a_0)}\cdot\Big(-w^{IN}{}_M\cdot\delta^L{}_Q + w^{LN}{}_Q\cdot\delta^I{}_M\Big)\,. \qquad (74)$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

3. Третье уравнение динамики

Третье уравнение динамики третьего уровня имеет вид (54):

$$\frac{\partial w(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = -\Bigg(\frac{D\mathcal{W}(x,l,a,S,p,m,w)}{Da} + \frac{D\mathcal{W}(x,l,a,S,p,m,w)}{\partial S}\cdot w +$$
$$+\frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}\cdot[W,P]S + \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}\cdot[W,M]S + \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}\cdot[W,W]S\Bigg)\,.$$

Запишем это уравнение в индексной форме для вектора действия $S^K{}_{PR}$:

$$\frac{\partial w^K{}_{PR}{}^{NL}{}_M(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^K{}_{PR}} = -\frac{D\mathcal{W}^K{}_{PR}{}^{RP}{}_K}{Da^M{}_{LN}} - \frac{D\mathcal{W}^K{}_{PR}{}^{PR}{}_K}{\partial S^A{}_{TS}}\cdot w^A{}_{TS}{}^{NL}{}_M -$$
$$-\frac{Dx^Q}{\partial(a_0)^K{}_{PR}}\cdot[W^{NL}{}_M(P_Q)]S^K{}_{PR} - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial(a_0)^K{}_{PR}}\cdot[W^{NL}{}_M(M^I{}_Q)]S^K{}_{PR} - \frac{Da^Q{}_{TI}}{\partial a^K{}_{PR}}\cdot[W^{NL}{}_M(W^{IT}{}_Q)]S^K{}_{PR}\,.$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (68). Получим третье уравнение динамики третьего уровня в окончательном виде:

$$\frac{\partial w^{NL}{}_M(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial(a_0)} = -\frac{D\mathcal{W}}{Da^M{}_{LN}} - \frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot w^{NL}{}_M -$$
$$-\frac{Dx^Q}{\partial(a_0)}\cdot\Big(-m^L{}_M\cdot\delta^N{}_Q + w^{IL}{}_M\cdot A^N{}_{IQ} + w^{NL}{}_P\cdot A^P{}_{MQ}\Big) - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial(a_0)}\cdot\Big(w^{NL}{}_Q\cdot\delta^I{}_M - w^{IL}{}_M\cdot\delta^N{}_Q\Big)\,. \qquad (75)$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

VIII. УСЛОВИЕ СОВМЕСТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

Условие совместности уравнений динамики это не что иное, как условие интегрируемости дифференциального уравнения

$$dS(z) = p\cdot Dz\,,$$

а именно

$$d_2d_1S(z) - d_1d_2S(z) = 0\,,$$

записанное с использованием уравнений динамики.

Прежде, чем рассмотреть условие совместности уравнений динамики, выведем уравнения динамики, используя обобщенную кинематическую переменную, обобщенное действие и обобщенный импульс. Как и прежде введем обобщенную кинематическую переменную $z^\alpha \sim (x,l,a)$. Кроме того, введем обобщенное действие|[4]

$$S^\epsilon \sim (S^I, S^I{}_K, S^I{}_{KL})\,.$$

---

[4] В частном случае обобщенное действие S^α включает в себя действие фундаментальных частиц и промежуточных частиц первого и второго рода (см. Лекции 14, 17, 21)

Соответственно обобщенный импульс определяется следующим образом

$$p^{\epsilon}{}_{\alpha}(z) = \frac{\partial S^{\epsilon}(z)}{Dz^{\alpha}} \sim \left(\frac{\partial S(x,l,a)}{Dx}, \frac{\partial S(x,l,a)}{Dl}, \frac{\partial S(x,l,a)}{Da}\right) \sim$$
$$\sim \Big(p(z), m(z), w(z)\Big) \sim \Big(P\Big(S(x,l,a)\Big), M\Big(S(x,l,a)\Big), W\Big(S(x,l,a)\Big)\Big)\,.$$

Для переменных z^{α}, $S^{\epsilon}(z)$, $p^{\varepsilon}{}_{\alpha}(z)$ имеют место преобразования

$$\begin{aligned} z^{\alpha}(z_0) &= \mathcal{Z}^{\alpha}(z_0)\,, \\ S'^{\epsilon}(z) &= \mathcal{S}^{\epsilon}(z, S(z))\,, \\ p'^{\epsilon}{}_{\alpha}(z) &= \mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z, S(z), p(z))\,. \end{aligned}$$

При выводе уравнений динамики будем исходить из условия

$$\frac{Dp'^{\epsilon}{}_{\alpha}(z)}{Dz^{\beta}} = 0 \tag{76}$$

Заметим, что это условие сильнее условия (45), которое использовалось в предыдущем разделе. Отсюда

$$\frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{Dz^{\beta}} + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial S^{\delta}} \cdot p^{\delta}{}_{\beta}(z) + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial p^{\delta}{}_{\gamma}} \cdot \frac{\partial p^{\delta}{}_{\gamma}(z)}{Dz^{\beta}} = 0\,.$$

В этом выражении используем перестановку

$$\frac{\partial p^{\delta}{}_{\gamma}(z)}{Dz^{\beta}} = \frac{\partial p^{\delta}{}_{\beta}(z)}{Dz^{\gamma}} + [P_{\gamma}, P_{\beta}]S^{\delta}(z)\,.$$

Получим

$$\frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{Dz^{\beta}} + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial S^{\delta}} \cdot p^{\delta}{}_{\beta}(z) + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial p^{\delta}{}_{\gamma}} \cdot \frac{\partial p^{\delta}{}_{\beta}(z)}{Dz^{\gamma}} + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial p^{\delta}{}_{\gamma}} \cdot [P_{\gamma}, P_{\beta}]S^{\delta}(z) = 0\,.$$

Рассматривая это выражение как тождество

$$\frac{Dz^{\gamma}(z_0)}{\partial z_0{}^{\alpha}} \cdot \frac{\partial p^{\epsilon}{}_{\beta}(z)}{Dz^{\gamma}} - \frac{\partial p^{\epsilon}{}_{\beta}(z_0)}{\partial z_0{}^{\alpha}} = 0\,,$$

получим уравнения динамики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{\epsilon}{}_{\beta}(z_0)}{\partial z_0{}^{\alpha}} &= -\left(\frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{Dz^{\beta}} + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial S^{\delta}} \cdot p^{\delta}{}_{\beta}(z) + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial p^{\delta}{}_{\gamma}} \cdot [P_{\gamma}, P_{\beta}]S^{\delta}(z)\right), \\ \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial p^{\delta}{}_{\gamma}} &= \frac{Dz^{\gamma}(z_0)}{\partial z_0{}^{\alpha}}\delta^{\epsilon}{}_{\delta}\,. \end{aligned} \tag{77}$$

Точнее нужно сказать так: полученные уравнения динамики соответствуют "сильному"условию (59). Если условие (59) ослабить, выполнив свертку по индексам ϵ и α, то есть, исходить из условия

$$\frac{Dp'^{\alpha}{}_{\alpha}(z)}{Dz^{\beta}} = 0\,, \tag{78}$$

то уравнения динамики приобретают вид, близкий к тому, который рассматривался в предыдущих разделах,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{\alpha}{}_{\beta}(z_0)}{\partial z_0{}^{\alpha}} &= -\left(\frac{D\mathcal{P}^{\alpha}{}_{\alpha}(z,S,p)}{Dz^{\beta}} + \frac{D\mathcal{P}^{\alpha}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial S^{\delta}} \cdot p^{\delta}{}_{\beta}(z) + \frac{D\mathcal{P}^{\alpha}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial p^{\delta}{}_{\gamma}} \cdot [P_{\gamma}, P_{\beta}]S^{\delta}(z)\right), \\ \frac{D\mathcal{P}^{\alpha}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial p^{\delta}{}_{\gamma}} &= \frac{Dz^{\gamma}(z_0)}{\partial z_0{}^{\delta}}\,. \end{aligned} \tag{79}$$

Точнее нужно сказать так: ранее вместо одного условия (61) использовались три условия

$$\frac{Dp'(z)}{Dz^{\beta}} = 0\,, \quad \frac{Dm'(z)}{Dz^{\beta}} = 0\,, \quad \frac{Dw'(z)}{Dz^{\beta}} = 0\,.$$

Перейдем теперь к выводу условия совместности уравнений динамики. Исходным для нас является условие интегрируемости дифференциального уравнения

$$dS^{\epsilon}(z) = p^{\epsilon}{}_{\gamma} \cdot Dz^{\gamma} \ :$$

$$d_2 d_1 S^{\epsilon}(z) - d_1 d_2 S^{\epsilon}(z) = 0\,.$$

Откуда

$$d_2(p^{\epsilon}{}_{\gamma} \cdot D_1 z^{\gamma}) - d_1(p^{\epsilon}{}_{\gamma} \cdot D_2 z^{\gamma}) = 0\,.$$

Или

$$d_2(p^{\epsilon}{}_{\gamma}) \cdot D_1 z^{\gamma} - d_1(p^{\epsilon}{}_{\gamma}) \cdot D_2 z^{\gamma} + p^{\epsilon}{}_{\gamma} \cdot (d_2 D_1 z^{\gamma} - d_1 D_2 z^{\gamma}) = 0\,.$$

Или

$$d_2(p^{\epsilon}{}_{\gamma}) \cdot D_1 z^{\gamma} - d_1(p^{\epsilon}{}_{\gamma}) \cdot D_2 z^{\gamma} = p^{\epsilon}{}_{\gamma} \cdot (d_1 \Lambda\, D_2 z^{\gamma})\,. \tag{80}$$

Учитывая при преобразовании правой части уравнения структуры в следующей форме

$$d_1 \Lambda\, D_2 z^{\gamma} = R^{\gamma}{}_{[\mu\nu} \cdot (D_1 z^{\nu} \cdot D_2 z^{\mu})$$

и переходя в (64) от дифференциалов к производным, получим[5]

$$\frac{Dz^{\gamma}(z_0)}{\partial z_0{}^{\alpha}} \cdot \frac{\partial p^{\epsilon}{}_{\gamma}(z_0)}{\partial z_0{}^{\beta}} - \frac{Dz^{\gamma}(z_0)}{\partial z_0{}^{\beta}} \cdot \frac{\partial p^{\epsilon}{}_{\gamma}(z_0)}{\partial z_0{}^{\alpha}} = p^{\epsilon}{}_{\gamma} \cdot R^{\gamma}{}_{[\mu\nu]} \cdot \frac{Dz^{\nu}(z_0)}{\partial z_0{}^{\alpha}} \cdot \frac{Dz^{\mu}(z_0)}{\partial z_0{}^{\beta}}\,.$$

Если теперь левую часть уравнения преобразовать с помощью уравнений динамики (61) и (63), то получим соотношения, которые назовем *условием совместности уравнений динамики*:

$$\begin{aligned}
&\frac{D\mathcal{P}(z,S,p)}{\partial p^{\beta}{}_{\gamma}} \cdot \left(\frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{Dz^{\gamma}} + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial S^{\delta}} \cdot p^{\delta}{}_{\gamma}(z) + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial p^{\kappa}{}_{\delta}} \cdot [P_{\delta}, P_{\gamma}] S^{\kappa}(z) \right) - \\
&- \frac{D\mathcal{P}(z,S,p)}{\partial p^{\alpha}{}_{\gamma}} \cdot \left(\frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\beta}(z,S,p)}{Dz^{\gamma}} + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\beta}(z,S,p)}{\partial S^{\delta}} \cdot p^{\delta}{}_{\gamma}(z) + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\beta}(z,S,p)}{\partial p^{\kappa}{}_{\delta}} \cdot [P_{\delta}, P_{\gamma}] S^{\kappa}(z) \right) = \\
&= p^{\epsilon}{}_{\gamma} \cdot R^{\gamma}{}_{[\mu\nu]} \cdot \frac{D\mathcal{P}(z,S,p)}{\partial p^{\alpha}{}_{\nu}} \cdot \frac{D\mathcal{P}(z,S,p)}{\partial p\beta_{\mu}}\,.
\end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\kappa}{}_{\kappa}$. Используя перестановочные соотношения (смотрите примечание на стр.19), условие совместности можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}
&\frac{D\mathcal{P}(z,S,p)}{\partial p^{\beta}{}_{\gamma}} \cdot \left(\frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{Dz^{\gamma}} + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial S^{\delta}} \cdot p^{\delta}{}_{\gamma}(z) + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\alpha}(z,S,p)}{\partial p^{\kappa}{}_{\delta}} \cdot p^{\kappa}{}_{\lambda} \cdot R^{\lambda}{}_{[\delta\gamma]} \right) - \\
&- \frac{D\mathcal{P}(z,S,p)}{\partial p^{\alpha}{}_{\gamma}} \cdot \left(\frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\beta}(z,S,p)}{Dz^{\gamma}} + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\beta}(z,S,p)}{\partial S^{\delta}} \cdot p^{\delta}{}_{\gamma}(z) + \frac{D\mathcal{P}^{\epsilon}{}_{\beta}(z,S,p)}{\partial p^{\kappa}{}_{\delta}} \cdot p^{\kappa}{}_{\lambda} \cdot R^{\lambda}{}_{[\delta\gamma]} \right) = \\
&= p^{\epsilon}{}_{\gamma} \cdot R^{\gamma}{}_{[\mu\nu]} \cdot \frac{D\mathcal{P}(z,S,p)}{\partial p^{\alpha}{}_{\nu}} \cdot \frac{D\mathcal{P}(z,S,p)}{\partial p\beta_{\mu}}\,.
\end{aligned}$$

---

[5] Заметим, что из условия интегрируемости (64) и уравнений структуры следуют перестановочные соотношения в следующем виде

$$[P_{\delta}, P_{\mu}] S^{\epsilon}(z) = p^{\epsilon}{}_{\gamma} \cdot R^{\gamma}{}_{[\mu\delta]}\,.$$

IX. ОБСУЖДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

1. Динамика первого уровня

Уравнения динамики первого уровня определяют зависимости импульса, момента и второго момента физического объекта от координат обобщенного пространства-времени. Так как координаты действия, по отношению к которому формулируются эти уравнения, подобны координатам обобщенного пространства-времени, то следует считать, что указанные уравнения относятся к фундаментальным частицам или подобным им физическим объектам и их частным случаям.

1. *Первое уравнение*

Первое равнение динамики первого уровня определяет зависимость импульса физического объекта от координат обобщенного пространства-времени.

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0} &= -\frac{D\mathcal{P}}{Dx^M}-\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot p_M-\frac{Dx^Q}{\partial x_0}\cdot\Big(p_I\cdot T^I{}_{[MQ]}+m^N{}_I\cdot F^I{}_{N[MQ]}+w^{IL}{}_N\cdot F^N{}_{LI[MQ]}\Big)-\\ &-\frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0}\cdot\Big(p_Q\cdot\delta^I{}_M+m^N{}_P\cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M+w^{LP}{}_N\cdot G^N{}_{PLQ}{}^I{}_M\Big)-\\ &-\frac{Da^Q{}_{LI}}{\partial x_0}\cdot\Big(m^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M-w^{NL}{}_Q\cdot A^I{}_{NM}-w^{IL}{}_N\cdot A^N{}_{QM}\Big)\,,\end{aligned}\tag{81}$$

Рассмотрим последовательно роль каждого из слагаемых в правой части уравнения.

1. Рассмотрим первое уравнение, в котором правая часть ограничена первым слагаемым

$$\frac{\partial p_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}=-\frac{D\mathcal{P}}{Dx^M}\,.$$

Это уравнение в частном случае, когда координаты x^I сводятся к трем пространственным координатам x^a, координаты x_0 сводятся к координате времени, а действие имеет одну времени-подобную компоненту, записывается следующим образом

$$\frac{\partial p_a(t)}{\partial t}=-\frac{D\mathcal{H}}{Dx^a}\,,$$

где введено обозначение $\mathcal{H}=\mathcal{P}^4{}_4$. А это уравнение есть не что иное, как уравнение Гамильтона, рассмотренное во введении.

2. Выделим из правой части уравнения (81) второе слагаемое и запишем это уравнение в следующем виде

$$\frac{\partial p_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}=-\frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot p_M\,.$$

Приведенное уравнение представляет собой задачу на собственные значения оператора

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\,.$$

Таким образом, следует считать, что второе слагаемое в (81) ответственно за квантовые явления в распределении импульса физического объекта в обобщенном пространстве-времени.

3. Обратимся к третьему слагаемому в правой части уравнения (81) и запишем это уравнение в следующем виде

$$\frac{\partial p_M(x(x_0),l(x_0),a(x_0))}{\partial x_0}=-\frac{Dx^Q}{\partial x_0}\cdot p_I\cdot T^I{}_{[MQ]}\,.$$

Пусть частном случае координаты x^I сводятся к координатам четырехмерного пространства-времени x^i, координаты x_0 сводятся к пространственно-временному инварианту - интервалу s , а действие имеет одну компоненту, подобную пространственно-временному интервалу. Тогда вышеуказанное уравнение приобретает вид уравнения движения точечной частицы

$$\frac{\partial p_i(s)}{\partial s}=-p_k\cdot T^k{}_{[in]}\cdot\frac{dx^n}{\partial s}\,.$$

Для точечной массивной частицы импульс пропорционален скорости движения частицы

$$p_i(s) = m \cdot \frac{dx_i}{\partial s} = m \cdot v_i(s)\,,$$

где m - масса частицы. И уравнение движения приобретает вид

$$\frac{\partial v_i(s)}{\partial s} = -v_k \cdot T^k{}_{[in]} \cdot v^n\,.$$

Отсюда видно, что уравнение движения не зависит от массы частицы. Таким образом, следует считать, что благодаря слагаемому

$$\frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot p_I \cdot T^I{}_{[MQ]}$$

уравнение (81) оказывается пригодным для описания движения физического объекта в гравитационном поле.

4. Рассмотрим следующее слагаемое

$$-\frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot m^N{}_I \cdot F^I{}_{N[MQ]}\,.$$

Рассмотрим частный случай, когда координаты x^I сводятся к координатам трехмерного пространства x^a, координаты x_0 сводятся к пространственно-временному инварианту - интервалу s , а действие имеет одну компоненту, подобную пространственно-временному интервалу. Тогда вышеуказанное слагаемое приобретает вид

$$-\frac{dx^b}{ds} \cdot m^d{}_c \cdot F^c{}_{d[ab]}\,.$$

Здесь латинские индексы принимают значения 1, 2, 3. Заметим, что момент

$$\frac{\partial S}{\partial l^c{}_d} = m^d{}_c$$

имеет двоякую интерпретацию. В том случае, если преобразования $l^c{}_d$ представляют собой левые повороты, то момент $m^d{}_c$ это общепринятый момент импульса. В том случае, если преобразования $l^c{}_d$ представляют собой правые повороты, то момент $m^d{}_c$ это электрический заряд. В соответствии с разделом V Лекции 19 рассмотрим правый поворот в плоскости 21. В этом случае

$$m_{21} = \frac{\partial S}{\partial l^{21}} = -e_{21}$$

- электрический заряд (см. Лекцию 27 раздел III.2). Тогда тензор $F^{12}{}_{[ab]}$ это тензор магнитного поля. и рассматриваемое слагаемое приобретает вид[6]

$$e \cdot F_{[ab]} \frac{dx^b}{ds}\,.$$

А это есть сила Лоренца.

Рассуждая аналогичным образом, по отношению к калибровочному полю источником которого является многокомпонентный заряд q^α, получим обобщение формулы Лоренца

$$q^\alpha \cdot F^\alpha{}_{[ik]} \frac{dx^k}{ds}\,,$$

где $F^\alpha{}_{[ik]}$ - тензор Янга-Миллса.

Отсюда общее соображение относительно рассматриваемого слагаемого состоит в том, что оно описывает взаимодействие движущегося заряда(момента) с калибровочным полем.

---

[6] Здесь зарядовые индексы опущены.

5. Пятое слагаемое

$$-\frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot w^{IL}{}_N \cdot F^N{}_{LI[MQ]} \,.$$

по своей структуре похоже на предыдущее. И можно считать, что оно также описывает взаимодействие движущегося второго момента, либо заряда, эквивалентного второму моменту, с калибровочным полем.

6. Обратимся к шестому слагаемому. Если остальными слагаемыми пренебречь, то уравнение динамики приобретает вид

$$\frac{\partial p_M(x_0)}{\partial x_0} = -\frac{Dl^Q{}_M}{\partial x_0} \cdot p_Q \,.$$

А это уравнение представляет собой производную от импульса, полученного из исходного линейным преобразованием, зависящим от координат x_0:

$$p'_M(x_0) = -p_Q \cdot l^Q{}_M(x_0) \,.$$

7. Рассмотрим седьмое слагаемое

$$-\frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0} \cdot m^N{}_P \cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M \,.$$

Здесь

$$G^P{}_{NQ}{}^I{}_M = A^P{}_{NQ} \cdot \delta^I{}_M - A^I{}_{NM} \cdot \delta^P{}_Q + A^P{}_{QM} \cdot \delta^I{}_N \,,$$

поэтому рассматриваемое слагаемое включает в себя три. Для понимания существа дела остановимся только на первом из них, то есть рассмотрим следующее выражение

$$-m^N{}_P \cdot A^P{}_{NQ} \cdot \frac{Dl^Q{}_M}{\partial x_0} \,.$$

Рассмотрим частный случай, когда координаты x^I сводятся к координатам трехмерного пространства x^a и времени t , координаты x_0 сводятся к координате времени, а действие имеет одну компоненту, подобную времени. Кроме того, положим, что момент $m^N{}_P$ представляет собой электрический заряд $-e_{21}$ (смотрите п.4 настоящего раздела) Тогда вышеуказанное слагаемое в частном случае приобретает вид

$$e_{21} \cdot A^{12}{}_i \cdot \frac{Dl^i{}_a}{\partial t} \,.$$

Здесь индекс a принимает значения 1,2,3, индекс i принимает значения 1,2,3,4. В рассматриваемом случае потенциал $A^{12}{}_i$ это потенциал электромагнитного поля, включающий в себя компоненты

- потенциал электрического поля

$$\varphi = A^{12}{}_4$$

- и потенциал магнитного поля

$$A_b = A^{12}{}_b \,.$$

В результате рассматриваемое слагаемое приобретает вид

$$e \cdot \varphi \cdot \frac{dl^4{}_a}{dt} + e \cdot A_b \cdot \frac{dl^b{}_a}{dt} \,.$$

Выражение

$$\frac{dl^4{}_a}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx_a}{dt} = a_a$$

это ускорение, с которым движется заряд, а выражение

$$\frac{dl^b{}_a}{dt} = \Omega^b{}_a$$

это угловая скорость, с которой вращается заряд, если положить, что преобразование $l^b{}_a$ это поворот в плоскости ab.

Таким образом, при ускоренном движении электрического заряда в электромагнитном поле на него помимо силы Лоренца действует сила, пропорциональная ускорению и потенциалу электрического поля

$$e \cdot \varphi \cdot a_a \,.$$

Этот вывод согласуется с результатом раздела 4.2 Лекции 20, заключающемся в том, что в ускоренной системе отсчета к тензору электромагнитного поля добавляется слагаемое, пропорциональное произведению ускорения на электрический потенциал.

При вращении электрического заряда в электромагнитном поле на него действует сила, пропорциональная угловой скорости и потенциалу магнитного поля

$$e \cdot A_b \cdot \Omega^b{}_a \,.$$

Отсюда общее соображение относительно седьмого слагаемого состоит в том, что оно описывает взаимодействие движущегося ускоренно или вращающегося заряда (момента) с калибровочным полем.

На этом мы закончим обсуждение слагаемых правой части первого уравнения.

2. *Второе уравнение*

Второе уравнение динамики первого уровня определяет зависимость момента физического объекта от координат обобщенного пространства-времени.

$$\frac{\partial m^L{}_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = -\frac{D\mathcal{P}}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{P}}{\partial S} \cdot m^L{}_M - \frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot \Big(-p_M \cdot \delta^L{}_Q - m^N{}_I \cdot G^I{}_{NM}{}^L{}_Q - w^{IP}{}_N \cdot G^N{}_{PIM}{}^L{}_Q\Big) -$$
$$- \frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0} \cdot \Big(m^L{}_Q \cdot \delta^I{}_M - m^I{}_M \cdot \delta^L{}_Q\Big) - \frac{Da^Q{}_{NI}}{\partial x_0} \cdot \Big(-w^{IN}{}_M \cdot \delta^L{}_Q + w^{LN}{}_Q \cdot \delta^I{}_M\Big) \,. \qquad (82)$$

Для выяснения сути этого уравнения проанализируем его следующий частный случай

$$\frac{\partial m^L{}_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = -\frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0} \cdot \Big(m^L{}_Q \cdot \delta^I{}_M - m^I{}_M \cdot \delta^L{}_Q\Big) \,.$$

Рассмотрим частный случай этого уравнения, когда координаты x^I сводятся к трем пространственным координатам x^a, координаты x_0 сводятся к координате времени, а действие имеет одну времени-подобную компоненту. Имеем

$$\frac{dm^a{}_b(t)}{dt} = -\frac{dl^c{}_b}{dt} \cdot m^a{}_c + \frac{dl^a{}_d}{dt} \cdot m^d{}_b \,.$$

Полагая, что преобразование $l^c{}_b$ - это поворот в плоскости cd, имеем

$$\frac{dl^c{}_b}{dt} = \Omega^c{}_b \; - \; \text{угловая скорость вращения в плоскости cd} \,.$$

В этом обозначении рассматриваемое уравнение приобретает вид

$$\frac{dm^a{}_b(t)}{dt} = \Omega^a{}_d \cdot m^d{}_b - m^a{}_c \cdot \Omega^c{}_b \,.$$

Разложим это уравнение на компоненты по трем плоскостям (12), (23), (31). При этом учтем, что для поворотов

$$m^a{}_b = -m_b{}^a \,, \quad \Omega^a{}_b = -\Omega_b{}^a \,.$$

Получим следующую систему уравнений

$$\frac{dm^1{}_2(t)}{dt} = \Omega^1{}_3 \cdot m^3{}_2 - m^1{}_3 \cdot \Omega^3{}_2$$
$$\frac{dm^2{}_3(t)}{dt} = \Omega^2{}_1 \cdot m^1{}_3 - m^2{}_1 \cdot \Omega^1{}_3$$
$$\frac{dm^3{}_1(t)}{dt} = \Omega^3{}_2 \cdot m^2{}_1 - m^3{}_2 \cdot \Omega^2{}_1 \ .$$

Полагая, что поворот в указанных плоскостях есть поворот вокруг главных осей инерции, имеем

$$m^1{}_2 = J'\Omega^1{}_2\,, \quad m^2{}_3 = J''\Omega^2{}_3\,, \quad m^3{}_1 = J'''\Omega^3{}_1\,.$$

Здесь через J обозначены главные моменты инерции. С учетом этих соотношений система уравнений приобретает вид

$$J'\frac{d\Omega^1{}_2(t)}{dt} = (J'' - J''')\Omega^1{}_3 \cdot \Omega^3{}_2\,,$$
$$J''\frac{d\Omega^2{}_3(t)}{dt} = (J''' - J')\Omega^2{}_1 \cdot \Omega^1{}_3\,,$$
$$J'''\frac{d\Omega^3{}_1(t)}{dt} = (J' - J'')\Omega^3{}_2 \cdot \Omega^2{}_1\,.$$

В результате мы получили уравнения Эйлера для свободного вращения твердого тела с закрепленной точкой.

3. *Третье уравнение*

Третье уравнение динамики первого уровня определяет зависимость второго момента физического объекта от координат обобщенного пространства-времени. Третье уравнения динамики первого уровня и его частные случаи в современной физике не используются.

$$\frac{\partial w^{NL}{}_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = -\frac{D\mathcal{P}}{Da^M{}_{LN}} - \frac{D\mathcal{P}}{\partial S}\cdot w^{NL}{}_M -$$
$$-\frac{Dx^Q}{\partial x_0}\cdot\Big(-m^L{}_M\cdot\delta^N{}_Q + w^{IL}{}_M\cdot A^N{}_{IQ} + w^{NL}{}_P\cdot A^P{}_{MQ}\Big) - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial x_0}\cdot\Big(w^{NL}{}_Q\cdot\delta^I{}_M - w^{IL}{}_M\cdot\delta^N{}_Q\Big)\,. \qquad (83)$$

———————————————————

Отметим, что искомые функции: импульс, момент и второй момент входят в правые части всех трех уравнений первого уровня. Поэтому указанные уравнения составляют систему, которая распадается на независимые уравнения при значительных упрощающих условиях. Кроме того, отметим, что во все три уравнения входит одна "функция Гамильтона" $\mathcal{P}$.

2. Динамика второго уровня

Уравнения динамики второго уровня определяют зависимости импульса, момента и второго момента физического объекта от координат линейных преобразований обобщенного пространства-времени (поворотов, дилатаций, бустов). Так как координаты действия, по отношению к которому формулируются эти уравнения, подобны координатам линейных преобразований обобщенного пространства-времени, то следует считать, что указанные уравнения относятся к промежуточным частицам первого рода или подобным им физическим объектам и их частным случаям.

Уравнения динамики второго уровня и его частные случаи в современной физике не используются. Однако анализ роли слагаемых правой части уравнений выполняется подобно тому, как это было сделано в разделе IX.1 для уравнений динамики первого уровня.

1. Первое уравнение

Первое уравнение динамики второго уровня определяет зависимость импульса физического объекта от координат линейных преобразований обобщенного пространства-времени (поворотов, дилатаций, бустов).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial(l_0)} &= -\frac{D\mathcal{M}}{Dx^M} - \frac{D\mathcal{M}}{\partial S} \cdot p_M - \\
&- \frac{Dx^Q}{\partial(l_0)} \cdot \Big(p_I \cdot T^I{}_{[MQ]} + m^N{}_I \cdot F^I{}_{N[MQ]} + w^{IL}{}_N \cdot F^N{}_{LI[MQ]}\Big) - \\
&- \frac{Dl^Q{}_I}{\partial(l_0)} \cdot \Big(p_Q \cdot \delta^I{}_M + m^N{}_P \cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M + w^{LP}{}_N \cdot G^N{}_{PLQ}{}^I{}_M\Big) - \\
&- \frac{Da^Q{}_{LI}}{\partial(l_0)} \cdot \Big(m^L{}_Q \cdot \delta^I{}_M - w^{NL}{}_Q \cdot A^I{}_{NM} - w^{IL}{}_N \cdot A^N{}_{QM}\Big)\,. \qquad (84)
\end{aligned}$$

2. Второе уравнение

Второе уравнение динамики второго уровня определяет зависимость момента физического объекта от координат линейных преобразований обобщенного пространства-времени (поворотов, дилатаций, бустов).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m^L{}_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial(l_0)} &= -\frac{D\mathcal{M}}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{M}}{\partial S} \cdot m^L{}_M - \\
&- \frac{Dx^Q}{\partial(l_0)} \cdot \Big(-p_M \cdot \delta^L{}_Q - m^N{}_I \cdot G^I{}_{NM}{}^L{}_Q - w^{IP}{}_N \cdot G^N{}_{PIM}{}^L{}_Q\Big) - \\
&- \frac{Dl^Q{}_I}{\partial(l_0)} \cdot \Big(m^L{}_Q \cdot \delta^I{}_M - m^I{}_M \cdot \delta^L{}_Q\Big) + \frac{Da^Q{}_{NI}}{\partial(l_0)} \cdot \Big(-w^{IN}{}_M \cdot \delta^L{}_Q + w^{LN}{}_Q \cdot \delta^I{}_M\Big)\,. \qquad (85)
\end{aligned}$$

3. Третье уравнение

Третье уравнение динамики второго уровня определяет зависимость второго момента физического объекта от координат линейных преобразований обобщенного пространства-времени (поворотов, дилатаций, бустов).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{NL}{}_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial(l_0)} &= -\frac{D\mathcal{M}}{Da^M{}_{LN}} - \frac{D\mathcal{M}}{\partial S} \cdot w^{NL}{}_M - \\
&- \frac{Dx^Q}{\partial(l_0)} \cdot \Big(-m^L{}_M \cdot \delta^N{}_Q + w^{IL}{}_M \cdot A^N{}_{IQ} + w^{NL}{}_P \cdot A^P{}_{MQ}\Big) - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial(l_0)} \cdot \Big(w^{NL}{}_Q \cdot \delta^I{}_M - w^{IL}{}_M \cdot \delta^N{}_Q\Big)\,. \qquad (86)
\end{aligned}$$

Отметим, что искомые функции: импульс, момент и второй момент входят в правые части всех трех уравнений второго уровня. Поэтому указанные уравнения составляют систему, которая распадается на независимые уравнения при значительных упрощающих условиях. Кроме того, отметим, что во все три уравнения входит одна "функция Гамильтона" $\mathcal{M}$.

3. Динамика третьего уровня

Уравнения динамики третьего уровня определяют зависимости импульса, момента и второго момента физического объекта от координат билинейных преобразований обобщенного пространства-времени (телесных поворотов, вращений, ускорений). Так как координаты действия, по отношению к которому формулируются эти уравнения, подобны координатам билинейных преобразований обобщенного пространства-времени, то следует считать, что указанные уравнения относятся к промежуточным частицам второго рода или подобным им физическим объектам и их частным случаям.

Уравнения динамики третьего уровня и его частные случаи в современной физике не используются. Однако анализ роли слагаемых правой части уравнений выполняется подобно тому, как это было сделано в разделе IX.1 для уравнений динамики первого уровня.

1. *Первое уравнение*

Первое уравнение динамики третьего уровня определяет зависимость импульса физического объекта от координат билинейных преобразований обобщенного пространства-времени (телесных поворотов, вращений, ускорений).

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_M(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial(a_0)} &= -\frac{D\mathcal{W}}{Dx^M} - p_M\cdot\frac{D\mathcal{W}}{\partial S} - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial(a_0)}\cdot\Big(p_I\cdot T^I{}_{[MQ]} + m^N{}_I\cdot F^I{}_{N[MQ]} + w^{IL}{}_N\cdot F^N{}_{LI[MQ]}\Big) - \\ &- \frac{Dl^Q{}_I}{\partial(a_0)}\cdot\Big(p_Q\cdot\delta^I{}_M + m^N{}_P\cdot G^P{}_{NQ}{}^I{}_M + w^{LP}{}_N\cdot G^N{}_{PLQ}{}^I{}_M\Big) - \\ &- \frac{Da^Q{}_{LI}}{\partial(a_0)}\cdot\Big(m^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - w^{NL}{}_Q\cdot A^I{}_{NM} - w^{IL}{}_N\cdot A^N{}_{QM}\Big)\,. \end{aligned}\tag{87}$$

2. *Второе уравнение*

Второе уравнение динамики третьего уровня определяет зависимость момента физического объекта от координат билинейных преобразований обобщенного пространства-времени (телесных поворотов, вращений, ускорений).

$$\begin{aligned}\frac{\partial m^L{}_M(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial(a_0)} &= -\frac{D\mathcal{W}}{Dl^M{}_L} - \frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot m^L{}_M - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial(a_0)}\cdot\Big(-p_M\cdot\delta^L{}_Q - m^N{}_I\cdot G^I{}_{NM}{}^L{}_Q - w^{IP}{}_N\cdot G^N{}_{PIM}{}^L{}_Q\Big) - \\ &- \frac{Dl^Q{}_I}{\partial(a_0)}\cdot\Big(m^L{}_Q\cdot\delta^I{}_M - m^I{}_M\cdot\delta^L{}_Q\Big) + \frac{Da^Q{}_{NI}}{\partial(a_0)}\cdot\Big(-w^{IN}{}_M\cdot\delta^L{}_Q + w^{LN}{}_Q\cdot\delta^I{}_M\Big)\,. \end{aligned}\tag{88}$$

3. *Третье уравнение*

Третье уравнение динамики третьего уровня определяет зависимость второго момента физического объекта от координат билинейных преобразований обобщенного пространства-времени (телесных поворотов, вращений, ускорений).

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^{NL}{}_M(x(a_0),l(a_0),a(a_0))}{\partial(a_0)} &= -\frac{D\mathcal{W}}{Da^M{}_{LN}} - \frac{D\mathcal{W}}{\partial S}\cdot w^{NL}{}_M - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial(a_0)}\cdot\Big(-m^L{}_M\cdot\delta^N{}_Q + w^{IL}{}_M\cdot A^N{}_{IQ} + w^{NL}{}_P\cdot A^P{}_{MQ}\Big) - \frac{Dl^Q{}_I}{\partial(a_0)}\cdot\Big(w^{NL}{}_Q\cdot\delta^I{}_M - w^{IL}{}_M\cdot\delta^N{}_Q\Big)\,. \end{aligned}\tag{89}$$

Отметим, что искомые функции: импульс, момент и второй момент входят в правые части всех трех уравнений третьего уровня. Поэтому указанные уравнения составляют систему, которая распадается на независимые уравнения при значительных упрощающих условиях. Кроме того, отметим, что во все три уравнения входит одна "функция Гамильтона" $\mathcal{W}$.