Лекция 27. Пятимерная теория гравитации и электромагнетизма

А. А. Кецарис*
(16 июля 2012)

В этой Лекции мы объясняем смысл пятой координаты и развиваем результаты пятимерной теории гравитации и электромагнетизма Калуцы.

I. ВВЕДЕНИЕ

Калуца нетривиальным образом объединил гравитацию и электромагнетизм, предполагая, что пространство-время представляет собой не четырех, а пятимерный континуум, причем геометрические объекты пятимерного пространства не зависят от пятой координаты.[1] Так как окружающий нас мир является, очевидно, четырехмерным, то привлечение пятой координаты для решения проблем единства остается неясным и потому неудовлетворительным требованием теории Калуцы.

Представление о кинематическом пространстве, развитое в предыдущей лекции, позволяет установить физический смысл пятой координаты и смысл пятимерной концепции вообще. Кинематическое пространство представляет собой сумму векторов пространства-времени и векторов линейных движений (а в общем случае и векторов ускорений, вторых ускорений и так далее). Перейдем от кинематического пространства общего вида, рассмотренного в Лекции 26, к пятимерному пространству Калуцы. Для этого воспользуемся квадратом линейного элемента кинематической алгебры в калибровочном поле, приведенным в разделе II Лекции 26 (формула (7))

$$ds'^2 = C_{IK}\, Dx^I\, Dx^K + \\ + (Dl^N{}_L - A^N{}_{LI}\, Dx^I)\,(Dl^L{}_N - A^L{}_{NK}\, Dx^K)\,. \tag{1}$$

В этой формуле выполним замену

$$x^I \to x^i\,,$$

предполагая, что координаты относятся не к обобщенному пространству-времени, а к четырехмерному пространству-времени. Здесь и далее строчные индексы $i, k, l, \ldots$ принимают значения $1, 2, 3, 4$. Кроме того перейдем от обобщенных потенциалов калибровочного поля к потенциалам электромагнитного поля и, соответственно, от обобщенных линейных движений к движениям электрической группы. В соответствии с результатом раздела V Лекции 19 электрической группой является группа поворотов в плоскости 21. На этом основании в формуле (1) выполним замену

$$l^N{}_L \to l^{21}\,, \qquad A^N{}_{LI} \to A^{21}{}_i\,.$$

В результате для квадрата линейного элемента получим

$$d\bar{s}^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k + \\ + (dl^{21} - A^{21}{}_i\, dx^i)\,(dl_{12} - A_{12\,k}\, dx^k)\,. \tag{2}$$

Здесь черта над символом линейного элемента означает, что рассматриваемый линейный элемент относится к пятимерному пространству. И в дальнейшем примем, что черта над символом геометрического объекта означает, что этот объект относится к пятимерному пространству. Отсутствие черты означает, что объект относится к четырехмерному пространству. Перепишем выражение (2) иначе, учитывая, что перестановка индексов 12 приводит к изменению знака соответствующего тензора,

$$d\bar{s}^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k - dl^{21}\, dl_{21} - A_{12\,k}\, dx^k\, dl^{21} - \\ - A^{12}{}_i\, dx^i\, dl_{21} - A^{12}{}_i\, A_{12\,k}\, dx^i\, dx^k\,.$$

Далее введем переобозначения

$$l^{21} \to x^0\,, \qquad A^{12}{}_i \to A^0{}_i\,,$$

получим

$$d\bar{s}^2 = \left(g_{ik} - A^0{}_i\, A_{0\,k}\right)\, dx^i\, dx^k - A_{0\,k}\, dx^k\, dx^0 - \\ - A^0{}_i\, dx^i\, dx_0 - dx^0\, dx_0\,. \tag{3}$$

Отождествляя переменную x^0 с пятой координатой, в результате мы получим квадрат линейного элемента, вводимый в теории Калуцы.

Компоненты с верхним нулевым индексом не отличимы от компонент с нижним нулевым индексом, но для единообразия в обозначениях удобно ввести компоненту метрического тензора

$$g_{00} = 1$$

и считать, например, что

$$x_0 = g_{00}\, x^0\,.$$

В таком обозначении квадрат линейного элемента приобретает вид

$$d\bar{s}^2 = \left(g_{ik} - g_{00}\, A^0{}_i\, A^0{}_k\right)\, dx^i\, dx^k - \\ - 2g_{00}\, A^0{}_k\, dx^k\, dx^0 - g_{00}\, dx^0\, dx^0\,. \tag{4}$$

---

* ketsaris@mail.ru; http://toe-physics.org

[1] Это предположение Калуца назвал условием цилиндричности.

Здесь пятая координата x^0 наделяется размерностью длины. Коэффициенты $A^0{}_i$, отождествляемые с потенциалами электромагнитного поля, являются безразмерными. В этом состоит особенность кинематического подхода к описанию взаимодействия. В динамическом подходе потенциалы электромагнитного поля имеют размерность Вольт. Переход от потенциалов электромагнитного поля в кинематическом подходе к потенциалам электромагнитного поля в динамическом подходе осуществляется путем замены в (4)

$$A^0{}_i \to k\, A^0{}_i \tag{5}$$

Здесь потенциалы $A^0{}_i$ слева безразмерны, а потенциалы справа имеют размерность

$$[A^0{}_i] = B\,.$$

Отсюда коэффициент k имеет размерность

$$[k] = B^{-1}\,.$$

Квадрат линейного элемента (4) можно записать в общем виде

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{IK}\, dx^I\, dx^K\,.$$

Здесь и далее заглавные индексы принимают значения 1, 2, 3, 4, 0. Из (4) следует что метрический тензор $\bar{g}_{IK}$ содержит следующие компоненты

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ik} &= g_{ik} - g_{00}\, A^0{}_i\, A^0{}_k\,, \\ \bar{g}_{0k} &= -g_{00}\, A^0{}_k\,, \\ \bar{g}_{00} &= -g_{00} = -1\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Обратный метрический тензор $\bar{g}^{KL}$, определяемый из условия

$$\bar{g}_{IK}\, \bar{g}^{KL} = \delta^L_K\,,$$

имеет компоненты

$$\begin{aligned} \bar{g}^{kl} &= g^{kl}\,, \\ \bar{g}^{0l} &= -A^0{}_n\, g^{nl}\,, \\ \bar{g}^{00} &= -g^{00} + A^0{}_n\, A^0{}_m\, g^{nm}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь g^{kl} и g^{00} определяются из условий

$$g_{ik}\, g^{kl} = \delta^l_k\,, \quad g_{00}\, g^{00} = 1\,.$$

Из (6) следует, что поле в теории Калуцы представлено компонентами метрического тензора g_{ik} и потенциалами электромагнитного поля $A^0{}_i$. Вместе с тем также, как от псевдоевклидова пространства с метрическим тензором δ_{ik} мы переходим к риманову пространству с метрическим тензором g_{ik}, естественно перейти от пространства Калуцы с компонентой $g_{00} = 1$ к его обобщению, когда $g_{00} \neq 1$. В этом случае поле представлено компонентами метрического тензора g_{ik}, потенциалами электромагнитного поля $A^0{}_i$ и компонентой g_{00}. Последний случай назовем G-полем.

Перейдем теперь к уравнениям поля и уравнениям движения, вытекающим из пятимерной теории. Сначала рассмотрим случай без участия G-поля, когда $g_{00} = 1$.[2]

II. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ I

В теории Калуцы гравитационное и электромагнитное поля выступают как единый объект – поле. Уравнениями этого поля являются уравнения Эйнштейна, обобщенные на пятимерное пространство. Уравнения поля с источниками рассмотрим для трех модификаций: для контравариантных, смешанных и ковариантных компонент.

1. Уравнения поля для контравариантных компонент

Для контравариантных компонент уравнения поля с источниками выглядят следующим образом[3]

$$\bar{R}^{IK} - \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}^{IK} = \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{IK}\,.$$

Здесь $\bar{T}^{IK}$ тензор энергии-импульса материи в пятимерном пространстве. Для нас пока не важно конкретное содержание тензора энергии-импульса материи, а существенно только то, что мы рассматриваем уравнения

---

[2] Условие цилиндричности, дополненное требованием $g_{00} = 1$, называется *усиленным* условием цилиндричности.

[3] Постоянная G выражается через гравитационную постоянную γ следующим образом

$$G = 4\pi\gamma\,, \qquad \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}\, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}\,.$$

Эйнштейна с правой частью. Уравнения поля распадаются на следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
\bar{R}^{ik} - \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}^{ik} &= \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{ik}\,, \\
\bar{R}^{i0} - \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}^{i0} &= \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{i0}\,, \\
\bar{R}^{00} - \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}^{00} &= \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{00}\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Используя соотношения (B14), (B15) и (A2), приведем первое уравнение этой системы к четырехмерному пространству

$$R^{ik} + \frac{1}{2}\,F^{i}{}_{l}\,F^{kl} - \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{4}\,F^{m}{}_{l}\,F_{m}{}^{l}\right)g^{ik} = \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{ik}\,. \tag{9}$$

Используя соотношения (B13), (B15) и (A2), приведем второе уравнение системы (8) к четырехмерному пространству

$$-\left(R^{i}{}_{p} + \frac{1}{2}\,F^{i}{}_{l}\,F_{p}{}^{l}\right)A^{p} - \frac{1}{2}\,F^{li}{}_{;l} + \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{4}\,F^{m}{}_{l}\,F_{m}{}^{l}\right)A^{i} = \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{i0}\,. \tag{10}$$

Используя соотношения (B12), (B15) и (A2), приведем третье уравнение системы (8) к четырехмерному пространству

$$A^{n}\left(R_{np} + \frac{1}{2}\,F_{nl}\,F_{p}{}^{l}\right)A^{p} + A^{n}F^{l}{}_{n;l} + \frac{1}{4}\,F^{m}{}_{l}\,F_{m}{}^{l} - \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{4}\,F^{m}{}_{l}\,F_{m}{}^{l}\right)(-1 + A^{m}\,A_{m}) = \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{00}\,. \tag{11}$$

Первое уравнение поля – уравнение (9) – перепишем следующим образом

$$R^{ik} - \frac{1}{2}\,R\,g^{ik} = \frac{1}{2}\left(-F^{i}{}_{l}\,F^{kl} + \frac{1}{4}\,F^{m}{}_{l}\,F_{m}{}^{l}\,g^{ik}\right) + \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{ik}\,. \tag{12}$$

Отсюда видно, что это уравнение есть уравнение гравитационного поля, источниками которого являются тензор $\bar{T}^{ik}$ и тензор энергии-импульса электромагнитного поля[4]

$$T_{э}{}^{ik} = -F^{i}{}_{l}\,F^{kl} + \frac{1}{4}\,F^{m}{}_{l}\,F_{m}{}^{l}\,g^{ik}\,.$$

Рассмотрим теперь второе уравнение поля – уравнение (10). Запишем его следующим образом

$$-\left(R^{ip} - \frac{1}{2}\,R\,g^{ip} - \frac{1}{2}\left(-F^{i}{}_{l}\,F_{p}{}^{l} + \frac{1}{4}\,F^{m}{}_{l}\,F_{m}{}^{l}\,g^{ip}\right)\right)A_{p} - \frac{1}{2}\,F^{li}{}_{;l} = \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{i0}\,. \tag{13}$$

Используя уравнение (12), приведем это уравнение к виду

$$\frac{1}{2}\,F^{li}{}_{;l} = -\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{i0} - \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{ip}\,A_{p}\,. \tag{14}$$

Это уравнение представляет собой уравнение электромагнитного поля с источниками. Смысл выражений, стоящих в правой части уравнения, мы рассмотрим далее.

Обратимся теперь к третьему уравнению поля – уравнению (11). Перепишем это уравнение следующим образом

$$A_{n}\left(R^{np} - \frac{1}{2}\,R\,g^{np} - \frac{1}{2}\left(-F^{n}{}_{l}\,F_{p}{}^{l} + \frac{1}{4}\,F^{m}{}_{l}\,F_{m}{}^{l}\,g^{np}\right)\right)A_{p} + A_{n}F^{ln}{}_{;l} + \frac{1}{4}\,F^{m}{}_{l}\,F_{m}{}^{l} + \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{4}\,F^{m}{}_{l}\,F_{m}{}^{l}\right) = \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{00}\,. \tag{15}$$

---

[4] Нужно иметь в виду, что в этом уравнении тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет размерность

$$[T_{э}{}^{ik}] = \frac{1}{м^2}\,.$$

Это связано с тем, что коэффициенты A^i, которые отождествляются с потенциалами электромагнитного поля, являются безразмерными.

С использованием предыдущих уравнений (12) и (14) это уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{2}\left(R+\frac{3}{4}\,F^{m}{}_{l}\,F_{m}{}^{l}\right)=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{00}+2A_n\,\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{n0}+A_n\,\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{np}\,A_p\,. \tag{16}$$

Для понимания смысла этого уравнения необходимо вспомнить, что в общем случае поле представлено компонентами метрического тензора g_{ik}, потенциалами электромагнитного поля A^0_i и компонентой g_{00}. Вариация действия по компонентам метрического тензора g_{ik} приводит к уравнению гравитационного поля, вариация действия по потенциалам электромагнитного поля A^0_i приводит к уравнению электромагнитного поля, соответственно вариация действия по компоненте g_{00} приводит к уравнению G-поля. Здесь мы остановились на случае, когда $g_{00}=1$. Таким образом, уравнение (16) это осколок уравнения G-поля, соответствующий указанному случаю.

И, наконец, сделаем следующее методическое замечание. Уравнение гравитационного поля (12) мы получили непосредственно из первого уравнения системы (8), уравнение электромагнитного поля (14) мы получили из второго уравнения системы (8) путем подстановки в него уравнения гравитационного поля (12), уравнение G-поля (16) мы получили из третьего уравнения системы (8) путем подстановки в него уравнения гравитационного поля (12) и уравнения электромагнитного поля (14). Имея в виду сказанное, ведем понятие *неприводимое уравнение*, под которым будем подразумевать уравнение, не требующее преобразований с привлечением других уравнений. Как будет видно из дальнейшего, в уравнениях поля для контравариантных компонент неприводимым является уравнение гравитационного поля, в уравнениях поля для смешанных компонент неприводимым является уравнение электромагнитного поля, в уравнениях поля для ковариантных компонент неприводимым является третье уравнение – уравнение G-поля.

2. Уравнения поля для смешанных компонент

Уравнения поля в этом случае имеют вид

$$\bar{R}^I_K-\frac{1}{2}\,\bar{R}\,\delta^I{}_K=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^I_K$$

и распадаются на следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}\bar{R}^i_k-\frac{1}{2}\,\bar{R}\,\delta^i{}_k&=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^i_k\,,\\ \bar{R}^i_0&=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^i_0\,,\\ \bar{R}^0_k&=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^0_k\,,\\ \bar{R}^0_0-\frac{1}{2}\,\bar{R}&=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^0_0\,.\end{aligned} \tag{17}$$

Используя соотношения (B11) и (B15), приведем первое уравнение этой системы к четырехмерному пространству

$$R^i{}_k-\frac{1}{2}\,A_k\,F^{il}{}_{;l}+\frac{1}{2}\,F^i{}_l\,F_k{}^l-\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\right)\delta^i{}_k=\frac{2G}{c^4}\left(\bar{T}^{ip}\,\bar{g}_{pk}+\bar{T}^{i0}\,\bar{g}_{0k}\right)\,, \tag{18}$$

Используя соотношения (B10) и (B15), приведем второе уравнение системы (17) к четырехмерному пространству

$$\frac{1}{2}\,F^{li}{}_{;l}=\frac{2G}{c^4}\left(\bar{T}^{ip}\,\bar{g}_{p0}+\bar{T}^{i0}\,\bar{g}_{00}\right)\,. \tag{19}$$

Используя соотношения (B9) и (B15), приведем третье уравнение системы (17) к четырехмерному пространству

$$-A^nR_{nk}+\frac{1}{2}\,A^n\,A_k(F_n{}^l)_{;l}-\frac{1}{2}\,A^n\,F_{nl}\,F_k{}^l-\frac{1}{2}\,F^l{}_{k;l}-\frac{1}{4}\,A_k\,F_l{}^m\,F^l{}_m=\frac{2G}{c^4}\left(\bar{T}^{0p}\,\bar{g}_{pk}+\bar{T}^{00}\,\bar{g}_{0k}\right)\,, \tag{20}$$

Используя соотношения (B8) и (B15), приведем четвертое уравнение системы (17) к четырехмерному пространству

$$-\frac{1}{2}\,A^n\,F^l{}_{n;l}-\frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l-\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\right)=\frac{2G}{c^4}\left(\bar{T}^{0p}\bar{g}_{p0}+\bar{T}^{00}\bar{g}_{00}\right)\,. \tag{21}$$

Второе уравнение поля – уравнение (19) – записывается так

$$\frac{1}{2}\,F^{li}{}_{;l}=\frac{2G}{c^4}\left(-\bar{T}^{ip}\,A_p-\bar{T}^{i0}\right)\,. \tag{22}$$

Как и следовало ожидать, оно совпадает с полученным ранее уравнением электромагнитного поля с источниками (14). Мы убеждаемся в том, что в смешанных компонентах уравнение электромагнитного поля является неприводимым.

Первое уравнение поля – уравнение (18) – после преобразований принимает вид

$$R^i{}_k-\frac{1}{2}\,R\,\delta^i{}_k-\frac{1}{2}\,A_k\,F^{il}{}_{;l}=\frac{1}{2}\left(-F^i{}_l\,F_k{}^l+\frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\,\delta^i{}_k\right)+\frac{2G}{c^4}\left(\bar{T}^{ip}\left(g_{pk}-A_p\,A_k\right)-\bar{T}^{i0}\,A_k\right)\,, \tag{23}$$

После исключения из него второго уравнения (22) оно преобразуется в уравнение для гравитационного поля (12).

Третье уравнение поля – уравнение (21) – записывается так

$$-\frac{1}{2}\,A^n F^l{}_{n;l}-\frac{1}{2}\left(R+\frac{3}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\right)=\frac{2G}{c^4}\left(-\bar{T}^{0p}A_p-\bar{T}^{00}\right)\,. \tag{24}$$

Используя второе уравнение (22), получим с точностью до знака ранее выведенное уравнение (16) – уравнение G-поля.

3. Уравнения поля для ковариантных компонент

Уравнения поля в этом случае имеют вид

$$\bar{R}_{IK}-\frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{IK}=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}_{IK}\,.$$

Уравнения поля распадаются на следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ik}-\frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{ik}&=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}_{ik}\,.\\ \bar{R}_{i0}-\frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{i0}&=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}_{i0}\,.\\ \bar{R}_{00}-\frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{00}&=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}_{00}\,.\end{aligned} \tag{25}$$

Используя соотношения (B7), (B15) и (A1), приведем первое уравнение этой системы к четырехмерному пространству

$$R_{ik}-\frac{1}{2}\,A_i\,(F_k{}^l)_{;l}-\frac{1}{2}\,A_k\,(F_i{}^l)_{;l}+\frac{1}{2}\,F_{il}\,F_k{}^l+\frac{1}{4}\,A_i\,A_k\left(F_l{}^m\,F^l{}_m\right)-\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\right)\bar{g}_{ik}=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}_{ik}\,. \tag{26}$$

Используя соотношения (B6), (B15) и (A1), приведем второе уравнение системы (25) к четырехмерному пространству

$$\frac{1}{2}\,F^l{}_{i;l}+A_i\,\frac{F_l{}^m\,F^l{}_m}{4}-\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\right)\bar{g}_{i0}=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}_{i0}\,. \tag{27}$$

Используя соотношения (B5), (B15) и (A1), приведем третье уравнение системы (25) к четырехмерному пространству

$$\frac{F^m{}_l\,F_m{}^l}{4}-\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\right)\bar{g}_{00}=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}_{00}\,. \tag{28}$$

В ковариантных компонентах третье уравнение поля – уравнение (28) – является неприводимым. Оно принимает вид

$$\frac{1}{2}\left(R+\frac{3}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\right)=\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}_{00} \tag{29}$$

и сводится к ранее полученному уравнению G-поля (16), если учесть, что

$$\bar{T}_{00} = \bar{T}^{np}\, A_n\, A_p + 2\bar{T}^{n0}\, A_n + \bar{T}^{00}\,.$$

Второе уравнение поля – уравнение (27) – после исключения из него уравнения (29) совпадает с уравнением электромагнитного поля (14) или (22).

Третье уравнение поля – уравнение (26) – после исключения из него уравнений электромагнитного поля и G-поля, совпадает с уравнением гравитационного поля (12).

4. Уравнения поля с учетом размерности потенциалов электромагнитного поля

Коэффициенты A_i, которые отождествляются с потенциалами электромагнитного поля, до сих пор рассматривались как безразмерные величины. В действительности они измеряются в Вольтах. Для перехода от безразмерных величин к размерным во всех предыдущих соотношениях необходимо выполнить замену

$$A_i \to k \cdot A_i\,.$$

Здесь новые коэффициенты A_i имеют размерность

$$[A_i] = \text{В}\,,$$

А постоянные коэффициенты k должны иметь размерность

$$[k] = \text{В}^{-1}$$

для того, чтобы произведение $k \cdot A_i$ оставалось безразмерным. В результате метрический тензор $\bar{g}_{IK}$ (вместо (A1)) приобретает вид

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ik} &= g_{ik} - k^2\, A_i\, A_k \\ \bar{g}_{0k} &= -k\, A_k \\ \bar{g}_{00} &= -1\,. \end{aligned} \tag{30}$$

И соответственно обратный метрический тензор $\bar{g}^{IK}$ (вместо (A2)) приобретает вид

$$\begin{aligned} \bar{g}^{ik} &= g^{ik} \\ \bar{g}^{0k} &= -k\, A^k \\ \bar{g}^{00} &= -1 + k^2\, A_i\, A^i \end{aligned} \tag{31}$$

Уравнения поля для размерных потенциалов электромагнитного поля переписываются следующим образом: для гравитационного поля

$$R^{ik} - \frac{1}{2}\, R\, g^{ik} = \frac{k^2}{2}\left(-F^i{}_l\, F^{kl} + \frac{1}{4}\, F^m{}_l\, F_m{}^l\, g^{ik}\right) + \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{ik}\,, \tag{32}$$

для электромагнитного поля

$$\frac{k}{2} F^{li}{}_{;l} = -\frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{i0} - \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{ip}\, k\, A_p\,, \tag{33}$$

для G-поля

$$\frac{1}{2}\left(R + \frac{3k^2}{4} F^m{}_l\, F_m{}^l\right) = \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{00} + 2\, k\, A_n \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{n0} + k^2\, A_n \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{np}\, A_p\,. \tag{34}$$

Здесь необходимо вспомнить, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля в размерных единицах имеет вид

$$T_{\text{э}}{}^{ik} = \varepsilon_0 \left(-F^i{}_l\, F^{kl} + \frac{1}{4}\, F^m{}_l\, F_m{}^l\, g^{ik}\right)\,,$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{А}\cdot\text{сек}}{\text{В}\cdot\text{м}}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Размерность тензора энергии-импульса электромагнитного поля при этом равна

$$[T_э{}^{ik}] = [\varepsilon_0]\cdot[F^i{}_l]^2 = \frac{\text{А}\cdot\text{сек}}{\text{В}\cdot\text{м}}\cdot\frac{\text{В}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}\,.$$

Уравнение Эйнштейна для гравитационного поля в том случае, когда источниками являются тензор энергии-импульса электромагнитного поля и тензор энергии-импульса материи, для размерных величин записывается следующим образом

$$R^{ik} - \frac{1}{2}\,R\,g^{ik} = \frac{2G}{c^4}\,\varepsilon_0\left(-F^i{}_l\,F^{kl} + \frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\,g^{ik}\right) + \frac{2G}{c^4}\,\bar{T}^{ik}\,. \tag{35}$$

Из сравнения уравнений (32) и (35) следует выражение для коэффициента k

$$k = 2\frac{\sqrt{G\,\varepsilon_0}}{c^2}\,. \tag{36}$$

Полезно проверить размерность коэффициента k

$$[k] = \sqrt{[G]\cdot[\varepsilon_0]}\cdot[c]^{-2} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot\frac{\text{А}\cdot\text{сек}}{\text{В}\cdot\text{м}}}\cdot\frac{\text{сек}^2}{\text{м}^2} = \text{В}^{-1}$$

как и следовало ожидать.

III. МАССА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД

1. Принцип наименьшего действия

Принцип наименьшего действия понадобится нам для дальнейших исследований пятимерной теории. Наша формулировка отличается от общепринятой[5]. Она позволяет преодолеть некоторые противоречия и находится в согласии с соотношениями пятимерной теории. Запишем действие массивной заряженной частицы и электромагнитного поля следующим образом

$$S = -\int m\,c\,ds - 2\int\frac{e}{c}\,A_i\,dx^i - \int\frac{\varepsilon_0}{c}\,\frac{F_{ik}\,F^{ik}}{4}\,d\Omega\,.$$

Здесь $d\Omega = c\,dt\,dx^1\,dx^2\,dx^3$ – элемент четырехмерного объема, а линейный элемент ds определяется соотношением

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k\,.$$

От общепринятой эта запись отличается множителем 2 перед вторым слагаемым. Вариация действия распадается на две части

$$\delta S_1 = -\delta\left(\int m\,c\,ds + \int\frac{e}{c}\,A_i\,dx^i\right)$$

и

$$\delta S_2 = -\delta\left(\int\frac{e}{c}\,A_i\,dx^i + \int\frac{\varepsilon_0}{c}\,\frac{F_{ik}\,F^{ik}}{4}\,d\Omega\right)\,.$$

Условие равенства нулю первой вариации по координатам приводит к уравнению движения частицы, условие равенства нулю второй вариации по потенциалам приводит к уравнению электромагнитного поля.

[5] Смотрите, например, Л.Д.Ландау и Е.М.Лившиц, Теория поля, Наука, М., 1967г.

Для массы и заряда, распределенных по объему, действие приобретает вид

$$S = -\int \left(\mu \, \frac{dx_i}{ds} \, \frac{dx^i}{dt} + 2 \, \frac{1}{c^2} \, A_i j^i + \frac{\varepsilon_0}{c} \, \frac{F_{ik} \, F^{ik}}{4} \right) d\Omega \, .$$

Представленная форма принципа наименьшего действия имеет то преимущество, что позволяет ввести помимо тензора энергии-импульса частицы

$$T_{\text{м}}{}^{ik} = \mu \, c \, \frac{dx^i}{ds} \, \frac{dx^k}{dt}$$

и тензора энергии-импульс электромагнитного поля

$$T_{\text{э}}{}^{ik} = \varepsilon_0 \left(-F^i{}_l \, F^{kl} + \frac{1}{4} \, F^m{}_l \, F_m{}^l \, g^{ik} \right) \, ,$$

тензор энергии-импульса взаимодействия

$$T_{\text{в}}{}^{ik} = \frac{1}{2} \left(A^i j^k + A^k j^i \right) \, .$$

И на основании закона сохранения полного тензора энергии-импульса

$$(T_{\text{м}}{}^{ik} + 2T_{\text{в}}{}^{ik} + T_{\text{п}}{}^{ik})_{;k} = 0 \, ,$$

разделенного на две части

$$(T_{\text{м}}{}^{ik} + T_{\text{в}}{}^{ik})_{;k} = 0$$

и

$$(T_{\text{в}}{}^{ik} + T_{\text{п}}{}^{ik})_{;k} = 0 \, ,$$

получить уравнения движения и уравнения поля.

2. Квадрат линейного элемента

Обратимся к квадрату линейного элемента а пятимерном пространстве

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{IK} \, dx^I \, dx^K$$

и запишем его для случая, когда электромагнитные потенциалы, входящие в метрический тензор, являются размерными (формула (30)),

$$d\bar{s}^2 = \left(g_{ik} - k^2 \, A_i \, A_k \right) dx^i \, dx^k - 2 \, k \, A_i \, dx^i \, dx^0 - dx^0 \, dx^0 \, .$$

Преобразуем это выражение следующим образом

$$-\,d\bar{s} = -\frac{ds}{d\bar{s}} \, ds + k^2 \, A_i \, A_k \, \frac{dx^i dx^k}{d\bar{s}} + 2 \, k \, A_i \, dx^i \, \frac{dx^0}{d\bar{s}} + dx^0 \, \frac{dx^0}{d\bar{s}} \, . \tag{37}$$

И далее линейный элемент $(-d\bar{s})$ будем рассматривать совместно с дифференциалом действия заряженной массивной частицы в электромагнитном поле, рассмотренного в предыдущем разделе

$$dS = -m \, c \, ds - 2 \frac{e}{c} \, A_i \, dx^i - d \int \frac{\varepsilon_0}{c} \, \frac{F_{ik} F^{ik}}{4} \, d\Omega \, . \tag{38}$$

При этом мы исходим из того, что кинематический и динамический подходы к описанию взаимодействий эквивалентны. В частности, кинематический инвариант можно поставить в соответствие динамическому и наоборот. Для нас этот тезис означает, что линейный элемент, определяемый соотношением (37) и дифференциал действия (38) должны быть с точностью до множителя тождественны друг другу. Для согласования размерностей соотношений (37) и (38) введем множитель W, имеющий размерность энергии, и умножим соотношение (37) на $W|c$. Получим

$$-\frac{W}{c}\,d\bar{s} = -\frac{W}{c}\frac{ds}{d\bar{s}}\,ds + \frac{W}{c}\,k^2\,A_i\,A_k\,\frac{dx^i dx^k}{d\bar{s}} + \frac{W}{c}2kA_i dx^i\frac{dx^0}{d\bar{s}} + \frac{W}{c}dx^0\frac{dx^0}{d\bar{s}}\,, \tag{39}$$

Будем полагать, что полученное выражение и есть дифференциал действия (38), обобщенный в пятимерной теории. Из сравнения (38) и (39) следует, что в (39) присутствуют два слагаемых, структура которых повторяет слагаемые в дифференциале действия. И кроме того, в (39) присутствуют два слагаемых, которых нет в дифференциале действия. Следует сказать, что, по существу, эти два слагаемых и есть то новое качество, которое вносится в наши представления о гравитации и электромагнетизме пятимерной теорией, пренебрегающей G-полем. Относительно последнего слагаемого в дифференциале действия (38) следует сказать, что как в классической теории поля, так и в пятимерной теории это слагаемое вводится волевым путем, что, конечно, является недостатком как той, так и другой теории.

Из сравнения (38) и (39) следует, что

$$\begin{aligned}
&\text{действие частицы} && S = -\frac{W}{c}\,\bar{s}\,,\\
&\text{масса частицы} && m = \frac{W}{c^2}\frac{ds}{d\bar{s}}\,,\\
&\text{заряд частицы} && e = -W k\,\frac{dx^0}{d\bar{s}}\,.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что масса эквивалентна энергии, движущейся в четырехмерном пространстве, а электрический заряд эквивалентен энергии, движущейся по пятой координате.

Используя вышеприведенное соответствие, дифференциал действия массивной заряженной частицы в поле для пятимерной теории можно записать

$$dS = -m\,c\,ds + m\,c\,k^2\,A_i\,A_k\,\frac{dx^i dx^k}{ds} - 2\,\frac{e}{c}\,A_i\,dx^i - \frac{e}{c\,k}\,dx^0\,, \tag{40}$$

3. Плотность массы и электрического заряда

Введем плотность энергии w как отношение энергии W, распределенной в объеме V, к величине этого объема. Тогда

$$\text{плотность массы} \qquad \mu = \frac{w}{c^2}\frac{ds}{d\bar{s}}\,, \tag{41}$$

$$\text{плотность электрического заряда} \qquad \rho = -w\,k\,\frac{dx^0}{d\bar{s}}\,. \tag{42}$$

С учетом вышеуказанного действие для массы и заряда, распределенных по объему, приобретает вид

$$S = -\int\left(\mu\,\frac{dx_i}{ds}\,\frac{dx^i}{dt} - \mu\,k^2\,A_i\,A_k\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{dt} + 2\,\frac{\rho}{c^2}\,A_i\,\frac{dx^i}{dt} + \frac{\rho}{c^2\,k}\,\frac{dx^0}{dt}\right)d\Omega\,. \tag{43}$$

Далее учтем, что

$$\frac{dx^i}{dt} = (c,\,v^1,\,v^2,\,v^3)\,,$$

где v – координаты трехмерной скорости ,а

$$\frac{dx^0}{dt}$$

- скорость движения по пятой координате .Тогда

$$\rho\frac{dx^i}{dt} = j^i \tag{44}$$

- плотность тока, а

$$\rho \frac{dx^0}{dt} = j^0 \tag{45}$$

- плотность тока по пятой координате. Поэтому действие для массы и заряда, распределенных по объему, записывается так

$$S = -\int \left(\mu \frac{dx_i}{ds} \frac{dx^i}{dt} - \mu\, k^2\, A_i\, A_k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} + \frac{2}{c^2}\, A_i\, j^i + \frac{1}{c^2\, k}\, j^0 \right) d\Omega\,. \tag{46}$$

4. Калибровочное преобразование

Обратимся к выражению (37), имея в виду, что оно представляет собой форму записи дифференциала действия, и рассмотрим сумму последних трех слагаемых, зависящих от потенциала и от дифференциала пятой координаты

$$k^2\, A_i\, A_k \frac{dx^i dx^k}{d\bar{s}} + 2\, k\, A_i\, dx^i \frac{dx^0}{d\bar{s}} + dx^0 \frac{dx^0}{d\bar{s}}\,.$$

В этой сумме выполним замены переменных в соответствии со следующими преобразованиями

$$\begin{gathered} A_i = A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,, \\ dx^0 = dx'^0 - \frac{\partial f}{\partial x^m}\, dx^m\,. \end{gathered} \tag{47}$$

Указанные преобразования назовем *калибровочными*. После подстановки имеем

$$\begin{aligned} &k^2 A_i A_k \frac{dx^i dx^k}{d\bar{s}} + 2k A_i dx^i \frac{dx^0}{d\bar{s}} + dx^0 \frac{dx^0}{d\bar{s}} = k^2 \left(A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \left(A'_k + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \frac{dx^i dx^k}{d\bar{s}} + \\ &\quad + 2k \left(A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \left(dx'^0 - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m \right) \frac{dx^i}{d\bar{s}} + \left(dx'^0 - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m \right) \left(dx'^0 - \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \right) \frac{1}{d\bar{s}} = \\ &= \left(k^2 A'_i A'_k dx^i dx^k + k \frac{\partial f}{\partial x^i} A'_k dx^i dx^k + k A'_i \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^i dx^k + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^i dx^k \right) \frac{1}{d\bar{s}} + \\ &\quad + \left(2k A'_i dx'^0 dx^i + 2 \frac{\partial f}{\partial x^i} dx'^0 dx^i - 2k A'_i \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m dx^i - 2 \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m dx^i \right) \frac{1}{d\bar{s}} + \\ &\quad + \left(dx'^0 dx'^0 - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m dx'^0 - dx'^0 \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n + \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \right) \frac{1}{d\bar{s}} = \\ &= k^2 A'_i A'_k \frac{dx^i dx^k}{d\bar{s}} + 2k A'_i dx^i \frac{dx'^0}{d\bar{s}} + dx'^0 \frac{dx'^0}{d\bar{s}}\,. \end{aligned} \tag{48}$$

Отсюда следует вывод о том, что калибровочные преобразования сохраняют дифференциал действия частицы. Для действия, записанного в виде (40), калибровочные преобразования необходимо записать так

$$\begin{gathered} A_i = A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,, \\ dx^0 = dx'^0 - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m\,. \\ e = e' + W k \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{dx^m}{d\bar{s}}\,. \end{gathered} \tag{49}$$

Последнее преобразование можно записать иначе

$$e = e' + mc^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds}\,.$$

Отсюда особенно ясно, что заряд эквивалентен массе, движущейся по пятой координате. Сейчас существует способ превращения массы в энергию. Не исключено, что когда-нибудь будет найден способ превращения заряда в энергию. Для действия, записанного в виде (46), калибровочные преобразования необходимо записать так

$$\begin{aligned} A_i &= A'_i + \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,, \\ dx^0 &= dx'^0 - \frac{\partial f}{\partial x^m}dx^m\,, \\ j^i &= j'^i + \mu c^2 k\frac{\partial f}{\partial x^m}\frac{dx^m}{d\bar{s}}\frac{dx^i}{dt}\,, \\ j^0 &= j'^0 + \mu c^2 k\frac{\partial f}{\partial x^m}\frac{dx^m}{d\bar{s}}\frac{dx^0}{dt}\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Если уравнения Максвелла

$$F^{li}{}_{;l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c}j^i$$

подвергнуть калибровочному преобразованию, то получим

$$F'^{li}{}_{;l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c}j'^i + \frac{1}{\varepsilon_0 c}\mu c^2 k\frac{\partial f}{\partial x^m}\frac{dx^m}{d\bar{s}}\frac{dx^i}{dt}\,.$$

То есть уравнения Максвелла не являются калибровочно инвариантными. Для устранения этого несовершенства в пятимерной теории уравнения Максвелла должны быть скорректированы.

5. Тензор энергии-импульса материи

Тензор энергии-импульса материи в пятимерном пространстве будем рассматривать как простое обобщение тензора энергии-импульса в четырехмерном пространстве. А именно

$$\bar{T}^{IK} = \frac{w}{c}\frac{dx^I}{d\bar{s}}\frac{dx^K}{dt} = \frac{w}{c}\frac{dx^I}{ds}\frac{dx^K}{dt}\frac{ds}{d\bar{s}}\,. \tag{51}$$

Очевидно, что размерность этого тензора, как и следует, равна Дж|м^3.

Компоненты тензора энергии-импульса материи таковы

$$\begin{aligned} \bar{T}^{ik} &= \frac{w}{c}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt}\frac{ds}{d\bar{s}}\,, \\ \bar{T}^{i0} &= \frac{w}{c}\frac{dx^0}{d\bar{s}}\frac{dx^i}{dt}\,, \\ \bar{T}^{00} &= \frac{w}{c}\frac{dx^0}{d\bar{s}}\frac{dx^0}{dt}\,. \end{aligned} \tag{52}$$

В этих соотношениях учтем (41) и (42). Получим

$$\begin{aligned} \bar{T}^{ik} &= \mu c\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt} = T^{ik}\,, \\ \bar{T}^{i0} &= -\frac{1}{kc}\rho\frac{dx^i}{dt}\,, \\ \bar{T}^{00} &= -\frac{1}{kc}\rho\frac{dx^0}{dt}\,. \end{aligned} \tag{53}$$

Или, учитывая (44) и (45),

$$\begin{aligned} \bar{T}^{ik} &= \mu c\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt} = T^{ik}\,, \\ \bar{T}^{i0} &= -\frac{1}{kc}j^i\,, \\ \bar{T}^{00} &= -\frac{1}{kc}j^0\,. \end{aligned} \tag{54}$$

Полученные выражения компонент тензора энергии-импульса материи используем для записи уравнений поля с источниками.

IV. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ II.

1. Уравнения поля с источниками.

Для удобства введем обозначение

$$\frac{2G}{c^4} = \chi\,.$$

Тогда соотношение (36) переписывается так

$$k^2 = 2\chi\varepsilon_0\,. \tag{55}$$

Полученные выражения для тензора энергии-импульса материи подставим в уравнения поля (32), (33), (34). Получим

уравнения гравитационного поля

$$R^{ik} - \frac{1}{2}\,R\,g^{ik} = \frac{k^2}{2}(-F^i{}_l\,F^{kl} + \frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\,g^{ik}) + \chi\mu c\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt}\,, \tag{56}$$

уравнения электромагнитного поля

$$\frac{k}{2}F^{li}{}_{;l} = \chi\frac{1}{kc}j^i - \chi\mu c\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt}k\,A_p\,, \tag{57}$$

уравнения G-поля

$$\frac{1}{2}\,(R + \frac{3k^2}{4}F^m{}_l\,F_m{}^l) = -\chi\frac{1}{kc}j^0 - 2\,k\,A_n\chi\frac{1}{kc}j^n + k^2A_n\chi\mu c\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^p}{dt}A_p\,. \tag{58}$$

Первое уравнение это общеизвестное уравнение Эйнштейна для гравитационного поля, источниками которого являются тензоры энергии-импульса электромагнитного поля и материи. Остановимся на втором уравнении – уравнении электромагнитного поля. После подстановки коэффициента k оно приобретает вид

$$F^{li}{}_{;l} + \chi 2\mu c\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^p}{dt}A_p = \frac{1}{\varepsilon_0 c}j^i\,. \tag{59}$$

Или

$$F^{li}{}_{;l} + \chi 2T^{ip}A_p = \frac{1}{\varepsilon_0 c}j^i\,. \tag{60}$$

Из сравнения этого уравнения с уравнением Максвелла

$$F^{li}{}_{;l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c}j^i$$

следует, что полученное уравнение отличается от него дополнительным слагаемым в левой части. Из сравнения полученного уравнения с уравнением Прока для массивных промежуточных частиц

$$F^{li}{}_{;l} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}A^i = 0$$

следует, что полученное уравнение соответствует массивному фотону, масса которого определяется соотношением

$$\frac{m^2c^2}{\hbar^2}g^{ip} = \chi 2\mu c\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^p}{dt}\,.$$

Необычно то, что квадрат массы фотона пропорционален тензору энергии-импульса излучающей частицы.

Сделаем следующее замечание. Связь гравитационного поля с электромагнитным установлена уравнениями Эйнштейна. Об обратной связи электромагнитного поля с гравитационным ничего не известно [6]. Уравнение

[6] Если не считать замену в уравнении Максвелла частной производной на ковариантную при описании электромагнитных явлений в гравитационном поле

(60) показывает, что такая связь существует. Это наглядно видно, если из уравнения (56) выразить тензор энергии-импульса материи и подставить его в уравнение (60):

$$F^{li}{}_{;l} + 2(R^{ip} - \frac{1}{2}\,R\,g^{ip} - \frac{k^2}{2}(-F^i{}_l\,F^{pl} + \frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\,g^{ip})A_p = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i\,. \tag{61}$$

Для случая, когда величина тензора энергии-импульса электромагнитного поля значительно меньше величины тензора энергии-импульса материи такая связь выглядит особенно просто

$$F^{li}{}_{;l} + 2(R^{ip} - \frac{1}{2}\,R\,g^{ip})A_p = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i\,.$$

Таким образом, пятимерная теория обобщает уравнение Максвелла. Обобщенное уравнение является инвариантным по отношению к калибровочным преобразованиям, установленным в предыдущем разделе. Действительно, выполним в уравнении (59) преобразование

$$\begin{aligned} A_i &= A'_i + \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,, \\ j^i &= j'^i + \mu c^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m}\frac{dx^m}{d\bar{s}}\frac{dx^i}{dt}\,. \end{aligned} \tag{62}$$

Получим

$$F'^{li}{}_{;l} + \chi 2\mu c \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^p}{dt} A'_p + \chi\frac{1}{k} 2\mu c \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^p}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^p} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j'^i + \frac{1}{\varepsilon_0 c}\mu c^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m}\frac{dx^m}{d\bar{s}}\frac{dx^i}{dt}\,.$$

Используя соотношение (55), получим

$$F'^{li}{}_{;l} + \chi 2\mu c \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^p}{dt} A'_i = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j'^i\,.$$

Что и требовалось доказать.

О третьем уравнении можно сказать, что смысл его для нас скрыт. Это уравнение является уравнением поля по отношению к компоненте метрического тензора g_{00}. Однако, пока мы придерживаемся усиленного условия цилиндричности, это уравнение поля сводится к алгебраическому соотношению.

2. Закон сохранения заряда

Закон сохранения заряда получим, взяв дивергенцию от уравнения электромагнитного поля (60)

$$j^i{}_{;i} = 2\chi\varepsilon_0 c (T^{ip}A_p)_{;i}\,. \tag{63}$$

Или

$$j^i{}_{;i} = k^2 c \left(T^{ip}{}_{;i} A_p + T^{ip}(A_p)_{;i}\right)\,. \tag{64}$$

Преобразуем это выражение, учитывая, что из уравнения гравитационного поля (56) следует

$$T^{ip}{}_{;i} = -T_э{}^{ip}{}_{;i}\,,$$

где

$$T_э{}^{ip} = \varepsilon_0(-F^i{}_l\,F^{pl} + \frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\,g^{ip})$$

- тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Далее учтем, что

$$T_э{}^{ip}{}_{;i} = -\varepsilon_0(F^{il}{}_{;i}\,F^p{}_l)\,.$$

И кроме того, здесь используем уравнения электромагнитного поля (60)

$$F^{il}{}_{;i} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^l - \chi 2 T^{ln} A_n\,.$$

Получим

$$T_{\text{э}}{}^{ip}{}_{;i} = -\varepsilon_0 \left(\frac{1}{\varepsilon_0 c} j^l - \chi 2 T^{ln} A_n \right) F^p{}_l \,.$$

Отсюда

$$T^{ip}{}_{;i} = \left(\frac{1}{c} j^l - k^2 T^{ln} A_n \right) F^p{}_l \,.$$

Подставляя это выражение в (64), получим закон сохранения заряда в следующем виде

$$j^i{}_{;i} = k^2 c \left(\left(\frac{1}{c} j^l - k^2 T^{ln} A_n \right) F^p{}_l A_p + T^{ip} (A_p)_{;i} \right) .$$

Или

$$j^i{}_{;i} = k^2 A_p F^p{}_l j^l - k^4 c \, A_p F^p{}_l T^{ln} A_n + k^2 c \, T^{ip} (A_p)_{;i} \,. \tag{65}$$

И в заключение этого раздела запишем закон сохранения заряда в компактном виде

$$(j^i - k^2 c \, T^{ip} A_p)_{;i} = 0 \,. \tag{66}$$

Отсюда следует эквивалентность между плотностью электрического тока и тензором энергии-импульса в комбинации $k^2 c\, T^{ip} A_p$. Если ввести *обобщенную* плотность тока

$$j^{"\,i} = j^i - k^2 c \, T^{ip} A_p \,,$$

то для нее уравнение электромагнитного поля принимает вид уравнения Максвелла

$$F^{li}{}_{;l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^{"\,i} \,. \tag{67}$$

3. Калибровка Лоренца

Для простоты калибровку Лоренца будем рассматривать для случая плоского пространства-времени, когда ковариантная производная сводится к частной производной.

Калибровка Лоренца это уравнение

$$A^i{}_{,i} = 0 \,, \tag{68}$$

которое добавляется к уравнению Максвелла

$$F^{li}{}_{,l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i \,.$$

Обоснование этого уравнения не существует за исключением того обстоятельства, что, применяя калибровку Лоренца, уравнение Максвелла можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^l \partial x_l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i \,,$$

подтверждающему существование электромагнитных волн. В отличие от уравнения Максвелла калибровка Лоренца и уравнение электромагнитных волн не являются калибровочно инвариантными относительно калибровочного преобразования

$$A_i = A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i} \,.$$

Обратимся теперь к пятимерной теории. Калибровка Лоренца (68) позволяет записать уравнение электромагнитного поля (67) в следующем виде

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^l \partial x_l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} (j^i - k^2 c \, T^{ip} A_p) \,. \tag{69}$$

Здесь аналогично калибровка Лоренца (68) и уравнение электромагнитных волн (69) не являются калибровочно инвариантными относительно калибровочного преобразования (62). Этот недостаток может быть устранен, если предположить, что калибровка Лоренца имеет вид

$$A^i{}_{,i} = Q\,, \tag{70}$$

где Q некоторая функция, имеющая размерность Вольт и участвующая в калибровочном преобразовании. Причем полная система калибровочных преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} A_i &= A'_i + \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,, \\ j^i &= j'^i + \mu c^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m}\frac{dx^m}{d\bar{s}}\frac{dx^i}{dt}\,, \\ Q &= Q' + \frac{1}{k}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x_i}\,. \end{aligned} \tag{71}$$

В этом случае уравнение электромагнитного поля приобретает вид

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^l \partial x_l} - \frac{\partial Q}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon_0 c}(j^i - k^2 c\, T^{ip} A_p)\,. \tag{72}$$

Построенные таким образом уравнение калибровки (70) и уравнение электромагнитного поля (72) являются калибровочно инвариантными относительно калибровочных преобразований (71).

V. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнение движения в пятимерной теории представляет собой уравнение геодезической, обобщенное на пятимерное пространство

$$\frac{d^2 x^I}{d\bar{s}^2} + \bar{\Gamma}^I_{KL}\frac{dx^K}{d\bar{s}}\frac{dx^L}{d\bar{s}} = 0\,.$$

Для движения в четырехмерном пространстве имеем

$$\frac{d^2 x^i}{d\bar{s}^2} + \bar{\Gamma}^i_{kl}\frac{dx^k}{d\bar{s}}\frac{dx^l}{d\bar{s}} + 2\bar{\Gamma}^i_{k0}\frac{dx^k}{d\bar{s}}\frac{dx^0}{d\bar{s}} = 0\,.$$

После подстановки коэффициентов связности (B3), (B4) и приведения их к размерным потенциалам, получим

$$\frac{d^2 x^i}{d\bar{s}^2} + (\Gamma^i{}_{kl} - \frac{k^2}{2}A_k F_l{}^i - \frac{k^2}{2}A_l F_k{}^i)\frac{dx^k}{d\bar{s}}\frac{dx^l}{d\bar{s}} + kF^i{}_k\frac{dx^k}{d\bar{s}}\frac{dx^0}{d\bar{s}} = 0\,. \tag{73}$$

Умножим это уравнение на коэффициент $\frac{w}{c}$ и запишем его в следующем виде

$$\frac{w}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{ds}\right)\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{dt}{d\bar{s}} + \frac{w}{c}\left(\Gamma^i{}_{kl} - \frac{k^2}{2}A_k F_l{}^i - \frac{k^2}{2}A_l F_k{}^i\right)\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{dt}\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{dt}{d\bar{s}} + \frac{w}{c}kF^i{}_k\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^0}{d\bar{s}}\frac{dt}{d\bar{s}} = 0\,. \tag{74}$$

Учитывая соотношения (41), (42) и (44), получим

$$\mu c\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) + \mu c\Gamma^i{}_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{dt} - \mu c\left(\frac{k^2}{2}A_k F_l{}^i + \frac{k^2}{2}A_l F_k{}^i\right)\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{dt} - \frac{1}{c}F^i{}_k j^k = 0\,. \tag{75}$$

Если учесть, что тензор энергии-импульса

$$T^{kl} = \mu c\,\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{dt}$$

симметричен по индексам, то выражение (75) приобретает вид

$$\mu c\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) + \mu c\Gamma^i{}_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{dt} - k^2 A_k F_l{}^i T^{kl} - \frac{1}{c}F^i{}_k j^k = 0\,. \tag{76}$$

Сравнение полученного уравнения с классическим уравнением движения массивной заряженной частицы в электромагнитном и гравитационном полях

$$\mu c \frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) + \mu c \Gamma^i{}_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{dt} - \frac{1}{c}F^i{}_k j^k = 0$$

показывает, что пятимерная теория предсказывает появление дополнительного слагаемого

$$-k^2 A_k F_l{}^i T^{kl}$$

в уравнении движения.

Для движения по пятой координате имеем

$$\frac{d^2x^0}{d\bar{s}^2} + \bar{\Gamma}^0_{kl}\frac{dx^k}{d\bar{s}}\frac{dx^l}{d\bar{s}} + 2\bar{\Gamma}^0_{k0}\frac{dx^k}{d\bar{s}}\frac{dx^0}{d\bar{s}} = 0\,.$$

После подстановки коэффициентов связности (B1), (B2) и приведения их к размерным потенциалам, получим

$$\frac{d^2x^0}{d\bar{s}^2} - \left(kA_m(\Gamma^m{}_{kl} - \frac{k^2}{2}A_kF_l{}^m - \frac{k^2}{2}A_lF_k{}^m) - \frac{k}{2}\psi_{kl}\right)\frac{dx^k}{d\bar{s}}\frac{dx^l}{d\bar{s}} - k^2(A^mF_{mk})\frac{dx^k}{d\bar{s}}\frac{dx^0}{d\bar{s}} = 0\,. \tag{77}$$

Умножим это уравнение на коэффициент $(-kw)$ и запишем его в следующем виде

$$-\frac{d}{dt}\left(kw\frac{dx^0}{d\bar{s}}\right)\frac{dt}{d\bar{s}} + \left(kA_m(\Gamma^m{}_{kl} - \frac{k^2}{2}A_kF_l{}^m - \frac{k^2}{2}A_lF_k{}^m) - \frac{k}{2}\psi_{kl}\right)kw\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{dt}\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{dt}{d\bar{s}} + k^2(A^mF_{mk})\frac{dx^k}{dt}kw\frac{dx^0}{d\bar{s}}\frac{dt}{d\bar{s}} = 0\,. \tag{78}$$

Учитывая соотношения (41), (42) и (44), получим

$$\frac{d\rho}{dt} + \left(kA_m(\Gamma^m{}_{kl} - \frac{k^2}{2}A_kF_l{}^m - \frac{k^2}{2}A_lF_k{}^m) - \frac{k}{2}\psi_{kl}\right)k\mu c^2\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{dt} - k^2(A^mF_{mk})j^k = 0\,. \tag{79}$$

Учитывая, что тензор энергии-импульса

$$T^{kl} = \mu c\,\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{dt}$$

симметричен по индексам, запишем это соотношение следующим образом

$$\frac{d\rho}{dt} = k^2cT^{kl}(A_{k;l}) + k^4cT^{kl}A_lF_k{}^mA_m + k^2A^mF_{mk}j^k\,. \tag{80}$$

Из сравнения этого соотношения с (65), видно, что оно представляет собой форму записи закона сохранения заряда. Таким образом, уравнение движения по пятой координате в динамической интерпретации есть модифицированный закон сохранения заряда.

VI. G-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ

Усиленное условие цилиндричности $g_{00} = 1$ выделяет из поля пятимерной теории гравитационное и электромагнитное поля. В общем случае поле пятимерной теории представлено компонентами метрического тензора g_{ik}, определяющими гравитационное поле, потенциалами электромагнитного поля A^0_i и компонентой g_{00}, определяющей G-поле. Здесь мы рассмотрим случай, когда $g_{00} = g_{00}(x^i, x^0)$. Ему соответствует квадрат линейного элемента общего вида

$$d\bar{s}^2 = (g_{ik} - g_{00}\cdot A^0{}_i\cdot A^0{}_k)\cdot dx^i\cdot dx^k - 2g_{00}\cdot A^0{}_k\cdot dx^k\cdot dx^0 - g_{00}\cdot dx^0\cdot dx^0\,. \tag{81}$$

А ему в свою очередь соответствует дифференциал действия, обобщающий (40)[7]

$$dS = -mc\,ds + m\,c\,k^2 g_{00}\,A^0{}_iA^0{}_k\frac{dx^idx^k}{ds} - \frac{2}{c}g_{00}\,e^0A^0{}_idx^i - \frac{1}{ck}g_{00}\,e^0dx^0\,, \tag{82}$$

[7] Символ заряда снабжен индексом "0"в соответствии с выражением

$$e^0 = -Wk\frac{dx^0}{d\bar{s}}\,.$$

А для массы и заряда, распределенных по объему, действие, обобщающее (46), записывается так

$$S = -\int \left(\mu \frac{dx_i}{ds}\frac{dx^i}{dt} - \mu k^2 g_{00} A^0{}_i A^0{}_k \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt} + \frac{2}{c^2} g_{00}\, A^0{}_i j^{0i} + \frac{1}{c^2 k} g_{00} j^{00} \right) d\Omega\,. \tag{83}$$

Последние слагаемые в формулах (82) и (83) указывают на то, что заряд, движущийся по пятой координате(а попросту вращающийся заряд), взаимодействует с G-полем. Конструкция этих слагаемых аналогична конструкции слагаемого, описывающего взаимодействие заряда с электромагнитным полем. Кроме того, вторые и третьи слагаемые в приведенных формулах указывают на то, что G-поле взаимодействует с электромагнитным полем. Более того заряд взаимодействует с электромагнитным полем с помощью G-поля как посредника. Здесь этот вопрос мы оставим в стороне и остановимся на G-взаимодействии электрических зарядов. Для того, чтобы выделить это взаимодействие в "чистом" виде, положим, что гравитационное поле отсутствует, то есть риманова метрика четырехмерного пространства сводится к псевдоевклидовой метрике

$$g_{ik} = \delta_{ik}\,,$$

а также отсутствуе электромагнитное поле, то есть $A^0{}_i = 0$. В этом случае квадрат линейного элемента приобретает простейший вид

$$d\bar{s}^2 = \delta_{ik} \cdot dx^i \cdot dx^k - g_{00} \cdot dx^0 \cdot dx^0\,,$$

а дифференциал действия упрощается до следующего

$$dS = -mc\, ds - \frac{1}{ck} g_{00}\, e^0 dx^0\,.$$

Рассматривать G-взаимодействие начнем с вывода уравнения G-поля.

1. Уравнение G-поля

Уравнения поля в ковариантных компонентах имеют вид

$$\bar{R}_{IK} - \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{IK} = \chi \bar{T}_{IK}\,. \tag{84}$$

Они распадаются на следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ik} - \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{ik} &= \chi \bar{T}_{ik}\,, \\ \bar{R}_{i0} - \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{i0} &= \chi \bar{T}_{i0}\,, \\ \bar{R}_{00} - \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{00} &= \chi \bar{T}_{00}\,. \end{aligned} \tag{85}$$

Из этих трех уравнений нас интересует последнее, так как первое уравнение - это уравнение гравитационного поля, а второе уравнение - это уравнение электромагнитного поля.

Так как в дальнейшем нас будет интересовать предельный переход к частицам, медленно движущимся в геометрическом пространстве, то запишем интересующее нас уравнение в другом виде. Для этого сначала запишем общее уравнение (84) в другом виде. Начнем с того, что выполним свертку этого уравнения

$$\bar{R}_{IK}\bar{g}^{IK} - \frac{1}{2}\,\bar{R}\,\bar{g}_{IK}\bar{g}^{IK} = \chi \bar{T}_{IK}\bar{g}^{IK}\,.$$

Или

$$\bar{R} - \frac{5}{2}\,\bar{R} = \chi \bar{T}\,.$$

Отсюда

$$\bar{R} = -\chi \frac{2}{3} \bar{T}\,.$$

Подставляя это выражение в (84), получим уравнение поля в следующем виде

$$\bar{R}_{IK} = \chi(\bar{T}_{IK} - \frac{1}{3}\,\bar{T}\,\bar{g}_{IK})\,. \tag{86}$$

А третье уравнение системы (85) приобретает вид

$$\bar{R}_{00} = \chi(\bar{T}_{00} - \frac{1}{3}\,\bar{T}\,\bar{g}_{00})\,. \tag{87}$$

Раскроем содержание каждого из слагаемых, входящих в это уравнение.

Рассмотрим компоненту тензора энергии-импульса $\bar{T}_{00}$:

$$\bar{T}_{00} = \bar{g}_{00}\bar{T}^{np}A^0{}_n\,A^0{}_p + 2\bar{g}_{00}\bar{T}^{n0}A^0{}_n + \bar{T}^{00}\bar{g}_{00}\,\bar{g}_{00}\,.$$

В нашем случае

$$\bar{T}_{00} = \bar{T}^{00}\bar{g}_{00}\,\bar{g}_{00}\,.$$

Используя (C1) и (54), имеем

$$\bar{T}_{00} = -g_{00}\,g_{00}\frac{1}{kc}j^{00}\,. \tag{88}$$

Рассмотрим свертку тензора энергии-импульса $\bar{T}$:

$$\bar{T} = \bar{g}_{IK}\bar{T}^{IK} = \bar{g}_{ik}\bar{T}^{ik} + 2\bar{g}_{i0}\bar{T}^{i0} + \bar{T}^{00}\bar{g}_{00}\,.$$

Учитывая формулы (C1), имеем

$$\bar{T} = \delta_{ik}\bar{T}^{ik} - \bar{T}^{00}g_{00}\,.$$

Используя (54), имеем [8]

$$\bar{T} = \mu c^2 + \frac{1}{kc}j^{00}g_{00}\,.$$

В этом выражении пренебрежем первым слагаемым, полагая

$$\mu c^2 \ll \frac{1}{kc}j^{00}g_{00}\,.$$

Это предположение вполне разумно (смотрите приложение D). Таким образом

$$\bar{T} \approx \frac{1}{kc}j^{00}g_{00}\,. \tag{89}$$

Подставляя (88), (89) и (C7) в (87), получим уравнение G-поля в следующем виде

$$\frac{1}{2}\,g_{00}{}^{,m}{}_{,m} - \frac{1}{2}\,g_{00}{}^{,m}\,\frac{1}{2}\,g^{00}\,g_{00,m} = -\chi\,\frac{2}{3}\,g_{00}\,g_{00}\,\frac{1}{kc}\,j^{00}\,. \tag{90}$$

Удобно ввести функцию ϕ из условия

$$g_{00} = 1 - 2\phi$$

---

[8] Здесь учтено, что

$$\delta_{ik}\bar{T}^{ik} = \delta_{ik}T^{ik} = \mu c\frac{dx^i}{ds}\frac{dx_i}{dt} = \mu c\frac{ds}{dt} \approx \mu c^2\,,$$

при этом для медленных движений частицы в геометрическом пространстве

$$\frac{ds}{dt} \approx \frac{\partial s}{\partial t} = c\,.$$

и рассматривать ее как потенциал G-поля. Для потенциала ϕ уравнение G-поля принимает вид

$$\phi^{,m}{}_{,m} + \phi^{,m} \cdot \phi_{,m}(1+2\phi) = -\chi\,\frac{2}{3}\,(1-2\phi)^2\,\frac{1}{kc}\,j^{00}\,. \tag{91}$$

Уравнение упрощается, если положить

$$2\phi \ll 1$$

и рассматривать медленно меняющееся поле, для которого

$$\frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x_m} = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a} \approx -\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a}\,.$$

Здесь индекс a принимает значения 1, 2, 3 и $x^a = x_a$. И также

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} = \frac{\partial}{c\partial t} \cdot \frac{\partial}{c\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial}{\partial x_a} \approx -\frac{\partial}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial}{\partial x_a}\,.$$

В этом случае уравнение G-поля принимает вид

$$\phi^{,a}{}_{,a} + \phi^{,a} \cdot \phi_{,a} = -\chi \frac{2}{3}\frac{j^{00}}{k\,c}\,. \tag{92}$$

Поле, удаленное от источника, подчиняется уравнению

$$\phi^{,a}{}_{,a} = -\chi\,\frac{2}{3}\,\frac{j^{00}}{k\,c}\,. \tag{93}$$

Это общеизвестное уравнение Пуассона. Его сферически симметричное решение имеет вид

$$\phi = \frac{2}{3}\chi \int \left(\frac{j^{00}}{kc}\right) \frac{dV}{4\pi r}\,.$$

Здесь интегрирование выполняется по трехмерному объему, а r - это расстояние от точки с плотностью тока j^{00} до точки определения поля. Для сосредоточенного заряда решение принимает вид

$$\phi = \frac{2}{3}\chi \left(\frac{e^0}{k}\frac{v^0}{c}\right) \frac{1}{4\pi r}\,. \tag{94}$$

Здесь v^0 - скорость движения заряда по пятой координате.

2. Движение заряда под действием G-поля

Уравнение движения заряда под действием G-поля есть уравнение геодезической в пятимерном пространстве, спроецированное на четырехмерное пространство

$$\frac{d^2 x^i}{d\bar{s}^2} + \bar{\Gamma}^i_{00} \frac{dx^0}{d\bar{s}} \frac{dx^0}{d\bar{s}} = 0\,.$$

После подстановки коэффициентов связности (C4), получим

$$\frac{d^2 x^i}{d\bar{s}^2} + \frac{1}{2} g_{00}{}^{,i} \frac{dx^0}{d\bar{s}} \frac{dx^0}{d\bar{s}} \tag{95}$$

Умножим это уравнение на коэффициент $\frac{w'}{c}$ и запишем его в следующем виде

$$\frac{w'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{ds}\right) \frac{ds}{d\bar{s}} \frac{dt}{d\bar{s}} + \frac{w'}{c} \left(\frac{1}{2} g_{00}{}^{,i}\right) \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{dt} \frac{ds}{d\bar{s}} \frac{dt}{d\bar{s}} = 0\,. \tag{96}$$

Учитывая соотношения (41), (42) и (44), получим

$$\mu' c \frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) = \left(\frac{j'^{00}}{kc}\right)\left(\frac{1}{2}g_{00}{}^{,i}\right) . \tag{97}$$

Штрихованные величины относятся к среде, взаимодействующей с G-полем. Для медленно движущейся частицы $dc \approx cdt$ и уравнения движения принимают вид

$$m' \frac{d^2x^i}{dt^2} = \left(\frac{e'^0}{k}\frac{v'^0}{c}\right)\left(\frac{1}{2}g_{00}{}^{,i}\right) . \tag{98}$$

Или, используя потенциал G-поля,

$$m' \frac{d^2x^i}{dt^2} = -\left(\frac{e'^0}{k}\frac{v'^0}{c}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x_i} . \tag{99}$$

Отсюда сила, действующая на заряд со стороны G-поля равна

$$F^i = -\left(\frac{e'^0}{k}\frac{v'^0}{c}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x_i} ,$$

что соответствует представлению о ϕ как о потенциале G-поля. Подставляя сюда решение уравнения Пуассона (94), получим выражение для силы G-взаимодействия между двумя точечными зарядами.

$$F^i = \frac{2}{3}\chi\left(\frac{e'^0}{k}\frac{v'^0}{c}\right)\left(\frac{e^0}{k}\frac{v^0}{c}\right)\frac{1}{4\pi r^2} . \tag{100}$$

3. Замечание к полученному результату

Пятая координата это координата, пропорциональная углу поворота в геометрическом пространстве (в теоретическом плане это поворот в плоскости 21).

Масса является параметром движения энергетического пакета вдоль интервала четырехмерного пространства. Электрический заряд это параметр вращения энергетического пакета вдоль пятой координаты.

Вращение самого заряда вдоль пятой координаты есть электрический ток вдоль этой координаты. G-взаимодействие электрических зарядов это взаимодействие токов, протекающих по пятой координате.

Если считать, что вращение энергетического пакета и вращение заряда независимы друг относительно друга, то изменение направления вращения заряда приводит к изменению знака тока по пятой координате. А из (99) и (100) следует, что токи одного направления отталкиваются, а токи разных направлений притягиваются. При том, что сами заряды являются одноименными. Внешне это выглядит так. В результате G-взаимодействия зарядов *одного* знака в одном случае эти заряды отталкиваются, а в другом притягиваются. Заметим, что свойства G-взаимодействия аналогичны свойствам взаимодействия разноцветных одноименных зарядов, которое рассматривалось в Лекции 14 и приложении к ней.

VII. ВЫВОДЫ

- Пятимерная геометрия Калуцы это частный случай геометрии Римана, построенной на кинематической алгебре в калибровочном поле.

- Масса это характеристика энергетического пакета, движущегося в четырехмерном пространстве-времени. Заряд это характеристика энергетического пакета, движущегося (вращающегося) вдоль пятой координаты.

- Пятимерная теория корректирует уравнения Максвелла. Уравнения электромагнитного поля приобретают вид

$$F^{li}{}_{;l} + \chi 2T^{ip}A_p = \frac{1}{\varepsilon_0 c}j^i .$$

- Пятимерная теория корректирует условия калибровочной инвариантности уравнений физики. Калибровочные преобразования принимают вид

$$
\begin{aligned}
A_i &= A'_i + \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,, \\
dx^0 &= dx'^0 - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m\,, \\
j^i &= j'^i + \mu c^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m}\frac{dx^m}{d\bar{s}}\frac{dx^i}{dt}\,, \\
j^0 &= j'^0 + \mu c^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m}\frac{dx^m}{d\bar{s}}\frac{dx^0}{dt}\,.
\end{aligned}
$$

- Отказ от усиленного условия цилиндричности приводит к необходимости введения нового поля - G-поля и нового взаимодействия между заряженными частицами.

Приложение A: Геометрия пятимерного пространства

1. Метрический тензор

Метрический тензор $\bar{g}_{IK}$ содержит следующие компоненты

$$\bar{g}_{ik} = g_{ik} - A_i\,A_k\,, \qquad \bar{g}_{0k} = -A_k\,, \qquad \bar{g}_{00} = -1\,. \tag{A1}$$

2. Обратный метрический тензор

Обратный метрический тензор $\bar{g}^{IK}$ содержит следующие компоненты

$$\bar{g}^{ik} = g^{ik}\,, \qquad \bar{g}^{0k} = -A^k\,, \qquad \bar{g}^{00} = -1 + A_i A^i\,. \tag{A2}$$

Легко проверить, что

$$\bar{g}_{IM}\cdot \bar{g}^{MK} = \delta^K{}_I\,.$$

3. Коэффициенты связности

a. *Символы Кристоффеля первого рода*

$$\bar{\Gamma}_{I,KL} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{IK,L} + \bar{g}_{LI,K} - \bar{g}_{KL,I})$$

Компоненты этих коэффициентов принимают вид

$$
\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{0,00} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{00,0} + \bar{g}_{00,0} - \bar{g}_{00,0}) = 0\,, \\
\bar{\Gamma}_{i,00} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{i0,0} + \bar{g}_{0i,0} - \bar{g}_{00,i}) = 0\,, \\
\bar{\Gamma}_{0,0l} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{00,l} + \bar{g}_{l0,0} - \bar{g}_{0l,0}) = 0\,, \\
\bar{\Gamma}_{0,k0} &= 0
\end{aligned}
\tag{A3}
$$

вследствие усиленного условия цилиндричности.

Из

$$\bar{\Gamma}_{0,KL} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0K,L} + \bar{g}_{L0,K} - \bar{g}_{KL,0}) = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0K,L} + \bar{g}_{L0,K})$$

следует

$$\bar{\Gamma}_{0,kl} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0k,l} + \bar{g}_{l0,k}) = \frac{1}{2}(-A_{k,l} - A_{l,k}) = -\psi_{kl}\,.$$

Здесь введено обозначение

$$\psi_{kl} = \frac{1}{2}(A_{k,l} + A_{l,k})\,.$$

Из

$$\bar{\Gamma}_{I,K0} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{IK,0} + \bar{g}_{0I,K} - \bar{g}_{K0,I}) = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0I,K} - \bar{g}_{K0,I})$$

следует

$$\bar{\Gamma}_{i,k0} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0i,k} - \bar{g}_{k0,i}) = \frac{1}{2}(-A_{i,k} + A_{k,i}) = -F_{ik}\,.$$

Здесь введено обозначение[9]

$$F_{ik} = \frac{1}{2}(A_{i,k} - A_{k,i})\,.$$

Аналогично

$$\bar{\Gamma}_{i,0l} = \frac{1}{2}(-A_{i,l} + A_{l,i}) = -F_{il}\,.$$

И наконец

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{i,kl} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{ik,l} + \bar{g}_{li,k} - \bar{g}_{kl,i}) = \frac{1}{2}((g_{ik} - A_iA_k)_{,l} + (g_{li} - A_lA_i)_{,k} - (g_{kl} - A_kA_l)_{,i}) = \\ &= \Gamma_{i,kl} - \frac{1}{2}((A_iA_k)_{,l} + (A_lA_i)_{,k} - (A_kA_l)_{,i}) = \Gamma_{i,kl} - A_i\psi_{kl} + A_kF_{li} - A_lF_{ik}\,.\end{aligned} \tag{A4}$$

b. *Символы Кристоффеля второго рода*

Символы Кристоффеля второго рода вычисляются так

$$\bar{\Gamma}^I_{KL} = \bar{g}^{IM} \cdot \bar{\Gamma}_{M,KL} = \bar{g}^{Im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,KL} + \bar{g}^{I0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,KL}\,.$$

Отсюда с учетом (A3) следует

$$\bar{\Gamma}^0_{00} = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,00} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,00} = 0\,.$$

$$\bar{\Gamma}^i_{00} = \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,00} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,00} = 0\,.$$

$$\bar{\Gamma}^0_{k0} = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,k0} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,k0} = A^mF_{mk}\,.$$

Также

$$\bar{\Gamma}^0_{0l} = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,0l} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,0l} = A^mF_{ml}\,.$$

---

[9] Заметим, что, если коэффициенты A_i рассматривать как электромагнитные потенциалы, то введенный тензор F_{ik} связан с тензором электромагнитного поля (ТЭП) следующим соотношением

$$F_{ik} = -\frac{\text{ТЭП}}{2}\,.$$

$$\bar{\Gamma}^0_{kl} = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,kl} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,kl} = -A_m \Gamma^m{}_{kl} - A_k F_{lm} A^m - A_l F_{km} A^m + \psi_{kl}\,. \tag{A5}$$

$$\bar{\Gamma}^i_{0l} = \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,0l} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,0l} = -F^i{}_l\,.$$

В частном случае

$$\bar{\Gamma}^l_{0l} = 0\,.$$

$$\bar{\Gamma}^i_{kl} = \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,kl} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,kl} = \Gamma^i{}_{kl} + A_k F_l{}^i + A_l F_k{}^i\,.$$

В частном случае

$$\bar{\Gamma}^l_{kl} = \bar{g}^{lm} \cdot \bar{\Gamma}_{m,kl} + \bar{g}^{l0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,kl} = \Gamma^l{}_{kl} + F_k{}^l A_l\,.$$

4. Тензор Риччи

a. Тензор Риччи. Оба индекса опущены

В этом случае тензор Риччи вычисляется так

$$\bar{R}_{IK} = \bar{\Gamma}^L_{IK,L} - \bar{\Gamma}^L_{IL,K} + \bar{\Gamma}^L_{IK}\bar{\Gamma}^M_{LM} - \bar{\Gamma}^M_{IL}\bar{\Gamma}^L_{KM}\,.$$

Отсюда для компонент тензора имеем

b. $\bar{R}_{00}$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{00} &= \bar{\Gamma}^L_{00,L} - \bar{\Gamma}^L_{0L,0} + \bar{\Gamma}^L_{00}\bar{\Gamma}^M_{LM} - \bar{\Gamma}^M_{0L}\bar{\Gamma}^L_{0M} = \\ &= \bar{\Gamma}^l_{00,l} - \bar{\Gamma}^l_{0l,0} + \bar{\Gamma}^l_{00}\bar{\Gamma}^M_{lM} - \bar{\Gamma}^M_{0l}\bar{\Gamma}^l_{0M} + \bar{\Gamma}^0_{00,0} - \bar{\Gamma}^0_{00,0} + \bar{\Gamma}^0_{00}\bar{\Gamma}^M_{0M} - \bar{\Gamma}^M_{00}\bar{\Gamma}^0_{0M} = \\ &= \bar{\Gamma}^l_{00,l} - \bar{\Gamma}^l_{0l,0} + \bar{\Gamma}^l_{00}\bar{\Gamma}^m_{lm} - \bar{\Gamma}^m_{0l}\bar{\Gamma}^l_{0m} + \bar{\Gamma}^0_{00,0} - \bar{\Gamma}^0_{00,0} + \bar{\Gamma}^0_{00}\bar{\Gamma}^m_{0m} - \bar{\Gamma}^m_{00}\bar{\Gamma}^0_{0m} + \bar{\Gamma}^l_{00}\bar{\Gamma}^0_{l0} - \bar{\Gamma}^0_{0l}\bar{\Gamma}^l_{00} + \bar{\Gamma}^0_{00}\bar{\Gamma}^0_{00} - \bar{\Gamma}^0_{00}\bar{\Gamma}^0_{00}\,.\end{aligned} \tag{A6}$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим[10]

$$\bar{R}_{00} = -\bar{\Gamma}^m_{0l}\bar{\Gamma}^l_{0m} = -F^m{}_l\, F^l{}_m\,.$$

c. $\bar{R}_{i0}$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{i0} &= \bar{\Gamma}^L_{i0,L} - \bar{\Gamma}^L_{iL,0} + \bar{\Gamma}^L_{i0}\bar{\Gamma}^M_{LM} - \bar{\Gamma}^M_{iL}\bar{\Gamma}^L_{0M} = \\ &= \bar{\Gamma}^l_{i0,l} - \bar{\Gamma}^l_{il,0} + \bar{\Gamma}^l_{i0}\bar{\Gamma}^M_{lM} - \bar{\Gamma}^M_{il}\bar{\Gamma}^l_{0M} + \bar{\Gamma}^0_{i0,0} - \bar{\Gamma}^0_{i0,0} + \bar{\Gamma}^0_{i0}\bar{\Gamma}^M_{0M} - \bar{\Gamma}^M_{i0}\bar{\Gamma}^0_{0M} = \\ &= \bar{\Gamma}^l_{i0,l} - \bar{\Gamma}^l_{il,0} + \bar{\Gamma}^l_{i0}\bar{\Gamma}^m_{lm} - \bar{\Gamma}^m_{il}\bar{\Gamma}^l_{0m} + \bar{\Gamma}^0_{i0,0} - \bar{\Gamma}^0_{i0,0} + \bar{\Gamma}^0_{i0}\bar{\Gamma}^m_{0m} - \bar{\Gamma}^m_{i0}\bar{\Gamma}^0_{0m} + \bar{\Gamma}^l_{i0}\bar{\Gamma}^0_{l0} - \bar{\Gamma}^0_{il}\bar{\Gamma}^l_{00} + \bar{\Gamma}^0_{i0}\bar{\Gamma}^0_{00} - \bar{\Gamma}^0_{i0}\bar{\Gamma}^0_{00}\,.\end{aligned} \tag{A7}$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим

$$\begin{aligned}\bar{R}_{i0} &= \bar{\Gamma}^l_{i0,l} + \bar{\Gamma}^l_{i0}\bar{\Gamma}^m_{lm} - \bar{\Gamma}^m_{il}\bar{\Gamma}^l_{0m} = \\ &= -F^l{}_{i,l} + (-F^l{}_i)(\Gamma^m{}_{lm} + A_m F_l{}^m) - (\Gamma^m{}_{il} + A_i F_l{}^m + A_l F_i{}^m) \cdot (-F^l{}_m) = -F^l{}_{i;l} + A_i F_l{}^m F^l{}_m\,.\end{aligned} \tag{A8}$$

---

[10] Заметим, что если тензор электромагнитного поля обозначить F, то

$$\bar{R}_{00} = \frac{F^{ml} \cdot F_{ml}}{4}\,.$$

d. $\bar{R}_{ik}$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ik} &= \bar{\Gamma}^L_{ik,L} - \bar{\Gamma}^L_{iL,k} + \bar{\Gamma}^L_{ik}\bar{\Gamma}^M_{LM} - \bar{\Gamma}^M_{iL}\bar{\Gamma}^L_{kM} = \\ &= \bar{\Gamma}^l_{ik,l} - \bar{\Gamma}^l_{il,k} + \bar{\Gamma}^l_{ik}\bar{\Gamma}^M_{lM} - \bar{\Gamma}^M_{il}\bar{\Gamma}^l_{kM} + \bar{\Gamma}^0_{ik,0} - \bar{\Gamma}^0_{i0,k} + \bar{\Gamma}^0_{ik}\bar{\Gamma}^M_{0M} - \bar{\Gamma}^M_{i0}\bar{\Gamma}^0_{kM} = \\ &= \bar{\Gamma}^l_{ik,l} - \bar{\Gamma}^l_{il,k} + \bar{\Gamma}^l_{ik}\bar{\Gamma}^m_{lm} - \bar{\Gamma}^m_{il}\bar{\Gamma}^l_{km} + \bar{\Gamma}^0_{ik,0} - \bar{\Gamma}^0_{i0,k} + \bar{\Gamma}^0_{ik}\bar{\Gamma}^m_{0m} - \bar{\Gamma}^m_{i0}\bar{\Gamma}^0_{km} + \bar{\Gamma}^l_{ik}\bar{\Gamma}^0_{l0} - \bar{\Gamma}^0_{il}\bar{\Gamma}^l_{k0} + \bar{\Gamma}^0_{ik}\bar{\Gamma}^0_{00} - \bar{\Gamma}^0_{i0}\bar{\Gamma}^0_{k0}\,.\end{aligned} \tag{A9}$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим

$$\bar{R}_{ik} = \bar{\Gamma}^l_{ik,l} - \bar{\Gamma}^l_{il,k} + \bar{\Gamma}^l_{ik}\bar{\Gamma}^m_{lm} - \bar{\Gamma}^m_{il}\bar{\Gamma}^l_{km} - \bar{\Gamma}^0_{i0,k} - \bar{\Gamma}^m_{i0}\bar{\Gamma}^0_{km} + \bar{\Gamma}^l_{ik}\bar{\Gamma}^0_{l0} - \bar{\Gamma}^0_{il}\bar{\Gamma}^l_{k0} - \bar{\Gamma}^0_{i0}\bar{\Gamma}^0_{k0}\,. \tag{A10}$$

Вычислим каждое из слагаемых в отдельности

$$\bar{\Gamma}^l_{ik,l} = {\Gamma^l}_{ik,l} + (A_i {F_k}^l + A_k {F_i}^l)_{,l}$$

$$-\bar{\Gamma}^l_{il,k} = -{\Gamma^l}_{il,k} - ({F_i}^l A_l)_{,k}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^l_{ik}\bar{\Gamma}^m_{lm} &= ({\Gamma^l}_{ik} + A_i{F_k}^l + A_k{F_i}^l)\cdot({\Gamma^m}_{lm} + {F_l}^m A_m) = \\ &= {\Gamma^l}_{ik}{\Gamma^m}_{lm} + (A_i{F_k}^l + A_k{F_i}^l){\Gamma^m}_{lm} + ({\Gamma^l}_{ik} + A_i{F_k}^l + A_k{F_i}^l)\,{F_l}^m A_m\end{aligned} \tag{A11}$$

$$\begin{aligned}-\bar{\Gamma}^m_{il}\bar{\Gamma}^l_{km} &= -({\Gamma^m}_{il} + A_i{F_l}^m + A_l{F_i}^m)\cdot({\Gamma^l}_{km} + A_k{F_m}^l + A_m{F_k}^l) = \\ &= -({\Gamma^m}_{il} + A_i{F_l}^m + A_l{F_i}^m)\cdot{\Gamma^l}_{km} - ({\Gamma^m}_{il} + A_i{F_l}^m + A_l{F_i}^m)\cdot(A_k{F_m}^l + A_m{F_k}^l) = \\ &= -{\Gamma^m}_{il}{\Gamma^l}_{km} - (A_i{F_l}^m + A_l{F_i}^m)\cdot{\Gamma^l}_{km} - {\Gamma^m}_{il}(A_k{F_m}^l + A_m{F_k}^l) - (A_i{F_l}^m + A_l{F_i}^m)\cdot(A_k{F_m}^l + A_m{F_k}^l)\end{aligned} \tag{A12}$$

$$-\bar{\Gamma}^0_{i0,k} = -(F_{mi}A^m)_{,k}$$

$$-\bar{\Gamma}^m_{i0}\bar{\Gamma}^0_{km} = -({F^m}_i)\cdot(A_l{\Gamma^l}_{km} + A_kF_{ml}A^l + A_mF_{kl}A^l - \psi_{km}) \tag{A13}$$

$$+\bar{\Gamma}^l_{ik}\bar{\Gamma}^0_{l0} = ({\Gamma^l}_{ik} + A_i{F_k}^l + A_k{F_i}^l)\cdot(F_{ml}A^m)$$

$$-\bar{\Gamma}^0_{il}\bar{\Gamma}^l_{k0} = -(A_m{\Gamma^m}_{il} + A_iF_{lm}A^m + A_lF_{im}A^m - \psi_{il})\cdot{F^l}_k \tag{A14}$$

$$-\bar{\Gamma}^0_{i0}\bar{\Gamma}^0_{k0} = -(F_{mi}A^m)\cdot(F_{nk}A^n)\,.$$

После подстановки и преобразований получим

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ik} = R_{ik} &+ (A_i)_{,l}{F_k}^l + A_i({F_k}^l)_{;l} + (A_k)_{,l}{F_i}^l + A_k({F_i}^l)_{;l} - (A_i{F_l}^m + A_l{F_i}^m)\cdot(A_k{F_m}^l + A_m{F_k}^l) - \\ &- ({F^m}_i)\cdot(A_kF_{ml}A^l + A_mF_{kl}A^l - \psi_{km}) - (A_iF_{lm}A^m + A_lF_{im}A^m - \psi_{il})\cdot{F^l}_k - (F_{mi}A^m)\cdot(F_{nk}A^n)\,.\end{aligned} \tag{A15}$$

После дальнейших преобразований с учетом того, что

$$(A_i)_{,l}{F_k}^l + \psi_{il}\,{F^l}_k = F_{il}\,{F_k}^l\,,$$

получим

$$\bar{R}_{ik} = R_{ik} + A_i({F_k}^l)_{;l} + A_k({F_i}^l)_{;l} + 2F_{il}\,{F_k}^l - A_iA_k({F_l}^m{F_m}^l)\,. \tag{A16}$$

e. Тензор Риччи. Один индекс поднят

В этом случае тензор Риччи вычисляется так

$$\bar{R}^I_K = \bar{g}^{IN} \cdot \bar{R}_{NK} = \bar{g}^{In} \cdot \bar{R}_{nK} + \bar{g}^{I0} \cdot \bar{R}_{0K}\,.$$

Отсюда для компонент тензора имеем

f. $\bar{R}^0_0$

$$\bar{R}^0_0 = \bar{g}^{0n} \cdot \bar{R}_{n0} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{R}_{00} = (-A^n)(-F^l{}_{n;l} + A_n F_l{}^m F^l{}_m) + (-1 + A^n A_n)(-F^m{}_l F^l{}_m) = A^n F^l{}_{n;l} - F^m{}_l\, F_m{}^l\,. \quad \text{(A17)}$$

g. $\bar{R}^0_k$

$$\bar{R}^0_k = \bar{g}^{0n} \cdot \bar{R}_{nk} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{R}_{0k} = (-A^n)(R_{nk} + A_n (F_k{}^l)_{;l} + A_k (F_n{}^l)_{;l} + 2F_{nl}\, F_k{}^l - A_n A_k (F_l{}^m F_m{}^l)) + \\ + (-1 + A^n A_n)(-F^l{}_{k;l} + A_k F_l{}^m F^l{}_m) = -A^n R_{nk} - A^n A_k (F_n{}^l)_{;l} - 2A^n F_{nl}\, F_k{}^l + F^l{}_{k;l} - A_k F_l{}^m F^l{}_m\,. \quad \text{(A18)}$$

h. $\bar{R}^i_0$

$$\bar{R}^i_0 = \bar{g}^{in} \cdot \bar{R}_{n0} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{R}_{00} = g^{in}(-F^l{}_{n;l} + A_n F_l{}^m F^l{}_m) + (-A^i)(-F^m{}_l F^l{}_m) = -F^{li}{}_{;l}\,. \quad \text{(A19)}$$

i. $\bar{R}^i_k$

$$\bar{R}^i_k = \bar{g}^{in} \cdot \bar{R}_{nk} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{R}_{0k} = g^{in}(R_{nk} + A_n (F_k{}^l)_{;l} + A_k (F_n{}^l)_{;l} + 2F_{nl}\, F_k{}^l - A_n A_k (F_l{}^m F_m{}^l)) + \\ + (-A^i)(-F^l{}_{k;l} + A_k F_l{}^m F^l{}_m) = R^i{}_k + A_k F^{il}{}_{;l} + 2F^i{}_l\, F_k{}^l\,. \quad \text{(A20)}$$

j. Тензор Риччи. Оба индекса подняты

В этом случае тензор Риччи вычисляется так

$$\bar{R}^{IK} = \bar{R}^I_P \cdot \bar{g}^{KP}\,.$$

Отсюда для компонент тензора имеем

k. $\bar{R}^{00}$

$$\bar{R}^{00} = \bar{R}^0_p \cdot \bar{g}^{0p} + \bar{R}^0_0 \cdot \bar{g}^{00} = (-A^n R_{np} - A^n A_p (F_n{}^l)_{;l} - 2A^n F_{nl}\, F_p{}^l + F^l{}_{p;l} - A_p F_l{}^m F^l{}_m)(-A^p) + \\ + (A^n F^l{}_{n;l} - F^m{}_l\, F_m{}^l)(-1 + A^p A_p) = A^n (R_{np} + 2F_{nl}\, F_p{}^l) A^p - 2A^n F^l{}_{n;l} + F^m{}_l\, F_m{}^l\,. \quad \text{(A21)}$$

l. $\bar{R}^{i0}$

$$\bar{R}^{i0}=\bar{R}^i_p\cdot\bar{g}^{0p}+\bar{R}^i_0\cdot\bar{g}^{00}=(R^i{}_p+A_pF^{il}{}_{;l}+2F^i{}_l\,F_p{}^l)(-A^p)+(-F^{li}{}_{;l})(-1+A_pA^p)=-(R^i{}_p+2F^i{}_l\,F_p{}^l)A^p+F^{li}{}_{;l}\,. \quad (A22)$$

m. $\bar{R}^{ik}$

$$\bar{R}^{ik}=\bar{R}^i_p\cdot\bar{g}^{kp}+\bar{R}^i_0\cdot\bar{g}^{k0}=(R^i{}_p+A_pF^{il}{}_{;l}+2F^i{}_l\,F_p{}^l)g^{kp}+(-A^k)(-F^{li}{}_{;l})=R^{ik}+2F^i{}_l\,F^{kl}\,. \quad (A23)$$

5. Скалярная кривизна

$$\bar{R}=\bar{R}^I_I=\bar{R}^i_i+\bar{R}^0_0=R^i{}_i+A_iF^{il}{}_{;l}+2F^i{}_l\,F_i{}^l+A^nF^l{}_{n;l}-F^m{}_l\,F_m{}^l=R+F^i{}_l\,F_i{}^l\,. \quad (A24)$$

Приложение B: Приведение к тензору электромагнитного поля

Введенный тензор F_{ik} имеет вид

$$F_{ik}=\frac{1}{2}(A_{i,k}-A_{k,i})\,,$$

в то время как тензор электромагнитного поля записывается как $A_{k,i}-A_{i,k}$. Поэтому для приведения полученных коэффициентов связности и компонент тензора Риччи к тензору электромагнитного поля необходимо выполнить замену (см. замечание на стр. 1)

$$F_{ik}\to-\frac{1}{2}\,F_{ik}\,.$$

По тем же причинам такое приведение необходимо сопроводить заменой

$$\psi_{ik}\to\frac{1}{2}\psi_{ik}\,.$$

1. Символы Кристоффеля первого рода

$$\bar{\Gamma}_{0,k0}=0\,,\qquad\bar{\Gamma}_{0,00}=0\,,\qquad\bar{\Gamma}_{0,kl}=-\frac{1}{2}\psi_{kl}\,.$$

Здесь введено обозначение

$$\psi_{kl}=A_{k,l}+A_{l,k}\,.$$

$$\bar{\Gamma}_{i,k0}=\frac{1}{2}F_{ik}\,.$$

Аналогично

$$\bar{\Gamma}_{i,0l}=\frac{1}{2}F_{il}\,.$$

И наконец

$$\bar{\Gamma}_{i,kl}=\Gamma_{i,kl}-\frac{1}{2}A_i\psi_{kl}-\frac{1}{2}A_kF_{li}+\frac{1}{2}A_lF_{ik}\,.$$

2. Символы Кристоффеля второго рода

$$\bar{\Gamma}^0_{00} = 0\,, \qquad \bar{\Gamma}^i_{00} = 0\,.$$

$$\bar{\Gamma}^0_{k0} = -\frac{1}{2}A^m F_{mk}\,. \tag{B1}$$

Также

$$\bar{\Gamma}^0_{0l} = -\frac{1}{2}A^m F_{ml}\,.$$

$$\bar{\Gamma}^0_{kl} = -A_m \Gamma^m{}_{kl} + \frac{1}{2}A_k F_{lm} A^m + \frac{1}{2}A_l F_{km} A^m + \frac{1}{2}\psi_{kl}\,. \tag{B2}$$

$$\bar{\Gamma}^i_{0l} = \frac{1}{2}F^i{}_l\,. \tag{B3}$$

$$\bar{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i{}_{kl} - \frac{1}{2}A_k F_l{}^i - \frac{1}{2}A_l F_k{}^i\,. \tag{B4}$$

3. Тензор Риччи

a. *Тензор Риччи. Оба индекса опущены*

$$\bar{R}_{00} = \frac{F^m{}_l\, F_m{}^l}{4}\,. \tag{B5}$$

$$\bar{R}_{i0} = +\frac{1}{2}F^l{}_{i;l} + A_i \frac{F_l{}^m F^l{}_m}{4}\,. \tag{B6}$$

$$\bar{R}_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}A_i (F_k{}^l)_{;l} - \frac{1}{2}A_k (F_i{}^l)_{;l} + \frac{1}{2}\,F_{il}\,F_k{}^l + \frac{1}{4}\,A_i A_k (F_l{}^m F^l{}_m)\,. \tag{B7}$$

b. *Тензор Риччи. Один индекс поднят*

$$\bar{R}^0_0 = -\frac{1}{2}A^n F^l{}_{n;l} - \frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\,. \tag{B8}$$

$$\bar{R}^0_k = -A^n R_{nk} + \frac{1}{2}A^n A_k (F_n{}^l)_{;l} - \frac{1}{2}A^n F_{nl}\,F_k{}^l - \frac{1}{2}F^l{}_{k;l} - \frac{1}{4}\,A_k F_l{}^m F^l{}_m\,. \tag{B9}$$

$$\bar{R}^i_0 = \frac{1}{2}F^{li}{}_{;l}\,. \tag{B10}$$

$$\bar{R}^i_k = R^i{}_k - \frac{1}{2}A_k F^{il}{}_{;l} + \frac{1}{2}F^i{}_l\,F_k{}^l\,. \tag{B11}$$

c. Тензор Риччи. Оба индекса подняты

$$\bar{R}^{00} = A^n(R_{np} + \frac{1}{2}F_{nl}\,F_p{}^l)A^p + A^n F^l{}_{n;l} + \frac{1}{4}\,F^m{}_l\,F_m{}^l\,. \tag{B12}$$

$$\bar{R}^{i0} = -(R^i{}_p + \frac{1}{2}F^i{}_l\,F_p{}^l)A^p - \frac{1}{2}F^{li}{}_{;l}\,. \tag{B13}$$

$$\bar{R}^{ik} = R^{ik} + \frac{1}{2}F^i{}_l\,F^{kl}\,. \tag{B14}$$

4. Скалярная кривизна

$$\bar{R} = R + \frac{1}{4}\,F^i{}_l\,F_i{}^l\,. \tag{B15}$$

Приложение C: Геометрия пятимерного пространства с G-полем

1. Метрический тензор

Метрический тензор $\bar{g}_{IK}$ содержит следующие компоненты

$$\bar{g}_{ik} = \delta_{ik}\,, \qquad \bar{g}_{0k} = 0\,, \qquad \bar{g}_{00} = -g_{00}\,. \tag{C1}$$

2. Обратный метрический тензор

Обратный метрический тензор $\bar{g}^{IK}$ содержит следующие компоненты

$$\bar{g}^{ik} = \delta^{ik}\,, \qquad \bar{g}^{0k} = 0\,, \qquad \bar{g}^{00} = -g^{00}\,. \tag{C2}$$

Легко проверить, что

$$\bar{g}_{IM}\cdot\bar{g}^{MK} = \delta^K{}_I\,.$$

3. Коэффициенты связности

a. Символы Кристоффеля первого рода

$$\bar{\Gamma}_{I,KL} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{IK,L} + \bar{g}_{LI,K} - \bar{g}_{KL,I})$$

Компоненты этих коэффициентов принимают вид

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{0,00} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{00,0} + \bar{g}_{00,0} - \bar{g}_{00,0}) = -\frac{1}{2}g_{00,0}\\
\bar{\Gamma}_{i,00} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{i0,0} + \bar{g}_{0i,0} - \bar{g}_{00,i}) = \frac{1}{2}g_{00,i}\\
\bar{\Gamma}_{0,0l} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{00,l} + \bar{g}_{l0,0} - \bar{g}_{0l,0}) = -\frac{1}{2}g_{00,l}\\
\bar{\Gamma}_{0,k0} &= -\frac{1}{2}g_{00,k}
\end{aligned} \tag{C3}$$

Из

$$\bar{\Gamma}_{0,KL} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0K,L} + \bar{g}_{L0,K} - \bar{g}_{KL,0})$$

следует

$$\bar{\Gamma}_{0,kl} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0k,l} + \bar{g}_{l0,k} - \bar{g}_{kl,0}) = 0\,.$$

Из

$$\bar{\Gamma}_{I,K0} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{IK,0} + \bar{g}_{0I,K} - \bar{g}_{K0,I})$$

следует

$$\bar{\Gamma}_{i,k0} = 0\,.$$

Аналогично

$$\bar{\Gamma}_{i,0l} = 0\,.$$

И наконец

$$\bar{\Gamma}_{i,kl} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ik,l} + \bar{g}_{li,k} - \bar{g}_{kl,i}) = 0\,.$$

b. Символы Кристоффеля второго рода

Символы Кристоффеля второго рода вычисляются так

$$\bar{\Gamma}^I_{KL} = \bar{g}^{IM} \cdot \bar{\Gamma}_{M,KL} = \bar{g}^{Im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,KL} + \bar{g}^{I0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,KL}\,.$$

Отсюда с учетом (C3) следует

$$\bar{\Gamma}^0_{00} = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,00} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,00} = \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,00} = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0}\,.$$

$$\bar{\Gamma}^i_{00} = \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,00} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,00} = \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,00} = \frac{1}{2}g_{00}{}^{,i}\,. \tag{C4}$$

$$\bar{\Gamma}^0_{k0} = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,k0} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,k0} = \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,k0} = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,k}\,.$$

Также

$$\bar{\Gamma}^0_{0l} = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,l}\,.$$

$$\bar{\Gamma}^0_{kl} = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,kl} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,kl} = 0\,. \tag{C5}$$

$$\bar{\Gamma}^i_{0l} = \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,0l} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,0l} = 0\,.$$

$$\bar{\Gamma}^i_{kl} = \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,kl} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,kl} = 0\,.$$

4. Тензор Риччи

a. Тензор Риччи. Оба индекса опущены

В этом случае тензор Риччи вычисляется так

$$\bar{R}_{IK} = \bar{\Gamma}^{L}_{IK,L} - \bar{\Gamma}^{L}_{IL,K} + \bar{\Gamma}^{L}_{IK}\bar{\Gamma}^{M}_{LM} - \bar{\Gamma}^{M}_{IL}\bar{\Gamma}^{L}_{KM}\,.$$

Отсюда для компонент тензора имеем

b. $\bar{R}_{00}$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{00} &= \bar{\Gamma}^{L}_{00,L} - \bar{\Gamma}^{L}_{0L,0} + \bar{\Gamma}^{L}_{00}\bar{\Gamma}^{M}_{LM} - \bar{\Gamma}^{M}_{0L}\bar{\Gamma}^{L}_{0M} = \bar{\Gamma}^{l}_{00,l} - \bar{\Gamma}^{l}_{0l,0} + \bar{\Gamma}^{l}_{00}\bar{\Gamma}^{M}_{lM} - \bar{\Gamma}^{M}_{0l}\bar{\Gamma}^{l}_{0M} + \bar{\Gamma}^{0}_{00,0} - \bar{\Gamma}^{0}_{00,0} + \bar{\Gamma}^{0}_{00}\bar{\Gamma}^{M}_{0M} - \bar{\Gamma}^{M}_{00}\bar{\Gamma}^{0}_{0M} = \\ &= \bar{\Gamma}^{l}_{00,l} - \bar{\Gamma}^{l}_{0l,0} + \bar{\Gamma}^{l}_{00}\bar{\Gamma}^{m}_{lm} - \bar{\Gamma}^{m}_{0l}\bar{\Gamma}^{l}_{0m} + \bar{\Gamma}^{0}_{00,0} - \bar{\Gamma}^{0}_{00,0} + \bar{\Gamma}^{0}_{00}\bar{\Gamma}^{m}_{0m} - \bar{\Gamma}^{m}_{00}\bar{\Gamma}^{0}_{0m} + \bar{\Gamma}^{l}_{00}\bar{\Gamma}^{0}_{l0} - \bar{\Gamma}^{0}_{0l}\bar{\Gamma}^{l}_{00} + \bar{\Gamma}^{0}_{00}\bar{\Gamma}^{0}_{00} - \bar{\Gamma}^{0}_{00}\bar{\Gamma}^{0}_{00}\,.\end{aligned} \tag{C6}$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим

$$\bar{R}_{00} = \bar{\Gamma}^{m}_{00,m} - \bar{\Gamma}^{m}_{00}\bar{\Gamma}^{0}_{0m} = \frac{1}{2}g_{00}{}^{,m}{}_{,m} - \frac{1}{2}g_{00}{}^{,m}\cdot\frac{1}{2}g^{00}g_{00,m}\,. \tag{C7}$$

c. $\bar{R}_{i0}$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{i0} &= \bar{\Gamma}^{L}_{i0,L} - \bar{\Gamma}^{L}_{iL,0} + \bar{\Gamma}^{L}_{i0}\bar{\Gamma}^{M}_{LM} - \bar{\Gamma}^{M}_{iL}\bar{\Gamma}^{L}_{0M} = \bar{\Gamma}^{l}_{i0,l} - \bar{\Gamma}^{l}_{il,0} + \bar{\Gamma}^{l}_{i0}\bar{\Gamma}^{M}_{lM} - \bar{\Gamma}^{M}_{il}\bar{\Gamma}^{l}_{0M} + \bar{\Gamma}^{0}_{i0,0} - \bar{\Gamma}^{0}_{i0,0} + \bar{\Gamma}^{0}_{i0}\bar{\Gamma}^{M}_{0M} - \bar{\Gamma}^{M}_{i0}\bar{\Gamma}^{0}_{0M} = \\ &= \bar{\Gamma}^{l}_{i0,l} - \bar{\Gamma}^{l}_{il,0} + \bar{\Gamma}^{l}_{i0}\bar{\Gamma}^{m}_{lm} - \bar{\Gamma}^{m}_{il}\bar{\Gamma}^{l}_{0m} + \bar{\Gamma}^{0}_{i0,0} - \bar{\Gamma}^{0}_{i0,0} + \bar{\Gamma}^{0}_{i0}\bar{\Gamma}^{m}_{0m} - \bar{\Gamma}^{m}_{i0}\bar{\Gamma}^{0}_{0m} + \bar{\Gamma}^{l}_{i0}\bar{\Gamma}^{0}_{l0} - \bar{\Gamma}^{0}_{il}\bar{\Gamma}^{l}_{00} + \bar{\Gamma}^{0}_{i0}\bar{\Gamma}^{0}_{00} - \bar{\Gamma}^{0}_{i0}\bar{\Gamma}^{0}_{00}\,.\end{aligned} \tag{C8}$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим

$$\bar{R}_{i0} = 0\,. \tag{C9}$$

d. $\bar{R}_{ik}$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ik} &= \bar{\Gamma}^{L}_{ik,L} - \bar{\Gamma}^{L}_{iL,k} + \bar{\Gamma}^{L}_{ik}\bar{\Gamma}^{M}_{LM} - \bar{\Gamma}^{M}_{iL}\bar{\Gamma}^{L}_{kM} = \bar{\Gamma}^{l}_{ik,l} - \bar{\Gamma}^{l}_{il,k} + \bar{\Gamma}^{l}_{ik}\bar{\Gamma}^{M}_{lM} - \bar{\Gamma}^{M}_{il}\bar{\Gamma}^{l}_{kM} + \bar{\Gamma}^{0}_{ik,0} - \bar{\Gamma}^{0}_{i0,k} + \bar{\Gamma}^{0}_{ik}\bar{\Gamma}^{M}_{0M} - \bar{\Gamma}^{M}_{i0}\bar{\Gamma}^{0}_{kM} = \\ &= \bar{\Gamma}^{l}_{ik,l} - \bar{\Gamma}^{l}_{il,k} + \bar{\Gamma}^{l}_{ik}\bar{\Gamma}^{m}_{lm} - \bar{\Gamma}^{m}_{il}\bar{\Gamma}^{l}_{km} + \bar{\Gamma}^{0}_{ik,0} - \bar{\Gamma}^{0}_{i0,k} + \bar{\Gamma}^{0}_{ik}\bar{\Gamma}^{m}_{0m} - \bar{\Gamma}^{m}_{i0}\bar{\Gamma}^{0}_{km} + \bar{\Gamma}^{l}_{ik}\bar{\Gamma}^{0}_{l0} - \bar{\Gamma}^{0}_{il}\bar{\Gamma}^{l}_{k0} + \bar{\Gamma}^{0}_{ik}\bar{\Gamma}^{0}_{00} - \bar{\Gamma}^{0}_{i0}\bar{\Gamma}^{0}_{k0}\,.\end{aligned} \tag{C10}$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ik} &= -\bar{\Gamma}^{0}_{i0,k} - \bar{\Gamma}^{0}_{i0}\bar{\Gamma}^{0}_{k0} = -\frac{1}{2}(g^{00}g_{00,i})_{,k} - \frac{1}{2}g^{00}g_{00,i}\frac{1}{2}g^{00}g_{00,k} = \\ &= -\frac{1}{2}g^{00}{}_{,k}g_{00,i} - \frac{1}{2}g^{00}g_{00,i,k} - \frac{1}{2}g^{00}g_{00,i}\frac{1}{2}g^{00}g_{00,k} = -\frac{1}{2}g^{00}g_{00,i,k} + \frac{1}{2}g^{00}g_{00,i}\frac{1}{2}g^{00}g_{00,k}\,.\end{aligned} \tag{C11}$$

Здесь использовано

$$g^{00}{}_{,k}g_{00} + g^{00}g_{00,k} = 0\,.$$

e. Тензор Риччи. Один индекс поднят

В этом случае тензор Риччи вычисляется так

$$\bar{R}^{I}_{K} = \bar{g}^{IN}\cdot\bar{R}_{NK} = \bar{g}^{In}\cdot\bar{R}_{nK} + \bar{g}^{I0}\cdot\bar{R}_{0K}\,.$$

Отсюда для компонент тензора имеем

f. $\bar{R}_0^0$

$$\bar{R}_0^0 = \bar{g}^{0n}\cdot\bar{R}_{n0} + \bar{g}^{00}\cdot\bar{R}_{00} = \bar{g}^{00}\cdot\bar{R}_{00} = -g^{00}(\frac{1}{2}g_{00}{}^{,m}{}_{,m} - \frac{1}{2}g_{00}{}^{,m}\cdot\frac{1}{2}g^{00}g_{00,m})\,. \tag{C12}$$

g. $\bar{R}_k^0$

$$\bar{R}_k^0 = \bar{g}^{0n}\cdot\bar{R}_{nk} + \bar{g}^{00}\cdot\bar{R}_{0k} = 0\,. \tag{C13}$$

h. $\bar{R}_0^i$

$$\bar{R}_0^i = \bar{g}^{in}\cdot\bar{R}_{n0} + \bar{g}^{i0}\cdot\bar{R}_{00} = 0\,. \tag{C14}$$

i. $\bar{R}_k^i$

$$\bar{R}_k^i = \bar{g}^{in}\cdot\bar{R}_{nk} + \bar{g}^{i0}\cdot\bar{R}_{0k} = \,= \delta^{in}\cdot\bar{R}_{nk} = -\frac{1}{2}g^{00}g_{00}{}^{,i}{}_{,k} + \frac{1}{2}g^{00}g_{00}{}^{,i}\frac{1}{2}g^{00}g_{00,k}\,. \tag{C15}$$

Приложение D: Сравнение слагаемых свертки тензора энергии-импульса

На примере электрона покажем, что в свертке тензора энергии-импульса

$$\bar{T} = \mu c^2 + \frac{1}{kc}j^{00}g_{00}\,.$$

второе слагаемое много больше первого, то есть

$$\mu c^2 \ll \frac{1}{kc}\rho^0\frac{dx^0}{dt}g_{00}\,. \tag{D1}$$

При сравнении слагаемых будем полагать

$$\frac{dx^0}{dt} = c\,, \qquad g_{00} = 1\,.$$

Для частиц с сосредоточенной массой и зарядом неравенство (D1) приобретает вид

$$mc^2 \ll \frac{e}{k}\,. \tag{D2}$$

Учтем, что

$$k = \frac{\sqrt{2G\varepsilon_0}}{c^2}\,.$$

Тогда неравенство (D2) сводится к

$$m \ll \frac{e}{\sqrt{2G\varepsilon_0}}\,. \tag{D3}$$

Здесь

$$G = 4\pi\gamma = 4\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}\,, \qquad \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}}\,.$$

Для электрона

$$m = 0,9 \cdot 10^{-30}\text{кг}\,, \qquad e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{Кл}\,.$$

Подставляя приведенные данные в (D3), убеждаемся в том, что число, стоящее слева, меньше правого в 10^{21} раз.