Моей маме
Татьяне Васильевне
Кецарис (Колосовой)

Лекция 25. Искривленное дифференцирование

А. А. Кецарис*
(12 декабря 2011)

В этой Лекции мы рассматриваем обобщенное дифференциальное исчисление, которое мы назвали искривленным. По нашему представлению искривленное дифференциальное исчисление должно помочь в построении новой физической картины мира.

I. ВВЕДЕНИЕ

Целый ряд разделов математики, положенных в основу современной физики, используют разные виды дифференциального исчисления. Это теория векторного поля, тензорное исчисление с абсолютным дифференцированием, алгебры Ли, теория дифференциальных форм Картана-Лаптева, неевклидова геометрия, вариационное исчисление и другие. Для нас важно предположение о том, что разные виды дифференциального исчисления являются разновидностями одного *гипотетического* дифференциального исчисления, которое мы назовем *искривленным*[1]. Построение такого исчисления должно привести к объединению вышеуказанных разделов математики. А так как эти разделы положены в основу современного физического знания, то с построением искривленного дифференцирования можно связать надежду на прорыв в новую физику. Можно предположить, что противоречия и неясности, с которыми мы сталкиваемся в квантовой теории и теории относительности, есть следствия несовершенства той математики, которую они используют.

В предыдущих лекциях мы в той или иной форме обращались к искривленному дифференцированию. Здесь мы попытаемся изложить это исчисление в необходимой последовательности.

II. РЯД ТЕЙЛОРА

Пусть на точечном многообразии заданы пространства Y и X с координатами y^i и x^k соответственно[2]. Тогда, следовательно, определена функция

$$y^i(x^k)\,.$$

Разложим эту функцию вблизи точки с координатами x^k в ряд Тейлора, который запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + \left(y^i_{,k} + y^i_k\right) dx^k + \\ &+ \left(y^i_{,k_1,k_2} + y^i_{k_1,k_2} + y^i_{k_1k_2}\right) dx^{k_1}dx^{k_2} + \\ &+ \left(y^i_{,k_1,k_2,k_3} + y^i_{k_1,k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2,k_3} + \right. \\ &\left. + y^i_{k_1k_2k_3}\right) dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь производные

$$y^i_{,k} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\,,\quad y^i_{,k_1,k_2} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}\,,$$
$$y^i_{,k_1,k_2,k_3} = \frac{\partial^3 y^i}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}\,,\quad \ldots$$

определяются различием систем координат пространств Y и X. Коэффициенты

$$y^i_k\,,\quad y^i_{k_1k_2}\,,\quad y^i_{k_1k_2k_3}\,,\quad y^i_{k_1k_2k_3k_4}\,,\quad \ldots$$

определяют искривление пространства Y по отношению к пространству X. Через d обозначен дифференциал в пространстве X.

Рассматривая разложение функции в ряд Тейлора, мы будем полагать ограничение слагаемыми четвертого порядка, так как этим порядком ограничивается описание взаимодействий, которое мы рассматриваем.

Если в пространстве Y используется та же система координат что и в пространстве X, то

$$y^i_{,k} = \delta^i_k\,,\quad y^i_{,k_1,k_2} = 0\,,\quad y^i_{,k_1,k_2,k_3} = 0\,,\quad \ldots$$

и ряд Тейлора приобретает вид[3]

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) &= x^i + \left(\delta^i_k + y^i_k\right) dx^k + \\ &+ \left(y^i_{k_1,k_2} + y^i_{k_1k_2}\right) dx^{k_1}dx^{k_2} + \\ &+ \left(y^i_{k_1,k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2k_3}\right) dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} + \ldots \end{aligned}$$

---

* ketsaris@mail.ru; http://toe-physics.org

[1] Его можно было бы назвать *неполным* или *неголономным*.

[2] Как и в Лекции 23 будем называть пространство Y *искривленным*, а пространство X *системой отсчета*. Геодезическую в пространстве X будем называть *прямой*.

[3] Заметим, что решение Шварцшильда уравнений Эйнштейна ищется при условии, что координаты в римановом пространстве Y совпадают со сферическими координатами в евклидовом пространстве X.

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
l^i_k &= y^i_{,k} + y^i_k \,, \\
l^i_{k_1k_2} &= y^i_{,k_1,k_2} + y^i_{k_1,k_2} + y^i_{k_1k_2} \,, \\
l^i_{k_1k_2k_3} &= y^i_{,k_1,k_2,k_3} + y^i_{k_1,k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2k_3} \,, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{2}
$$

с учетом которых ряд Тейлора запишется

$$
\begin{aligned}
y^i(x^k + dx^k) = y^i(x^k) + l^i_k dx^k &+ \\
+ l^i_{k_1k_2} dx^{k_1} dx^{k_2} + l^i_{k_1k_2k_3} dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} &+ \\
+ l^i_{k_1k_2k_3k_4} dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} dx^{k_4} + \dots
\end{aligned} \tag{3}
$$

Если учесть, что

$$
l^i_{k_1k_2} = l^i_{k_1,k_2} + y^i_{k_1k_2} \,, \tag{4}
$$

$$
l^i_{k_1k_2k_3} = l^i_{k_1k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2k_3} \,, \tag{5}
$$

то имеем

$$
\begin{aligned}
y^i(x^k + dx^k) = y^i(x^k) + l^i_k dx^k + \left(l^i_{k_1,k_2} + y^i_{k_1k_2}\right) dx^{k_1} dx^{k_2} \\
+ \left(l^i_{k_1k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2k_3}\right) dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} + \dots
\end{aligned}
$$

Для описания взаимодействий важен частный случай

$$
y^i_{k_1k_2} \neq 0 \,, \; y^i_{k_1k_2k_3} = 0 \,, \; \dots y^i_{k_1k_2\dots k_p} = 0 \,, \; \dots
$$

При этом коэффициенты $y^i_{k_1k_2}$ отождествляются с компонентами потенциала калибровочного поля или с коэффициентами связности для неевклидовой геометрии. В этом случае

$$
\begin{aligned}
y^i(x^k + dx^k) = y^i(x^k) + l^i_k dx^k + \left(l^i_{k_1,k_2} + y^i_{k_1k_2}\right) dx^{k_1} dx^{k_2} \\
+ \left(l^i_{k_1,k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2,k_3}\right) dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} + \dots
\end{aligned} \tag{6}
$$

Если калибровочное поле отсутствует $y^i_{k_1k_2} = 0$, то

$$
\begin{aligned}
y^i(x^k + dx^k) = y^i(x^k) + l^i_k dx^k + l^i_{k_1,k_2} dx^{k_1} dx^{k_2} &+ \\
+ l^i_{k_1,k_2,k_3} dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} + \dots
\end{aligned}
$$

1. Дифференциал D и оператор частного дифференцирования X

Введем обозначение

$$
Dy^i = l^i_k dx^k \,. \tag{7}
$$

Здесь символ D означает дифференциал в пространстве Y.

$$
Dy^i = l^i_k dx^k = y^i_{,k} dx^k + y^i_k dx^k = dy^i + y^i_k dx^k \,.
$$

Таким образом, дифференциал в пространстве Y складывается из дифференциала в пространстве X и добавки, представляющей собой неполный дифференциал, которую удобно обозначить

$$
\delta y^i = y^i_k dx^k \,.
$$

Таким образом,

$$
Dy^i = dy^i + \delta y^i \,.
$$

Используя введенный дифференциал, запишем ряд Тейлора в следующем виде[4]

$$
y^i(x^k + dx^k) = y^i(x^k) + Dy^i + D^2 y^i + D^3 y^i + \dots \tag{8}
$$

Введем оператор частного дифференцирования

$$
X_k \equiv \frac{D}{\partial x^k} \,.
$$

Используя его, получим

$$
l^i_k = \frac{Dy^i}{\partial x^k} = X_k(y^i) \,, \tag{9}
$$

$$
l^i_{k_1k_2} = \frac{D^2 y^i}{\partial x^{k_2} \partial x^{k_1}} = X_{k_2} X_{k_1}(y^i) \,, \tag{10}
$$

$$
l^i_{k_1k_2k_3} = \frac{D^3 y^i}{\partial x^{k_3} \partial x^{k_2} \partial x^{k_1}} = X_{k_3} X_{k_2} X_{k_1}(y^i) \,, \tag{11}
$$

$$
\dots
$$

А ряд Тейлора запишется так

$$
\begin{aligned}
y^i(x^k + dx^k) = y^i(x^k) + \frac{Dy^i}{\partial x^k} dx^k + \frac{D^2 y^i}{\partial x^{k_2} \partial x^{k_1}} dx^{k_1} dx^{k_2} &+ \\
+ \frac{D^3 y^i}{\partial x^{k_3} \partial x^{k_2} \partial x^{k_1}} dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} + \dots
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
y^i(x^k + dx^k) = y^i(x^k) + X_k(y^i) dx^k + X_{k_2} X_{k_1}(y^i) dx^{k_1} dx^{k_2} \\
+ X_{k_3} X_{k_2} X_{k_1}(y^i) dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} + \dots
\end{aligned}
$$

Введем дифференциал в пространстве Y от коэффициентов l^i_k в соответствии с определением

$$
Dl^i_{k_1} = l^i_{k_1,k_2} dx^{k_2} + y^i_{k_1k_2} dx^{k_2} = dl^i_{k_1} + y^i_{k_1k_2} dx^{k_2} \,.
$$

Таким образом, дифференциал от l^i_k в пространстве Y также складывается из дифференциала в пространстве X и добавки, представляющей собой неполный дифференциал, которую удобно обозначить

$$
\delta l^i_{k_1} = y^i_{k_1k_2} dx^{k_2} \,.
$$

Таким образом,

$$
Dl^i_{k_1} = dl^i_{k_1} + \delta l^i_{k_1} \,.
$$

Аналогично можно записать для коэффициентов $l^i_{k_1\dots k_p}$

$$
Dl^i_{k_1\dots k_p} = dl^i_{k_1\dots k_p} + \delta l^i_{k_1\dots k_p} \,,
$$

---

[4] Необходимо отметить, что, так как координаты x^k являются независимыми, то имеет место $d^2 x^k = 0$. Вместе с тем $D^2 y^i \neq 0$.

где

$$\delta l^i_{k_1\dots k_p} = y^i_{k_1\dots k_p k_{p+1}} dx^{k_{p+1}} .$$

Используя введенные дифференциалы, запишем ряд Тейлора в следующем виде[5]

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + Dy^i + Dl^i_{k_1}dx^{k_1} + \\ + Dl^i_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2} + Dl^i_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично тому, как частная производная обозначается с помощью индекса, отделенного запятой:

$$\frac{\partial l^i_{k_1\dots k_p}}{\partial x^{k_{p+1}}} = l^i_{k_1\dots k_p, k_{p+1}} ,$$

так дифференцирование X будем обозначать с помощью индекса, отделенного чертой

$$\frac{Dl^i_{k_1\dots k_p}}{\partial x^{k_{p+1}}} = l^i_{k_1\dots k_p|k_{p+1}} .$$

2. Касательное разложение

Введем матрицу $\tilde{l}^k_i$, обратную матрице l^i_k. Для нее выполняется

$$\tilde{l}^{k_1}_i \cdot l^i_{k_2} = \delta^{k_1}_{k_2} . \quad (13)$$

Умножим ряд Тейлора (3) на эту матрицу. Получим

$$\begin{aligned} \tilde{l}^k_i \left(y^i(x^k+dx^k) - y^i(x^k) \right) = dx^k + \\ + \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2} + \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} + \\ + \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3k_4}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}dx^{k_4} + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Назовем это разложение *касательным*, исходя из того, что в первом приближении оно представлено дифференциалом dx^k.

1. *Объект связности*

Введем обозначение

$$\Gamma^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2} . \quad (15)$$

Эти коэффициенты назовем *объектом связности или потенциалом калибровочного поля в касательном пространстве X*. Объект связности можно записать также в следующем виде

$$\Gamma^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1|k_2} = \tilde{l}^k_i \frac{Dl^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}} .$$

Используя (4), запишем

$$\Gamma^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1,k_2} + \gamma^k_{k_1k_2} , \quad (16)$$

где введено обозначение

$$\gamma^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_i y^i_{k_1k_2} .$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* потенциала или объекта связности в касательном пространстве X.

2. *Объект кривизны*

Введем обозначение

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3} . \quad (17)$$

Эти коэффициенты назовем *объектом кривизны или объектом калибровочного поля в касательном пространстве X*. Объект кривизны можно записать также в следующем виде

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2|k_3} = \tilde{l}^k_i \frac{Dl^i_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} .$$

Используя (5) запишем

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2,k_3} + r^k_{k_1k_2k_3} , \quad (18)$$

где введено обозначение

$$r^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_i y^i_{k_1k_2k_3} .$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* объекта кривизны в касательном пространстве X.

Далее выразим объект кривизны через объекты связности в касательном пространстве. Для этого предварительно выведем необходимое нам соотношение, которое получим, действуя оператором дифференцирования X_{k_3} на соотношение (13). Получим

$$\tilde{l}^{k_1}_{i|k_3} \cdot l^i_{k_2} + \tilde{l}^{k_1}_i \cdot l^i_{k_2|k_3} = 0 .$$

Отсюда

$$\tilde{l}^{k_1}_{i|k_3} \cdot l^i_{k_2} = -\Gamma^{k_1}_{k_2k_3} . \quad (19)$$

Теперь учтем, что

$$\begin{aligned} R^k_{k_1k_2k_3} &= \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2|k_3} = (\tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2})_{,k_3} - \tilde{l}^k_{i|k_3}\, l^i_{k_1k_2} \\ &= (\tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2})_{|k_3} - (\tilde{l}^k_{i|k_3}\, l^{i_1}_{k_4}) \cdot (\tilde{l}^{k_4}_i\, l^i_{k_1k_2}) . \end{aligned}$$

И далее, используя соотношения (15) и (19), получим искомое выражение объекта кривизны через объекты связности

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \Gamma^k_{k_1k_2,k_3} + \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} . \quad (20)$$

---

[5] Из $D^2y^i = Dl^i_{k_1}dx^{k_1}$ или $D(l^i_{k_1}dx^{k_1}) = Dl^i_{k_1}dx^{k_1}$ следует $Ddx^{k_1} = ddx^{k_1}$ и $ddx^{k_1} = 0$, так как координаты x^k являются независимыми. Сравните это примечание с примечанием на стр. 12.

Здесь

$$\Gamma^k_{k_1k_2,k_3} = \Gamma^k_{k_1k_2|k_3} - \gamma^k_{k_1k_2k_3}\,.$$

Или в другой записи

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \frac{\partial \Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2}\,,$$

Аналогично определяется *второй объект кривизны* в касательном пространстве X

$$R^k_{k_1k_2k_3k_4} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3k_4}$$

и в общем случае n-ый объект кривизны в касательном пространстве X

$$R^k_{k_1k_2\ldots k_{n+2}} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2\ldots k_{n+2}}$$

С использованием коэффициентов связности и объекта кривизны ряд Тейлора в касательном пространстве приобретает вид

$$\tilde{l}^k_i\left(y^i(x^k+dx^k) - y^i(x^k)\right) = dx^k + \Gamma^k_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2} + R^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} + R^k_{k_1k_2k_3k_4}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}dx^{k_4} + \ldots \tag{21}$$

3. Собственное разложение

В разложении (3) перейдем от дифференциалов dx к дифференциалам Dy. Для этого запишем указанное разложение в следующем виде

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + l^i_k dx^k &+ \\ + \left(l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\right)\cdot\left(l^{i_1}_{k_3}dx^{k_3}\,l^{i_2}_{k_4}dx^{k_4}\right) &+ \\ + \left(l^i_{k_1k_2k_3}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\right)\cdot\left(l^{i_1}_{k_4}dx^{k_4}\,l^{i_2}_{k_5}dx^{k_5}\,l^{i_3}_{k_6}dx^{k_6}\right) &+ \ldots \end{aligned}$$

Используя (7), перепишем разложение в следующем виде

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + Dy^i + \left(l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\right)\cdot Dy^{i_1}Dy^{i_2} \\ + \left(l^i_{k_1k_2k_3}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\right)\cdot Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \ldots \end{aligned} \tag{22}$$

Назовем это разложение *собственным*, исходя из того, что в первом приближении оно представлено дифференциалом Dy^i.

1. *Объект связности*

Введем обозначение

$$\Gamma^i_{i_1i_2} = l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,. \tag{23}$$

Эти коэффициенты назовем *объектом связности или потенциалом калибровочного поля в собственном пространстве* Y. Объект связности можно записать также в следующем виде

$$\Gamma^i_{i_1i_2} = l^i_{k_1|k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} = \frac{Dl^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,.$$

Используя (4) запишем

$$\Gamma^i_{i_1i_2} = l^i_{k_1,k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} + \gamma^i_{i_1i_2}\,, \tag{24}$$

где введено обозначение

$$\gamma^i_{i_1i_2} = y^i_{k_1,k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* потенциала или объекта связности в собственном пространстве Y.

2. *Объект кривизны*

Введем обозначение

$$R^i_{i_1i_2i_3} = l^i_{k_1k_2k_3}\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\,. \tag{25}$$

Эти коэффициенты назовем *объектом кривизны или объектом калибровочного поля в собственном пространстве* Y. Объект кривизны можно записать также в следующем виде

$$R^i_{i_1i_2i_3} = l^i_{k_1k_2|k_3}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} = \frac{Dl^i_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}}\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\,.$$

Используя (5) запишем

$$R^i_{i_1i_2i_3} = l^i_{k_1k_2|k_3}\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} = l^i_{k_1k_2,k_3}\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} + r^i_{i_1i_2i_3}\,, \tag{26}$$

где введено обозначение

$$r^i_{i_1i_2i_3} = y^i_{k_1k_2k_3}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* объекта кривизны в собственном пространстве Y.

Далее выразим объект кривизны через объекты связности в собственном пространстве. Для этого предварительно выведем необходимое нам соотношение. Сначала заметим, что обратная матрица $\tilde{l}^{k_1}_{i_1}$ помимо соотношений (13) удовлетворяет соотношению

$$l^i_{k_1}\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_1} = \delta^i_{i_1}\,. \tag{27}$$

Затем подействуем оператором дифференцирования X_{k_2} на это соотношение. Получим

$$l^i_{k_1|k_2}\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_1} + l^i_{k_1}\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_1|k_2} = 0\,.$$

Умножим это соотношение на $\tilde{l}^{k_2}_{i_2}$. Получим

$$l^i_{k_1|k_2}\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} + l^i_{k_1}\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_1|k_2}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} = 0\,.$$

Отсюда

$$l^i_{k_1}\cdot \tilde l^{k_1}_{i_1|k_2}\,\tilde l^{k_2}_{i_2} = -\Gamma^i_{i_1 i_2}\,. \qquad (28)$$

Теперь учтем, что

$$\begin{aligned}R^i_{i_1 i_2 i_3} &= l^i_{k_1 k_2|k_3}\,\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_2}\,\tilde l^{k_3}_{i_3} = (l^i_{k_1 k_2}\,\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_2})_{|k_3}\,\tilde l^{k_3}_{i_3} - \\ &\quad - l^i_{k_1 k_2}\,\tilde l^{k_1}_{i_1|k_3}\,\tilde l^{k_2}_{i_2}\,\tilde l^{k_3}_{i_3} - l^i_{k_1 k_2}\,\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_2|k_3}\,\tilde l^{k_3}_{i_3} \\ &= (l^i_{k_1 k_2}\,\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_2})_{|k_3}\,\tilde l^{k_3}_{i_3} - (l^i_{k_1 k_2}\,\tilde l^{k_1}_{i_4}\,\tilde l^{k_2}_{i_2})(l^{i_4}_{k_4}\,\tilde l^{k_4}_{i_1|k_3}\,\tilde l^{k_3}_{i_3}) - \\ &\quad - (l^i_{k_1 k_2}\,\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_4})(l^{i_4}_{k_4}\,\tilde l^{k_4}_{i_2|k_3}\,\tilde l^{k_3}_{i_3})\,.\end{aligned}$$

И далее, используя соотношения (23) и (28), получим искомое выражение объекта кривизны через объекты связности

$$R^i_{i_1 i_2 i_3} = \Gamma^i_{i_1 i_2, i_3} + \Gamma^i_{i_4 i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1 i_3} + \Gamma^i_{i_1 i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2 i_3}\,.$$

Здесь

$$\Gamma^i_{i_1 i_2, i_3} = \Gamma^i_{i_1 i_2|k_3}\tilde l^{k_3}_{i_3} = \frac{D\Gamma^i_{i_1 i_2}}{\partial x^{k_3}}\frac{\partial x^{k_3}}{Dy^{i_3}}\,.$$

Или в другой записи

$$R^i_{i_1 i_2 i_3} = \frac{D\Gamma^i_{i_1 i_2}}{Dy^{i_3}} + \Gamma^i_{i_4 i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1 i_3} + \Gamma^i_{i_1 i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2 i_3}\,. \qquad (29)$$

Аналогично определяется *второй объект кривизны* в собственном пространстве Y

$$R^i_{i_1 i_2 i_3 i_4} = l^i_{k_1 k_2 k_3 k_4}\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_2}\,\tilde l^{k_3}_{i_3}\,\tilde l^{k_4}_{i_4}$$

и в общем случае n-ый объект кривизны в собственном пространстве Y

$$R^i_{i_1 i_2 \dots i_{n+2}} = l^i_{k_1 k_2 \dots k_{n+2}}\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_2}\dots\tilde l^{k_{n+2}}_{i_{n+2}}$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в собственном пространстве приобретает вид

$$\begin{aligned}&y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + Dy^i + \Gamma^i_{i_1 i_2}Dy^{i_1}Dy^{i_2} + \\ &+ R^i_{i_1 i_2 i_3}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + R^i_{i_1 i_2 i_3 i_4}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3}Dy^{i_4} + \\ &+ \dots \qquad (30)\end{aligned}$$

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

В ряде случаев мы будем вводить переобозначение

$$\omega^i \equiv Dy^i\,.$$

Необходимость в таком переобозначении вызвана тем, что в дифференциальной геометрии дифференциальные формы, к которым относится Dy^i, принято обозначать буквой ω.

Для этого обозначения ряд Тейлора (8) запишется так

$$y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + \omega^i + D\omega^i + D^2\omega^i + \dots \qquad (31)$$

Обратимся теперь к ряду Тейлора в виде (6). Для удобства перепишем его еще раз

$$\begin{aligned}y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + l^i_k dx^k + (l^i_{k_1,k_2} + y^i_{k_1 k_2})\,dx^{k_1}dx^{k_2} \\ &+ (l^i_{k_1,k_2,k_3} + y^i_{k_1 k_2,k_3})\,dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} + \dots\end{aligned}$$

Преобразуем третье слагаемое этого ряда Тейлора

$$\begin{aligned}\left(l^i_{k_1,k_2} + y^i_{k_1 k_2}\right)dx^{k_1}dx^{k_2} &= \left(dl^i_{k_1} + y^i_{k_1 k_2}dx^{k_2}\right)dx^{k_1} = \\ &= \left(dl^i_{k_1}\tilde l^{k_1}_{i_1} + y^i_{k_1 k_2}\,\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_2}\,l^{i_2}_{k_3}dx^{k_3}\right)\cdot l^{i_1}_{k_4}dx^{k_4}\,.\end{aligned}$$

Далее введем следующие обозначения

$$\omega^i_{i_1} = dl^i_{k_1}\,\tilde l^{k_1}_{i_1}\,.$$

Кроме того учтем, что

$$y^i_{k_1 k_2}\,\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_2} = \gamma^i_{i_1 i_2}\,,$$

и

$$l^{i_2}_{k_3}dx^{k_3} = \omega^{i_2}\,,\quad l^{i_1}_{k_4}dx^{k_4} = \omega^{i_1}\,.$$

В результате третье слагаемое ряда Тейлора приобретает вид

$$(\omega^i_{i_1} + \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2})\,\omega^{i_1}\,.$$

Вместе с тем в (31) это слагаемое имеет вид $D\omega^i$. Таким образом, получаем уравнение

$$D\omega^i = \omega^i_{i_1}\omega^{i_1} + \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_1}\omega^{i_2}\,. \qquad (32)$$

Это уравнение представляет частный случай *первого уравнения структуры* искривленного пространства.

Иногда вместо дифференциальных форм $\omega^i_{i_1}$ удобно ввести дифференциальные формы

$${}'\omega^i_{i_1} = \omega^i_{i_1} + \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}\,. \qquad (33)$$

Из (24) следует, что

$${}'\omega^i_{i_1} = \Gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}\,.$$

Используя дифференциальные формы ${}'\omega^i_{i_1}$, получим уравнение структуры в следующем виде

$$D\omega^i = {}'\omega^i_{i_1}\omega^{i_1}\,. \qquad (34)$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде

$$D^2y^i - \Gamma^i_{i_1 i_2}Dy^{i_1}Dy^{i_2} = 0\,. \qquad (35)$$

В частном случае это уравнение представляет собой уравнение прямой пространства X (геодезической системы отсчета), записанное по отношению к координатам искривленного пространства Y.

Аналогично предыдущему преобразуем теперь четвертое слагаемое ряда Тейлора

$$\begin{aligned}&(l^i_{k_1 k_2,k_3} + y^i_{k_1 k_2 k_3})\,dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} = \\ &= (dl^i_{k_1 k_2} + y^i_{k_1 k_2 k_3}dx^{k_3})\,dx^{k_1}dx^{k_2} = \\ &= (dl^i_{k_1 k_2}\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_2} + y^i_{k_1 k_2 k_3}\,\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_2}\,\tilde l^{k_3}_{i_3}\,l^{i_3}_{k_4}dx^{k_4})\cdot l^{i_1}_{k_5}dx^{k_5}\,l^{i_2}_{k_6}dx^{k_6}\end{aligned}$$

Далее введем следующие обозначения

$$\omega^i_{i_1 i_2} = dl^i_{k_1 k_2} \tilde{l}^{k_1}_{i_1} \tilde{l}^{k_2}_{i_2} .$$

Кроме того, учтем что,

$$y^i_{k_1 k_2 k_3} \tilde{l}^{k_1}_{i_1} \tilde{l}^{k_2}_{i_2} \tilde{l}^{k_3}_{i_3} = r^i_{i_1 i_2 i_3} ,$$

и

$$l^{i_3}_{k_4} dx^{k_4} = \omega^{i_3} , \quad l^{i_1}_{k_5} dx^{k_5} = \omega^{i_1} , \quad l^{i_2}_{k_6} dx^{k_6} = \omega^{i_2} .$$

В результате четвертое слагаемое ряда Тейлора приобретает вид

$$(\omega^i_{i_1 i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_3}) \, \omega^{i_1} \omega^{i_2} .$$

Вместе с тем в (31) это слагаемое имело вид $D^2 \omega^i$. Таким образом, получаем уравнение

$$D^2 \omega^i = (\omega^i_{i_1 i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_3}) \, \omega^{i_1} \omega^{i_2} . \tag{36}$$

Это уравнение представляет частный случай *второго уравнения структуры* искривленного пространства.

Используя первое уравнение структуры, его можно записать иначе

$$\begin{aligned} D\omega^i_{i_1} \omega^{i_1} + \omega^i_{i_1} D\omega^{i_1} + D\gamma^i_{i_1 i_2} \omega^{i_1} \omega^{i_2} + \\ + \gamma^i_{i_1 i_2} D\omega^{i_1} \omega^{i_2} + \gamma^i_{i_1 i_2} \omega^{i_1} D\omega^{i_2} = \\ = (\omega^i_{i_1 i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_3}) \, \omega^{i_1} \omega^{i_2} . \end{aligned}$$

Используя первое уравнение структуры еще раз, получим

$$\begin{aligned} D\omega^i_{i_1} \omega^{i_1} + \omega^i_{i_3} (\omega^{i_3}_{i_1} \omega^{i_1} + \gamma^{i_3}_{i_1 i_2} \omega^{i_1} \omega^{i_2}) + \\ + D\gamma^i_{i_1 i_2} \omega^{i_1} \omega^{i_2} + \gamma^i_{i_4 i_2} (\omega^{i_4}_{i_1} \omega^{i_1} + \gamma^{i_4}_{i_1 i_3} \omega^{i_1} \omega^{i_3}) \omega^{i_2} + \\ + \gamma^i_{i_1 i_4} \omega^{i_1} (\omega^{i_4}_{i_3} \omega^{i_3} + \gamma^{i_4}_{i_3 i_2} \omega^{i_3} \omega^{i_2}) = \\ = (\omega^i_{i_1 i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_3}) \omega^{i_1} \omega^{i_2} . \end{aligned}$$

И в результате

$$\begin{aligned} D\omega^i_{i_1} + \omega^i_{i_3} \omega^{i_3}_{i_1} + \omega^i_{i_3} \gamma^{i_3}_{i_1 i_2} \omega^{i_2} + \\ + D\gamma^i_{i_1 i_2} \omega^{i_2} + \gamma^i_{i_3 i_2} \omega^{i_3}_{i_1} \omega^{i_2} + \gamma^i_{i_3 i_2} \gamma^{i_3}_{i_1 i_4} \omega^{i_4} \omega^{i_2} + \\ + \gamma^i_{i_1 i_3} \omega^{i_3}_{i_2} \omega^{i_2} + \gamma^i_{i_1 i_3} \gamma^{i_3}_{i_4 i_2} \omega^{i_4} \omega^{i_2} = \\ = \omega^i_{i_1 i_2} \omega^{i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_2} \omega^{i_3} . \end{aligned} \tag{37}$$

Иногда вместо дифференциальных форм $\omega^i_{i_1 i_2}$ удобно ввести дифференциальные формы

$${}'\omega^i_{i_1 i_2} = \omega^i_{i_1 i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_3} .$$

Используя их, получим уравнение структуры в следующем виде

$$D^2 \omega^i = {}'\omega^i_{i_1 i_2} \omega^{i_1} \omega^{i_2} . \tag{38}$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, используя (32),

$$D^2 \omega^i = D' \omega^i_{i_1} \omega^{i_1} + {}'\omega^i_{i_1} D\omega^{i_1} = D\,'\omega^i_{i_1} \omega^{i_1} + {}'\omega^i_{i_4} \, {}'\omega^{i_4}_{i_1} \omega^{i_1} .$$

Используя это соотношение, запишем второе уравнение структуры в следующем виде

$$D\,'\omega^i_{i_1} + {}'\omega^i_{i_2} \, {}'\omega^{i_2}_{i_1} = {}'\omega^i_{i_1 i_2} \omega^{i_2} . \tag{39}$$

Покажем, что формы ${}'\omega^i_{i_1 i_2}$ связаны с объектом кривизны $R^i_{i_1 i_2 i_3}$ следующим образом

$${}'\omega^i_{i_1 i_2} = R^i_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_3} . \tag{40}$$

Для этого найдем выражение объекта кривизны через коэффициенты связности из уравнения структуры (39).

$$D(\Gamma^i_{i_1 i_2} \omega^{i_2}) + \Gamma^i_{i_4 i_2} \omega^{i_2} \Gamma^{i_4}_{i_1 i_3} \omega^{i_3} = R^i_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_2} \omega^{i_3} .$$

$$D\Gamma^i_{i_1 i_2} \omega^{i_2} + \Gamma^i_{i_1 i_2} D\omega^{i_2} + \Gamma^i_{i_4 i_2} \omega^{i_2} \Gamma^{i_4}_{i_1 i_3} \omega^{i_3} = R^i_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_2} \omega^{i_3} .$$

Введем оператор частного дифференцирования

$$\frac{D}{Dy^i}$$

из условия

$$D = \frac{D}{Dy^i} \cdot Dy^i .$$

С учетом этого оператора и первого уравнения структуры

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma^i_{i_1 i_2}}{Dy^{i_3}} \omega^{i_2} \omega^{i_3} + \Gamma^i_{i_1 i_4} \Gamma^{i_4}_{i_2 i_3} \omega^{i_2} \omega^{i_3} + \Gamma^i_{i_4 i_2} \omega^{i_2} \Gamma^{i_4}_{i_1 i_3} \omega^{i_3} \\ = R^i_{i_1 i_2 i_3} \omega^{i_2} \omega^{i_3} . \end{aligned}$$

Отсюда следует выражение (29) для объекта кривизны, полученное ранее

$$R^i_{i_1 i_2 i_3} = \frac{D\Gamma^i_{i_1 i_2}}{Dy^{i_3}} + \Gamma^i_{i_4 i_2} \Gamma^{i_4}_{i_1 i_3} + \Gamma^i_{i_1 i_4} \Gamma^{i_4}_{i_2 i_3} .$$

Это обстоятельство доказывает введенное выражение (40) для форм ${}'\omega^i_{i_1 i_2}$.

Уравнение структуры (38) можно переписать в следующем виде

$$D^3 y^i - R^i_{i_1 i_2 i_3} Dy^{i_1} Dy^{i_2} Dy^{i_3} = 0 . \tag{41}$$

Другой частный вид уравнений структуры получим, рассматривая дифференцирование форм по независимым переменным. Сначала рассмотрим дифференциал[6] от $\omega^i = l^i_k dx^k$

$$d\omega^i = dl^i_k dx^k .$$

[6] Здесь учтено, что для независимой переменной x^k второй дифференциал $d^2 x^k = 0$.

Или

$$d\omega^i = (dl^i_{k_1}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1})(l^{i_1}_k\, dx^k)\,.$$

Отсюда первое уравнение структуры в рассматриваемом случае принимает вид

$$d\omega^i = \omega^i_{i_1}\omega^{i_1}\,. \tag{42}$$

Дифференцируя это уравнение по независимой переменной, получим

$$d^2\omega^i = d\omega^i_{i_1}\omega^{i_1} + \omega^i_{i_1} d\omega^{i_1}\,.$$

Используя уравнение (42), получим второе уравнение структуры для рассматриваемого случая

$$d^2\omega^i = d\omega^i_{i_1}\omega^{i_1} + \omega^i_{i_2}\omega^{i_2}_{i_1}\omega^{i_1}\,. \tag{43}$$

И еще один вид уравнений структуры. Из уравнения (33) выразим

$$\omega^i_{i_1} = {'\omega}^i_{i_1} - \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}\,.$$

Подставляя это выражение в (42), получим первое уравнение структуры

$$d\omega^i = {'\omega}^i_{i_1}\omega^{i_1} - \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}\omega^{i_1}\,. \tag{44}$$

Подставляя выражение для $\omega^i_{i_1}$ в (43), получим второе уравнение структуры

$$\begin{aligned} d^2\omega^i = {} & d({'\omega}^i_{i_1} - \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2})\omega^{i_1} + \\ & + ({'\omega}^i_{i_2} - \gamma^i_{i_2 i_3}\omega^{i_3})({'\omega}^{i_2}_{i_1} - \gamma^{i_2}_{i_1 i_3}\omega^{i_3})\omega^{i_1}\,. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} d^2\omega^i = {} & \big(d{'\omega}^i_{i_1} + {'\omega}^i_{i_3}\, {'\omega}^{i_3}_{i_1} - \\ & - {'\omega}^i_{i_3}\gamma^{i_3}_{i_1 i_2}\omega^{i_2} - d\gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2} - \gamma^i_{i_3 i_2}\, {'\omega}^{i_3}_{i_1}\omega^{i_2} + \\ & + \gamma^i_{i_4 i_2}\gamma^{i_4}_{i_1 i_3}\omega^{i_2}\omega^{i_3} - \gamma^i_{i_1 i_3}\, {'\omega}^{i_3}_{i_2}\omega^{i_2} + \\ & + \gamma^i_{i_1 i_4}\gamma^{i_4}_{i_2 i_3}\omega^{i_2}\omega^{i_3}\big)\ \omega^{i_1}\,. \end{aligned} \tag{45}$$

В заключении этого раздела заметим, что аналогичным образом могут быть получены уравнения структуры для дифференциальных форм ${'\omega}^i_{i_1 i_2}$ и форм следующих порядков, что соответствует методу продолжений Г.Ф.Лаптева.

IV. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Так как координаты y^i и x^k пространств соответственно Y и X заданы на одном точечном многообразии, то, следовательно, определена функция

$$x^k(y^i)\,,$$

являющаяся обратной по отношению к функции $y^i(x^k)$.

Разложим эту функцию вблизи точки с координатами y^i в ряд Тейлора, который запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} & x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) + (x^k_{,i} + x^k_i)Dy^i + \\ & + (x^k_{,i_1,i_2} + x^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2})Dy^{i_1}Dy^{i_2} + \\ & + (x^k_{,i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2 i_3})Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \\ & + \ldots \end{aligned} \tag{46}$$

Здесь производные

$$x^k_{,i} = \frac{Dx^k}{Dy^i}\,, \quad x^k_{,i_1,i_2} = \frac{D^2x^k}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}}\,,$$

$$x^k_{,i_1,i_2,i_3} = \frac{D^3x^k}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}Dy^{i_1}}\,, \quad \ldots$$

определяются различием систем координат пространств Y и X. Коэффициенты

$$x^k_i\,, \quad x^k_{i_1 i_2}\,, \quad x^k_{i_1 i_2 i_3}\,, \quad \ldots$$

определяют искривление пространства X по отношению к пространству Y. Как и прежде через D обозначен дифференциал в пространстве Y. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{l}^k_i &= x^k_{,i} + x^k_i\,, \\ \tilde{l}^k_{i_1 i_2} &= x^k_{,i_1,i_2} + x^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2}\,, \\ \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} &= x^k_{,i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2 i_3}\,, \\ & \ldots \end{aligned} \tag{47}$$

с учетом которых ряд Тейлора запишется

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) = {} & x^k(y^i) + \tilde{l}^k_i Dy^i + \tilde{l}^k_{i_1 i_2}Dy^{i_1}Dy^{i_2} + \\ & + \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \\ & + \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3 i_4}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3}Dy^{i_4} + \ldots \end{aligned} \tag{48}$$

Если учесть, что

$$\tilde{l}^k_{i_1 i_2} = \tilde{l}^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2}\,, \tag{49}$$

$$\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} = \tilde{l}^k_{i_1 i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2 i_3}\,, \tag{50}$$

то имеем

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) = {} & x^k(y^i) + \tilde{l}^k_i Dy^i + \\ & + (\tilde{l}^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2})\, Dy^{i_1}Dy^{i_2} + \\ & + (\tilde{l}^k_{i_1 i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2 i_3})\, Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \ldots \end{aligned} \tag{51}$$

1. Дифференциал d и оператор частного дифференцирования Y

Из соотношения (7) следует

$$dx^k = \tilde{l}^k_i Dy^i\,.$$

Здесь символ D означает дифференциал в пространстве Y.

$$dx^k = \tilde{l}^k_i Dy^i = x^k_{,i}Dy^i + x^k_i Dy^i = D^k + x^k_i Dy^i\,.$$

Таким образом, дифференциал в пространстве X складывается из дифференциала в пространстве Y и добавки, представляющей собой неполный дифференциал, которую удобно обозначить

$$\delta x^k = x^k_i Dy^i\,.$$

Таким образом,

$$dx^k = Dx^k + \delta x^k\,.$$

Используя дифференциал d в пространстве X, запишем ряд Тейлора в следующем виде[7]

$$x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) + dx^k + d^2x^k + d^3x^k + \dots \qquad (52)$$

Введем оператор частного дифференцирования

$$Y_i \equiv \frac{\partial}{Dy^i}\,.$$

Используя его, получим

$$\tilde{l}^k_i = \frac{\partial x^k}{Dy^i} = Y_i(x^k)\,,\quad \tilde{l}^k_{i_1 i_2} = \frac{\partial^2 x^k}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}} = Y_{i_2}Y_{i_1}(x^k)\,,$$
$$\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} = \frac{\partial^3 x^k}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}Dy^{i_1}} = Y_{i_3}Y_{i_2}Y_{i_1}(x^k)\,,\quad \dots$$

А ряд Тейлора запишем так

$$x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) + \frac{\partial x^k}{Dy^i}Dy^i + \\ + \frac{\partial^2 x^k}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}}Dy^{i_1}Dy^{i_2} + \\ + \frac{\partial^3 x^k}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}Dy^{i_1}}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \dots$$

или

$$x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) + Y_i(x^k)Dy^i + \\ Y_{i_2}Y_{i_1}(x^k)Dy^{i_1}Dy^{i_2} + Y_{i_3}Y_{i_2}Y_{i_1}(x^k)Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \dots$$

Введем дифференциал в пространстве X от коэффициентов $\tilde{l}^k_i$ в соответствии с определением

$$d\tilde{l}^k_{i_1} = \tilde{l}^k_{i_1,i_2}Dy^{i_2} + x^k_{i_1 i_2}Dy^{i_2} = D\tilde{l}^k_{i_1} + x^k_{i_1 i_2}Dy^{i_2}\,.$$

Таким образом, дифференциал в пространстве X складывается из дифференциала в пространстве Y и добавки, представляющей собой неполный дифференциал, которую удобно обозначить

$$\delta\tilde{l}^k_{i_1} = x^k_{i_1 i_2}Dy^{i_2}\,.$$

[7] Необходимо иметь в виду, что, так как в рассматриваемом случае координаты y^i являются независимыми, то имеет место

$$D^2 y^i = 0\,.$$

Вместе с тем

$$d^2 x^k \neq 0\,.$$

Таким образом,

$$d\tilde{l}^k_{i_1} = D\tilde{l}^k_{i_1} + \delta\tilde{l}^k_{i_1}\,.$$

Аналогично можно записать для коэффициентов $\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p}$

$$d\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p} = D\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p} + \delta\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p}\,,$$

где

$$\delta\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p} = x^k_{i_1\dots i_p i_{p+1}}Dy^{i_{p+1}}\,.$$

Используя введенные дифференциалы, запишем ряд Тейлора в следующем виде

$$x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) + dx^k + d\tilde{l}^k_{i_1}Dy^{i_1} + \\ + d\tilde{l}^k_{i_1 i_2}Dy^{i_1}Dy^{i_2} + d\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \dots \qquad (53)$$

Частную производную в пространстве Y будем обозначать помощью индекса, отделенного запятой:

$$\frac{D\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p}}{Dy^{i_{p+1}}} = \tilde{l}^k_{i_1\dots i_p,i_{p+1}}\,,$$

а дифференцирование Y будем обозначать с помощью индекса, отделенного чертой

$$\frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p}}{Dy^{i_{p+1}}} = \tilde{l}^k_{i_1\dots i_p|i_{p+1}}\,.$$

2. Касательное разложение

Умножим ряд Тейлора (48) на матрицу l^i_k. Получим

$$l^i_k(x^k(y^i + Dy^i) - x^k(y^i)) = Dy^i + l^i_k\tilde{l}^k_{i_1 i_2}Dy^{i_1}Dy^{i_2} + \\ + l^i_k\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + l^i_k\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3 i_4}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3}Dy^{i_4} \\ + \dots \qquad (54)$$

Назовем это разложение *касательным*, исходя из того, что в первом приближении оно представлено дифференциалом Dy^i.

1. Объект связности

Введем обозначение

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2} = l^i_k\tilde{l}^k_{i_1 i_2}\,. \qquad (55)$$

Эти коэффициенты назовем *объектом связности или потенциалом калибровочного поля в касательном пространстве Y*. Объект связности можно записать также в следующем виде

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2} = l^i_k\tilde{l}^k_{i_1|i_2} = l^i_k\frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}\,.$$

Используя (49) запишем

$$\tilde{\Gamma}^{i}_{i_1 i_2} = l^i_k \tilde{l}^k_{i_1, i_2} + \tilde{\gamma}^i_{i_1 i_2} = l^i_k \frac{D\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}} + \tilde{\gamma}^i_{i_1 i_2}\,, \qquad (56)$$

где введено обозначение

$$\tilde{\gamma}^i_{i_1 i_2} = l^i_k x^k_{i_1 i_2}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* потенциала или объекта связности в касательном пространстве Y.

2. *Объект кривизны*

Введем обозначение

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} = l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3}\,. \qquad (57)$$

Эти коэффициенты назовем *объектом кривизны или объектом калибровочного поля в касательном пространстве*Y. Объект кривизны можно записать также в следующем виде

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} = l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2 | i_3} = l^i_k \frac{\partial \tilde{l}^k_{i_1 i_2}}{Dy^{i_3}}\,.$$

Используя (50) запишем

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} = l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2, i_3} + \tilde{r}^i_{i_1 i_2 i_3} = l^i_k \frac{D\tilde{l}^k_{i_1 i_2}}{Dy^{i_3}} + \tilde{r}^i_{i_1 i_2 i_3}\,, \qquad (58)$$

где введено обозначение

$$\tilde{r}^i_{i_1 i_2 i_3} = l^i_k x^k_{i_1 i_2 i_3}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* объекта кривизны в касательном пространстве.

Далее выразим объект кривизны через объекты связности в касательном пространстве. Для этого предварительно выведем необходимое нам соотношение, которое получим, действуя оператором дифференцирования Y_{i_3} на соотношение (27). Получим

$$l^{i_1}_{k|i_3} \cdot \tilde{l}^k_{i_2} + l^{i_1}_k \cdot \tilde{l}^k_{i_2|i_3} = 0\,.$$

Отсюда

$$l^{i_1}_{k|i_3} \cdot \tilde{l}^k_{i_2} = -\tilde{\Gamma}^{i_1}_{i_2 i_3}\,. \qquad (59)$$

Теперь учтем, что

$$\begin{aligned}\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} &= l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2 | i_3} = (l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2})_{,i_3} - l^i_{k|i_3} \tilde{l}^k_{i_1 i_2} = \\ &= (l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2})_{|i_3} - (l^i_{k|i_3}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_4}) \cdot (l^{i_4}_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2})\,.\end{aligned}$$

И далее, используя соотношения (55) и (59), получим искомое выражение объекта кривизны через объекты связности

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} = \tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2, i_3} + \tilde{\Gamma}^i_{i_4 i_3} \tilde{\Gamma}^{i_4}_{i_1 i_2}\,. \qquad (60)$$

Здесь

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2, i_3} = \tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2 | i_3} - \tilde{\gamma}^i_{i_1 i_2 i_3}\,.$$

Или в другой записи

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} = \frac{D\tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2}}{Dy^{i_3}} + \tilde{\Gamma}^i_{i_4 i_3} \tilde{\Gamma}^{i_4}_{i_1 i_2}\,.$$

Аналогично определяется *второй объект кривизны* в касательном пространстве Y

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3 i_4} = l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3 i_4}$$

и в общем случае n-ый объект кривизны в касательном пространстве Y

$$R^i_{i_1 i_2 \ldots i_{n+2}} = l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2 \ldots i_{n+2}}\,.$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в касательном пространстве приобретает вид

$$\begin{aligned}&l^i_k \left(x^k(y^i + Dy^i) - x^k(y^i)\right) = Dy^i + \tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2} Dy^{i_1} Dy^{i_2} + \\ &+ \tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} Dy^{i_1} Dy^{i_2} Dy^{i_3} + \tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3 i_4} Dy^{i_1} Dy^{i_2} Dy^{i_3} Dy^{i_4} + \\ &+ \ldots \qquad (61)\end{aligned}$$

3. Собственное разложение

В разложении (48) перейдем от дифференциалов Dy к дифференциалам dx, учитывая, что

$$Dy^i = l^i_k dx^k\,,$$

получим

$$\begin{aligned}x^k(y^i + Dy^i) &= x^k(y^i) + dx^k + (\tilde{l}^k_{i_1 i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2})\, dx^{k_1} dx^{k_2} + \\ &+ (\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3})\, dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} + \\ &+ (\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3 i_4}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\, l^{i_4}_{k_4})\, dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} dx^{k_4} + \ldots \qquad (62)\end{aligned}$$

Назовем это разложение *собственным*, исходя из того, что в первом приближении оно представлено дифференциалом dx^k.

1. *Объект связности*

Введем обозначение

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1 k_2} = \tilde{l}^k_{i_1 i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\,. \qquad (63)$$

Эти коэффициенты назовем *объектом связности или потенциалом калибровочного поля в собственном пространстве* X. Объект связности можно записать также в следующем виде

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1 k_2} = \tilde{l}^k_{i_1 | i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} = \frac{\partial \tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\,.$$

Используя (49) запишем

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_{i_1,i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} = \frac{D\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2}\,, \quad (64)$$

где введено обозначение

$$\tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} = x^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* потенциала или объекта связности в собственном пространстве X.

2. *Объект кривизны*

Введем обозначение

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\,. \quad (65)$$

Эти коэффициенты назовем *объектом кривизны или объектом калибровочного поля в собственном пространстве* X. Объект кривизны можно записать также в следующем виде

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_{i_1i_2|i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} = \frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\,.$$

Используя (50), запишем

$$\begin{aligned}\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} &= \tilde{l}^k_{i_1i_2|i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} = \\ &= \frac{D\tilde{l}^k_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3}\,, \end{aligned} \quad (66)$$

где введено обозначение

$$\tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} = x^k_{i_1i_2i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* объекта кривизны в собственном пространстве X.

Далее выразим объект кривизны через объекты связности в собственном пространстве. Для этого предварительно выведем необходимое нам соотношение. Для этого подействуем оператором дифференцирования Y_{i_2} на соотношение (13). Получим

$$\tilde{l}^k_{i_1|i_2}\cdot l^{i_1}_{k_1} + \tilde{l}^k_{i_1}\cdot l^{i_1}_{k_1|i_2} = 0\,.$$

Умножим это соотношение на $l^{i_2}_{k_2}$. Получим

$$\tilde{l}^k_{i_1|i_2}\cdot l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} + \tilde{l}^k_{i_1}\cdot l^{i_1}_{k_1|i_2}\, l^{i_2}_{k_2} = 0\,.$$

Отсюда

$$\tilde{l}^k_{i_1}\cdot l^{i_1}_{k_1|i_2}\, l^{i_2}_{k_2} = -\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}\,. \quad (67)$$

Теперь учтем, что

$$\begin{aligned}\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} &= \tilde{l}^k_{i_1i_2|i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} = (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2})_{|i_3}\, l^{i_3}_{k_3} - \\ &\quad - \tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1|i_3}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} - \tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2|i_3}\, l^{i_3}_{k_3} = \\ &= (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2})_{|i_3}\, l^{i_3}_{k_3} - (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_4}\, l^{i_2}_{k_2})(\tilde{l}^{k_4}_{i_4}\, l^{i_4}_{k_1|i_3}\, l^{i_3}_{k_3}) - \\ &\quad - (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_4})(l^{k_4}_{i_4}\, l^{i_4}_{k_2|i_3}\, l^{i_3}_{k_3})\,.\end{aligned}$$

И далее, используя соотношения (63) и (67), получим искомое выражение объекта кривизны через объекты связности

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2,k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_2k_3}\,.$$

Здесь

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2,k_3} = \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2|i_3}\, l^{i_3}_{k_3} = \frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}}{Dy^{i_3}}\frac{Dy^{i_3}}{\partial x^{k_3}}\,.$$

Или в другой записи

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_2k_3}\,. \quad (68)$$

Далее будет показано, что с этим объектом кривизны связан общеизвестных тензор кривизны.

Аналогично определяется *второй объект кривизны* в собственном пространстве X

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3k_4} = \tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}i_4 l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\, l^{i_4}_{k_4}$$

и в общем случае n-ый объект кривизны в касательном пространстве Y

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2\ldots k_{n+2}} = \tilde{l}^k_{i_1i_2\ldots i_{n+2}} l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\ldots l^{i_{n+2}}_{k_{n+2}}\,.$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в собственном пространстве приобретает вид

$$x^k(y^i+Dy^i) = x^k(y^i) + dx^k + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2} + \quad (69)$$

$$+ \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} + \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3k_4}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}dx^{k_4} + \\ + \ldots \quad (70)$$

4. Дифференциальные формы

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора в виде (51). Для удобства приведем его еще раз

$$\begin{aligned}x^k(y^i+Dy^i) &= x^k(y^i) + \tilde{l}^k_i Dy^i + (\tilde{l}^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1i_2})Dy^{i_1}Dy^{i_2} \\ &\quad + (\tilde{l}^k_{i_1i_2,i_3} + x^k_{i_1i_2i_3})Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \ldots\end{aligned}$$

Преобразуем третье слагаемое этого ряда

$$\begin{aligned}(\tilde{l}^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1i_2})Dy^{i_1}Dy^{i_2} &= (D\tilde{l}^k_{i_1} + x^k_{i_1i_2}Dy^{i_2})Dy^{i_1} = \\ &= (D\tilde{l}^k_{i_1}\, l^{i_1}_{k_1} + x^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{k_2}_{i_3}dy^{i_3})\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_4}dy^{i_4}\,.\end{aligned}$$

Далее введем следующие обозначения

$$\tilde{\omega}^k_{k_1} = D\tilde{l}^k_{i_1}\, l^{i_1}_{k_1}\,.$$

Кроме того учтем, что

$$x^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} = \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2}\,,$$

и

$$\tilde{l}^{k_2}_{i_3}Dy^{i_3} = dx^{k_2}\,, \quad \tilde{l}^{k_1}_{i_4}Dy^{i_4} = dx^{k_1}\,.$$

В результате третье слагаемое ряда Тейлора приобретает вид

$$(\tilde{\omega}^k_{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_2})\, dx^{k_1}\,.$$

Вместе с тем в (52) это слагаемое имело вид d^2x^k. Таким образом, получаем уравнение

$$d^2x^k = \tilde{\omega}^k_{k_1} dx^{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_2} dx^{k_1}\,. \tag{71}$$

Это уравнение представляет частный случай *первого уравнения структуры*.

Иногда вместо дифференциальных форм $\tilde{\omega}^k_{k_1}$ удобно ввести дифференциальные формы

$$'\tilde{\omega}^k_{k_1} = \tilde{\omega}^k_{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_2}\,.$$

Из (64) следует

$$'\tilde{\omega}^k_{k_1} = \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_2}\,.$$

Используя дифференциальные формы $'\tilde{\omega}^k_{k_1}$, получим первое уравнение структуры в следующем виде

$$d^2x^k = {'\tilde{\omega}}^k_{k_1} dx^{k_1}\,. \tag{72}$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде

$$d^2x^k - \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_1} dx^{k_2} = 0\,. \tag{73}$$

В частном случае это уравнение представляет собой уравнение геодезической пространства Y, записанное по отношению к координатам системы отсчета X.

Аналогично предыдущему рассмотрим теперь четвертое слагаемое ряда Тейлора

$$\begin{aligned}&(\tilde{l}^k_{i_1i_2,i_3} + x^k_{i_1i_2i_3}) Dy^{i_1} Dy^{i_2} Dy^{i_3} =\\ &= (D\tilde{l}^k_{i_1i_2} + x^k_{i_1i_2i_3} Dy^{i_3}) Dy^{i_1} Dy^{i_2} = (D\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} +\\ &\qquad + x^k_{i_1i_2i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} \tilde{l}^{k_3}_{i_4} Dy^{i_4}) \cdot \tilde{l}^{k_1}_{i_5} Dy^{i_5} \tilde{l}^{k_2}_{i_6} Dy^{i_6}\,.\end{aligned}$$

Далее введем следующие обозначения

$$\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} = D\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\,.$$

Кроме того учтем, что

$$\tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} = x^k_{i_1i_2i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\,,$$

и

$$\tilde{l}^{k_3}_{i_4} Dy^{i_4} = dx^{k_3}\,, \quad \tilde{l}^{k_1}_{i_5} Dy^{i_5} = dx^{k_1}\,, \quad \tilde{l}^{k_2}_{i_6} Dy^{i_6} = dx^{k_2}\,.$$

В результате четвертое слагаемое ряда Тейлора приобретает вид

$$(\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_3})\, dx^{k_1} dx^{k_2}\,.$$

Вместе с тем в (52) это слагаемое имело вид d^3x^k. Таким образом, получаем уравнение

$$d^3x = (\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_3})\, dx^{k_1} dx^{k_2}\,. \tag{74}$$

Это уравнение представляет частный случай *второго уравнения структуры*.

Иногда вместо дифференциальных форм $\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}$ удобно ввести дифференциальные формы

$$'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} = \tilde{\omega}^k_{k_1k_2} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_3}\,.$$

Используя их, получим уравнение структуры в следующем виде

$$d^3x^k = {'\tilde{\omega}}^k_{k_1k_2} dx^{k_1} dx^{k_2}\,. \tag{75}$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, используя первое уравнение структуры (72),

$$d^3x^k = d{'\tilde{\omega}}^k_{k_1} dx^{k_1} + {'\tilde{\omega}}^k_{k_1} d^2x^{k_1} = d\,{'\tilde{\omega}}^k_{k_1} dx^{k_1} + {'\tilde{\omega}}^k_{k_4}\,{'\tilde{\omega}}^{k_4}_{k_1} dx^{k_1}$$

Используя это соотношение, запишем второе уравнение структуры в следующем виде

$$d\,{'\tilde{\omega}}^k_{k_1} + {'\tilde{\omega}}^k_{k_2}\,{'\tilde{\omega}}^{k_2}_{k_1} = {'\tilde{\omega}}^k_{k_1k_2} dx^{k_2}\,. \tag{76}$$

Покажем, что дифференциальные формы $'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}$ связаны с объектом кривизны $\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}$ следующим образом

$$'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} = \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_3}\,. \tag{77}$$

Для этого покажем, что из уравнения структуры (76) следует выражение объекта кривизны через коэффициенты связности.

$$d(\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_2}) + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2} dx^{k_2} \tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3} dx^{k_3} = \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_2} dx^{k_3}\,.$$

Или

$$\begin{aligned}&d\,\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_2} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} d^2x^{k_2} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2} dx^{k_2} \tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3} dx^{k_3} =\\ &\qquad = \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_2} dx^{k_3}\,.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} dx^{k_2} dx^{k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4} \tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_2k_3} dx^{k_2} dx^{k_3} +\\ &\qquad + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2} dx^{k_2} \tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3} dx^{k_3} = \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_2} dx^{k_3}\,.\end{aligned}$$

Отсюда следует выражение для объекта кривизны, полученное ранее

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2} \tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4} \tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_2k_3}\,. \tag{78}$$

Это обстоятельство доказывает введенное ранее выражение (77) для дифференциальных форм $'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}$.

Уравнение структуры (75) можно переписать в следующем виде

$$d^3x^k - \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} = 0\,. \tag{79}$$

5. Связь между коэффициентами прямого и обратного разложений

Коэффициенты разложения функции $x^k(y^i)$ в ряд Тейлора зависят от коэффициентов разложения функции $y^i(x^k)$ в ряд Тейлора, если учесть условие, что функция $x^k(y^i)$ является обратной по отношению к функции $y^i(x^k)$.

1. *Связь между коэффициентами* $\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}$, $\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}$ *и коэффициентами* $\Gamma^k_{k_1k_2}$, $R^k_{k_1k_2k_3}$

Рассмотрим связь между коэффициентами собственного разложения обратного преобразования $x^k(y^i)$ и коэффициентами касательного разложения прямого преобразования $y^i(x^k)$. Эту связь найдем из следующих соотношений

$$\frac{\partial x^k(y(x))}{\partial x^{k_1}} = \frac{\partial x^k(y)}{Dy^{i_1}} \cdot \frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}} = \delta^k_{k_1}\,, \tag{80}$$

$$\frac{\partial^2 x^k(y(x))}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} = 0\,, \tag{81}$$

$$\frac{\partial^3 x^k(y(x))}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} = 0\,, \quad \ldots\,, \tag{82}$$

вытекающих из условия, что функция $x^k(y^i)$ является обратной по отношению к функции $y^i(x^k)$.

Найдем сначала связь между коэффициентами второго слагаемого ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами второго слагаемого ряда Тейлора $y^i(x^k)$. Из соотношения (80) следует

$$\frac{\partial x^k(y)}{Dy^{i_1}} \cdot l^{i_1}_{k_1} = \delta^k_{k_1}\,.$$

Отсюда следует соотношение, которое уже было получено ранее

$$\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}} = \tilde{l}^{k_1}_{i_1}$$

Найдем теперь связь между коэффициентами $\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}$ третьего слагаемого ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами $\Gamma^k_{k_1k_2}$ ряда Тейлора $y^i(x^k)$. Из (81) имеем[8]

$$\frac{\partial^2 x^k(y(x))}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} = \frac{\partial}{\partial x^{k_2}}\left(\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}} \cdot \frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}}\right) =$$
$$\frac{\partial^2 x^k(y)}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}} \cdot \frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}}\frac{Dy^{i_2}(x)}{\partial x^{k_2}} + \frac{\partial x^k(y)}{Dy^{i_1}} \cdot \frac{D^2y^{i_1}(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} = 0\,.$$

Отсюда

$$\tilde{l}^k_{i_1i_2}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2} + \tilde{l}^k_{i_1}\,l^{i_1}_{k_1k_2} = 0\,.$$

Или

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} = -\Gamma^k_{k_1k_2}\,. \tag{83}$$

С учетом полученного результата первое уравнение структуры (73) приобретает вид

$$d^2x^k + \Gamma^k_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2} = 0\,. \tag{84}$$

В частном случае это уравнение представляет собой уравнение геодезической искривленного пространства Y, записанное по отношению к координатам системы отсчета X.

Найдем теперь связь между коэффициентами $\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}$ ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами $R^k_{k_1k_2k_3}$ ряда Тейлора $y^i(x^k)$. Из (82) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_3}}\left(\frac{\partial^2 x^k(y)}{Dy^{i_1}Dy^{i_2}} \cdot \frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}}\frac{Dy^{i_2}(x)}{\partial x^{k_2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial x^k(y)}{Dy^{i_1}} \cdot \frac{D^2y^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}\partial x^{k_2}}\right) = 0\,.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^3 x^k(y)}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}Dy^{i_1}} \cdot \frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}}\frac{Dy^{i_2}(x)}{\partial x^{k_2}}\frac{Dy^{i_3}(x)}{\partial x^{k_3}} +$$
$$+ \frac{\partial^2 x^k(y)}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}} \cdot \frac{D^2y^{i_1}(x)}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_1}}\frac{Dy^{i_2}(x)}{\partial x^{k_2}} +$$
$$+ \frac{\partial^2 x^k(y)}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}} \cdot \frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}}\frac{D^2y^{i_2}(x)}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}} +$$
$$+ \frac{\partial^2 x^k(y)}{Dy^{i_3}Dy^{i_1}} \cdot \frac{Dy^{i_3}(x)}{\partial x^{k_3}}\frac{D^2y^{i_1}(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} +$$
$$+ \frac{\partial x^k(y)}{Dy^{i}} \cdot \frac{D^3y^{i}(x)}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} = 0\,.$$

Отсюда следует

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} + (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\,l^{i_2}_{k_2}\,l^{i_1}_{k_4})(\tilde{l}^{k_4}_{i_4}\,l^{i_4}_{k_1k_3}) + (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_4})(\tilde{l}^{k_4}_{i_4}\,l^{i_4}_{k_2k_3}) +$$
$$+ (\tilde{l}^k_{i_1i_3}\,l^{i_3}_{k_3}\,l^{i_1}_{k_4})(\tilde{l}^{k_4}_{i_4}\,l^{i_4}_{k_1k_2}) + R^k_{k_1k_2k_3} = 0\,.$$

Используя (15) и (63), получим

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} +$$
$$+ R^k_{k_1k_2k_3} = 0\,.$$

Подставим сюда (20) и (83), получим

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} - \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} - \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3} - \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} +$$
$$+ \Gamma^k_{k_1k_2,k_3} + \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} = 0\,.$$

Отсюда получим

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = -\Gamma^k_{k_1k_2,k_3} + \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} + \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3}\,. \tag{85}$$

---

[8] Для выполнения указанного соотношения необходимо полагать

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_2}}\frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}} = \frac{D^2y^{i_1}(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}\,.$$

Сравните с примечанием на стр. 3.

Это же соотношение можно получить подставляя (83) в формулу (78) для объекта кривизны $\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}$. Из этого соотношения следует общепринятое выражение для тензора кривизны.

С учетом полученного результата второе уравнение структуры (79) приобретает вид

$$d^3x^k = \Big(-\Gamma^k_{k_1k_2,k_3} + \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} + \\ + \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3}\Big)\, dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}\,. \qquad (86)$$

2. *Связь между коэффициентами $\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}$, $\tilde{R}^i_{i_1i_2i_3}$ и коэффициентами $\Gamma^i_{i_1i_2}$, $R^i_{i_1i_2i_3}$*

Рассмотрим связь между коэффициентами касательного разложения обратного преобразования $x^k(y^i)$ и коэффициентами собственного разложения прямого преобразования $y^i(x^k)$. Как и прежде, эту связь найдем из условия, что функция $x^k(y^i)$ является обратной по отношению к функции $y^i(x^k)$. Указанное условие записывается в виде следующих соотношений

$$\frac{Dy^i(x(y))}{Dy^{i_1}} = \frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}} = \delta^i_{i_1}\,, \qquad (87)$$

$$\frac{D^2y^i(x(y))}{Dy^{i_1}Dy^{i_2}} = 0\,, \qquad (88)$$

$$\frac{D^3y^i(x(y))}{Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3}} = 0\,, \qquad (89)$$

$$\dots\,,$$

Найдем сначала связь между коэффициентами второго слагаемого ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами разложения функции $y^i(x^k)$ в ряд Тейлора. Из соотношения (87) следует

$$l^i_{k_1} \cdot \frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}} = \delta^i_{i_1}\,.$$

Отсюда следует соотношение, которое уже было получено ранее

$$\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}} = \tilde{l}^{k_1}_{i_1}$$

Найдем теперь связь между коэффициентами $\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}$ ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами $\Gamma^i_{i_1i_2}$ ряда Тейлора $y^i(x^k)$. Из (88) имеем

$$\frac{D^2y^i(x(y))}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}} = \frac{D}{Dy^{i_2}}\left(\frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}\right) = \\ = \frac{D}{Dy^{i_2}}\frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}} + \frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{D}{Dy^{i_2}}\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}} = 0\,.$$

Или

$$\frac{D^2y^i(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}\frac{\partial x^{k_2}(y)}{Dy^{i_2}} + \frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial^2 x^{k_1}(y)}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}} = 0\,.$$

Отсюда

$$l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} + l^i_k\,\tilde{l}^k_{i_1i_2} = 0\,. \qquad (90)$$

Отсюда

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2} = -\Gamma^i_{i_1i_2}\,. \qquad (91)$$

Найдем теперь связь между коэффициентами $\tilde{R}^i_{i_1i_2i_3}$ ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами $R^i_{i_1i_2i_3}$ ряда Тейлора $y^i(x^k)$. Из (89) имеем

$$\frac{D}{Dy^{i_3}}\left(\frac{D^2y^i(x)}{\partial x^{k_1}\partial x^{k_2}} \cdot \frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}\frac{\partial x^{k_2}(y)}{Dy^{i_2}} + \\ \frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial^2 x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}Dy^{i_2}}\right) = 0\,.$$

Отсюда

$$\frac{D^3y^i(x)}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}\frac{\partial x^{k_2}(y)}{Dy^{i_2}}\frac{\partial x^{k_3}(y)}{Dy^{i_3}} + \\ + \frac{D^2y^i(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial^2 x^{k_1}(y)}{Dy^{i_3}Dy^{i_1}}\frac{\partial x^{k_2}(y)}{Dy^{i_2}} + \\ + \frac{D^2y^i(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}\frac{\partial^2 x^{k_2}(y)}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}} + \\ + \frac{D^2y^i(x)}{\partial x^{k_3}\partial x^{k}} \cdot \frac{\partial x^{k_3}(y)}{Dy^{i_3}}\frac{\partial^2 x^{k}(y)}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}} + \\ + \frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k}} \cdot \frac{\partial^3 x^{k}(y)}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}Dy^{i_1}} = 0\,.$$

Отсюда следует

$$R^i_{i_1i_2i_3} + (l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_4})(l^{i_4}_{k_4}\,\tilde{l}^{k_4}_{i_1i_3}) + (l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_4})(l^{i_4}_{k_4}\,\tilde{l}^{k_4}_{i_2i_3}) + \\ + (l^i_{k_1k_3}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_4})(l^{i_4}_{k_4}\,\tilde{l}^{k_4}_{i_1i_2}) + \tilde{R}^i_{i_1i_2i_3} = 0\,.$$

Используя (23), (55) и (91), получим

$$R^i_{i_1i_2i_3} - \Gamma^i_{i_4i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1i_3} - \Gamma^i_{i_1i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2i_3} - \Gamma^i_{i_4i_3}\Gamma^{i_4}_{i_1i_2} + \\ + \tilde{R}^i_{i_1i_2i_3} = 0\,.$$

Подставим сюда (29), получим

$$\Gamma^i_{i_1i_2,i_3} + \Gamma^i_{i_4i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1i_3} + \Gamma^i_{i_1i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2i_3} - \Gamma^i_{i_4i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1i_3} - \\ - \Gamma^i_{i_1i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2i_3} - \Gamma^i_{i_4i_3}\Gamma^{i_4}_{i_1i_2} + \tilde{R}^i_{i_1i_2i_3} = 0\,.$$

Отсюда получим

$$\tilde{R}^i_{i_1i_2i_3} = -\Gamma^i_{i_1i_2,i_3} + \Gamma^i_{i_4i_3}\Gamma^{i_4}_{i_1i_2}\,. \qquad (92)$$

V. СЛОЖНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Пусть на точечном многообразии заданы координаты y^i, x^k, t^l и определены функции

$$y^i(x^k)\,, \quad x^i(t^l)\,.$$

Разложим эти функции вблизи точки с координатами t^l в ряды Тейлора, которые запишем в следующем виде

$$
\begin{aligned}
y^i(x^k + dx^k) &= y^i(x^k) + Dy^i + D^2y^i + D^3y^i + \dots\,,\\
x^k(t^l + \Delta t^l) &= x^k(y^i) + dx^k + d^2x^k + d^3x^k + \dots
\end{aligned}
$$

В этом случае координаты x^k не являются независимыми и поэтому

$$
d^2x^k \neq 0\,, \quad d^3x^k \neq 0\,, \quad \dots
$$

И разложение функции $y^i(x^k)$ следует записать так

$$
\begin{aligned}
&y^i(x^k + dx^k) = y^i(x^k) + l^i_k dx^k + (l^i_k d^2x^k + l^i_{k_1k_2} dx^{k_1}dx^{k_2})\\
&+ \big(l^i_k d^3x^k + l^i_{k_4k_3} d^2x^{k_4}dx^{k_3} + l^i_{k_1k_2k_3} dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} +\\
&\quad + l^i_{k_4k_2} d^2x^{k_4}dx^{k_2} + l^i_{k_1k_4} dx^{k_1}d^2x^{k_4}\big) + \dots
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
Dy^i = l^i_k dx^k\,, \tag{93}
$$

$$
D^2y^i = l^i_k d^2x^k + l^i_{k_1k_2} dx^{k_1}dx^{k_2}\,, \tag{94}
$$

$$
\begin{aligned}
D^3y^i = l^i_k d^3x^k &+ l^i_{k_4k_3} d^2x^{k_4}dx^{k_3} + l^i_{k_1k_2k_3} dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}\\
&+ l^i_{k_4k_2} d^2x^{k_4}dx^{k_2} + l^i_{k_1k_4} dx^{k_1}d^2x^{k_4}\,,
\end{aligned} \tag{95}
$$

$$
\dots
$$

В частном случае, когда в функциональной зависимости $y^i(x^k)$ координаты x^k являются независимыми и

$$
d^2x^k = 0\,, \quad d^3x^k = 0\,, \quad \dots\,,
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
Dy^i = l^i_k dx^k\,, \quad D^2y^i = l^i_{kk_1} dx^k dx^{k_1}\,,\\
D^3y^i = l^i_{kk_1k_2} dx^k dx^{k_1} dx^{k_2}\,, \quad \dots
\end{aligned}
$$

Это соответствует ранее установленным соотношениям (9), (10), (11).

В другом частном случае обратной функциональной зависимости $x^k(y^i)$, когда координаты y^i являются независимыми и

$$
D^2y^i = 0\,, \quad D^3y^i = 0\,, \quad \dots\,,
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
&dx^k = \tilde{l}^k_i Dy^i\,,\\
&d^2x^k + \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2} dx^{k_1}dx^{k_2} = 0\,,\\
&d^3x^k + \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_4k_3} d^2x^{k_4}dx^{k_3} + \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3} dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} +\\
&\quad + \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_4k_2} d^2x^{k_4}dx^{k_2} + \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_4} dx^{k_1}d^2x^{k_4} = 0\,,\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Из второго уравнения следует

$$
d^2x^k + \Gamma^k_{k_1k_2} dx^{k_1}dx^{k_2} = 0\,.
$$

Это уравнение совпадает с ранее установленным уравнением (84). Из третьего уравнения с учетом (15) и (17) следует

$$
\begin{aligned}
d^3x^k - \Big(\Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} - R^k_{k_1k_2k_3} + \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} +\\
+ \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3}\Big)\, dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Подставляя сюда выражение (20) для объекта кривизны, получим

$$
\begin{aligned}
d^3x^k = \big(-\Gamma^k_{k_1k_2,k_3} + \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} +\\
+ \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3}\Big)\, dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}\,.
\end{aligned}
$$

Это соотношение также соответствует ранее установленному соотношению (86).

1. Абсолютный дифференциал

Умножим уравнения (93), (94) и (96) на $\tilde{l}^k_i$ и будем рассматривать левые части

$$
\tilde{l}^k_i Dy^i\,, \quad \tilde{l}^k_i D^2y^i\,, \quad \tilde{l}^k_i D^3y^i\,, \quad \dots
$$

как дифференциалы соответствующих порядков другого вида дифференцирования координат x^k. Это дифференцирование называется *абсолютным.* Абсолютный дифференциал обозначим $\mathcal{D}$. Отсюда

$$
\tilde{l}^k_i Dy^i = \mathcal{D}x^k\,, \quad \tilde{l}^k_i D^2y^i = \mathcal{D}^2x^k\,, \quad \tilde{l}^k_i D^3y^i = \mathcal{D}^3x^k\,, \quad \dots
$$

и выражения для абсолютных дифференциалов таковы

$$
\mathcal{D}x^k = dx^k\,, \tag{96}
$$

$$
\mathcal{D}^2x^k = d^2x^k + \Gamma^k_{k_1k_2} dx^{k_1}dx^{k_2}\,, \tag{97}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^3x^k = d^3x^k &+ \Gamma^k_{k_4k_3} d^2x^{k_4}dx^{k_3} + R^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} +\\
&+ \Gamma^k_{k_4k_2} d^2x^{k_4}dx^{k_2} + \Gamma^k_{k_1k_4} dx^{k_1}d^2x^{k_4}\,,
\end{aligned} \tag{98}
$$

$$
\dots
$$

VI. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ

Когда рассматривается вектор x^k, то полагается, что его направление произвольно и не определено. Если есть необходимость рассматривать векторы определенных *различных* направлений, то такие векторы обозначаются числом в качестве нижнего индекса

$$
x^i_1\,, \quad x^i_2\,, \quad x^i_3\,, \quad \dots
$$

Точно также дифференциал dx^k представляет собой вектор произвольного неопределенного направления. А в том случае, если необходимо рассматривать дифференциалы, как векторы, определенных различных направлений, они также обозначаются числом в качестве нижнего индекса

$$d_1x^i\,,\quad d_2x^i\,,\quad d_3x^i\,,\quad \ldots$$

В предыдущих разделах рассматривались разложения в ряд Тейлора при дифференцировании по одному направлению. Отсюда в разложении участвуют дифференциалы одного типа

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+l^i_k dx^k+l^i_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2}+ \\ +l^i_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}+l^i_{k_1k_2k_3k_4}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}dx^{k_4}+\ldots$$

При этом коэффициенты разложения $l^i_{k_1k_2\ldots k_p}$ симметричны по нижним индексам. Например

$$l^i_{k_1k_2}=l^i_{\langle k_1k_2\rangle}=\frac{1}{2}(l^i_{k_1k_2}+l^i_{k_2k_1})\,.$$

При использовании дифференцирования по разным направлениям результаты предыдущих разделов должны быть обобщены[9]. Далее рассмотрим такое обобщение.

1. Ряд Тейлора для функции $y^i(x^k)$

Обратимся к разложению (1). Теперь дифференциалы dx, входящие в каждое из слагаемых, имеют свое направление. Поэтому

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+\left(y^i_{,k}+y^i_k\right)dx^k+ \\ +\left(y^i_{,k_1,k_2}+y^i_{k_1,k_2}+y^i_{k_1k_2}\right)d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}+ \\ +\left(y^i_{,k_1,k_2,k_3}+y^i_{k_1,k_2,k_3}+y^i_{k_1k_2,k_3}+ \\ +y^i_{k_1k_2k_3}\right)d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}+\ldots$$

Здесь производные

$$y^i_{,k}=\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\,,\quad y^i_{,k_1,k_2}=\frac{\partial_2\partial_1 y^i}{\partial_2x^{k_2}\partial_1x^{k_1}}\,, \\ y^i_{,k_1,k_2,k_3}=\frac{\partial_3\partial_2\partial_1 y^i}{\partial_3x^{k_3}\partial_2x^{k_2}\partial_1x^{k_1}}\,,\quad\ldots$$

С учетом введенных нами коэффициентов

$$l^i_k=y^i_{,k}+y^i_k\,, \\ l^i_{k_1k_2}=y^i_{,k_1,k_2}+y^i_{k_1,k_2}+y^i_{k_1k_2}\,, \\ l^i_{k_1k_2k_3}=y^i_{,k_1,k_2,k_3}+y^i_{k_1,k_2,k_3}+y^i_{k_1k_2,k_3}+y^i_{k_1k_2k_3}\,, \\ \ldots\,,$$

ряд Тейлора запишется

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+l^i_k dx^k+l^i_{k_1k_2}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}+ \\ +l^i_{k_1k_2k_3}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}+ \\ +l^i_{k_1k_2k_3k_4}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}d_4x^{k_4}+\ldots$$

С использованием дифференциала D имеем

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+Dy^i+D_2D_1y^i+D_3D_2D_1y^i+\ldots$$

Используя оператор частного дифференцирования

$$X_k\equiv\frac{D}{\partial x^k}\,,$$

получим

$$l^i_k=\frac{Dy^i}{\partial x^k}=X_k(y^i)\,, \tag{99}$$

$$l^i_{k_1k_2}=\frac{D_2D_1y^i}{\partial_2x^{k_2}\partial_1x^{k_1}}=X_{k_2}X_{k_1}(y^i)\,, \tag{100}$$

$$l^i_{k_1k_2k_3}=\frac{D_3D_2D_1y^i}{\partial_3x^{k_3}\partial_2x^{k_2}\partial_1x^{k_1}}=X_{k_3}X_{k_2}X_{k_1}(y^i)\,, \tag{101}$$

$$\ldots$$

А ряд Тейлора запишется так

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+\frac{Dy^i}{\partial x^k}\,dx^k+ \\ +\frac{D_2D_1y^i}{\partial_2x^{k_2}\partial_1x^{k_1}}\,d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}+ \\ +\frac{D_3D_2D_1y^i}{\partial_3x^{k_3}\partial_2x^{k_2}\partial_1x^{k_1}}\,d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}+\ldots$$

или

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+X_k(y^i)dx^k+ \\ +X_{k_2}X_{k_1}(y^i)d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}+ \\ +X_{k_3}X_{k_2}X_{k_1}(y^i)d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}+\ldots$$

Ряд Тейлора (12) запишется в следующем виде

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+Dy^i+D_2l^i_{k_1}d_1x^{k_1}+ \\ +D_3l^i_{k_1k_2}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}+D_4l^i_{k_1k_2k_3}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}+\ldots$$

1. *Разложение по симметриям*

Коэффициенты разложения $l^i_{k_1k_2\ldots k_p}$ в общем случае несимметричны по нижним индексам. Они могут быть разложены по *симметриям* на основании диаграмм Юнга[10].

Коэффициенты $l^i_{k_1k_2}$ разлагаются на две симметрии

$$l^i_{k_1k_2}=l^i_{(k_1k_2)_1}+l^i_{(k_1k_2)_2}\,.$$

где

$$l^i_{(k_1k_2)_1}=l^i_{[k_1k_2]}=\frac{1}{2}(l^i_{k_1k_2}-l^i_{k_2k_1})$$

– слагаемое, антисимметричное по нижним индексам, а

$$l^i_{(k_1k_2)_2}=l^i_{\langle k_1k_2\rangle}=\frac{1}{2}(l^i_{k_1k_2}+l^i_{k_2k_1})$$

---

[9] Полезно иметь в виду, что вариационное исчисление фактически вводит дифференцирование по двум направлениям.

[10] Смотрите Раздел II Лекции 14.

– слагаемое симметричное по нижним индексам.

Коэффициенты $l^i_{k_1k_2k_3}$ разлагаются на четыре симметрии

$$l^i_{k_1k_2k_3} = l^i_{(k_1k_2k_3)_1} + l^i_{(k_1k_2k_3)_2} + l^i_{(k_1k_2k_3)_3} + l^i_{(k_1k_2k_3)_4}\,,$$

где

$$l^i_{(k_1k_2k_3)_1} = l^i_{[k_1k_2k_3]} =$$
$$\frac{1}{4}(l^i_{k_1k_2k_3} + l^i_{k_2k_3k_1} + l^i_{k_3k_1k_2} - l^i_{k_2k_1k_3} - l^i_{k_1k_3k_2} - l^i_{k_3k_2k_1})$$

– слагаемое, антисимметричное по нижним индексам,

$$l^i_{(k_1k_2k_3)_2} =$$
$$\frac{1}{4}(l^i_{k_1k_2k_3} - l^i_{k_2k_3k_1} - l^i_{k_3k_1k_2} - l^i_{k_2k_1k_3} - l^i_{k_1k_3k_2} + l^i_{k_3k_2k_1})\,,$$

$$l^i_{(k_1k_2k_3)_3} =$$
$$\frac{1}{4}(l^i_{k_1k_2k_3} - l^i_{k_2k_3k_1} - l^i_{k_3k_1k_2} + l^i_{k_2k_1k_3} + l^i_{k_1k_3k_2} - l^i_{k_3k_2k_1})\,,$$

а

$$l^i_{(k_1k_2k_3)_4} = l^i_{\langle k_1k_2k_3\rangle} =$$
$$\frac{1}{4}(l^i_{k_1k_2k_3} + l^i_{k_2k_3k_1} + l^i_{k_3k_1k_2} + l^i_{k_2k_1k_3} + l^i_{k_1k_3k_2} + l^i_{k_3k_2k_1})$$

– слагаемое, симметричное по нижним индексам.

В Лекции 14 показано, что коэффициенты $l^i_{k_1k_2k_3k_4}$ разлагаются на десять симметрий.

В соответствии с разложением коэффициентов $l^i_{k_1k_2\dots k_p}$ по симметриям произведения дифференциалов $d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}\dots d_px^{k_p}$ также разлагаются по симметриям. Например,

$$d_1x^{k_1}d_2x^{k_2} = (d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_1 + (d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_2\,,$$

где

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_1 = d_1x^{k_1}d_2x^{k_2} - d_2x^{k_1}d_1x^{k_2}$$

– антисимметричное слагаемое, а

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_2 = d_1x^{k_1}d_2x^{k_2} + d_2x^{k_1}d_1x^{k_2}$$

– симметричное слагаемое.

Вышеуказанную антисимметричную комбинацию принято рассматривать как специальное умножение, обозначаемое символом $\wedge$ и называемое *внешним* умножением. Таким образом,

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_1 = d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2}\,.$$

Также рассматривается антисимметричная комбинация произвольного числа сомножителей

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}\dots d_px^{k_p})_1 = d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2}\wedge\dots\wedge d_px^{k_p}\,.$$

Вышеуказанную симметричную комбинацию принято рассматривать как специальное умножение, обозначаемое символом $\odot$. Таким образом,

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_2 = d_1x^{k_1}\odot d_2x^{k_2}\,.$$

Также рассматривается симметричная комбинация произвольного числа сомножителей

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}\dots d_px^{k_p})_p = d_1x^{k_1}\odot d_2x^{k_2}\odot\dots\odot d_px^{k_p}\,.$$

Число сомножителей в антисимметричном произведении равно равно количеству независимых направлений в пространстве, то есть размерности пространства. Отсюда следует, что число слагаемых в разложении Тейлора по антисимметричным слагаемым конечно и равно размерности пространства. Так, например, если размерность пространства равна четырем, такое разложение имеет вид

$$\begin{aligned}y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + l^i_k dx^k + l^i_{[k_1k_2]}d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2} +\\ &+ l^i_{[k_1k_2k_3]}d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2}\wedge d_3x^{k_3} +\\ &+ l^i_{[k_1k_2k_3k_4]}d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2}\wedge d_3x^{k_3}\wedge d_4x^{k_4}\,.\end{aligned}$$

Из (2) видно, что антисимметризация коэффициентов разложения $l^i_{k_1k_2\dots k_p}$ по двум последним индексам оставляет только два последних слагаемых

$$l^i_{[k_1k_2]} = y^i_{k_1,k_2]} + y^i_{k_1k_2]}\,, \qquad (102)$$
$$l^i_{k_1[k_2k_3]} = y^i_{k_1[k_2,k_3]} + y^i_{k_1[k_2k_3]}\,,$$
$$\dots$$
$$l^i_{k_1k_2\dots[k_{p-1},k_p]} = y^i_{k_1k_2\dots[k_{p-1},k_p]} + y^i_{k_1k_2\dots[k_{p-1},k_p]}\,, \qquad (103)$$
$$\dots$$

То есть такого рода комбинации не зависят от преобразования системы координат и являются тензорами. Далее такого рода антисимметризация используется при формировании тензоров кручения и кривизны. В соответствии с разложением коэффициентов $l^i_{k_1k_2\dots k_p}$ и произведений дифференциалов $d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}\dots d_px^{k_p}$ по симметриям дифференциалы p-порядка также разлагаются по симметриям. Например,

$$D_2D_1 = (D_2D_1)_1 + (D_2D_1)_2\,,$$

где

$$(D_2D_1)_1 = D_2D_1 - D_1D_2 = D_2\wedge D_1\,,$$

– дифференцирование, сопровождаемое антисимметризацией, а

$$(D_2D_1)_2 = D_2D_1 + D_1D_2 = D_2\odot D_1\,,$$

– дифференцирование, сопровождаемое симметризацией.

2. *Касательное разложение*

Ряд Тейлора (14), соответствующий касательному разложению, приобретает вид

$$\begin{aligned}\tilde l^k_i(y^i(x^k+dx^k) - y^i(x^k)) &= dx^k + \tilde l^k_i\, l^i_{k_1k_2}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2} +\\ &+ \tilde l^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}\\ &+ \tilde l^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3k_4}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}d_4x^{k_4} + \dots\end{aligned}$$

Объект связности (15) в касательном пространстве X

$$\Gamma^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_i \, l^i_{k_1k_2}$$

несимметричен по нижним индексам и может быть представлен в виде суммы

$$\Gamma^k_{k_1k_2} = \Gamma^k_{[k_1k_2]} + \Gamma^k_{\langle k_1k_2\rangle} \, .$$

Слагаемое

$$\Gamma^k_{[k_1k_2]} \quad \text{обозначается} \quad T^k_{k_1k_2}$$

и называется *тензором кручения в касательном пространстве* X. Калибровочное преобразование (16) тензора кручения не зависит от производной $y^i_{,k}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$T^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_i y^i_{[k_1,k_2]} + t^k_{k_1k_2} \, ,$$

где введено обозначение

$$t^k_{k_1k_2} = \gamma^k_{[k_1k_2]} = \tilde{l}^k_i y^i_{[k_1k_2]} \, .$$

Объект кривизны (17) в касательном пространстве X

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_i \, l^i_{k_1k_2k_3}$$

также несимметричен по нижним индексам. Особое значение имеет объект кривизны, антисимметричный по последним двум индексам

$$R^k_{k_1[k_2k_3]} \, .$$

Он называется *тензором кривизны или тензором калибровочного поля в касательном пространстве* X.[11] Калибровочное преобразование (18) тензора кривизны не зависит от производной $y^i_{,k}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$R^k_{k_1[k_2k_3]} = \tilde{l}^k_i y^i_{k_1[k_2,k_3]} + r^k_{k_1[k_2k_3]} \, ,$$

Используя соотношение (20), получим выражение тензора кривизны через объекты связности в касательном пространстве

$$R^k_{k_1[k_2k_3]} = \frac{\partial \Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} - \frac{\partial \Gamma^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} + \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} - \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} \, . \tag{104}$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора (21) в касательном пространстве приобретает вид

$$\begin{aligned} \tilde{l}^k_i(y^i(x^k+dx^k) - y^i(x^k)) = dx^k + \Gamma^k_{k_1k_2} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} + \\ + R^k_{k_1k_2k_3} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} + \\ + R^k_{k_1k_2k_3k_4} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} d_4x^{k_4} + \dots \end{aligned}$$

[11] Иногда для простоты скобки, указывающие на антисимметризацию, опускаются и тензор кривизны обозначается также как объект кривизны.

3. Собственное разложение

Ряд Тейлора (22), соответствующий собственному разложению, приобретает вид

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + Dy^i + (l^i_{k_1k_2}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2})\, D_1y^{i_1} D_2y^{i_2} \\ + (l^i_{k_1k_2k_3}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_3}_{i_3})\, D_1y^{i_1} D_2y^{i_2} D_3y^{i_3} + \\ + (l^i_{k_1k_2k_3k_4}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_3}_{i_3}\, \tilde{l}^{k_4}_{i_4})\, D_1y^{i_1} D_2y^{i_2} D_3y^{i_3} D_4y^{i_4} + \dots \end{aligned}$$

Объект связности (23) в собственном пространстве Y

$$\Gamma^i_{i_1i_2} = l^i_{k_1k_2}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2} \, .$$

несимметричен по нижним индексам и может быть представлен в виде суммы

$$\Gamma^i_{i_1i_2} = \Gamma^i_{[i_1i_2]} + \Gamma^i_{\langle i_1i_2\rangle} \, .$$

Слагаемое

$$\Gamma^i_{[i_1i_2]} \quad \text{обозначается} \quad T^i_{i_1i_2}$$

и называется *тензором кручения в собственном пространстве* Y. Калибровочное преобразование (24) тензора кручения не зависит от производной $y^i_{,k}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$T^i_{i_1i_2} = y^i_{[k_1,k_2]}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2} + t^i_{i_1i_2} \, ,$$

где введено обозначение

$$t^i_{i_1i_2} = y^i_{[k_1k_2]}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2} \, .$$

Объект кривизны (25) в собственном пространстве Y

$$R^i_{i_1i_2i_3} = l^i_{k_1k_2k_3} \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_3}_{i_3}$$

также несимметричен по нижним индексам. Особое значение имеет объект кривизны, антисимметричный по последним двум индексам

$$R^i_{i_1[i_2i_3]} \, .$$

Он называется *тензором кривизны или тензором калибровочного поля в собственном пространстве* Y. Калибровочное преобразование (26) тензора кривизны не зависит от производной $y^i_{,k}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$R^i_{i_1[i_2i_3]} = y^i_{k_1[k_2,k_3]} \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_3}_{i_3} + r^i_{i_1[i_2i_3]} \, ,$$

Используя соотношение (29), получим выражение тензора кривизны через объекты связности в собственном пространстве

$$\begin{aligned} R^i_{i_1[i_2i_3]} = \frac{D\Gamma^i_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}} - \frac{D\Gamma^i_{i_1i_3}}{Dy^{i_2}} + \Gamma^i_{i_4i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1i_3} - \Gamma^i_{i_4i_3}\Gamma^{i_4}_{i_1i_2} + \\ + \Gamma^i_{i_1i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2i_3} - \Gamma^i_{i_1i_4}\Gamma^{i_4}_{i_3i_2} \, . \end{aligned} \tag{105}$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в собственном пространстве приобретает вид

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+Dy^i+\Gamma^i_{i_1i_2}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}+\\+R^i_{i_1i_2i_3}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}+\\+R^i_{i_1i_2i_3i_4}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}D_4y^{i_4}+\dots$$

2. Уравнения структуры в искривленном пространстве Y

Для того, чтобы рассматривать дифференцирование по направлению, дифференциальную форму будем снабжать дифференциалом, которым она определяется. Например,

$$\omega^i(d_1)\equiv D_1y^i\,,\quad \text{также}\quad \omega^i_{i_1}(d_2)=d_2l^i_{k_1}\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,.$$

С учетом указанных обозначений первое уравнение структуры искривленного пространства (32) обобщается и приобретает вид

$$D_2\omega^i(d_1)=\omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1)+\gamma^i_{i_1i_2}\omega^{i_1}(d_1)\omega^{i_2}(d_2)\,. \quad (106)$$

Первое *антисимметричное* уравнение структуры получается из этого уравнения путем антисимметризации по индексам дифференцирования:

$$D_2\omega^i(d_1)-D_1\omega^i(d_2)=\omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1)-\omega^i_{i_1}(d_1)\omega^{i_1}(d_2)\\+\gamma^i_{i_1i_2}\omega^{i_1}(d_1)\omega^{i_2}(d_2)-\gamma^i_{i_1i_2}\omega^{i_1}(d_2)\omega^{i_2}(d_1)\,.$$

Или в другой записи

$$D_2\wedge\omega^i(d_1)=\omega^i_{i_1}(d_2)\wedge\omega^{i_1}(d_1)+\gamma^i_{i_1i_2}\omega^{i_1}(d_1)\wedge\omega^{i_2}(d_2)\,.$$

Для дифференциальных форм

$$'\omega^i_{i_1}=\omega^i_{i_1}+\gamma^i_{i_1i_2}\omega^{i_2}$$

первое уравнение структуры приобретает вид

$$D_2\omega^i(d_1)={}'\omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1)\,. \quad (107)$$

После антисимметризации по индексам дифференцирования получим первое антисимметричное уравнение структуры

$$D_2\wedge\omega^i(d_1)={}'\omega^i_{i_1}(d_2)\wedge\omega^{i_1}(d_1)\,.$$

Первое уравнение структуры может быть записано иначе

$$D_2D_1y^i-\Gamma^i_{i_1i_2}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}=0\,.$$

Уравнение такого вида было использовано в Лекции 1 для объяснения квантовых явлений. После антисимметризвции имеем

$$D_2\wedge D_1y^i=\Gamma^i_{[i_1i_2]}D_1y^{i_1}\wedge D_2y^{i_2}\,.$$

Для направленного дифференцирования второе уравнение структуры (36) приобретает вид

$$D_3D_2\omega^i(d_1)=(\omega^i_{i_1i_2}(d_3)+r^i_{i_1i_2i_3}\omega^{i_3}(d_3))\omega^{i_1}(d_1)\omega^{i_2}(d_2)\,. \quad (108)$$

Это уравнение можно антисимметризовать либо по трем дифференциалам, либо по каждой паре. Второе антисимметричное уравнение получается при антисимметризации дифференциалов D_2 и D_3 с точностью до переобозначения индексов. После использования в (108) первого уравнения структуры (106) и приравнивания нулю множителя при $\omega^{i_1}(d_1)$ получим второе уравнение структуры, обобщающее (37)

$$D_3\omega^i_{i_1}(d_2)+\omega^i_{i_3}(d_3)\omega^{i_3}_{i_1}(d_2)+\omega^i_{i_3}(d_3)\gamma^{i_3}_{i_1i_2}\omega^{i_2}(d_2)+\\+D_3\gamma^i_{i_1i_2}\omega^{i_2}(d_2)+\gamma^i_{i_3i_2}\omega^{i_3}_{i_1}(d_3)\omega^{i_2}(d_2)+\\+\gamma^i_{i_3i_2}\gamma^{i_3}_{i_1i_4}\omega^{i_4}(d_3)\omega^{i_2}(d_2)+\\+\gamma^i_{i_1i_3}\omega^{i_3}_{i_2}(d_3)\omega^{i_2}(d_2)+\gamma^i_{i_1i_3}\gamma^{i_3}_{i_4i_2}\omega^{i_4}(d_3)\omega^{i_2}(d_2)=\\=\omega^i_{i_1i_2}(d_3)\omega^{i_2}(d_2)+r^i_{i_1i_2i_3}\omega^{i_2}(d_2)\omega^{i_3}(d_3)\,.$$

Для дифференциальных форм

$$'\omega^i_{i_1i_2}=\omega^i_{i_1i_2}+r^i_{i_1i_2i_3}\omega^{i_3}$$

второе уравнение структуры приобретает следующий вид

$$D_3D_2\omega^i(d_1)={}'\omega^i_{i_1i_2}(d_3)\omega^{i_1}(d_1)\omega^{i_2}(d_2)\,. \quad (109)$$

После использования первого уравнения структуры (107) и выделения множителя при $\omega^{i_1}(d_1)$ второе уравнение приобретает следующий вид

$$D_3\,{}'\omega^i_{i_1}(d_2)+{}'\omega^i_{i_2}(d_2)\,{}'\omega^{i_2}_{i_1}(d_3)={}'\omega^i_{i_1i_2}(d_3)\omega^{i_2}(d_2)\,. \quad (110)$$

Антисимметризация этого уравнения по дифференциалам дает второе антисимметричное уравнение структуры

$$D_3\wedge{}'\omega^i_{i_1}(d_2)+{}'\omega^i_{i_2}(d_2)\wedge{}'\omega^{i_2}_{i_1}(d_3)={}'\omega^i_{i_1i_2}(d_3)\wedge\omega^{i_2}(d_2)\,. \quad (111)$$

Для направленного дифференцирования второе уравнение структуры (41) можно переписать в следующем виде

$$D_3D_2D_1y^i-R^i_{i_1i_2i_3}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}=0\,.$$

Антисимметризация по дифференциалам D_2 и D_3 приводит к второму уравнению структуры с участием тензора кривизны

$$D_3\wedge D_2D_1y^i-R^i_{i_1[i_2i_3]}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}\wedge D_3y^{i_3}=0\,.$$

1. Уравнения структуры Картана

Обратимся к уравнениям структуры (42) и (43). Запишем эти уравнения с учетом направленного дифференцирования. Получим

$$d_2\omega^i(d_1)=\omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1) \quad (112)$$

и

$$d_3 d_2 \omega^i(d_1) = d_3 \omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1) + \omega^i_{i_2}(d_2)\omega^{i_2}_{i_1}(d_3)\omega^{i_1}(d_1)\,. \tag{113}$$

Выполним антисимметризацию уравнения (112) по индексам дифференцирования. Получим уравнение, которое известно как первое уравнение структуры Картана,

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = \omega^i_{i_1}(d_2) \wedge \omega^{i_1}(d_1) \tag{114}$$

Выполним антисимметризацию уравнения (113) по индексам дифференцирования d_3 и d_2. При этом учтем, что $d_3 \wedge d_2 = 0$ и формы $\omega^{i_1}(d_1)$ являются линейно независимыми. Получим уравнение, которое известно как второе уравнение структуры Картана,

$$d_3 \wedge \omega^i_{i_1}(d_2) + \omega^i_{i_2}(d_2) \wedge \omega^{i_2}_{i_1}(d_3) = 0\,. \tag{115}$$

2. *Уравнения структуры Картана-Лаптева*

Обратимся к уравнениям структуры (44) и (45). Запишем эти уравнения с учетом направленного дифференцирования. Получим

$$d_2 \omega^i(d_1) =' \omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1) - \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}(d_2)\omega^{i_1}(d_1) \tag{116}$$

и

$$\begin{aligned} d_3 d_2 \omega^i(d_1) = \big(& d'_3 \omega^i_{i_1}(d_2) +' \omega^i_{i_3}(d_2)'\omega^{i_3}_{i_1}(d_3) - \\ &-' \omega^i_{i_3}(d_2)\gamma^{i_3}_{i_1 i_2}\omega^{i_2}(d_3) - d_3\gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}(d_2) - \\ &- \gamma^i_{i_3 i_2}\,{}'\omega^{i_3}_{i_1}(d_3)\omega^{i_2}(d_2) + \gamma^i_{i_4 i_2}\gamma^{i_4}_{i_1 i_3}\omega^{i_2}(d_2)\omega^{i_3}(d_3) - \\ &- \gamma^i_{i_1 i_3}\,{}'\omega^{i_3}_{i_2}(d_3)\omega^{i_2}(d_2) + \\ &+ \gamma^i_{i_1 i_4}\gamma^{i_4}_{i_2 i_3}\omega^{i_2}(d_2)\omega^{i_3}(d_3)\big)\,\omega^{i_1}(d_1)\,. \end{aligned} \tag{117}$$

Выполним антисимметризацию уравнения (116) по индексам дифференцирования. Получим уравнение, которое известно как первое уравнение структуры, полученное Лаптевым из уравнения структуры Картана,

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) =' \omega^i_{i_1}(d_2) \wedge \omega^{i_1}(d_1) - \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}(d_2) \wedge \omega^{i_1}(d_1)\,. \tag{118}$$

Выполним антисимметризацию уравнения (117) по индексам дифференцирования d_3 и d_2. При этом учтем, что $d_3 \wedge d_2 = 0$ и формы $\omega^{i_1}(d_1)$ являются линейно независимыми. Получим уравнение, которое известно как второе уравнение структуры Картана-Лаптева,

$$\begin{aligned} & d_3 \wedge' \omega^i_{i_1}(d_2) +' \omega^i_{i_3}(d_2) \wedge' \omega^{i_3}_{i_1}(d_3) - \\ & - \gamma^{i_3}_{i_1 i_2}\,{}'\omega^i_{i_3}(d_2) \wedge \omega^{i_2}(d_3) - d_3\gamma^i_{i_1 i_2} \wedge \omega^{i_2}(d_2) - \\ & - \gamma^i_{i_3 i_2}\,{}'\omega^{i_3}_{i_1}(d_3) \wedge \omega^{i_2}(d_2) + \gamma^i_{i_4 i_2}\gamma^{i_4}_{i_1 i_3}\omega^{i_2}(d_2) \wedge \omega^{i_3}(d_3) - \\ & - \gamma^i_{i_1 i_3}\,{}'\omega^{i_3}_{i_2}(d_3) \wedge \omega^{i_2}(d_2) + \\ & + \gamma^i_{i_1 i_4}\gamma^{i_4}_{i_2 i_3}\omega^{i_2}(d_2) \wedge \omega^{i_3}(d_3) = 0\,. \end{aligned} \tag{119}$$

В Лекции 14 эти уравнения использовалось для описания калибровочного поля.

3. Обратная функциональная зависимость $x^k(y^i)$

Обратимся к разложению (46). Теперь дифференциалы Dy, входящие в каждое из слагаемых, имеют свое направление. Поэтому ряд Тейлора записывается следующим образом

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) &+ \big(x^k_{,i} + x^k_i\big)\,Dy^i + \\ &+ \big(x^k_{,i_1,i_2} + x^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2}\big)\,D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} + \\ &+ \big(x^k_{,i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2,i_3} + \\ &\qquad + x^k_{i_1 i_2 i_3}\big)\,D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} + \dots \end{aligned}$$

Здесь производные

$$x^k_{,i} = \frac{Dx^k}{Dy^i}\,, \quad x^k_{,i_1,i_2} = \frac{D_2 D_1 x^k}{D_2 y^{i_2} D_1 y^{i_1}}\,,$$

$$x^k_{,i_1,i_2,i_3} = \frac{D_3 D_2 D_1 x^k}{D_3 y^{i_3} D_2 y^{i_2} D_1 y^{i_1}}\,, \quad \dots$$

С учетом введенных нами коэффициентов

$$\begin{aligned} \tilde{l}^k_i &= x^k_{,i} + x^k_i\,, \\ \tilde{l}^k_{i_1 i_2} &= x^k_{,i_1,i_2} + x^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2}\,, \\ \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} &= x^k_{,i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2 i_3}\,, \\ & \dots \end{aligned}$$

ряд Тейлора запишется

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) &+ \tilde{l}^k_i\,Dy^i + \tilde{l}^k_{i_1 i_2} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} + \\ &+ \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} + \\ &+ \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3 i_4} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} D_4 y^{i_4} + \dots \end{aligned}$$

С использованием дифференциала d имеем

$$x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) + dx^k + d_2 d_1 x^k + d_3 d_2 d_1 x^k + \dots \tag{120}$$

Используя оператор частного дифференцирования

$$Y_i \equiv \frac{\partial}{Dy^i}\,,$$

получим

$$\tilde{l}^k_i = \frac{\partial x^k}{Dy^i} = Y_i(x^k)\,, \quad \tilde{l}^k_{i_1 i_2} = \frac{\partial_2 \partial_1 x^k}{D_2 y^{i_1} D_1 y^{i_2}} = Y_{i_2} Y_{i_1}(x^k)\,,$$

$$\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} = \frac{\partial_3 \partial_2 \partial_1 x^k}{D_3 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_1 y^{i_3}} = Y_{i_3} Y_{i_2} Y_{i_1}(x^k)\,, \quad \dots$$

А ряд Тейлора запишем так

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) &+ \frac{\partial x^k}{Dy^i}\,Dy^i + \\ &+ \frac{\partial_2 \partial_1 x^k}{D_2 y^{i_1} D_1 y^{i_2}}\,D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} + \\ &+ \frac{\partial_3 \partial_2 \partial_1 x^k}{D_3 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_1 y^{i_3}}\,D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} + \dots \end{aligned}$$

или

$$x^k(y^i+Dy^i)=x^k(y^i)+Y_i(x^k)Dy^i+\\+Y_{i_2}Y_{i_1}(x^k)D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}+\\+Y_{i_3}Y_{i_2}Y_{i_1}(x^k)D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}+\dots$$

Ряд Тейлора (53) запишется в следующем виде

$$x^k(y^i+Dy^i)=x^k(y^i)+dx^k+d_2\tilde{l}^k_{i_1}D_1y^{i_1}+\\+d_3\tilde{l}^k_{i_1i_2}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}+d_4\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}+\dots$$

1. *Касательное разложение*

Ряд Тейлора (54), соответствующий касательному разложению, приобретает вид

$$l^i_k(x^k(y^i+Dy^i)-x^k(y^i))=Dy^i+l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}+\\+l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}+\\+l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3i_4}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}D_4y^{i_4}+\dots$$

Объект связности (55) в касательном пространстве Y

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}=l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2}$$

несимметричен по нижним индексам и может быть представлен в виде суммы

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}=\tilde{\Gamma}^i_{[i_1i_2]}+\tilde{\Gamma}^i_{\langle i_1i_2\rangle}\,.$$

Слагаемое

$$\tilde{\Gamma}^i_{[i_1i_2]}\quad\text{обозначается}\quad\tilde{T}^i_{i_1i_2}$$

и называется *тензором кручения в касательном пространстве* Y. Калибровочное преобразование (56) тензора кручения не зависит от производной $x^k_{,i}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$\tilde{T}^i_{i_1i_2}=l^i_k\tilde{x}^k_{[i_1,i_2]}+\tilde{t}^i_{i_1i_2}\,,$$

где введено обозначение

$$\tilde{t}^i_{i_1i_2}=\tilde{\gamma}^i_{[i_1i_2]}=l^i_kx^k_{[i_1i_2]}\,.$$

В разделе IV.5 было показано, что

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}=-\Gamma^i_{i_1i_2}$$

Объект кривизны (57) в касательном пространстве Y

$$\tilde{R}^i_{i_1i_2i_3}=l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}$$

также несимметричен по нижним индексам. Особое значение имеет объект кривизны, антисимметричный по последним двум индексам

$$\tilde{R}^i_{i_1[i_2i_3]}\,.$$

Он называется *тензором кривизны или тензором калибровочного поля в касательном пространстве* Y.

Калибровочное преобразование (58) тензора кривизны не зависит от производной $x^k_{,i}$, то есть не зависит от преобразований системы координат и приобретает вид

$$\tilde{R}^i_{i_1[i_2i_3]}=l^i_k\tilde{x}^k_{i_1[i_2,i_3]}+\tilde{r}^i_{i_1[i_2i_3]}=l^i_k\frac{D\tilde{l}^k_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}}+\tilde{r}^i_{i_1i_2i_3}\,,$$

где введено обозначение

$$\tilde{r}^i_{i_1i_2i_3}=l^i_kx^k_{i_1i_2i_3}\,.$$

Используя соотношения (60), получим выражение тензора кривизны через объекты связности

$$\tilde{R}^i_{i_1[i_2i_3]}=\frac{D\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}}-\frac{D\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_3}}{Dy^{i_2}}+\tilde{\Gamma}^i_{i_4i_3}\tilde{\Gamma}^{i_4}_{i_1i_2}-\tilde{\Gamma}^i_{i_4i_2}\tilde{\Gamma}^{i_4}_{i_1i_3}\,.\tag{121}$$

Из (92) следует, что тензор кривизны $\tilde{R}^i_{i_1[i_2i_3]}$ выражается через коэффициенты связности $\Gamma^i_{i_1i_2}$ следующим образом

$$\tilde{R}^i_{i_1[i_2i_3]}=\frac{D\Gamma^i_{i_1i_3}}{Dy^{i_2}}-\frac{D\Gamma^i_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}}+\Gamma^i_{i_4i_3}\Gamma^{i_4}_{i_1i_2}-\Gamma^i_{i_4i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1i_3}\,.\tag{122}$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в касательном пространстве приобретает вид

$$l^i_k(x^k(y^i+Dy^i)-x^k(y^i))=Dy^i+\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}Dy^{i_1}_1D_2y^{i_2}+\\+\tilde{R}^i_{i_1i_2i_3}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}+\\+\tilde{R}^i_{i_1i_2i_3i_4}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}D_4y^{i_4}+\dots$$

2. *Собственное разложение*

Ряд Тейлора (62), соответствующий собственному разложению, приобретает вид

$$x^k(y^i+Dy^i)=x^k(y^i)+dx^k+(\tilde{l}^k_{i_1i_2}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2})\,d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}+\\+(\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2}\,l^{i_3}_{k_3})\,d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}+\\+(\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3i_4}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2}\,l^{i_3}_{k_3}\,l^{i_4}_{k_4})\,d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}d_4x^{k_4}+\dots$$

Объект связности (63) в собственном пространстве X

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}=\tilde{l}^k_{i_1i_2}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2}\,.$$

несимметричен по нижним индексам и может быть представлен в виде суммы

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}=\tilde{\Gamma}^k_{[k_1k_2]}+\tilde{\Gamma}^k_{\langle k_1k_2\rangle}\,.$$

Слагаемое

$$\tilde{\Gamma}^k_{[k_1k_2]}\quad\text{обозначается}\quad\tilde{T}^k_{k_1k_2}$$

и называется *тензором кручения в собственном пространстве* X. Калибровочное преобразование (64) тензора кручения не зависит от производной $x^k_{,i}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$\tilde{T}^k_{k_1k_2} = \tilde{x}^k_{[i_1,i_2]}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} + \tilde{t}^k_{k_1k_2} = \frac{D\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2}\,,$$

где введено обозначение

$$\tilde{t}^k_{k_1k_2} = x^k_{[i_1i_2]}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\,.$$

В разделе IV.5 было показано, что

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} = -\Gamma^k_{k_1k_2}\,.$$

Объект кривизны (65) в собственном пространстве X

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}$$

также несимметричен по нижним индексам. Особое значение имеет объект кривизны, антисимметричный по последним двум индексам

$$\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]}\,.$$

Он называется *тензором кривизны или тензором калибровочного поля в собственном пространстве* X. Калибровочное преобразование (66) тензора кривизны не зависит от производной $x^k_{,i}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} = \tilde{x}^k_{i_1[i_2,i_3]}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} + \tilde{r}^k_{k_1[k_2k_3]}\,,$$

где введено обозначение

$$\tilde{r}^k_{k_1[k_2k_3]} = x^k_{i_1[i_2i_3]}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\,.$$

Используя соотношение (68), получим выражение тензора кривизны через объекты связности

$$\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} = \frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} - \frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} + \tag{123}$$
$$+\tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3} - \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_3}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_2} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_2k_3} - \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_3k_2}\,.$$

Из (85) следует, что тензор кривизны $\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]}$ выражается через коэффициенты связности $\Gamma^k_{k_1k_2}$ следующим образом

$$\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} = \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} - \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \tag{124}$$
$$+\Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} - \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} + \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3} - \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_3k_2}\,.$$

Для коэффициентов связности, симметричных по нижним индексам, отсюда следует классическое выражение для тензора кривизны

$$\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} = \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} - \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} - \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2}\,.$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в собственном пространстве приобретает вид

$$x^k(y^i+Dy^i) = x^k(y^i) + dx^k + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} +$$
$$+\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} +$$
$$+\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3k_4} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} d_4x^{k_4} + \ldots$$

3. *Уравнения структуры в системе отсчета* X

Для направленного дифференцирования первое уравнение структуры (71) приобретает вид

$$d_2d_1x^k = \tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)d_1x^{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2}\,. \tag{125}$$

После антисимметризации получим первое уравнение структуры Картана

$$d_2\wedge d_1x^k = \tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)\wedge d_1x^{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2}\,.$$

Если вместо дифференциальных форм $\tilde{\omega}^k_{k_1}$ использовать дифференциальные формы

$${}'\tilde{\omega}^k_{k_1} = \tilde{\omega}^k_{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_2}\,,$$

получим первое уравнение структуры в следующем виде

$$d_2d_1x^k = {}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)d_1x^{k_1}\,. \tag{126}$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде

$$d_2d_1x^k - \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} = 0\,. \tag{127}$$

После антисимметризации дифференциалов имеем

$$d_2\wedge d_1x^k - \tilde{\Gamma}^k_{[k_1k_2]} d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2} = 0\,. \tag{128}$$

Для направленного дифференцирования второе уравнение структуры (74) приобретает вид

$$d_3d_2d_1x = (\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}(D_3) + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} d_3x^{k_3}) d_1x^{k_1} d_2x^{k_2}\,. \tag{129}$$

Если вместо дифференциальных форм $\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}$ использовать дифференциальные формы

$${}'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} = \tilde{\omega}^k_{k_1k_2} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_3}\,.$$

получим второе уравнение структуры в следующем виде

$$d_3d_2d_1x^k = {}'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}(D_3)d_1x^{k_1} d_2x^{k_2}\,. \tag{130}$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, используя первое уравнение структуры (126),

$$d_3d_2d_1x^k = d_3\,{}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)d_1x^{k_1} + {}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)d_3d_1x^{k_1} =$$
$$= d_3\,{}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)d_1x^{k_1} + {}'\tilde{\omega}^k_{k_4}(D_2)\,{}'\tilde{\omega}^{k_4}_{k_1}(D_3)d_1x^{k_1}\,.$$

Используя это соотношение, запишем второе уравнение структуры в следующем виде

$$d_3\,{}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2) + {}'\tilde{\omega}^k_{k_2}(D_2)\,{}'\tilde{\omega}^{k_2}_{k_1}(D_3) = {}'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}(D_3) d_2x^{k_2}\,. \tag{131}$$

Антисимметризация этого уравнения по дифференциалам дает второе уравнение структуры Картана

$$d_3\wedge{}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)+{}'\tilde{\omega}^k_{k_2}(D_2)\wedge{}'\tilde{\omega}^{k_2}_{k_1}(D_3) = {}'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}(D_3)\wedge d_2x^{k_2}\,.$$

Второе уравнение структуры (130) можно переписать в следующем виде

$$d_3d_2d_1x^k - \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3} = 0\,. \tag{132}$$

Антисимметризация этого уравнения по дифференциалам d_2 и d_3 приводит к второму уравнению структуры с участием тензора кривизны

$$d_3\wedge d_2d_1x^k - \tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}\wedge d_3x^{k_3} = 0\,. \tag{133}$$

4. Абсолютное дифференцирование

Для направленного дифференцирования абсолютные дифференциалы (96), (97), (98) записываются следующим образом

$$\mathcal{D}x^k = dx^k\,, \tag{134}$$

$$\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1x^k = d_2d_1x^k + \Gamma^k_{k_1k_2}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}\,, \tag{135}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1x^k &= d_3d_2d_1x^k + \Gamma^k_{k_4k_3}d_2d_1x^{k_4}d_3x^{k_3} + \\ &+ \Gamma^k_{k_4k_2}d_3d_1x^{k_4}d_2x^{k_2} + \Gamma^k_{k_1k_4}d_1x^{k_1}d_3d_2x^{k_4} + \\ &+ R^k_{k_1k_2k_3}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}\,.\end{aligned} \tag{136}$$

Запишем уравнение (135) с учетом (134) в виде

$$\mathcal{D}_2(d_1x^k) = d_2(d_1x^k) + \Gamma^k_{k_1k_2}(d_1x^{k_1})d_2x^{k_2}$$

и предположим, что существует такой вектор A^k, который преобразуется подобно вектору d_1x^k. Тогда для этого вектора выполняется соотношение, подобное вышеуказанному

$$\mathcal{D}A^k = dA^k + \Gamma^k_{k_1k_2}A^{k_1}dx^{k_2}\,.$$

Если теперь положить, что координаты x^k являются независимыми, то можно записать

$$\frac{\mathcal{D}A^k}{\partial x^{k_2}} = \frac{\partial A^k}{\partial x^{k_2}} + \Gamma^k_{k_1k_2}A^{k_1}\,.$$

Полученное выражение представляет собой *абсолютную* производную вектора A^k, обозначаемую $A^k_{;k_2}$.

Запишем теперь уравнение (136) с учетом (134) в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3\mathcal{D}_2(d_1x^k) &= d_3d_2(d_1x^k) + \Gamma^k_{k_4k_3}d_2(d_1x^{k_4})d_3x^{k_3} + \\ &+ \Gamma^k_{k_4k_2}d_3(d_1x^{k_4})d_2x^{k_2} + \Gamma^k_{k_1k_4}(d_1x^{k_1})d_3d_2x^{k_4} + \\ &+ R^k_{k_1k_2k_3}(d_1x^{k_1})d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}\,.\end{aligned}$$

Для вектора A^k, подобного вектору d_1x^k, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3\mathcal{D}_2A^k &= d_3d_2A^k + \Gamma^k_{k_4k_3}d_2A^{k_4}d_3x^{k_3} + \\ &+ \Gamma^k_{k_4k_2}d_3A^{k_4}d_2x^{k_2} + \Gamma^k_{k_1k_4}A^{k_1}d_3d_2x^{k_4} + \\ &+ R^k_{k_1k_2k_3}A^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}\,.\end{aligned} \tag{137}$$

Рассмотрим частный случай этого соотношения, когда $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$, а координаты x^k являются независимыми, тогда

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{D}^2A^k}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}} = \frac{\partial^2A^k}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}} &+ \Gamma^k_{k_4k_3}\frac{\partial A^{k_4}}{\partial x^{k_2}} + \\ &+ \Gamma^k_{k_4k_2}\frac{\partial A^{k_4}}{\partial x^{k_3}} + R^k_{k_1\langle k_2k_3\rangle}A^{k_1}\,.\end{aligned}$$

Рассмотрим другой частный случай, когда в соотношении (137) выполнена антисимметризация по дифференциалам $\mathcal{D}_3$ и $\mathcal{D}_2$, а координаты x^k являются независимыми, тогда

$$\mathcal{D}_3\wedge\mathcal{D}_2A^k = R^k_{k_1[k_2k_3]}A^{k_1}d_2x^{k_2}\wedge d_3x^{k_3}\,.$$

Здесь тензор кривизны $R^k_{k_1[k_2k_3]}$ определяется соотношением (104)

$$R^k_{k_1[k_2k_3]} = \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} - \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} + \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} - \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3}\,.$$

Это соотношение имеет тот смысл, что при обходе вектора, преобразующегося по правилам искривленного пространства, вдоль замкнутого контура в системе отсчета этот вектор меняет свое значение. Для сравнения рассмотрим аналогичное соотношение для случая, когда независимыми являются координаты y^i. Тогда из (133) для вектора A^k, подобного вектору d_1x^k имеем

$$d_3\wedge d_2A^k = \tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]}A^{k_1}d_2x^{k_2}\wedge d_3x^{k_3}\,.$$

Здесь тензор кривизны $\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]}$ определяется соотношением (124)

$$\begin{aligned}\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} &= \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} - \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \\ &+ \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} - \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} + \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3} - \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_3k_2}\,.\end{aligned}$$

VII. ТОЖДЕСТВА НА КОЭФФИЦИЕНТАХ РАЗЛОЖЕНИЯ

Выкладки этого раздела мы выполним для собственного прямого разложения[12]

$$y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + Dy^i + D_2D_1y^i + D_3D_2D_1y^i + \ldots$$

[12] Аналогичные выкладки можно проделать и для касательного прямого разложения и для обратного разложения как собственного, так и касательного.

с использованием коэффициентов связности и объектов кривизны

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + Dy^i + \Gamma^i_{i_1 i_2} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} + \\ + R^i_{i_1 i_2 i_3} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} + \\ + R^i_{i_1 i_2 i_3 i_4} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} D_4 y^{i_4} + \ldots \end{aligned} \tag{138}$$

В дальнейшем мы будем использовать вытекающие из этих разложений соотношения

$$D_3 D_2 D_1 y^i = R^i_{i_1 i_2 i_3} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3}\,, \tag{139}$$

$$D_4 D_3 D_2 D_1 y^i = R^i_{i_1 i_2 i_3 i_4} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} D_4 y^{i_4}\,, \tag{140}$$

$$\ldots$$

$$\begin{aligned} D_n D_{n-1} \ldots D_2 D_1 y^i = \\ = R^i_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_{n-1} y^{i_{n-1}} D_n y^{i_n}\,. \end{aligned} \tag{141}$$

Рассмотрим перестановочные соотношения между дифференциалами и соответствующие им перестановочные соотношения между компонентами объектов кривизны. Если при *симметризации* рассматриваются перестановки двух соседних дифференциалов между собой и соответственно двух соседних индексов объекта кривизны между собой, то перестановочные соотношения относятся к перестановке групп дифференциалов и соответственно к перестановке групп индексов между собой. Например[13],

$$\langle D_3, D_2 D_1 \rangle = D_3 D_2 D_1 + D_2 D_1 D_3$$

и, соответственно

$$R^i{}_{\langle i_1 i_2, i_3 \rangle} = R^i{}_{i_1 i_2 i_3} + R^i{}_{i_3 i_1 i_2}\,.$$

В дальнейшем мы будем опускать обозначение объекта кривизны и верхний индекс, а оперировать только с нижними индексами. В таком обозначении предыдущее выражение приобретает вид

$$\langle i_1 i_2, i_3 \rangle = i_1 i_2 i_3 + i_3 i_1 i_2\,.$$

В этом разделе нас будут интересовать такие комбинации перестановочных соотношений, которые составляют тождества. Начнем с перестановочного соотношения

$$\begin{aligned} [[D_3 D_2] D_1] = [D_3 D_2] D_1 - D_1 [D_3 D_2] = \\ = D_3 D_2 D_1 - D_2 D_3 D_1 - D_1 D_3 D_2 + D_1 D_2 D_3\,. \end{aligned}$$

Наряду с ним введем перестановочные соотношения, полученные из него циклической перестановкой индексов

$$\begin{aligned} [[D_1 D_3] D_2] = [D_1 D_3] D_2 - D_2 [D_1 D_3] = \\ = D_1 D_3 D_2 - D_3 D_1 D_2 - D_2 D_1 D_3 + D_2 D_3 D_1\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [[D_2 D_1] D_3] = [D_2 D_1] D_3 - D_3 [D_2 D_1] = \\ = D_2 D_1 D_3 - D_1 D_2 D_3 - D_3 D_2 D_1 + D_3 D_1 D_2\,. \end{aligned}$$

[13] Как обычно, треугольные скобки означают перестановку без изменения знака, а квадратные скобки означают перестановку с изменением знака.

Сравнивая эти перестановочные соотношения, замечаем, что имеет место тождество

$$[[D_3 D_2] D_1] + [[D_1 D_3] D_2] + [[D_2 D_1] D_3] \equiv 0\,. \tag{142}$$

Это так называемое тождество Якоби.

Введем следующее обозначение: будем обозначать сумму перестановочных соотношений, полученных из исходного циклической перестановкой индексов, стрелкой над исходным соотношением. Например,

$$[[D_3 D_2] D_1] + [[D_1 D_3] D_2] + [[D_2 D_1] D_3] = \overrightarrow{[[D_3 D_2] D_1]}\,.$$

Стрелка указывает направление циклической перестановки индексов. В этом обозначении тождество Якоби приобретает вид

$$\overrightarrow{[[D_3 D_2] D_1]} \equiv 0\,. \tag{143}$$

Этому соотношению соответствует тождество Якоби для объектов кривизны

$$\overleftarrow{[i_1, [i_2 i_3]]} \equiv 0\,. \tag{144}$$

Применяя вышеприведенные тождества к уравнению (139), получим в развернутом виде

$$\begin{aligned} R^i{}_{i_1 [i_2 i_3]} + R^i{}_{i_2 [i_3 i_1]} + R^i{}_{i_3 [i_1 i_2]} - \\ - R^i{}_{[i_2 i_3] i_1} - R^i{}_{[i_3 i_1] i_2} - R^i{}_{[i_1 i_2] i_3} \equiv 0\,. \end{aligned}$$

Если в некотором частном случае объект кривизны обладает следующим свойством

$$R^i{}_{[i_1 i_2] i_3} = 0\,,$$

то это тождество приобретает вид

$$R^i{}_{i_1 [i_2 i_3]} + R^i{}_{i_2 [i_3 i_1]} + R^i{}_{i_3 [i_1 i_2]} \equiv 0\,.$$

Полученное тождество представляет собой первое тождество Бианки для тензора кривизны.

Тождества (143) и (144) могут быть применены к любому слагаемому разложения (138), начиная с четвертого. Так применяя к уравнению (140) тождества (143) и (144), записанные в следующем виде

$$\overrightarrow{[[D_4 D_3] D_2]} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \overleftarrow{[i_2, [i_3 i_4]]} \equiv 0\,,$$

получим тождество

$$\begin{aligned} R^i{}_{i_1 i_2 [i_3 i_4]} + R^i{}_{i_1 i_3 [i_4 i_2]} + R^i{}_{i_1 i_4 [i_2 i_3]} - \\ - R^i{}_{i_1 [i_3 i_4] i_2} - R^i{}_{i_1 [i_4 i_2] i_3} - R^i{}_{i_1 [i_2 i_3] i_4} \equiv 0\,. \end{aligned}$$

Если в некотором частном случае второй объект кривизны обладает следующим свойством

$$R^i{}_{i_1 i_2 [i_3 i_4]} = 0\,,$$

то это тождество приобретает вид

$$R^i{}_{i_1 [i_3 i_4] i_2} + R^i{}_{i_1 [i_4 i_2] i_3} + R^i{}_{i_1 [i_2 i_3] i_4} \equiv 0\,.$$

Полученное тождество сводится в частном случае к второму тождеству Бианки для тензора кривизны.

В общем случае ситуация такова. На коэффициентах разложения (138) n-го порядка (содержащих n нижних индексов) имеют место тождества вида (143) (и соответственно (144)), число которых равно числу сочетаний из n элементов по три.

Рассмотрим теперь совместно следующие перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [i_1,[i_2i_3]] &= i_1[i_2i_3]-[i_2i_3]i_1 = \\ &= i_1i_2i_3 - i_1i_3i_2 - i_2i_3i_1 + i_3i_2i_1\,, \\ \langle\langle i_1i_2\rangle,i_3\rangle &= \langle i_1i_2\rangle i_3 + i_3\langle i_1i_2\rangle = \\ &= i_1i_2i_3 + i_2i_1i_3 + i_3ii_2 + i_3i_2i_1\,, \\ \langle\langle i_1i_3\rangle,i_2\rangle &= \langle i_1i_3\rangle i_2 + i_2\langle i_1i_3\rangle = \\ &= i_1i_3i_2 + i_3i_1i_2 + i_2i_1i_3 + i_2i_3i_1\,. \end{aligned} \tag{145}$$

Сравнивая (145) между собой, получим тождество

$$[i_1,[i_2i_3]] \equiv \langle\langle i_1i_2\rangle,i_3\rangle - \langle\langle i_1i_3\rangle,i_2\rangle\,. \tag{146}$$

Из полученного тождества и (144) следует тождество

$$\overleftarrow{\langle\langle i_1i_2\rangle,i_3\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle\langle i_1i_3\rangle,i_2\rangle}\,. \tag{147}$$

Таким образом, мы получили следующую совокупность тождеств

$$\begin{aligned} &\overleftarrow{[i_1,[i_2i_3]]} \equiv 0\,, \\ &[i_1,[i_2i_3]] \equiv \langle\langle i_1i_2\rangle,i_3\rangle - \langle\langle i_1i_3\rangle,i_2\rangle\,, \\ &\overleftarrow{\langle\langle i_1i_2\rangle,i_3\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle\langle i_1i_3\rangle,i_2\rangle}\,. \end{aligned} \tag{148}$$

Эта совокупность может быть записана иначе:

$$\begin{aligned} &\overleftarrow{[[i_1i_2],i_3]} \equiv 0\,, \\ &[[i_1i_2],i_3] \equiv \langle i_1,\langle i_2i_3\rangle\rangle - \langle i_2,\langle i_1i_3\rangle\rangle\,, \\ &\overleftarrow{\langle i_1,\langle i_2i_3\rangle\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_2,\langle i_1i_3\rangle\rangle}\,. \end{aligned} \tag{149}$$

Такая запись получается из предыдущей совокупности перестановкой и переобозначением индексов.

Рассмотрим теперь другую совокупность тождеств. Начнем с перестановочного соотношения

$$\begin{aligned} [i_1,\langle i_2i_3\rangle] &= i_1\langle i_2i_3\rangle - \langle i_2i_3\rangle i_1 = \\ &= i_1i_2i_3 + i_1i_3i_2 - i_2i_3i_1 - i_3i_2i_1\,. \end{aligned}$$

Наряду с ним введем перестановочные соотношения, полученные из него циклической перестановкой индексов

$$\begin{aligned} [i_2,\langle i_3i_1\rangle] &= i_2\langle i_3i_1\rangle - \langle i_3i_1\rangle i_2 = \\ &= i_2i_3i_1 + i_2i_1i_3 - i_3i_1i_2 - i_1i_3i_2\,, \\ [i_3,\langle i_1i_2\rangle] &= i_3\langle i_1i_2\rangle - \langle i_1i_2\rangle i_3 = \\ &= i_3i_1i_2 + i_3i_2i_1 - i_1i_2i_3 - i_2i_1i_3\,. \end{aligned}$$

Сравнивая эти перестановочные соотношения, замечаем, что имеет место тождество

$$\overleftarrow{[i_1,\langle i_2i_3\rangle]} = 0\,. \tag{150}$$

Рассмотрим теперь совместно следующие три перестановки:

$$\begin{aligned} [i_1,\langle i_2i_3\rangle] &= i_1\langle i_2i_3\rangle - \langle i_2i_3\rangle i_1 = \\ &= i_1i_2i_3 + i_1i_3i_2 - i_2i_3i_1 - i_3i_2i_1\,, \\ \langle[i_1i_2],i_3\rangle &= [i_1i_2]i_3 + i_3[i_1i_2] = \\ &= i_1i_2i_3 - i_2i_1i_3 + i_3i_1i_2 - i_3i_2i_1\,, \\ \langle[i_1i_3],i_2\rangle &= [i_1i_3]i_2 + i_2[i_1i_3] = \\ &= i_1i_3i_2 - i_3i_1i_2 + i_2i_1i_3 - i_2i_3i_1\,. \end{aligned} \tag{151}$$

Сравнение выражений (151) показывает, что выполняется тождество

$$[i_1,\langle i_2i_3\rangle] \equiv \langle[i_1i_2],i_3\rangle + \langle[i_1i_3],i_2\rangle\,. \tag{152}$$

Из полученного тождества и (150) следует тождество

$$\overleftarrow{\langle[i_1i_2],i_3\rangle} = -\overleftarrow{\langle[i_1i_3],i_2\rangle}\,.$$

Таким образом, мы получили другую совокупность тождеств

$$\begin{aligned} &\overleftarrow{[i_1,\langle i_2i_3\rangle]} \equiv 0\,, \\ &[i_1,\langle i_2i_3\rangle] \equiv \langle[i_1i_2],i_3\rangle - \langle[i_3i_1],i_2\rangle\,, \\ &\overleftarrow{\langle[i_1i_2],i_3\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle[i_3i_1],i_2\rangle}\,. \end{aligned} \tag{153}$$

Эта совокупность может быть записана иначе:

$$\begin{aligned} &\overleftarrow{[\langle i_1i_2\rangle,i_3]} \equiv 0\,, \\ &[\langle i_1i_2\rangle,i_3] \equiv \langle i_1,[i_2i_3]\rangle + \langle i_2,[i_1i_3]\rangle\,, \\ &\overleftarrow{\langle i_1,[i_2i_3]\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_2,[i_3i_1]\rangle}\,. \end{aligned} \tag{154}$$

Эта запись получается из предыдущей совокупности перестановкой и переобозначением индексов.

Из (148) и (153) следуют тождества

$$\overleftarrow{[i_1,i_2i_3]} \equiv 0 \qquad \text{и} \qquad \overleftarrow{\langle i_1i_2,i_3\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_3i_1,i_2\rangle}\,.$$

Из (149) и (154) следуют тождества

$$\overleftarrow{[i_1i_2,i_3]} \equiv 0 \qquad \text{и} \qquad \overleftarrow{\langle i_1,i_2i_3\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_3,i_1i_2\rangle}\,.$$

Легко проверить, что также выполняются тождества:

$$\begin{aligned} &\overleftarrow{[i_1,i_2i_3i_4]} \equiv 0\,, &&\overleftarrow{\langle i_1i_2i_3,i_4\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_4i_1i_2,i_3\rangle}\,, \\ &\overleftarrow{[i_1i_2,i_3i_4]} \equiv 0\,, &&\overleftarrow{\langle i_1i_2,i_3i_4\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_3i_4,i_1i_2\rangle}\,, \\ &\overleftarrow{[i_1i_2i_3,i_4]} \equiv 0\,, &&\overleftarrow{\langle i_1,i_2i_3i_4\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_2,i_3i_4i_1\rangle}\,. \end{aligned}$$

И в общем случае

$$\overleftarrow{[i_1 i_2 \dots i_k, i_{k+1} \dots i_p]} \equiv 0 \quad \text{и}$$

$$\overleftarrow{\langle i_1 i_2 \dots i_k, i_{k+1} \dots i_p \rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_m i_{m+1} \dots i_{m+k}, i_{m+k+1} \dots i_{m+p} \rangle}\,.$$

где k, m и p произвольны.

На этом мы заканчиваем лекцию.

VIII. ВЫВОДЫ

- Искривленное дифференцирование функции $y(x)$ определяется последовательностью коэффициентов

  $$y^i_k\,, \quad y^i_{k_1 k_2}\,, \quad y^i_{k_1 k_2 k_3}\,, \quad y^i_{k_1 k_2 k_3 k_4}\,, \quad \dots\,.$$

  В общем случае они несимметричны по нижним индексам.

- Искривленное дифференцирование требует введения дифференциалов двух типов: один из них относится к искривленному пространству (он обозначен нами D), а второй относится к пространству системы отсчета (он обозначен d).

- Объекты связности и кривизны в собственном пространстве Y

  $$\Gamma^i_{i_1 i_2}\,, \quad R^i_{i_1 i_2 i_3}\,, \quad R^i_{i_1 i_2 i_3 i_4}\,, \quad \dots$$

  и объекты связности и кривизны в касательном пространстве X

  $$\Gamma^k_{k_1 k_2}\,, \quad R^k_{k_1 k_2 k_3}\,, \quad R^k_{k_1 k_2 k_3 k_4}\,, \quad \dots$$

  определяются через коэффициенты указанной последовательности.

- Искривленное дифференцирование обратной функции $x(y)$ определяется последовательностью коэффициентов

  $$x^k_i\,, \quad x^k_{i_1 i_2}\,, \quad x^k_{i_1 i_2 i_3}\,, \quad x^k_{i_1 i_2 i_3 i_4}\,, \quad \dots\,.$$

  В общем случае они также несимметричны по нижним индексам. Эта последовательность связана с предыдущей условием

  $$y(x(y)) = y\,.$$

- Объекты связности и кривизны в собственном пространстве X

  $$\tilde{\Gamma}^k_{k_1 k_2}\,, \quad \tilde{R}^k_{k_1 k_2 k_3}\,, \quad \tilde{R}^k_{k_1 k_2 k_3 k_4}\,, \quad \dots\,.$$

  и объекты связности и кривизны в касательном пространстве Y

  $$\tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2}\,, \quad \tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3}\,, \quad \tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3 i_4}\,, \quad \dots\,.$$

  определяются через коэффициенты указанной последовательности.

- Уравнения структуры и внешнее дифференциальное исчисление дифференциальных форм Картана-Лаптева есть частный вид искривленного дифференцирования.

- Абсолютный дифференциал n-го порядка связан линейным преобразованием с дифференциалом n-го порядка в искривленном пространстве.

- Объекты кривизны удовлетворяют тождествам, обобщающим тождество Якоби.