Лекция 28. Перестановочные соотношения

А. А. Кецарис*

(17 сентября 2012)

В этой Лекции рассматриваются перестановочные соотношения операторов дифференцирования. Они являются следствием алгебраической структуры кинематического пространства и необходимы для вывода уравнений динамики.

I. ВВЕДЕНИЕ

Вывод уравнений динамики каждым из возможных методов (например, из принципа наименьшего действия или исходя из канонических преобразований) сопровождается перестановкой операторов дифференцирования. В том случае, если вывод уравнений динамики выполняется без учета алгебраических свойств пространства-времени и кинематического пространства, операторы дифференцирования представляют собой частные производные, а их перестановка не приводит к появлению дополнительных слагаемых и не влияет на конечный результат. В противном случае это не так. Для кинематических алгебр операторы дифференцирования не являются частными производными, а их перестановка представляет собой антисимметричные комбинации тензоров. В частности, этим объясняется то обстоятельство, что физические поля описываются антисимметричными тензорами. К ним относятся, например, тензор Максвелла, тензор кривизны, тензор Янга-Миллса.

В этой Лекции мы рассмотрим перестановочные соотношения операторов дифференцирования кинематической и второй кинематической алгебр как в свободном состоянии[1], так и в калибровочном поле. А в следующей лекции мы установим связь между уравнениями динамики и перестановочными соотношениями операторов дифференцирования.

II. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Далее будем полагать, что вектор действия S является функцией координат кинематических переменных x, l, a:

$$S = S(x, l, a)\,,$$

а сами кинематические переменные x, l, a являются результатом преобразования

$$x = \mathcal{X}(x_0, l_0, a_0)\,, \quad l = \mathcal{L}(x_0, l_0, a_0)\,, \quad a = \mathcal{A}(x_0, l_0, a_0)\,.$$

Кинематические переменные x_0, l_0, a_0 рассматриваются как независимые переменные, а кинематические переменные x, l, a, напротив, как зависимые или преобразованные переменные. Дифференциал по независимым переменным обозначим d, дифференциал по преобразованным переменным обозначим D. Запишем дифференциал dS следующим образом:

$$dS = P_K(S)\cdot Dx^K + M^I{}_K(S)\cdot Dl^K{}_I + W^{IL}{}_K(S)\cdot Da^K{}_{LI}\,.$$

Здесь использованы следующие обозначения для операторов дифференцирования[2]

$$P_K(\,) = \frac{\partial}{Dx^K}\,, \quad M^I{}_K(\,) = \frac{\partial}{Dl^K{}_I}\,, \quad W^{IL}{}_K(\,) = \frac{\partial}{Da^K{}_{LI}}\,.$$

Введем величины, которые вместе с вектором действия S будем называть *динамическими переменными*:

- *импульс* $p_K = P_K(S) = \dfrac{\partial S(x, l, a)}{Dx^K}$,
- *момент* $m^I{}_K = M^I{}_K(S) = \dfrac{\partial S(x, l, a)}{Dl^K{}_I}$,
- *второй момент* $w^{IL}{}_K = W^{IL}{}_K(S) = \dfrac{\partial S(x, u, a)}{Da^K{}_{LI}}$.

В связи с этим оператор $P_K(\,)$ будем называть *оператором импульса*, оператор $M^I{}_K(\,)$ будем называть *оператором момента*, оператор $W^{IL}{}_K(\,)$ будем называть *оператором второго момента*.

Произвольной функции от преобразованных кинематических переменных соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = P_K\cdot Dx^K + M^I{}_K\cdot Dl^K{}_I + W^{IL}{}_K\cdot Da^K{}_{LI}\,.$$

* ketsaris@mail.ru; http://toe-physics.org

[1] Термин *алгебра в свободном состоянии* мы вводим, желая подчеркнуть, что рассматриваемая алгебра не находится в калибровочном поле.

[2] Смысл дифференциалов двух видов d и D и оператора дифференцирования вида $\dfrac{\partial}{Dx^K}$ рассматривался в Лекции 25.

III. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ АЛГЕБРЫ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ $\mathbb{X}$

Произвольной функции от координат обобщенного пространства-времени соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = P_K \cdot Dx^K \,.$$

Условием интегрируемости этого дифференциального уравнения является

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = 0\,,$$

где

$$d_1 = P_K \cdot D_1 x^K\,, \qquad d_2 = P_M \cdot D_2 x^M\,.$$

Отсюда

$$d_2(P_K \cdot D_1 x^K) - d_1(P_M \cdot D_2 x^M) = 0\,.$$

Или

$$d_2(P_K) \cdot D_1 x^K + P_K \cdot (d_2 D_1 x^K) - d_1(P_M) \cdot D_2 x^M - P_M \cdot (d_1 D_2 x^M) = 0\,.$$

Или

$$P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + P_I \cdot (d_2 D_1 x^I) - P_I \cdot (d_1 D_2 x^I) = 0\,.$$

Используя уравнения структуры

$$d_2 D_1 x^I = C^I{}_{KM} \cdot D_1 x^K \cdot D_2 x^M\,,$$

получим

$$P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + P_I \cdot C^I{}_{MK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_I \cdot C^I{}_{KM} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) = 0\,.$$

Отсюда имеем перестановочные соотношения операторов дифференцирования P_K алгебры пространства-времени $\mathbb{X}$:

$$[P_K(P_M)] = P_I \cdot C^I{}_{[KM]}\,. \tag{1}$$

Здесь и далее квадратные скобки, заключающие индексы, означают антисимметризацию по этим индексов. Таким образом,

$$C^I{}_{[KM]} = C^I{}_{KM} - C^I{}_{MK}\,.$$

IV. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ АЛГЕБРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ $\mathbb{L}$

Произвольной функции от координат линейных отображений соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = M^I{}_K \cdot Dl^K{}_I$$

Условием интегрируемости этого дифференциального уравнения является

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = 0\,,$$

где

$$d_1 = M^I{}_K \cdot D_1 l^K{}_I\,, \qquad d_2 = M^L{}_M \cdot D_2 l^M{}_L\,.$$

Отсюда

$$d_2(M^I{}_K \cdot D_1 l^K{}_I) - d_1(M^L{}_M \cdot \delta_2 l^M{}_L) = 0\,.$$

Или

$$d_2(M^I{}_M) \cdot D_1 l^M{}_I + M^I{}_M \cdot (d_2 D_1 l^M{}_I) - d_1(M^L{}_K) \cdot D_2 l^K{}_L - M^L{}_K \cdot (d_1 D_2 l^K{}_L) = 0\,.$$

Или

$$M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) - \big(M^K{}_I \cdot (d_1 D_2 l^I{}_K) - M^K{}_I \cdot (d_2 D_1 l^I{}_K)\big) = 0\,.$$

Используя уравнения структуры

$$d_2 D_1 l^I{}_K = D_2 l^I{}_L \cdot D_1 l^L{}_K\,,$$

получим

$$\begin{aligned} &M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) - \\ &\qquad - \big(M^L{}_M \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L \cdot \delta^I{}_K) - M^I{}_K \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L \cdot \delta^L{}_M)\big) = 0\,. \end{aligned}$$

Отсюда имеем перестановочные соотношения операторов дифференцирования $M^K{}_I$ алгебры линейных отображений $\mathbb{L}$:

$$[M^L{}_K(M^I{}_M)] = \delta^I{}_K \cdot M^L{}_M - M^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,. \tag{2}$$

V. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ $\mathbf{L} = \mathbb{L} + \widetilde{\mathbb{L}}$

Произвольной функции от координат общих линейных отображений соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = \widetilde{M}^I{}_K \cdot D\tilde{l}^K{}_I + M^I{}_K \cdot Dl^K{}_I$$

Условием интегрируемости этого дифференциального уравнения является

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = 0\,,$$

где

$$d_1 = \widetilde{M}^I{}_K \cdot D_1\tilde{l}^K{}_I + M^I{}_K \cdot D_1 l^K{}_I\,, \qquad d_2 = \widetilde{M}^L{}_M \cdot D_2\tilde{l}^M{}_L + M^L{}_M \cdot D_2 l^M{}_L\,.$$

Отсюда

$$d_2(\widetilde{M}^I{}_K \cdot D_1\tilde{l}^K{}_I + M^I{}_K \cdot D_1 l^K{}_I) - d_1(\widetilde{M}^L{}_M \cdot D_2\tilde{l}^M{}_L + M^L{}_M \cdot D_2 l^M{}_L) = 0\,.$$

Или

$$\begin{aligned} &d_2(\widetilde{M}^I{}_M) \cdot D_1\tilde{l}^M{}_I + \widetilde{M}^I{}_M \cdot (d_2 D_1\tilde{l}^M{}_I) - d_1(\widetilde{M}^L{}_K) \cdot D_2\tilde{l}^K{}_L - \widetilde{M}^L{}_K \cdot (d_1 D_2\tilde{l}^K{}_L) + \\ &\qquad + d_2(M^I{}_M) \cdot D_1 l^M{}_I + M^I{}_M \cdot (d_2 D_1 l^M{}_I) - d_1(M^L{}_K) \cdot D_2 l^K{}_L - M^L{}_K \cdot (d_1 D_2 l^K{}_L) = 0\,. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} &\widetilde{M}^L{}_K(\widetilde{M}^I{}_M) \cdot (D_2\tilde{l}^K{}_L \cdot D_1\tilde{l}^M{}_I) - \widetilde{M}^I{}_M(\widetilde{M}^L{}_K) \cdot (D_1\tilde{l}^M{}_I \cdot D_2\tilde{l}^K{}_L) + M^L{}_K(\widetilde{M}^I{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1\tilde{l}^M{}_I) - \\ &\quad - M^I{}_M(\widetilde{M}^L{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2\tilde{l}^K{}_L) - (\widetilde{M}^K{}_I \cdot (d_1 D_2\tilde{l}^I{}_K) - \widetilde{M}^K{}_I \cdot (d_2 D_1\tilde{l}^I{}_K)) + \widetilde{M}^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2\tilde{l}^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) - \\ &\quad - \widetilde{M}^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1\tilde{l}^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) + M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) - \\ &\quad - (M^K{}_I \cdot (d_1 D_2 l^I{}_K) - M^K{}_I \cdot (d_2 D_1 l^I{}_K)) = 0\,. \end{aligned}$$

Используя уравнения структуры

$$
\begin{aligned}
d_2 D_1 \tilde{l}^I{}_K &= D_1 \tilde{l}^I{}_L \cdot D_2 \tilde{l}^L{}_K \\
d_2 D_1 l^I{}_K &= D_2 l^I{}_L \cdot D_1 l^L{}_K \,,
\end{aligned}
$$

получим

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{M}^L{}_K(\widetilde{M}^I{}_M) \cdot (D_1 \tilde{l}^M{}_I \cdot D_2 \tilde{l}^K{}_L) - \widetilde{M}^I{}_M(\widetilde{M}^L{}_K) \cdot (D_1 \tilde{l}^M{}_I \cdot D_2 \tilde{l}^K{}_L) - \\
&\quad - \Big(\widetilde{M}^I{}_K \cdot (D_1 \tilde{l}^M{}_I \cdot D_2 \tilde{l}^K{}_L \cdot \delta^L{}_M) - \widetilde{M}^L{}_M \cdot (D_1 \tilde{l}^M{}_I \cdot D_2 \tilde{l}^K{}_L \cdot \delta^I{}_K)\Big) + \\
&\quad + M^L{}_K(\widetilde{M}^I{}_M) \cdot (D_1 \tilde{l}^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) + \widetilde{M}^L{}_M(M^I{}_K) \cdot (D_1 l^K{}_I \cdot D_2 \tilde{l}^M{}_L) - \\
&\quad - M^I{}_K(\widetilde{M}^L{}_M) \cdot (D_1 l^K{}_I \cdot D_2 \tilde{l}^M{}_L) - \widetilde{M}^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 \tilde{l}^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) + \\
&\quad + M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) - \\
&\quad - \big(M^L{}_M \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L \cdot \delta^I{}_K) - M^I{}_K \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L \cdot \delta^L{}_M)\big) = 0 \,.
\end{aligned}
$$

Отсюда имеем перестановочные соотношения операторов дифференцирования $\widetilde{M}^K{}_I$ и $M^K{}_I$ общей алгебры линейных отображений $\mathbf{L} = \mathbb{L} + \widetilde{\mathbb{L}}$:

$$
\begin{aligned}
&[\widetilde{M}^L{}_K(\widetilde{M}^I{}_M)] = \delta^L{}_M \cdot \widetilde{M}^I{}_K - \widetilde{M}^L{}_M \cdot \delta^I{}_K \\
&[M^L{}_K(M^I{}_M)] = \delta^I{}_K \cdot M^L{}_M - M^I{}_K \cdot \delta^L{}_M \\
&[\widetilde{M}^L{}_K(M^I{}_M)] = 0 \,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

VI. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ $\mathbb{T} = \mathbb{X} + \mathbb{L}$

Произвольной функции от переменных кинематической алгебры соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$
d = P_K \cdot Dx^K + M^I{}_K \cdot Dl^K{}_I
$$

Условием интегрируемости этого дифференциального уравнения является

$$
d_2 d_1 - d_1 d_2 = 0 \,,
$$

где

$$
d_1 = P_K \cdot D_1 x^K + M^I{}_K \cdot D_1 l^K{}_I \,, \quad d_2 = P_M \cdot D_2 x^M + M^L{}_M \cdot D_2 l^M{}_L \,.
$$

Отсюда

$$
d_2(P_K \cdot D_1 x^K + M^I{}_K \cdot D_1 l^K{}_I) - d_1(P_M \cdot D_2 x^M + M^L{}_M \cdot D_2 l^M{}_L) = 0 \,.
$$

Или

$$
\begin{aligned}
&d_2(P_K) \cdot D_1 x^K + P_K \cdot (d_2 D_1 x^K) - d_1(P_M) \cdot D_2 x^M - P_M \cdot (d_1 D_2 x^M) + \\
&\qquad + d_2(M^I{}_K) \cdot D_1 l^K{}_I + M^I{}_K \cdot (d_2 D_1 l^K{}_I) - d_1(M^L{}_M) \cdot D_2 l^M{}_L - M^L{}_M \cdot (d_1 D_2 l^M{}_L) = 0 \,.
\end{aligned}
$$

Или

$$
\begin{aligned}
&P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + \\
&\quad + M^L{}_K(P_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) - M^I{}_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) + \big(P_I \cdot (d_2 D_1 x^I) - P_I \cdot (d_1 D_2 x^I)\big) + \\
&\quad + P_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) - P_M(M^L{}_K) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) + \\
&\quad + M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) + \\
&\quad + M^L{}_M \cdot (d_2 D_1 l^M{}_L) - M^L{}_M \cdot (d_1 D_2 l^M{}_L) = 0 \,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

В этом уравнении используем уравнения структуры, полученные в Лекции 26 (формула (3))

$$
\begin{aligned}
d_2D_1x^I &= D_2l^I{}_K\cdot D_1x^K + C^I{}_{KM}\cdot D_1x^K\cdot D_2x^M\\
d_2D_1l^M{}_L &= D_2l^M{}_K\cdot D_1l^K{}_L + C^M{}_{LPQ}\cdot D_1x^P\cdot D_2x^Q\,.
\end{aligned}
$$

Получим

$$
\begin{aligned}
&P_K(P_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - P_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) +\\
&\quad + M^L{}_K(P_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M) - M^I{}_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I) +\\
&\quad + P_I\cdot(D_2l^I{}_K\cdot D_1x^K) + P_I\cdot C^I{}_{MK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) -\\
&\quad - P_I\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^I{}_K) - P_I\cdot C^I{}_{KM}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) +\\
&\quad + P_K(M^I{}_M)\cdot(D_1l^M{}_I\cdot D_2x^K) - P_M(M^L{}_K)\cdot(D_1x^M\cdot D_2l^K{}_L) +\\
&\quad + M^L{}_M(M^I{}_K)\cdot(D_1l^K{}_I\cdot D_2l^M{}_L) - M^I{}_K(M^L{}_M)\cdot(D_1l^K{}_I\cdot D_2l^M{}_L) +\\
&\quad + M^P{}_L\cdot(D_2l^L{}_K\cdot D_1l^K{}_P) - M^P{}_L\cdot(D_2x^M\cdot D_1x^K)\cdot C^L{}_{PKM} -\\
&\quad - M^P{}_L\cdot(D_1l^L{}_K\cdot D_2l^K{}_P) - M^P{}_L\cdot(D_1x^M\cdot D_2x^K)\cdot C^L{}_{PKM} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Или

$$
\begin{aligned}
&\big(P_K(P_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - P_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M)\big) +\\
&\quad + P_I\cdot C^I{}_{MK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - P_I\cdot C^I{}_{KM}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) +\\
&\quad + M^P{}_L\cdot C^L{}_{PMK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - M^P{}_L\cdot C^L{}_{PKM}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) +\\
&+ \big(M^L{}_K(P_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M) - P_Q\cdot(D_2x^M\cdot D_1l^K{}_I)\cdot\delta^I{}_M\cdot\delta^Q{}_K - P_M(M^L{}_K)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M)\big) +\\
&+ \big(-M^I{}_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I) + P_I\cdot(D_2l^M{}_L\cdot D_1x^K)\cdot\delta^L{}_K\cdot\delta^I{}_M + P_K(M^I{}_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I)\big) +\\
&+ \big(M^L{}_M(M^I{}_K)\cdot(D_2l^M{}_L\cdot D_1l^K{}_I) - M^I{}_K(M^L{}_M)\cdot(D_2l^M{}_L\cdot D_1l^K{}_I)\big) +\\
&\quad + M^I{}_M\cdot\delta^L{}_K\cdot(D_2l^M{}_L\cdot D_1l^K{}_I) - M^L{}_K\cdot\delta^I{}_M\cdot(D_2l^M{}_L\cdot D_1l^K{}_I) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Отсюда имеем перестановочные соотношения операторов дифференцирования P_K и $M^K{}_I$ кинематической алгебры $\mathbb{T}=\mathbb{X}+\mathbb{L}$ в свободном состоянии:

$$
\begin{aligned}
[P_K(P_M)] &= P_I\cdot C^I{}_{[KM]} + M^P{}_L\cdot C^L{}_{P[KM]}\\
[M^L{}_K(P_M)] &= -P_K\cdot\delta^L{}_M\\
[P_K(M^I{}_M)] &= P_M\cdot\delta^I{}_K\\
[M^L{}_M(M^I{}_K)] &= M^L{}_K\cdot\delta^I{}_M - M^I{}_M\cdot\delta^L{}_K\,.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Третье уравнение совпадает со вторым с точностью до обозначений индексов.

VII. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ В КАЛИБРОВОЧНОМ ПОЛЕ

По прежнему мы исходим из условия интегрируемости дифференциального уравнения

$$
d = P_K\cdot Dx^K + M^I{}_K\cdot Dl^K{}_I\,.
$$

Как было показано в предыдущем разделе, оно сводится к соотношению (4). В это соотношение подставим уравнения структуры кинематической алгебры в калибровочном поле, приведенные в Лекции 26 (формула (6))

$$
\begin{aligned}
d_2D_1x^I &= D_2l^I{}_K\cdot D_1x^K + T^I{}_{MK}\cdot D_1x^M\cdot D_2x^K\\
d_2D_1l^M{}_L &= D_2l^M{}_K\cdot D_1l^K{}_L + A^M{}_{LK}\cdot D_2l^K{}_P\cdot D_1x^P - A^M{}_{KP}\cdot D_1l^K{}_L\cdot D_2x^P - D_2l^M{}_K\cdot A^K{}_{LP}\cdot D_1x^P +\\
&\qquad + F^M{}_{LPQ}\cdot D_1x^P\cdot D_2x^Q\,,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где

$$T^I{}_{MK} = C^I{}_{MK} - A^I{}_{MK} \quad \text{– объект кручения}\,,$$
$$F^M{}_{LPQ} = A^M{}_{LPQ} + A^M{}_{KQ} \cdot A^K{}_{LP} + A^M{}_{LK} \cdot T^K{}_{PQ} + C^M{}_{LPQ} \quad \text{– объект кривизны}\,,$$
$$\text{здесь} \qquad A^M{}_{LPQ} \cdot Dx^Q = dA^M{}_{LP}\,.$$

Получим

$$\begin{aligned}
&P_K(P_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + M^L{}_K(P_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) - M^I{}_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) + \\
&\quad + P_I \cdot (D_2l^I{}_K \cdot D_1x^K) + P_I \cdot T^I{}_{MK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_I \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^I{}_K) - P_I \cdot T^I{}_{KM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + \\
&\quad + P_K(M^I{}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) - P_M(M^L{}_K) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) + \\
&\quad + M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I) + \\
&\quad + M^I{}_K \cdot \Big((D_2l^K{}_N \cdot D_1l^N{}_I) + A^K{}_{IN} \cdot (D_2l^N{}_P \cdot D_1x^P) - A^K{}_{NP} \cdot (D_2x^P \cdot D_1l^N{}_I) - \\
&\qquad\qquad - A^N{}_{IP} \cdot (D_2l^K{}_N \cdot D_1x^P) + F^K{}_{IPQ} \cdot (D_2x^Q \cdot D_1x^P)\Big) - \\
&\quad - M^L{}_M \cdot \Big((D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_K) + A^M{}_{LK} \cdot (D_2x^P \cdot D_1l^K{}_P) - A^M{}_{KP} \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^P) - \\
&\qquad\qquad - A^K{}_{LP} \cdot (D_2x^P \cdot D_1l^M{}_K) + F^M{}_{LPQ} \cdot (D_2x^P \cdot D_1x^Q)\Big) = 0\,.
\end{aligned}$$

Или после группировки и переобозначения индексов

$$\begin{aligned}
&\Big(P_K(P_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + P_I \cdot T^I{}_{MK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_I \cdot T^I{}_{KM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + \\
&\quad + M^L{}_I \cdot F^I{}_{LMK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - M^L{}_I \cdot F^I{}_{LKM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M)\Big) + \\
&+ \Big(M^L{}_K(P_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) + P_K \cdot \delta^L{}_M \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) - P_M(M^L{}_K) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) + \\
&\quad + M^I{}_P \cdot A^P{}_{IK} \cdot \delta^L{}_M \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) - M^I{}_K \cdot A^L{}_{IM} \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) + M^L{}_P \cdot A^P{}_{KM} \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M)\Big) + \\
&+ \Big(-M^I{}_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) - P_M \cdot \delta^I{}_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) + P_K(M^I{}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) - \\
&\quad - M^I{}_P \cdot A^P{}_{MK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) - M^L{}_P \cdot A^P{}_{LM} \cdot \delta^I{}_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) + M^L{}_M \cdot A^I{}_{LK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I)\Big) + \\
&+ \Big(M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I) + \\
&\quad + M^I{}_K \cdot \delta^L{}_M \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I) - M^L{}_M \cdot \delta^I{}_K \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I)\Big) = 0\,.
\end{aligned}$$

Отсюда следуют перестановочные соотношения операторов дифференцирования P и M кинематической алгебры $\mathbb{T} = \mathbb{X} + \mathbb{L}$ в калибровочном поле:

$$\begin{aligned}
[P_K(P_M)] \quad &= P_I \cdot T^I{}_{[KM]} + M^L{}_I \cdot F^I{}_{L[KM]} \\
[M^L{}_K(P_M)] \; &= -P_K \cdot \delta^L{}_M - M^P{}_I \cdot G^I{}_{PK}{}^L{}_M \\
[P_K(M^I{}_M)] \; &= P_M \cdot \delta^I{}_K + M^L{}_P \cdot G^P{}_{LM}{}^I{}_K \\
[M^L{}_K(M^I{}_M)] &= M^L{}_M \cdot \delta^I{}_K - M^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,,
\end{aligned} \tag{7}$$

где[3]

$$\begin{aligned}
T^I{}_{[KM]} \quad &= C^I{}_{[KM]} - A^I{}_{[KM]} \ \text{ – тензор кручения}\,, \\
G^P{}_{LM}{}^I{}_K &= A^P{}_{LM} \cdot \delta^I{}_K - A^I{}_{LK} \cdot \delta^P{}_M + A^P{}_{MK} \cdot \delta^I{}_L\,, \\
F^I{}_{L[KM]} \quad &= A^I{}_{L[KM]} + A^I{}_{P[M} \cdot A^P{}_{|L|K]} + A^I{}_{LP} \cdot T^P{}_{[KM]} + C^I{}_{L[KM]} \ \text{ – тензор кривизны}\,.
\end{aligned}$$

Третье уравнение совпадает со вторым с точностью до обозначения индексов.

[3] Здесь и далее квадратные скобки, заключающие индексы, вида $[M|L|K]$ означают антисимметризацию по индексам M и K. Таким образом,

$$A^I{}_{P[M} \cdot A^P{}_{|L|K]} = A^I{}_{PM} \cdot A^P{}_{LK} - A^I{}_{PK} \cdot A^P{}_{LM}\,.$$

VIII. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВТОРОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ $\mathbb{R} = \mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{A}$

Произвольной функции от переменных второй кинематической алгебры соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = P_K \cdot Dx^K + M^I{}_K \cdot Dl^K{}_I + W^{IL}{}_K \cdot Da^K{}_{LI}\,.$$

Условием интегрируемости этого дифференциального уравнения является

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = 0\,,$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= P_K \cdot D_1 x^K + M^I{}_K \cdot D_1 l^K{}_I + W^{IL}{}_K \cdot D_1 a^K{}_{LI}\,, \\ d_2 &= P_M \cdot D_2 x^M + M^L{}_M \cdot D_2 l^M{}_L + W^{IL}{}_K \cdot D_2 a^K{}_{LI}\,. \end{aligned}$$

Отсюда

$$d_2(P_K \cdot D_1 x^K + M^I{}_K \cdot D_1 l^K{}_I + W^{IL}{}_K \cdot D_1 a^K{}_{LI}) - d_1(P_M \cdot D_2 x^M + M^L{}_M \cdot D_2 l^M{}_L + W^{IL}{}_K \cdot D_2 a^K{}_{LI}) = 0\,.$$

Или

$$\begin{aligned} & d_2(P_K) \cdot D_1 x^K + P_K \cdot (d_2 D_1 x^K) - d_1(P_M) \cdot D_2 x^M - P_M \cdot (d_1 D_2 x^M) + \\ &\quad + d_2(M^I{}_K) \cdot D_1 l^K{}_I + M^I{}_K \cdot (d_2 D_1 l^K{}_I) - d_1(M^L{}_M) \cdot D_2 l^M{}_L - M^L{}_M \cdot (d_1 D_2 l^M{}_L) + \\ &\quad + d_2(W^{IL}{}_K) \cdot D_1 a^K{}_{LI} + W^{IL}{}_K \cdot (d_2 D_1 a^K{}_{LI}) - d_1(W^{IL}{}_K) \cdot D_2 a^K{}_{LI} - W^{IL}{}_K \cdot (d_1 D_2 a^K{}_{LI}) = 0\,. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} & P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 x^K) + \\ & + M^L{}_K(P_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) - M^I{}_M(P_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 x^K) + \\ & + W^{NL}{}_K(P_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) - W^{PI}{}_M(P_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 x^K) + P_I \cdot (d_2 D_1 x^I) - P_I \cdot (d_1 D_2 x^I) + \\ & + P_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) - P_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 l^K{}_L) + \\ & + M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) + \\ & + W^{NL}{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 l^M{}_I) - W^{PI}{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 l^K{}_L) + \\ & + M^K{}_I \cdot (d_2 D_1 l^I{}_K) - M^K{}_I \cdot (d_1 D_2 l^I{}_K) + \\ & + P_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) - P_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 x^K \cdot D_2 a^K{}_{LN}) + \\ & + M^L{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 a^M{}_{IP}) - M^I{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 a^K{}_{LN}) + \\ & + W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 a^M{}_{IP}) - W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 a^K{}_{LN}) + \\ & + W^{LI}{}_M \cdot (d_2 D_1 a^M{}_{IL}) - W^{LI}{}_M \cdot (d_1 D_2 a^M{}_{IL}) = 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Перестановочные соотношения приведем для двух случаев таблицы умножения базисных векторов.

1. Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда таблица умножения базисных векторов имеет упрощенный вид[4]

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_M &= \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KM} + \mathfrak{I}^P{}_L \cdot C^L{}_{PKM} + \mathfrak{J}^{NI}{}_L \cdot C^L{}_{INKM}\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{e}_M &= 0\,,\\
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_M\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{I}^L{}_M\,,\\
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \delta^P{}_K \cdot \mathfrak{I}^I{}_M\,,\\
\mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{e}_M &= 0\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \delta^P{}_K \cdot \mathfrak{J}^{LI}{}_M\,,\\
\mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \mathfrak{J}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K\,,\\
\mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Уравнения структуры, соответствующие этому случаю, приведены в Лекции 26 (формула (12))

$$
\begin{aligned}
d_2 D_1 x^I &= D_2 l^I{}_K \cdot D_1 x^K + C^I{}_{KL} \cdot D_1 x^K \cdot D_2 x^L\\
d_2 D_1 l^M{}_L &= D_2 l^M{}_K \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 a^M{}_{LK} \cdot D_1 x^K + C^M{}_{LIK} \cdot D_1 x^I \cdot D_2 x^K\\
d_2 D_1 a^M{}_{IL} &= D_2 a^M{}_{IN} \cdot D_1 l^N{}_L + D_2 l^M{}_N \cdot D_1 a^N{}_{IL} + C^M{}_{ILPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q\,.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Используя их в условии интегрируемости (8), получим

$$
\begin{aligned}
&P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 x^K) +\\
&+ M^L{}_K(P_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) - M^I{}_M(P_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 x^K) +\\
&+ W^{NL}{}_K(P_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) - W^{PI}{}_M(P_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 x^K) +\\
&+ P_I \cdot (D_2 l^I{}_K \cdot D_1 x^K + C^I{}_{MK} \cdot D_1 x^M \cdot D_2 x^K) - P_I \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^I{}_K + C^I{}_{KM} \cdot D_2 x^K \cdot D_1 x^M) +\\
&+ P_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) - P_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 l^K{}_L) +\\
&+ M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) +\\
&+ W^{NL}{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 l^M{}_I) - W^{PI}{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 l^K{}_L) +\\
&+ M^K{}_I \cdot (D_2 l^I{}_P \cdot D_1 l^P{}_K + D_2 a^I{}_{KP} \cdot D_1 x^P + C^I{}_{KPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q) -\\
&- M^L{}_M \cdot (D_1 l^M{}_K \cdot D_2 l^K{}_L + D_1 a^M{}_{LK} \cdot D_2 x^K + C^M{}_{LQP} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 x^P) +\\
&+ P_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) - P_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 a^K{}_{LN}) +\\
&+ M^L{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 a^M{}_{IP}) - M^I{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 a^K{}_{LN}) +\\
&+ W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 a^M{}_{IP}) -\\
&- W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 a^K{}_{LN}) +\\
&+ W^{LI}{}_M \cdot (\delta_2 a^M{}_{IN} \cdot \delta_1 l^N{}_L + \delta_2 l^M{}_N \cdot \delta_1 a^N{}_{IL} + C^M{}_{ILPQ} \cdot \delta_1 x^P \cdot \delta_2 x^Q) -\\
&- W^{LI}{}_M \cdot (D_1 a^M{}_{IN} \cdot D_2 l^N{}_L + D_1 l^M{}_N \cdot D_2 a^N{}_{IL} + C^M{}_{ILPQ} \cdot D_2 x^P \cdot D_1 x^Q) = 0\,.
\end{aligned}
$$

---

[4] См. Лекцию 26, формулу (11).

И после группировки слагаемых и переобозначения индексов получим

$$
\begin{aligned}
&\Big(P_K(P_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - P_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) + P_I\cdot C^I{}_{MK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - P_I\cdot C^I{}_{KM}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) + \\
&\qquad + M^N{}_I\cdot C^I{}_{NMK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - M^N{}_I\cdot C^I{}_{NKM}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) + \\
&\qquad + W^{LI}{}_N\cdot C^N{}_{ILMK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - W^{LI}{}_N\cdot C^N{}_{ILKM}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M)\Big) + \\
&+\Big(M^L{}_K(P_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M) + P_K\cdot\delta^L{}_M\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M) - P_M(M^L{}_K)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M)\Big) + \\
&+\Big(-M^I{}_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I) - P_M\cdot\delta^I{}_K\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I) + P_K(M^I{}_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I)\Big) + \\
&+\Big(M^L{}_K(M^I{}_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I) + \\
&\qquad + M^I{}_K\cdot\delta^L{}_M\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I) - M^L{}_M\cdot\delta^I{}_K\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I)\Big) + \\
&+\Big(W^{NL}{}_K(P_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M) + M^L{}_K\cdot\delta^N{}_M\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M) - P_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M)\Big) + \\
&+\Big(-W^{PI}{}_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP}) + P_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP}) - M^I{}_M\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP})\Big) + \\
&+\Big(W^{NL}{}_K(M^I{}_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I) - M^I{}_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I) + \\
&\qquad + W^{IL}{}_K\cdot\delta^N{}_M\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I) - W^{NL}{}_M\cdot\delta^I{}_K\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I)\Big) + \\
&+\Big(-W^{PI}{}_M(M^L{}_K)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP}) + M^L{}_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP}) + \\
&\qquad + W^{PI}{}_K\cdot\delta^L{}_M\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP}) - W^{LI}{}_M\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})\Big) + \\
&+\Big(W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP}) - W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP})\Big) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Отсюда следуют перестановочные соотношения операторов дифференцирования второй кинематической алгебры $\mathbb{R}=\mathbb{X}+\mathbb{L}+\mathbb{A}$ в свободном состоянии с упрощенной таблицей умножения базисных векторов:

$$
\begin{aligned}
&[P_K(P_M)] &&= P_I\cdot C^I{}_{[KM]} + M^N{}_I\cdot C^I{}_{N[KM]} + W^{IL}{}_N\cdot C^N{}_{IL[KM]}\,,\\
&[P_K(M^L{}_M)] &&= P_M\cdot\delta^L{}_K\,,\\
&[M^L{}_K(M^I{}_M)] &&= M^L{}_M\cdot\delta^I{}_K\,,\\
&[P_K(W^{PI}{}_M)] &&= M^I{}_M\cdot\delta^P{}_K\,,\\
&[M^L{}_K(W^{PI}{}_M)] &&= W^{LI}{}_M\cdot\delta^P{}_K - W^{PI}{}_K\cdot\delta^L{}_M\,,\\
&[W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)] &&= 0\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Здесь перестановочные соотношения, отличающиеся от указанных перестановкой операторов дифференцирования, опущены.

2. Общий случай

Для общего случая таблицы умножения базисных векторов[5]

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_M &= \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KM} + \mathfrak{I}^P{}_L \cdot C^L{}_{PKM} + \mathfrak{I}^{NI}{}_L \cdot C^L{}_{INKM}\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{e}_M &= 0\,,\\
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_M\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{I}^L{}_M\,,\\
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^{PI}{}_M &= \delta^P{}_K \cdot \mathfrak{I}^I{}_M\,,\\
\mathfrak{I}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{e}_M &= 0\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^{PI}{}_M &= \delta^P{}_K \cdot \mathfrak{I}^{LI}{}_M + \mathfrak{e}_M \cdot \delta^P{}_K \cdot g^{LI}\,,\\
\mathfrak{I}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \mathfrak{I}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K\,,\\
\mathfrak{I}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{I}^{PI}{}_M &= \mathfrak{I}^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K + \delta^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K\,.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

уравнения структуры принимают вид[6]

$$
\begin{aligned}
d_2 D_1 x^I &= D_2 l^I{}_K \cdot D_1 x^K + D_2 a^I{}_{MP} \cdot D_1 l^P{}_L \cdot g^{ML} + C^I{}_{KL} \cdot D_1 x^K \cdot D_2 x^L\\
d_2 D_1 l^M{}_L &= D_2 l^M{}_K \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 a^M{}_{LK} \cdot D_1 x^K + D_2 a^M{}_{IP} \cdot D_1 a^P{}_{NL} \cdot g^{NI} + C^M{}_{LIK} \cdot D_1 x^I \cdot D_2 x^K\\
d_2 D_1 a^M{}_{IL} &= D_2 a^M{}_{IN} \cdot D_1 l^N{}_L + D_2 l^M{}_N \cdot D_1 a^N{}_{IL} + C^M{}_{ILPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q\,.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Используя эти уравнения структуры в условии интегрируемости (8), получим

$$
\begin{aligned}
&P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 x^K) +\\
&+ M^L{}_K(P_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) - M^I{}_M(P_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 x^K) +\\
&+ W^{NL}{}_K(P_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) - W^{PI}{}_M(P_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 x^K) +\\
&\qquad\qquad + P_I \cdot (D_2 l^I{}_K \cdot D_1 x^K + C^I{}_{MK} \cdot D_1 x^M \cdot D_2 x^K) -\\
&\qquad\qquad - P_I \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^I{}_K + C^I{}_{KM} \cdot D_2 x^K \cdot D_1 x^M) +\\
&+ P_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) - P_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 l^K{}_L) +\\
&+ M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) +\\
&+ W^{NL}{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 l^M{}_I) - W^{PI}{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 l^K{}_L) +\\
&\quad + M^K{}_I \cdot (D_2 l^I{}_P \cdot D_1 l^P{}_K + D_2 a^I{}_{KP} \cdot D_1 x^P + D_2 a^I{}_{QP} \cdot D_1 a^P{}_{NK} \cdot g^{NQ} + C^I{}_{KPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q) -\\
&- M^L{}_M \cdot (D_1 l^M{}_K \cdot D_2 l^K{}_L + D_1 a^M{}_{LK} \cdot D_2 x^K + D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 a^P{}_{NL} \cdot g^{NI} + C^M{}_{LQP} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 x^P) +\\
&+ P_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) - P_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 a^K{}_{LN}) +\\
&+ M^L{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 a^M{}_{IP}) - M^I{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 a^K{}_{LN}) +\\
&+ W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 a^M{}_{IP}) -\\
&- W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 a^K{}_{LN}) +\\
&\qquad\qquad + W^{LI}{}_M \cdot (D_2 a^M{}_{IN} \cdot D_1 l^N{}_L + D_2 l^M{}_N \cdot D_1 a^N{}_{IL} + C^M{}_{ILPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q) -\\
&\qquad\qquad - W^{LI}{}_M \cdot (D_1 a^M{}_{IN} \cdot D_2 l^N{}_L + D_1 l^M{}_N \cdot D_2 a^N{}_{IL} + C^M{}_{ILPQ} \cdot D_2 x^P \cdot D_1 x^Q) = 0\,.
\end{aligned}
$$

---

[5] См. Лекцию 26, формулу (8)

[6] См. Лекцию 26, формулу (10).

И после группировки слагаемых и переобозначения индексов получим

$$\begin{aligned}
&\Big(P_K(P_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - P_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) + P_I\cdot C^I{}_{MK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - P_I\cdot C^I{}_{KM}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) +\\
&\quad + M^N{}_I\cdot C^I{}_{NMK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - M^N{}_I\cdot C^I{}_{NKM}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) +\\
&\quad + W^{LI}{}_N\cdot C^N{}_{ILMK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M) - W^{LI}{}_N\cdot C^N{}_{ILKM}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M)\Big) +\\
&+\Big(M^L{}_K(P_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M) + P_K\cdot\delta^L{}_M\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M) - P_M(M^L{}_K)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M)\Big) +\\
&+\Big(-M^I{}_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I) - P_M\cdot\delta^I{}_K\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I) + P_K(M^I{}_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I)\Big) +\\
&+\Big(M^L{}_K(M^I{}_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I) +\\
&\quad + M^I{}_K\cdot\delta^L{}_M\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I) - M^L{}_M\cdot\delta^I{}_K\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I)\Big) +\\
&+\Big(W^{NL}{}_K(P_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M) + M^L{}_K\cdot\delta^N{}_M\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M) - P_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M)\Big) +\\
&+\Big(-W^{PI}{}_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP}) + P_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP}) + M^I{}_M\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP})\Big) +\\
&+\Big(W^{NL}{}_K(M^I{}_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I) - M^I{}_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I) +\\
&\quad + W^{IL}{}_K\cdot\delta^N{}_M\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I) - W^{NL}{}_M\cdot\delta^I{}_K\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I)\Big) +\\
&+\Big(-W^{PI}{}_M(M^L{}_K)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP}) + M^L{}_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP}) +\\
&\quad + W^{PI}{}_K\cdot\delta^L{}_M\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP}) - W^{LI}{}_M\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})\Big) +\\
&+\Big(M^P{}_K\cdot g^{IL}\cdot\delta^N{}_M\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP}) - M^N{}_M\cdot g^{LI}\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP}) +\\
&\quad + W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP}) - W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP})\Big) = 0\,.
\end{aligned}$$

Отсюда следуют перестановочные соотношения операторов дифференцирования второй кинематической алгебры $\mathbb{R} = \mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{A}$ в свободном состоянии с общей таблицей умножения базисных векторов:

$$\begin{aligned}
&[P_K(P_M)] &&= P_I\cdot C^I{}_{[KM]} + M^N{}_I\cdot C^I{}_{N[KM]} + W^{IL}{}_N\cdot C^N{}_{IL[KM]}\,,\\
&[P_K(M^L{}_M)] &&= P_M\cdot\delta^L{}_K\,,\\
&[M^L{}_K(M^I{}_M)] &&= M^L{}_M\cdot\delta^I{}_K - M^I{}_K\cdot\delta^L{}_M\,,\\
&[P_K(W^{PI}{}_M)] &&= M^I{}_M\cdot\delta^P{}_K\,,\\
&[M^L{}_K(W^{PI}{}_M)] &&= W^{LI}{}_M\cdot\delta^P{}_K - W^{PI}{}_K\cdot\delta^L{}_M + P_M\cdot\delta^P{}_K\cdot g^{LI}\,,\\
&[W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)] &&= M^N{}_M\cdot\delta^P{}_K\cdot g^{LI} - M^P{}_K\cdot\delta^N{}_M\cdot g^{IL}\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь перестановочные соотношения, отличающиеся от указанных перестановкой операторов дифференцирования, опущены.

IX. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВТОРОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ $\mathbb{R} = \mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{A}$ В КАЛИБРОВОЧНОМ ПОЛЕ

По прежнему мы исходим из условия интегрируемости дифференциального уравнения

$$d = P_K\cdot Dx^K + M^I{}_K\cdot Dl^K{}_I + W^{IL}{}_K\cdot Da^K{}_{LI}\,,$$

которое сводится к соотношению (8). В это соотношение подставим уравнения структуры второй кинематической алгебры в калибровочном поле и выведем перестановочные соотношения для указанной алгебры. Перестановочные соотношения приведем для двух случаев таблицы умножения базисных векторов и уравнений структуры второй кинематической алгебры в калибровочном поле.

1. Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда второй потенциал калибровочного поля не рассматривается[7], то есть

$$B^I{}_{KLN} = 0\,.$$

И кроме того, пусть таблица умножения базисных векторов имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_M &= \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KM} + \mathfrak{I}^P{}_L \cdot C^L{}_{PKM}\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{e}_M &= 0\,,\\
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_M\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{I}^L{}_M\,,\\
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \delta^P{}_K \cdot \mathfrak{I}^I{}_M\,,\\
\mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{e}_M &= 0\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \delta^P{}_K \cdot \mathfrak{J}^{LI}{}_M\,,\\
\mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \mathfrak{J}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K\,,\\
\mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= 0\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Уравнения структуры, соответствующие этому случаю, приведены в Лекции 26 (раздел V.1):

Первое уравнение структуры

$$d_2 D_1 x^I = D_2 l^I{}_K \cdot D_1 x^K + T^I{}_{KL} \cdot D_1 x^K \cdot D_2 x^L\,,$$

где

$$T^I{}_{KL} = C^I{}_{KL} - A^I{}_{KL} \quad \text{– объект кручения}\,.$$

Второе уравнение структуры

$$\begin{aligned}
d_2 D_1 l^M{}_L = {}& D_2 l^M{}_K \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 a^M{}_{LK} \cdot D_1 x^K + \\
&+ A^M{}_{LN} \cdot D_2 l^N{}_K \cdot D_1 x^K - D_2 l^M{}_K \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P - A^M{}_{KQ} \cdot D_1 l^K{}_L \cdot D_2 x^Q + F^M{}_{LPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q\,,
\end{aligned}$$

где

$$F^M{}_{LPQ} = A^M{}_{LPQ} + A^M{}_{KQ} \cdot A^K{}_{LP} + A^M{}_{LN} \cdot T^N{}_{PQ} + C^M{}_{LPQ} \quad \text{– объект кривизны}\,.$$

Третье уравнение структуры

$$d_2 D_1 a^M{}_{IL} = D_2 a^M{}_{IK} \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 l^M{}_K \cdot D_1 a^K{}_{IL} - D_2 a^M{}_{IK} \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P - A^M{}_{KQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 a^K{}_{IL}\,.$$

---

[7] См. Лекцию 26 формулу (13).

Используя эти уравнения структуры в условии интегрируемости (8), получим

$$
\begin{aligned}
&P_K(P_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M)-P_M(P_K)\cdot(D_1x^M\cdot D_2x^K)+\\
&+M^L{}_K(P_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M)-M^I{}_M(P_K)\cdot(D_1l^M{}_I\cdot D_2x^K)+\\
&+W^{NL}{}_K(P_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M)-W^{PI}{}_M(P_K)\cdot(D_1a^M{}_{IP}\cdot D_2x^K)+\\
&+P_I\cdot(D_2l^I{}_K\cdot D_1x^K+T^I{}_{KL}\cdot D_1x^K\cdot D_2x^L)-P_I\cdot(D_1l^I{}_K\cdot D_2x^K+T^I{}_{KL}\cdot D_2x^K\cdot D_1x^L)+\\
&+P_K(M^I{}_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I)-P_M(M^L{}_K)\cdot(D_1x^M\cdot D_2l^K{}_L)+\\
&+M^L{}_K(M^I{}_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I)-M^I{}_M(M^L{}_K)\cdot(D_1l^M{}_I\cdot D_2l^K{}_L)+\\
&+W^{NL}{}_K(M^I{}_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I)-W^{PI}{}_M(M^L{}_K)\cdot(D_1a^M{}_{IP}\cdot D_2l^K{}_L)+\\
&+M^L{}_M\cdot\big(D_2l^M{}_K\cdot D_1l^K{}_L+D_2a^M{}_{LK}\cdot D_1x^K+A^M{}_{LN}\cdot D_2l^N{}_K\cdot D_1x^K-\\
&\qquad-D_2l^M{}_K\cdot A^K{}_{LP}\cdot D_1x^P-A^M{}_{KQ}\cdot D_1l^K{}_L\cdot D_2x^Q+F^M{}_{LPQ}\cdot D_1x^P\cdot D_2x^Q\big)-\\
&-M^L{}_M\cdot\big(D_2l^M{}_K\cdot D_1l^K{}_L+D_2a^M{}_{LK}\cdot D_1x^K+A^M{}_{LN}\cdot D_2l^N{}_K\cdot D_1x^K-\\
&\qquad-D_2l^M{}_K\cdot A^K{}_{LP}\cdot D_1x^P-A^M{}_{KQ}\cdot D_1l^K{}_L\cdot D_2x^Q+F^M{}_{LPQ}\cdot D_1x^P\cdot D_2x^Q\big)+\\
&+P_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP})-P_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_1x^K\cdot D_2a^K{}_{LN})+\\
&+M^L{}_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})-M^I{}_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_1l^M{}_I\cdot D_2a^K{}_{LN})+\\
&+W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP})-W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_1a^M{}_{IP}\cdot D_2a^K{}_{LN})+\\
&+W^{LI}{}_M\cdot\big(D_2a^M{}_{IK}\cdot D_1l^K{}_L+D_2l^M{}_K\cdot D_1a^K{}_{IL}-(D_2a^M{}_{IK}\cdot A^K{}_{LP}\cdot D_1x^P+A^M{}_{KQ}\cdot D_2x^Q\cdot D_1a^K{}_{IL})\big)-\\
&-W^{LI}{}_M\cdot\big(D_1a^M{}_{IK}\cdot D_2l^K{}_L+D_1l^M{}_K\cdot D_2a^K{}_{IL}-(D_1a^M{}_{IK}\cdot A^K{}_{LP}\cdot D_2x^P+A^M{}_{KQ}\cdot D_1x^Q\cdot D_2a^K{}_{IL})\big)=0\,.
\end{aligned}
$$

И после группировки слагаемых и переобозначения индексов

$$
\begin{aligned}
&\Big(P_K(P_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M)-P_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M)+P_I\cdot T^I{}_{MK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M)-\\
&\qquad-P_I\cdot T^I{}_{KM}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M)+M^L{}_P\cdot F^P{}_{LMK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M)-M^L{}_Q\cdot F^Q{}_{LKM}\cdot(D_2x^K\cdot D_1x^M)\Big)+\\
&+\Big(M^L{}_K(P_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M)+P_K\cdot\delta^L{}_M\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M)-P_M(M^L{}_K)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M)+\\
&\qquad+M^P{}_Q\cdot A^Q{}_{PK}\cdot\delta^L{}_M\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M)-M^P{}_K\cdot A^L{}_{PM}\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M)+M^L{}_Q\cdot A^Q{}_{KM}\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1x^M)\Big)+\\
&+\Big(-M^I{}_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I)-P_M\cdot\delta^I{}_K\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I)+P_K(M^I{}_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I)-\\
&\qquad-M^I{}_Q\cdot A^Q{}_{MK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I)-M^L{}_N\cdot A^N{}_{LM}\cdot\delta^I{}_K\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I)+M^L{}_M\cdot A^I{}_{LK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1l^M{}_I)\Big)+\\
&+\Big(M^L{}_K(M^I{}_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I)-M^I{}_M(M^L{}_K)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I)+M^I{}_K\cdot\delta^L{}_M\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I)-\\
&\qquad-M^L{}_M\cdot\delta^I{}_K\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1l^M{}_I)\Big)+\Big(W^{NL}{}_K(P_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M)+M^L{}_K\cdot\delta^N{}_M\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M)-\\
&\qquad-P_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M)-W^{IL}{}_K\cdot A^N{}_{IM}\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M)-W^{NL}{}_Q\cdot A^Q{}_{KM}\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1x^M)\Big)+\\
&+\Big(-W^{PI}{}_M(P_K)\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP})-M^I{}_M\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP})+\\
&\qquad+P_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP})+W^{PI}{}_Q\cdot A^Q{}_{MK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP})-W^{LI}{}_M\cdot A^P{}_{LK}\cdot(D_2x^K\cdot D_1a^M{}_{IP})\Big)+\\
&+\Big(W^{NL}{}_K(M^I{}_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I)-M^I{}_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I)+W^{IL}{}_K\cdot\delta^N{}_M\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I)-\\
&\qquad-W^{NL}{}_M\cdot\delta^I{}_K\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1l^M{}_I)\Big)+\Big(-W^{PI}{}_M(M^L{}_K)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})+\\
&\qquad+M^L{}_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})+W^{PI}{}_K\cdot\delta^L{}_M\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})-W^{LI}{}_M\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})\Big)+\\
&\qquad+\Big(W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP})-W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP})\Big)=0\,.
\end{aligned}
$$

Отсюда следуют перестановочные соотношения операторов дифференцирования второй кинематической алгебры $\mathbb{R} = \mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{A}$ в калибровочном поле с упрощенной таблицей умножения базисных векторов:

$$\begin{aligned}
&[P_K(P_M)] &&= P_I \cdot T^I{}_{[KM]} + M^L{}_I \cdot F^I{}_{L[KM]}\,,\\
&[M^L{}_K(P_M)] &&= -P_K \cdot \delta^L{}_M - M^P{}_Q \cdot (A^Q{}_{PK} \cdot \delta^L{}_M - A^L{}_{PM} \cdot \delta^Q{}_K + A^Q{}_{KM} \cdot \delta^L{}_P)\,,\\
&[P_K(M^I{}_M)] &&= P_M \cdot \delta^I{}_K + M^L{}_N \cdot (A^N{}_{LM} \cdot \delta^I{}_K - A^I{}_{LK} \cdot \delta^N{}_M + A^N{}_{MK} \cdot \delta^I{}_L)\,,\\
&[M^L{}_K(M^I{}_M)] &&= M^L{}_M \cdot \delta^I{}_K - M^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,,\\
&[W^{NL}{}_K(P_M)] &&= -M^L{}_K \cdot \delta^N{}_M + W^{IL}{}_K \cdot A^N{}_{IM} + W^{NL}{}_Q \cdot A^Q{}_{KM}\,,\\
&[P_K(W^{PI}{}_M)] &&= M^I{}_M \cdot \delta^P{}_K + W^{LI}{}_M \cdot A^P{}_{LK} - W^{PI}{}_Q \cdot A^Q{}_{MK}\,,\\
&[W^{NL}{}_K(M^I{}_M)] &&= W^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K - W^{IL}{}_K \cdot \delta^N{}_M\,,\\
&[M^L{}_K(W^{PI}{}_M)] &&= -W^{PI}{}_K \cdot \delta^L{}_M + W^{LI}{}_M \cdot \delta^P{}_K\,,\\
&[W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)] &&= 0\,,
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
T^I{}_{[KM]} &= C^I{}_{[KM]} - A^I{}_{[KM]} && \text{– тензор кручения,}\\
F^I{}_{L[KM]} &= A^I{}_{L[KM]} + A^I{}_{P[M} \cdot A^P{}_{|L|K]} + A^I{}_{LP} \cdot T^P{}_{[KM]} + C^I{}_{L[KM]} && \text{– тензор кривизны.}
\end{aligned}$$

2. Общий случай

В общем случае второй потенциал калибровочного поля

$$B^I{}_{KLN} \neq 0\,.$$

И кроме того, для общего случая таблица умножения базисных векторов имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_M &= \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KM} + \mathfrak{I}^P{}_L \cdot C^L{}_{PKM} + \mathfrak{I}^{NI}{}_L \cdot C^L{}_{INKM}\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{e}_M &= 0\,,\\
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_M\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{I}^L{}_M\,,\\
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^{PI}{}_M &= \delta^P{}_K \cdot \mathfrak{I}^I{}_M\,,\\
\mathfrak{I}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{e}_M &= 0\,,\\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^{PI}{}_M &= \delta^P{}_K \cdot \mathfrak{I}^{LI}{}_M + \mathfrak{e}_M \cdot \delta^P{}_K \cdot g^{LI}\,,\\
\mathfrak{I}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \mathfrak{I}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K\,,\\
\mathfrak{I}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{I}^{PI}{}_M &= \mathfrak{I}^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K + \delta^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K\,.
\end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения структуры, соответствующие общему случаю, приведены в Лекции 26, формулы (14), (15) и (16):
Первое уравнение структуры

$$\begin{aligned}
d_2D_1x^I = {}& D_2l^I{}_K \cdot D_1x^K + T^I{}_{KL} \cdot D_1x^K \cdot D_2x^L + D_2a^I{}_{MK} \cdot D_1l^K{}_L \cdot g^{LM} -\\
&- B^I{}_{MKN} \cdot D_2x^N \cdot D_1l^K{}_L \cdot g^{LM} - D_2a^I{}_{MK} \cdot A^K{}_{LQ} \cdot D_1x^Q \cdot g^{LM} + B^I{}_{MKN} \cdot D_2x^N \cdot A^K{}_{LQ} \cdot D_1x^Q \cdot g^{LM}\,,
\end{aligned}$$

где $T^I{}_{KL} = C^I{}_{KL} - A^I{}_{KL}$ – объект кручения.
Второе уравнение структуры

$$\begin{aligned}
d_2D_1l^M{}_L = {}& D_2l^M{}_K \cdot D_1l^K{}_L + D_2a^M{}_{LK} \cdot D_1x^K + A^M{}_{LN} \cdot D_2l^N{}_K \cdot D_1x^K - D_2l^M{}_K \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1x^P -\\
&- A^M{}_{KQ} \cdot D_1l^K{}_L \cdot D_2x^Q + (F^M{}_{LPQ} - B^M{}_{LPQ}) \cdot D_1x^P \cdot D_2x^Q + A^M{}_{LN} \cdot D_2a^N{}_{TK} \cdot D_1l^K{}_S \cdot g^{ST} -\\
&- A^M{}_{LN} \cdot D_2a^N{}_{TK} \cdot A^K{}_{SQ} \cdot D_1x^Q \cdot g^{ST} - A^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2x^P \cdot D_1l^K{}_S \cdot g^{ST} +\\
&+ A^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2x^P \cdot A^K{}_{SQ} \cdot D_1x^Q \cdot g^{ST} + +D_2a^M{}_{IK} \cdot D_1a^K{}_{NL} \cdot g^{NI} - D_2a^M{}_{IK} \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1x^P \cdot g^{NI} -\\
&- B^M{}_{IKQ} \cdot D_2x^Q \cdot D_1a^K{}_{NL} \cdot g^{NI} + B^M{}_{IKQ} \cdot D_2x^Q \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1x^P \cdot g^{NI}\,,
\end{aligned}$$

где $F^M{}_{LPQ} = A^M{}_{LPQ} + A^M{}_{KQ} \cdot A^K{}_{LP} + A^M{}_{LN} \cdot T^N{}_{PQ} + C^M{}_{LPQ}$ – объект кривизны.

Третье уравнение структуры

$$\begin{aligned}
d_2 D_1 a^M{}_{IL} &= D_2 a^M{}_{IK} \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 l^M{}_K \cdot D_1 a^K{}_{IL} + B^M{}_{ILN} \cdot D_2 l^N{}_K \cdot D_1 x^K - B^M{}_{IKN} \cdot D_2 x^N \cdot D_1 l^K{}_L - \\
&- D_2 l^M{}_K \cdot B^K{}_{ILP} \cdot D_1 x^P - D_2 a^M{}_{IK} \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P - A^M{}_{KQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 a^K{}_{IL} + F^M{}_{ILPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q + \\
&+ B^M{}_{ILN} \cdot D_2 a^N{}_{MK} \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} - B^M{}_{ILN} \cdot D_2 a^N{}_{MK} \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{LM} - \\
&- B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} + B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{LM},
\end{aligned}$$

где

$F^M{}_{ILPQ} = B^M{}_{ILPQ} + B^M{}_{IKQ} \cdot A^K{}_{LP} + A^M{}_{KQ} \cdot B^K{}_{ILP} + B^M{}_{ILN} \cdot T^N{}_{PQ} + C^M{}_{ILPQ}$ – объект второй кривизны,
$B^M{}_{ILPQ} \cdot Dx^Q = dB^M{}_{ILP}$.

Используя эти уравнения структуры в условиях интегрируемости (8), получим

$$\begin{aligned}
&P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 x^K) + \\
&+ M^L{}_K(P_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) - M^I{}_M(P_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 x^K) + \\
&+ W^{NL}{}_K(P_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) - W^{PI}{}_M(P_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 x^K) + \\
&+ P_I \cdot (D_2 l^I{}_K \cdot D_1 x^K + T^I{}_{KL} \cdot D_1 x^K \cdot D_2 x^L + D_2 a^I{}_{MK} \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} - \\
&- B^I{}_{MKN} \cdot D_2 x^N \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} - D_2 a^I{}_{MK} \cdot A^K{}_{LQ} \cdot D_1 x^Q \cdot g^{LM} + B^I{}_{MKN} \cdot D_2 x^N \cdot A^K{}_{LQ} \cdot D_1 x^Q \cdot g^{LM}) - \\
&- P_I \cdot (D_1 l^I{}_K \cdot D_2 x^K + T^I{}_{KL} \cdot D_2 x^K \cdot D_1 x^L + D_1 a^I{}_{MK} \cdot D_2 l^K{}_L \cdot g^{LM} - \\
&- B^I{}_{MKN} \cdot D_1 x^N \cdot D_2 l^K{}_L \cdot g^{LM} - D_1 a^I{}_{MK} \cdot A^K{}_{LQ} \cdot D_2 x^Q \cdot g^{LM} + B^I{}_{MKN} \cdot D_1 x^N \cdot A^K{}_{LQ} \cdot D_2 x^Q \cdot g^{LM}) + \\
&+ P_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) - P_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 l^K{}_L) + \\
&+ M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 l^K{}_L) + \\
&+ W^{NL}{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 l^M{}_I) - W^{PI}{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 l^K{}_L) + \\
&+ M^L{}_M \cdot (D_2 l^M{}_K \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 a^M{}_{LK} \cdot D_1 x^K + A^M{}_{LN} \cdot D_2 l^N{}_K \cdot D_1 x^K - \\
&- D_2 l^M{}_K \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P - A^M{}_{KQ} \cdot D_1 l^K{}_L \cdot D_2 x^Q + (F^M{}_{LPQ} - B^M{}_{LPQ}) \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q + \\
&+ A^M{}_{LN} \cdot D_2 a^N{}_{TK} \cdot D_1 l^K{}_S \cdot g^{ST} - A^M{}_{LN} \cdot D_2 a^N{}_{TK} \cdot A^K{}_{SQ} \cdot D_1 x^Q \cdot g^{ST} - A^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2 x^P \cdot D_1 l^K{}_S \cdot g^{ST} + \\
&+ A^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2 x^P \cdot A^K{}_{SQ} \cdot D_1 x^Q \cdot g^{ST} + D_2 a^M{}_{IK} \cdot D_1 a^K{}_{NL} \cdot g^{NI} - D_2 a^M{}_{IK} \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{NI} - \\
&- B^M{}_{IKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 a^K{}_{NL} \cdot g^{NI} + B^M{}_{IKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{NI}) - \\
&- M^L{}_M \cdot (D_2 l^M{}_K \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 a^M{}_{LK} \cdot D_1 x^K + A^M{}_{LN} \cdot D_2 l^N{}_K \cdot D_1 x^K - \\
&- D_2 l^M{}_K \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P - A^M{}_{KQ} \cdot D_1 l^K{}_L \cdot D_2 x^Q + (F^M{}_{LPQ} - B^M{}_{LPQ}) \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q + \\
&+ A^M{}_{LN} \cdot D_2 a^N{}_{TK} \cdot D_1 l^K{}_S \cdot g^{ST} - A^M{}_{LN} \cdot D_2 a^N{}_{TK} \cdot A^K{}_{SQ} \cdot D_1 x^Q \cdot g^{ST} - A^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2 x^P \cdot D_1 l^K{}_S \cdot g^{ST} + \\
&+ A^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2 x^P \cdot A^K{}_{SQ} \cdot D_1 x^Q \cdot g^{ST} + D_2 a^M{}_{IK} \cdot D_1 a^K{}_{NL} \cdot g^{NI} - D_2 a^M{}_{IK} \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{NI} - \\
&- B^M{}_{IKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 a^K{}_{NL} \cdot g^{NI} + B^M{}_{IKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{NI}) + \\
&+ P_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) - P_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 x^K \cdot D_2 a^K{}_{LN}) + \\
&+ M^L{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 a^M{}_{IP}) - M^I{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 l^M{}_I \cdot D_2 a^K{}_{LN}) + \\
&+ W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 a^M{}_{IP}) - W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1 a^M{}_{IP} \cdot D_2 a^K{}_{LN}) + \\
&+ W^{LI}{}_M \cdot (D_2 a^M{}_{IK} \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 l^M{}_K \cdot D_1 a^K{}_{IL} + \\
&+ (B^M{}_{ILN} \cdot D_2 l^N{}_K \cdot D_1 x^K - B^M{}_{IKN} \cdot D_2 x^N \cdot D_1 l^K{}_L - D_2 l^M{}_K \cdot B^K{}_{ILP} \cdot D_1 x^P) - \\
&- (D_2 a^M{}_{IK} \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P + A^M{}_{KQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 a^K{}_{IL}) + F^M{}_{ILPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q + B^M{}_{ILN} \cdot D_2 a^N{}_{MK} \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} - \\
&- B^M{}_{ILN} \cdot D_2 a^N{}_{MK} \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{LM} - B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} + \\
&+ B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{LM}) - W^{LI}{}_M \cdot (D_2 a^M{}_{IK} \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 l^M{}_K \cdot D_1 a^K{}_{IL} + \\
&+ (B^M{}_{ILN} \cdot D_2 l^N{}_K \cdot D_1 x^K - B^M{}_{IKN} \cdot D_2 x^N \cdot D_1 l^K{}_L - D_2 l^M{}_K \cdot B^K{}_{ILP} \cdot D_1 x^P) -
\end{aligned}$$

$$- (D_2 a^M{}_{IK} \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P + A^M{}_{KQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 a^K{}_{IL}) + F^M{}_{ILPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q +$$
$$+ B^M{}_{ILN} \cdot D_2 a^N{}_{MK} \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} - B^M{}_{ILN} \cdot D_2 a^N{}_{MK} \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{LM} -$$
$$- B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} + B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot A^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{LM}) = 0\,.$$

И после группировки слагаемых и переобозначения индексов

$$\Big(P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) +$$
$$+ P_I \cdot T^I{}_{MK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_I \cdot T^I{}_{KM} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) +$$
$$+ P_I \cdot B^I{}_{QNK} \cdot A^N{}_{LM} \cdot g^{LQ} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_I \cdot B^I{}_{NQM} \cdot A^Q{}_{LK} \cdot g^{LN} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) +$$
$$+ M^L{}_P \cdot (F^P{}_{LMK} - B^P{}_{LMK}) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + M^L{}_Q \cdot A^Q{}_{LN} \cdot B^N{}_{TPK} \cdot A^P{}_{SM} \cdot g^{ST} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) +$$
$$+ M^L{}_P \cdot B^P{}_{IQK} \cdot B^Q{}_{NLM} \cdot g^{NI} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - M^L{}_Q \cdot (F^Q{}_{LKM} - B^Q{}_{LKM}) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) -$$
$$- M^L{}_P \cdot A^P{}_{LN} \cdot B^N{}_{TQM} \cdot A^Q{}_{SK} \cdot g^{ST} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - M^L{}_Q \cdot B^Q{}_{IPM} \cdot B^P{}_{NLK} \cdot g^{NI} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) +$$
$$+ W^{LI}{}_P \cdot F^P{}_{ILMK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + W^{TI}{}_S \cdot B^S{}_{ITN} \cdot B^N{}_{PQK} \cdot A^Q{}_{LM} \cdot g^{LP} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) -$$
$$- W^{LI}{}_Q \cdot F^Q{}_{ILKM} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - W^{TI}{}_S \cdot B^S{}_{ITN} \cdot B^N{}_{QPM} \cdot A^P{}_{LK} \cdot g^{LQ} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M)\Big) +$$
$$+ \Big(M^L{}_K(P_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) + P_K \cdot \delta^L{}_M \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) + P_I \cdot B^I{}_{NKM} \cdot g^{LN} \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) -$$
$$- P_M(M^L{}_K) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) + M^P{}_Q \cdot A^Q{}_{PK} \cdot \delta^L{}_M \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) -$$
$$- M^P{}_K \cdot A^L{}_{PM} \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) + M^L{}_Q \cdot A^Q{}_{KM} \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) +$$
$$+ M^S{}_P \cdot A^P{}_{SN} \cdot B^N{}_{TKM} \cdot g^{LT} \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) + W^{LI}{}_N \cdot B^N{}_{ILK} \cdot \delta^L{}_M \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) -$$
$$- W^{PI}{}_K \cdot B^L{}_{IPM} \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) +$$
$$+ W^{LI}{}_N \cdot B^N{}_{IKM} \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M) + W^{TI}{}_S \cdot B^S{}_{ITN} \cdot B^N{}_{QKM} \cdot g^{LQ} \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 x^M)\Big) +$$
$$+ \Big(-M^I{}_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) - P_L \cdot B^L{}_{NMK} \cdot g^{IN} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) - P_M \cdot \delta^I{}_K \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) +$$
$$+ P_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) - M^I{}_Q \cdot A^Q{}_{MK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) + -M^L{}_P \cdot A^P{}_{LN} \cdot B^N{}_{TMK} \cdot g^{IT} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) -$$
$$- M^L{}_N \cdot A^N{}_{LM} \cdot \delta^I{}_K \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) + M^L{}_M \cdot A^I{}_{LK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) - W^{IL}{}_N \cdot B^N{}_{LMK} \cdot (\delta_2 x^K \cdot \delta_1 l^M{}_I) -$$
$$- W^{TL}{}_S \cdot B^S{}_{LTN} \cdot B^N{}_{QMK} \cdot g^{IQ} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) - W^{LT}{}_N \cdot B^N{}_{TLM} \cdot \delta^I{}_K \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I) +$$
$$+ W^{LP}{}_M \cdot B^I{}_{PLK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M{}_I)\Big) +$$
$$+ \Big(M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) + M^I{}_K \cdot \delta^L{}_M \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I) -$$
$$- M^L{}_M \cdot \delta^I{}_K \cdot (D_2 l^K{}_L \cdot D_1 l^M{}_I)\Big) +$$
$$+ \Big(W^{NL}{}_K(P_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) - P_K \cdot A^N{}_{QM} \cdot g^{QL} \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) + M^L{}_K \cdot \delta^N{}_M \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) -$$
$$- M^T{}_Q \cdot A^Q{}_{TK} \cdot A^N{}_{SM} \cdot g^{SL} \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) - M^I{}_K \cdot B^N{}_{PIM} \cdot g^{PL} \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) +$$
$$+ M^N{}_Q \cdot B^Q{}_{IKM} \cdot g^{LI} \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) -$$
$$- P_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) - W^{IL}{}_K \cdot A^N{}_{IM} \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) -$$
$$- W^{TI}{}_S \cdot B^S{}_{ITK} \cdot A^N{}_{PM} \cdot g^{PL} \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M) - W^{NL}{}_Q \cdot A^Q{}_{KM} \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 x^M)\Big) +$$
$$+ \Big(-W^{PI}{}_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) + P_M \cdot A^P{}_{LK} \cdot g^{LI} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) -$$
$$- M^P{}_Q \cdot B^Q{}_{NMK} \cdot g^{IN} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) -$$
$$- M^I{}_M \cdot \delta^P{}_K \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) + M^L{}_N \cdot A^N{}_{LM} \cdot A^P{}_{SK} \cdot g^{SI} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) +$$
$$+ M^L{}_M \cdot B^P{}_{NLK} \cdot g^{NI} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) +$$
$$+ P_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) + W^{PI}{}_Q \cdot A^Q{}_{MK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) + W^{LI}{}_M \cdot A^P{}_{LK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP}) +$$
$$+ W^{TN}{}_S \cdot B^S{}_{NTM} \cdot A^P{}_{LK} \cdot g^{LI} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M{}_{IP})\Big) +$$
$$+ \Big(P_K \cdot g^{IL} \cdot \delta^N{}_M \cdot (\delta_2 a^K{}_{LN} \cdot \delta_1 l^M{}_I) + W^{NL}{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 l^M{}_I) +$$
$$+ M^T{}_P \cdot A^P{}_{TK} \cdot g^{IL} \cdot \delta^N{}_M \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 l^M{}_I) -$$
$$- M^I{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 l^M{}_I) + W^{IL}{}_K \cdot \delta^N{}_M \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 l^M{}_I) +$$
$$+ W^{TP}{}_S \cdot B^S{}_{PTK} \cdot g^{IL} \cdot \delta^N{}_M \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 l^M{}_I) - W^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K \cdot (D_2 a^K{}_{LN} \cdot D_1 l^M{}_I)\Big) +$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(-P_M\cdot g^{LI}\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})-W^{PI}{}_M(M^L{}_K)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})-\\
&\quad-M^S{}_N\cdot A^N{}_{SM}\cdot g^{LI}\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})+\\
&\quad+M^L{}_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})+W^{PI}{}_K\cdot\delta^L{}_M\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})-W^{LI}{}_M\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})-\\
&\quad-W^{TN}{}_S\cdot B^S{}_{NTM}\cdot g^{LI}\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2l^K{}_L\cdot D_1a^M{}_{IP})\Big)+\\
&+\Big(M^P{}_K\cdot g^{IL}\cdot\delta^N{}_M\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP})-M^N{}_M\cdot g^{LI}\cdot\delta^P{}_K\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP})+\\
&\quad+W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP})-W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K)\cdot(D_2a^K{}_{LN}\cdot D_1a^M{}_{IP})\Big)=0\,.
\end{aligned}
$$

Отсюда следуют перестановочные соотношения операторов дифференцирования второй кинематической алгебры в калибровочном поле с общей таблицей умножения базисных векторов:

$$
\begin{aligned}
&[P_K(P_M)]=P_I\cdot T^I{}_{[KM]}+P_I\cdot B^I{}_{NQ[M}\cdot A^Q{}_{|L|K]}\cdot g^{LN}+M^L{}_Q\cdot(F^Q{}_{L[KM]}-B^Q{}_{L[KM]})+\\
&\qquad+M^L{}_P\cdot A^P{}_{LN}\cdot B^N{}_{TQ[M}\cdot A^Q{}_{|S|K]}\cdot g^{ST}+M^L{}_Q\cdot B^Q{}_{IP[M}\cdot B^P{}_{|NL|K]}\cdot g^{NI}+\\
&\qquad+W^{LI}{}_Q\cdot F^Q{}_{IL[KM]}+W^{TI}{}_S\cdot B^S{}_{ITN}\cdot B^N{}_{QP[M}\cdot A^P{}_{|L|K]}\cdot g^{LQ}\,,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
&[M^L{}_K(P_M)]=-P_K\cdot\delta^L{}_M-P_I\cdot B^I{}_{NKM}\cdot g^{LN}-\\
&\qquad-M^P{}_N\cdot(A^N{}_{PK}\cdot\delta^L{}_M-A^L{}_{PM}\cdot\delta^N{}_K+A^N{}_{KM}\cdot\delta^L{}_P)-M^S{}_P\cdot A^P{}_{SN}\cdot B^N{}_{TKM}\cdot g^{LT}-\\
&\qquad-(W^{PT}{}_N\cdot B^N{}_{TPK}\cdot\delta^L{}_M-W^{PT}{}_K\cdot B^L{}_{TPM}+W^{LT}{}_N\cdot B^N{}_{TKM})-W^{TI}{}_S\cdot B^S{}_{ITN}\cdot B^N{}_{QKM}\cdot g^{LQ}\,,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&[P_K(M^I{}_M)]=P_M\cdot\delta^I{}_K+P_L\cdot B^L{}_{NMK}\cdot g^{IN}+\\
&\qquad+M^P{}_N\cdot(A^N{}_{PM}\cdot\delta^I{}_K-A^I{}_{PK}\cdot\delta^N{}_M+A^N{}_{MK}\cdot\delta^I{}_P)+M^L{}_P\cdot A^P{}_{LN}\cdot B^N{}_{TMK}\cdot g^{IT}+\\
&\qquad+(W^{PT}{}_N\cdot B^N{}_{TPM}\cdot\delta^I{}_K-W^{PT}{}_M\cdot B^I{}_{TPK}+W^{IT}{}_N\cdot B^N{}_{TMK})+W^{TL}{}_S\cdot B^S{}_{LTN}\cdot B^N{}_{QMK}\cdot g^{IQ}\,,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
[M^L{}_K(M^I{}_M)]=M^L{}_M\cdot\delta^I{}_K-M^I{}_K\cdot\delta^L{}_M\,,
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&[W^{NL}{}_K(P_M)]=P_K\cdot A^N{}_{QM}\cdot g^{QL}-M^L{}_K\cdot\delta^N{}_M+M^T{}_Q\cdot A^Q{}_{TK}\cdot A^N{}_{SM}\cdot g^{SL}+\\
&\qquad+M^I{}_K\cdot B^N{}_{PIM}\cdot g^{PL}-M^N{}_Q\cdot B^Q{}_{IKM}\cdot g^{LI}+\\
&\qquad+W^{IL}{}_K\cdot A^N{}_{IM}+W^{NL}{}_Q\cdot A^Q{}_{KM}+W^{TI}{}_S\cdot B^S{}_{ITK}\cdot A^N{}_{PM}\cdot g^{PL}\,,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&[P_K(W^{PI}{}_M)]=-P_M\cdot A^P{}_{LK}\cdot g^{LI}+M^I{}_M\cdot\delta^P{}_K-M^L{}_N\cdot A^N{}_{LM}\cdot A^P{}_{SK}\cdot g^{SI}-\\
&\qquad-M^L{}_M\cdot B^P{}_{NLK}\cdot g^{NI}+M^P{}_Q\cdot B^Q{}_{NMK}\cdot g^{IN}-\\
&\qquad-W^{LI}{}_M\cdot A^P{}_{LK}-W^{PI}{}_Q\cdot A^Q{}_{MK}-W^{TN}{}_S\cdot B^S{}_{NTM}\cdot A^P{}_{LK}\cdot g^{LI}\,,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
&[W^{NL}{}_K(M^I{}_M)]=-P_K\cdot g^{IL}\cdot\delta^N{}_M-M^T{}_P\cdot A^P{}_{TK}\cdot g^{IL}\cdot\delta^N{}_M+\\
&\qquad+W^{NL}{}_M\cdot\delta^I{}_K-W^{IL}{}_K\cdot\delta^N{}_M-W^{TP}{}_S\cdot B^S{}_{PTK}\cdot g^{IL}\cdot\delta^N{}_M\,,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
&[M^L{}_K(W^{PI}{}_M)]=P_M\cdot g^{LI}\cdot\delta^P{}_K+M^S{}_N\cdot A^N{}_{SM}\cdot g^{LI}\cdot\delta^P{}_K-\\
&\qquad-W^{PI}{}_K\cdot\delta^L{}_M+W^{LI}{}_M\cdot\delta^P{}_K+W^{TN}{}_S\cdot B^S{}_{NTM}\cdot g^{LI}\cdot\delta^P{}_K\,,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
[W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)]=M^N{}_M\cdot g^{LI}\cdot\delta^P{}_K-M^P{}_K\cdot g^{IL}\cdot\delta^N{}_M\,,
\tag{26}
$$

где

$$
\begin{aligned}
T^I{}_{[KM]}&=C^I{}_{[KM]}-A^I{}_{[KM]}\quad\text{– тензор кручения},\\
F^Q{}_{L[KM]}&=A^Q{}_{L[KM]}+A^Q{}_{P[M}\cdot A^P{}_{|L|K]}+A^Q{}_{LP}\cdot T^P{}_{[KM]}+C^Q{}_{L[KM]}\quad\text{– тензор кривизны},\\
F^Q{}_{IL[KM]}&=B^Q{}_{IL[KM]}+B^Q{}_{IP[M}\cdot A^P{}_{|L|K}+A^Q{}_{P[M}\cdot B^P{}_{|IL|K}+B^Q{}_{ILP}\cdot T^P{}_{[KM]}+C^Q{}_{IL[KM]}\\
&\qquad\text{– тензор второй кривизны.}
\end{aligned}
$$

Рассмотренный общий случай сводится к предыдущему частному случаю, если положить

$$
B^Q{}_{IP[M}=0\,,\quad C^Q{}_{ILKM}=0
$$

и пренебречь проекциями произведений базисных векторов на слагаемые, содержащие компоненты метрического тензора g^{IL}.

3. Частный случай 2

В дальнейшем нам понадобится другой частный случай, когда

$$B^Q{}_{IP[M} \neq 0\,, \quad C^Q{}_{ILKM} \neq 0$$

но проекции произведений базисных векторов на слагаемые, содержащие компоненты метрического тензора g^{IL} отсутствуют. Из формул (18) - (26), следуют перестановочные соотношения для рассматриваемого случая.

$$[P_K(P_M)] = P_I \cdot T^I{}_{[KM]} + M^L{}_Q \cdot (F^Q{}_{L[KM]} - B^Q{}_{L[KM]}) + W^{LI}{}_Q \cdot F^Q{}_{IL[KM]}\,, \tag{27}$$

$$[M^I{}_M(P_K)] = -P_M \cdot \delta^I{}_K - M^P{}_N \cdot G^N{}_{PM}{}^I{}_K - W^{PT}{}_N \cdot G^N{}_{TPM}{}^I{}_K\,, \tag{28}$$

$$[P_K(M^I{}_M)] = P_M \cdot \delta^I{}_K + M^P{}_N \cdot G^N{}_{PM}{}^I{}_K + W^{PT}{}_N \cdot G^N{}_{TPM}{}^I{}_K\,, \tag{29}$$

$$[M^L{}_K(M^I{}_M)] = M^L{}_M \cdot \delta^I{}_K - M^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,, \tag{30}$$

$$[W^{NL}{}_K(P_M)] = -M^L{}_K \cdot \delta^N{}_M + W^{IL}{}_K \cdot A^N{}_{IM} + W^{NL}{}_Q \cdot A^Q{}_{KM}\,, \tag{31}$$

$$[P_K(W^{PI}{}_M)] = M^I{}_M \cdot \delta^P{}_K - W^{LI}{}_M \cdot A^P{}_{LK} - W^{PI}{}_Q \cdot A^Q{}_{MK}\,, \tag{32}$$

$$[W^{NL}{}_K(M^I{}_M)] = W^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K - W^{IL}{}_K \cdot \delta^N{}_M\,, \tag{33}$$

$$[M^L{}_K(W^{PI}{}_M)] = -W^{PI}{}_K \cdot \delta^L{}_M + W^{LI}{}_M \cdot \delta^P{}_K\,, \tag{34}$$

$$[W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)] = 0\,, \tag{35}$$

где

$$T^I{}_{[KM]} = C^I{}_{[KM]} - A^I{}_{[KM]} \quad \text{– тензор кручения,}$$

$$G^N{}_{PM}{}^I{}_K = A^N{}_{PM} \cdot \delta^I{}_K - A^I{}_{PK} \cdot \delta^N{}_M + A^N{}_{MK} \cdot \delta^I{}_P\,,$$

$$F^Q{}_{L[KM]} = A^Q{}_{L[KM]} + A^Q{}_{P[M} \cdot A^P{}_{|L|K]} + A^Q{}_{LP} \cdot T^P{}_{[KM]} + C^Q{}_{L[KM]} \quad \text{– тензор кривизны,}$$

$$G^N{}_{TPM}{}^I{}_K = B^N{}_{TPM} \cdot \delta^I{}_K - B^I{}_{TPK} \cdot \delta^N{}_M + B^N{}_{TMK} \cdot \delta^I{}_P\,,$$

$$F^Q{}_{IL[KM]} = B^Q{}_{IL[KM]} + B^Q{}_{IP[M} \cdot A^P{}_{|L|K} + A^Q{}_{P[M} \cdot B^P{}_{|IL|K} + B^Q{}_{ILP} \cdot T^P{}_{[KM]} + C^Q{}_{IL[KM]}$$
$$\text{– тензор второй кривизны.}$$

Здесь учтено, что

$$W^{PT}{}_N \cdot B^N{}_{TPM} \cdot \delta^I{}_K - W^{PT}{}_M \cdot B^I{}_{TPK} + W^{IT}{}_N \cdot B^N{}_{TMK} =$$
$$= W^{PT}{}_N \cdot (B^N{}_{TPM} \cdot \delta^I{}_K - B^I{}_{TPK} \cdot \delta^N{}_M + B^N{}_{TMK} \cdot \delta^I{}_P) = W^{PT}{}_N \cdot G^N{}_{TPM}{}^I{}_K\,.$$

X. ВЫВОДЫ

- Применяя операторы дифференцирования по кинематическим переменным

  $$P_K(\,) = \frac{\partial}{Dx^K}\,, \qquad M^I{}_K(\,) = \frac{\partial}{Dl^K{}_I}\,, \qquad W^{IL}{}_K(\,) = \frac{\partial}{Da^K{}_{LI}}$$

  по отношению к вектору действия S, получаем *динамические переменные*:

  импульс $$p_K = P_K(S) = \frac{\partial S(x,l,a)}{Dx^K}\,,$$

  момент $$m^I{}_K = M^I{}_K(S) = \frac{\partial S(x,l,a)}{Dl^K{}_I}\,,$$

  второй момент $$w^{IL}{}_K = W^{IL}{}_K(S) = \frac{\partial S(x,u,a)}{Da^K{}_{LI}}\,.$$

- Операторы дифференцирования по кинематическим переменным не являются частными производными. Поэтому перестановка таких операторов приводит к комбинации, не тождественной исходной. Отсюда возникает необходимость рассматривать перестановочные соотношения операторов дифференцирования.

- В перестановочные соотношения входят антисимметричные тензоры, являющиеся функциями потенциалов калибровочного поля. Это тензоры кручения, кривизны и второй кривизны. С этим связано то обстоятельство, что физические поля описываются антисимметричными тензорами. К ним относятся, например, тензор Максвелла, тензор кривизны, тензор Янга-Миллса.