Лекция 23. Пространство-время как искривленное пространство

А. А. Кецарис
(14 ноября 2008)

В этой Лекции мы рассматриваем искривленное пространство-время и его представление в пространстве-времени, принятом за систему отсчета. Выделяются математические понятия, которые позволяют описать такое представление. Это прежде всего *группа сдвигов*, *вектор*, *скалярное произведение векторов*. Указанные понятия переносятся в искривленное пространство-время. Построенное искривленное пространство должно заменить геометрию Римана как основу теории гравитации.

I. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей Лекции было показано следующее.

1. Основополагающим понятием, относящимся к пространству-времени, является просто транзитивная абелева группа движений – группа сдвигов.

2. Группа сдвигов позволяет рассматривать пространство-время как векторное пространство.

3. Из условия, что координаты в пространстве и времени есть результат измерения, следует, что пространство-время нужно рассматривать как векторное пространство, снабженное скалярным произведением векторов.

Реализацией такого пространства могут служить абсолютно твердые тела и их сдвиги. Находясь в гравитационном поле, абсолютно твердые тела испытывают силовое воздействие.

Другим пространством могут служить пылевые образования, находящиеся в гравитационном поле. Сдвиг пылевых образований сопровождается их деформацией. Однако эти деформации обнаруживаются только с помощью абсолютно твердых тел. Обнаружить деформацию исследуемого пылевого образования, используя другое пылевое образование, нельзя.

Между силами, действующими на абсолютно твердые тела, и деформациями пылевого образования существует взаимосвязь.

Отсюда возникает следующая математическая конструкция, предназначенная для исследования поведения тел в силовом поле. На одном и том же точечном многообразии определены две группы сдвигов, которые обозначим G_x и G_y. Движение точки под действием одного либо другого типа сдвигов приводит к разным типам линий сдвигов, разным типам векторов и разным типам векторных пространств, которые обозначим X и Y. Требование измеряемости пространств приводит к необходимости введения двух типов скалярных произведений, соответственно в пространствах X и Y.

При этом ставится задача представления группы сдвигов, векторов, закона сложения векторов, закона умножения вектора на число, скалярного произведения одного пространства, например Y, с помощью средств второго пространства, например X. Исследуемое пространство Y мы назовем *искривленным пространством*, а пространство-инструмент, с помощью которого осуществляется представление (исследование), назовем *системой отсчета*. Так как заранее неясно, да и несущественно какое из пространств выбрано за систему отсчета, то решение указанной задачи мы будем называть *общей теорией относительности*.

Далее приведем понятия и обозначения, относящиеся к системе отсчета и искривленному пространству. При этом мы в двух разных вариантах повторим соотношения, полученные в Лекции 22. Линии сдвигов в системе отсчета будем называть *прямыми*, а линии сдвигов в искривленном пространстве будем называть *геодезическими*.

Точечное многообразие

Группа сдвигов — G_x

Линия сдвигов – прямая

Пространство-время системы отсчета X

Вектор в системе отсчета $\mathbf{x}$

Базисный вектор на прямой $\mathfrak{E}$

Нормальная координата на прямой x

$\mathbf{x} = \mathfrak{E} \cdot x\,, \quad d\mathbf{x} = \mathfrak{E} \cdot dx$

Инвариантное уравнение прямой:

$\frac{d\mathbf{x}}{dx} = \mathfrak{E}\,, \quad \frac{d\mathfrak{E}}{dx} = 0\,, \quad \frac{d^2\mathbf{x}}{dx^2} = 0\,,$

Нормальные координаты в X — x^i

$i = 1, 2, 3, 4$

$\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot x^i\,, \quad d\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot dx^i$

Проекции вектора $\mathfrak{E}$ на $\mathfrak{E}_i$ — k^i

$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_i \cdot k^i$

Уравнение прямой в нормальных координатах:

$\mathfrak{E}_i \cdot \frac{dx^i}{dx} = \mathfrak{E}_i \cdot k^i\,, \quad \frac{dk^i}{dx} = 0\,, \quad \frac{d^2x^i}{dx^2} = 0$

Норма вектора $\mathfrak{E}$

$\langle \mathfrak{E}\,, \mathfrak{E} \rangle = 1$

Длина векторов $\mathbf{x}$, $d\mathbf{x}$

$\langle \mathfrak{E}\,, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathfrak{E}\,, \mathfrak{E} \cdot x \rangle = x\,,$

$\langle \mathfrak{E}\,, d\mathbf{x} \rangle = \langle \mathfrak{E}\,, \mathfrak{E} \cdot dx \rangle = dx$

Норма векторов $\mathbf{x}$, $d\mathbf{x}$

$\langle \mathbf{x}\,, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathfrak{E} \cdot x\,, \mathfrak{E} \cdot x \rangle = x^2\,,$

$\langle d\mathbf{x}\,, d\mathbf{x} \rangle = \langle \mathfrak{E} \cdot dx\,, \mathfrak{E} \cdot dx \rangle = dx^2$

$\langle \mathbf{x}\,, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathfrak{E}_i\,, \mathfrak{E}_k \rangle \cdot x^i \cdot x^k = x^2\,,$

$\langle d\mathbf{x}\,, d\mathbf{x} \rangle = \langle \mathfrak{E}_i\,, \mathfrak{E}_k \rangle \cdot dx^i \cdot dx^k = dx^2$

Метрический тензор в X — g_{ik}

$g_{ik} = \langle \mathfrak{E}_i\,, \mathfrak{E}_k \rangle$

Сопряженные базисные векторы в X — $\mathfrak{E}^i$,

$\langle \mathfrak{E}^i\,, \mathfrak{E}_k \rangle = \delta^i_k$

Произвольные координаты в X — y^α

$x^i(y^\alpha)$

Вектор $d\mathbf{x}$ в произвольных координатах

$d\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot dx^i = \mathfrak{E}_i \cdot \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^\alpha} \cdot dy^\alpha = \mathfrak{E}_\alpha \cdot dy^\alpha$

Базисные векторы в X

для произвольных координат — $\mathfrak{E}_\alpha$,

$\mathfrak{E}_\alpha(y) = \mathfrak{E}_i \cdot \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^\alpha}$

Норма вектора $d\mathbf{x}$

в произвольных координатах

$\langle d\mathbf{x}\,, d\mathbf{x} \rangle = \langle \mathfrak{E}_\alpha\,, \mathfrak{E}_\beta \rangle \cdot dy^\alpha \cdot dy^\beta = dx^2$

Метрический тензор в X

в произвольных координатах

$g_{\alpha\beta} = \langle \mathfrak{E}_\alpha\,, \mathfrak{E}_\beta \rangle = \langle \mathfrak{E}_i\,, \mathfrak{E}_k \rangle \cdot \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{\partial x^k(y)}{\partial y^\beta} = g_{ik} \cdot \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{\partial x^k(y)}{\partial y^\beta}$

Уравнение прямой в произвольных координатах:

$\frac{d^2\mathbf{x}}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\mathfrak{E}_\alpha \cdot \frac{dy^\alpha}{dx}\right) =$

$\mathfrak{E}_\alpha \cdot \left(\frac{d^2y^\alpha}{dx^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \frac{dy^\beta}{dx} \cdot \frac{dy^\gamma}{dx}\right) = 0$

Группа сдвигов — G_y

Линия сдвигов – геодезическая

Искривленное пространство-время Y

Вектор в искривленном пространстве-времени $\mathbf{y}$

Базисный вектор на геодезической $\mathfrak{N}$

Нормальная координата на геодезической y

$\mathbf{y} = \mathfrak{N} \cdot y\,, \quad d\mathbf{y} = \mathfrak{N} \cdot dy$

Инвариантное уравнение геодезической:

$\frac{d\mathbf{y}}{dy} = \mathfrak{N}\,, \quad \frac{d\mathfrak{N}}{dx} = 0\,, \quad \frac{d^2\mathbf{y}}{dy^2} = 0$

Нормальные координаты в Y — y^α

$\alpha = 1, 2, 3, 4$

$\mathbf{y} = \mathfrak{N}_\alpha \cdot y^\alpha\,, \quad d\mathbf{y} = \mathfrak{N}_\alpha \cdot dy^\alpha$

Проекции вектора $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{N}_\alpha$ — n^α

$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\alpha \cdot n^\alpha$

Уравнение геодезической в нормальных координатах:

$\mathfrak{N}_\alpha \cdot \frac{dy^\alpha}{dy} = \mathfrak{N}_\alpha \cdot n^\alpha\,, \quad \frac{dn^\alpha}{dy} = 0\,, \quad \frac{d^2y^\alpha}{dy^2} = 0$

Норма вектора $\mathfrak{N}$

$\langle \mathfrak{N}\,, \mathfrak{N} \rangle = 1$

Длина векторов $\mathbf{y}$, $d\mathbf{y}$

$\langle \mathfrak{N}\,, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathfrak{N}\,, \mathfrak{N} \cdot y \rangle = y\,,$

$\langle \mathfrak{N}\,, d\mathbf{y} \rangle = \langle \mathfrak{N}\,, \mathfrak{N} \cdot dy \rangle = dy$

Норма векторов $\mathbf{y}$, $d\mathbf{y}$

$\langle \mathbf{y}\,, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathfrak{N} \cdot y\,, \mathfrak{N} \cdot y \rangle = y^2\,,$

$\langle d\mathbf{y}\,, d\mathbf{y} \rangle = \langle \mathfrak{N} \cdot dy\,, \mathfrak{N} \cdot dy \rangle = dy^2$

$\langle \mathbf{y}\,, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathfrak{N}_\alpha\,, \mathfrak{N}_\beta \rangle \cdot y^\alpha \cdot y^\beta = y^2\,,$

$\langle d\mathbf{y}\,, d\mathbf{y} \rangle = \langle \mathfrak{N}_\alpha\,, \mathfrak{N}_\beta \rangle \cdot dy^\alpha \cdot dy^\beta = dy^2$

Метрический тензор в Y — $g_{\alpha\beta}$

$g_{\alpha\beta} = \langle \mathfrak{N}_\alpha\,, \mathfrak{N}_\beta \rangle$

Сопряженные базисные векторы в Y — $\mathfrak{N}^\alpha$,

$\langle \mathfrak{N}^\alpha\,, \mathfrak{N}_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta$

Произвольные координаты в Y — x^i

$y^\alpha(x^i)$

Вектор $d\mathbf{y}$ в произвольных координатах

$d\mathbf{y} = \mathfrak{N}_\alpha \cdot dy^\alpha = \mathfrak{N}_\alpha \cdot \frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^i} \cdot dx^i = \mathfrak{N}_i \cdot dx^i$

Базисные векторы в Y

для произвольных координат — $\mathfrak{N}_i$

$\mathfrak{N}_i(x) = \mathfrak{N}_\alpha \cdot \frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^i}$

Норма вектора $d\mathbf{y}$

в произвольных координатах

$\langle d\mathbf{y}\,, d\mathbf{y} \rangle = \langle \mathfrak{N}_i\,, \mathfrak{N}_k \rangle \cdot dx^i \cdot dx^k = dy^2$

Метрический тензор в Y

в произвольных координатах

$g_{ik} = \langle \mathfrak{N}_\alpha\,, \mathfrak{N}_\beta \rangle \cdot \frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial y^\beta(x)}{\partial x^k} = g_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial y^\beta(x)}{\partial x^k}$

Уравнение геодезической в произвольных координатах:

$\frac{d^2\mathbf{y}}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\mathfrak{N}_i \cdot \frac{dx^i}{dy}\right) =$

$\mathfrak{N}_i \cdot \left(\frac{d^2x^i}{dy^2} + \Gamma^i{}_{kl} \cdot \frac{dx^k}{dy} \cdot \frac{dx^l}{dy}\right) = 0$

II. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Сдвиги являются наиболее элементарным и примитивным движением. Одних сдвигов в X недостаточно для представления искривленных векторов в Y. Помимо сдвигов в X необходимо рассматривать линейные преобразования векторов в X. К ним относятся повороты, движения с постоянной скоростью, растяжения. Линейные преобразования универсальной алгебры пространства-времени рассматривались в Лекции 18. Здесь необходимо привлечь частный случай этих преобразований – линейные преобразования на векторном пространстве СТО. Множество этих линейных преобразований обозначим L. Линейные преобразования L осуществляют отображение X в себя

$$X \circ L \to X \,.$$

Указанные линейные преобразования, в отличие от тех линейных преобразований, которые введем далее, назовем линейными преобразованиями *первого порядка.*

Векторное пространство X совместно с линейными преобразованиями L образуют алгебру, которую обозначим

$$T_1 = X + L$$

и назовем *первой кинематической алгеброй**. Алгебра T_1 описывает более сложные движения, чем сдвиги, однако, как будет видно из дальнейшего, этих движений также недостаточно для представления искривленных векторов в общем случае.

Помимо движений алгебры T_1 необходимо рассматривать равномерные вращения, ускоренные движения, которые составляют линейные преобразования *второго порядка* $\mathsf{\Gamma}$. Линейные преобразования $\mathsf{\Gamma}$ осуществляют отображение X в пространство линейных преобразований первого порядка L

$$X \circ \mathsf{\Gamma} \to L \,.$$

Векторное пространство X совместно с линейными преобразованиями L и $\mathsf{\Gamma}$ образуют алгебру, которую обозначим

$$T_2 = X + L + \mathsf{\Gamma}$$

и назовем *второй кинематической алгеброй.*

В общем случае включение линейных преобразований n-го порядка, то есть отображений векторного пространства X на пространство линейных преобразований $(n-1)$-го порядка приводит к кинематической алгебре n-го порядка. Но для нашей цели – представления искривленных векторов – мы ограничимся третьей кинематической алгеброй, то есть

$$T_3 = X + L + \mathsf{\Gamma} + \mathsf{R} \,,$$

где R это множество линейных преобразований, осуществляющих отображение X в пространство линейных преобразований второго порядка $\mathsf{\Gamma}$

$$X \circ \mathsf{R} \to \mathsf{\Gamma} \,.$$

1. Первая кинематическая алгебра $T_1 = X + L$

Пространство-время X есть векторное пространство. Базисные векторы в X мы обозначили $\mathfrak{E}_i$.

Линейные преобразования L также составляют векторное пространство. Базисные векторы в L обозначим $I^k{}_i$. Разложение вектора линейного преобразования l по базисным векторам имеет вид

$$l = I^k{}_i \cdot l^i{}_k \,.$$

Введем векторное пространство $T_1 = X + L$, которое назовем *первым кинематическим*. Для того, чтобы T_1 было алгеброй, необходимо наряду с умножениями

$$X \circ X \,, \qquad L \circ L$$

рассматривать умножения

$$X \circ L \,, \qquad L \circ X$$

Указанные умножения определяются следующей таблицей умножений базисных векторов

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E}_i \circ \mathfrak{E}_k = \langle \mathfrak{E}_i \,, \mathfrak{E}_k \rangle = g_{ik} \\ &I^l{}_k \circ \mathfrak{E}_m = 0 \\ &\mathfrak{E}_k \circ I^i{}_m = \delta^i{}_k \cdot \mathfrak{E}_m \\ &I^l{}_k \circ I^i{}_m = \delta^i{}_k \cdot I^l{}_m + \delta^i{}_k \cdot \delta^l{}_m \,. \end{aligned} \tag{1}$$

В результате множество векторов T_1 становится алгеброй, которую мы назвали *первой кинематической*. Умножение векторов в первой кинематической алгебре запишем следующим образом

$$t = t_1 \circ t_2 \,.$$

Здесь $t, t_1, t_2 \in T_1$.

Заметим, что алгебра T_1 неассоциативна из-за наличия скалярного произведения. Например, не выполняется условие ассоциативности произведения:

$$(\mathfrak{E}_i \circ \mathfrak{E}_k) \circ I^m{}_l \neq \mathfrak{E}_i \circ (\mathfrak{E}_k \circ I^m{}_l) \,.$$

Действительно, справа имеем $g_{ik} \cdot I^m{}_l$, а слева $\delta^m{}_k \cdot g_{il}$. Поэтому при преобразованиях необходимо соблюдать порядок умножения векторов.

Квадрат длины вектора в этой алгебре равен

$$t^2 = g_{ik} \cdot x^i \cdot x^k + l^i{}_k \cdot l^k{}_i$$

Отметим, что алгебра пространства-времени X и алгебра линейных преобразований L являются подалгебрами первой кинематической алгебры T_1.

*Замечание: термин *первая* здесь имеет тот же смысл , что и *первая* в отношении к производной.

2. Вторая кинематическая алгебра $T_2 = X + L + \Gamma$

Далее для рассмотрения представления искривленных векторов нам понадобится обобщение первой кинематической алгебры, включающее в себя векторное пространство $\mathsf{\Gamma}$ линейных преобразований X в L. Линейные преобразования $\mathsf{\Gamma}$ составляют векторное пространство. Базисные векторы в $\mathsf{\Gamma}$ обозначим $J^{lk}{}_i$. Разложение вектора $\Gamma \in \mathsf{\Gamma}$ по базисным векторам имеет вид

$$\Gamma = J^{lk}{}_i \cdot \Gamma^i{}_{kl}\,.$$

Указанное обобщение мы назвали второй кинематической алгеброй

$$T_2 = X + L + \mathsf{\Gamma}\,.$$

Для того, чтобы определить эту алгебру, необходимо к ранее определенной таблице умножения базисных векторов первой кинематической алгебры T_1 (см. Лекцию 18) добавить произведения, в которых участвуют базисные векторы $J^{ik}{}_l$. Эти произведения вычислим на основании правил тензорной алгебры:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{E}_k \circ J^{pi}{}_m = \mathfrak{E}_k \circ \mathfrak{E}^p \otimes \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}_m = \\
&\quad \mathfrak{E}_k \otimes \mathfrak{E}^p \otimes \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}_m + \langle \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}^p \rangle \cdot \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}_m = \delta^p{}_k \cdot I^i{}_m\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&J^{nl}{}_k \circ \mathfrak{E}_m = \mathfrak{E}^n \otimes \mathfrak{E}^l \otimes \mathfrak{E}_k \circ \mathfrak{E}_m = \\
&\quad \mathfrak{E}^n \otimes \mathfrak{E}^l \otimes \mathfrak{E}_k \otimes \mathfrak{E}_m + \mathfrak{E}^n \otimes \mathfrak{E}^l \cdot \langle \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}_m \rangle = 0\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&I^l{}_k \circ J^{pi}{}_m = \mathfrak{E}^l \otimes \mathfrak{E}_k \circ \mathfrak{E}^p \otimes \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}_m = \\
&\quad \mathfrak{E}^l \otimes \mathfrak{E}_k \otimes \mathfrak{E}^p \otimes \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}_m + \mathfrak{E}^l \otimes \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}_m \cdot \langle \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}^p \rangle + \\
&\quad \mathfrak{E}_m \cdot \langle \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}^p \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^l, \mathfrak{E}^i \rangle = J^{li}{}_m \cdot \delta^p{}_k + \mathfrak{E}_m \cdot \delta^p{}_k \cdot g^{li}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&J^{nl}{}_k \circ I^i{}_m = \mathfrak{E}^n \otimes \mathfrak{E}^l \otimes \mathfrak{E}_k \circ \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}_m = \\
&\quad \mathfrak{E}^n \otimes \mathfrak{E}^l \otimes \mathfrak{E}_k \otimes \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}_m + \mathfrak{E}^n \otimes \mathfrak{E}^l \otimes \mathfrak{E}_m \cdot \langle \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}^i \rangle + \\
&\quad \mathfrak{E}^n \cdot \langle \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}^i \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^l, \mathfrak{E}_m \rangle = \\
&\qquad\qquad J^{nl}{}_m \cdot \delta^i{}_k + \mathfrak{E}^n \cdot \delta^i{}_k \cdot \delta^l{}_m = J^{nl}{}_m \cdot \delta^i{}_k\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&J^{nl}{}_k \circ J^{pi}{}_m = \mathfrak{E}^n \otimes \mathfrak{E}^l \otimes \mathfrak{E}_k \circ \mathfrak{E}^p \otimes \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}_m = \\
&\quad \mathfrak{E}^n \otimes \mathfrak{E}^l \otimes \mathfrak{E}_k \otimes \mathfrak{E}^p \otimes \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}_m + \\
&\quad \mathfrak{E}^n \otimes \mathfrak{E}^l \otimes \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}_m \cdot \langle \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}^p \rangle + \\
&\quad \mathfrak{E}^n \otimes \mathfrak{E}_m \cdot \langle \mathfrak{E}^l, \mathfrak{E}^i \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}^p \rangle + \\
&\quad \langle \mathfrak{E}^n, \mathfrak{E}_m \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^l, \mathfrak{E}^i \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}^p \rangle = \\
&\qquad\qquad I^n{}_m \cdot \delta^{li} \cdot \delta^p{}_k + \delta^n{}_m \cdot \delta^{li} \cdot \delta^p{}_k\,.
\end{aligned}$$

Здесь из конечных выражений исключены базисные векторы, выходящие за рамки рассматриваемой алгебры.

В результате вторая кинематическая алгебра определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_i \circ \mathfrak{E}_k &= \langle \mathfrak{E}_i\,, \mathfrak{E}_k \rangle = g_{ik} \\
I^k{}_l \circ \mathfrak{E}_i &= 0 \\
\mathfrak{E}_k \circ I^i{}_m &= \delta^i{}_k \cdot \mathfrak{E}_m \\
I^l{}_k \circ I^i{}_m &= \delta^i{}_k \cdot I^l{}_m + \delta^i{}_k \cdot \delta^l{}_m \\
\mathfrak{E}_k \circ J^{pi}{}_m &= \delta^p{}_k \cdot I^i{}_m \\
J^{nl}{}_k \circ \mathfrak{E}_m &= 0 \\
I^l{}_k \circ J^{pi}{}_m &= J^{li}{}_m \cdot \delta^p{}_k + \mathfrak{E}_m \cdot \delta^p{}_k \cdot g^{li} \\
J^{nl}{}_k \circ I^i{}_m &= J^{nl}{}_m \cdot \delta^i{}_k \\
J^{nl}{}_k \circ J^{pi}{}_m &= I^n{}_m \cdot g^{li} \cdot \delta^p{}_k + \delta^n{}_m \cdot g^{li} \cdot \delta^p{}_k\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Квадрат длины вектора в этой алгебре равен

$$t^2 = g_{ik} \cdot x^i \cdot x^k + l^i{}_k \cdot l^k{}_i + \Gamma^i{}_{kl} \cdot \Gamma^l{}_{qi} \cdot g^{kq}\,.$$

3. Третья кинематическая алгебра $T_3 = X + L + \mathsf{\Gamma} + \mathsf{R}$

Полную таблицу произведений базисных векторов в T_3 здесь приводить не будем. Она составляется аналогично тому, как это было сделано по отношению к второй кинематической алгебре T_2. Мы приведем только одно соотношение, которое нам понадобится в дальнейшем.

Базисные векторы в множестве линейных преобразований R обозначим $K^{nlk}{}_i$. Тогда отображение

$$X \circ R \to \Gamma$$

по отношению к базисным векторам запишется так

$$\mathfrak{E}_n \circ K^{mlk}{}_i = \delta^m{}_n \cdot J^{lk}{}_i\,. \tag{3}$$

Вектор $R \in \mathsf{R}$ в общем случае равен

$$R = K^{mlk}{}_i \cdot R^i{}_{klm}\,.$$

Квадрат длины вектора в этой алгебре равен

$$\begin{aligned}
t^2 = g_{ik} \cdot x^i \cdot x^k + l^i{}_k \cdot l^k{}_i + \Gamma^i{}_{kl} \cdot \Gamma^l{}_{qi} \cdot g^{kq} + \\
R^i{}_{klm} \cdot R^m{}_{qsi} \cdot g^{ks} \cdot g^{lq}\,.
\end{aligned}$$

III. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Решая задачу представления искривленного пространства-времени, сделаем следующее определение. Назовем $\mathbf{x}$-вектор и $\mathbf{y}$-вектор *соответствующими*, если их начала и концы совпадают (см. Рис. 1). Обозначать соответствие векторов будем следующим образом

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}\,.$$

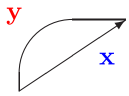

Рис.1

1. Первый дифференциал

Решение поставленной задачи представления начнем с того, что определим вектор системы отсчета, соответствующий дифференциалу $d\mathbf{y}$ в искривленном пространстве.

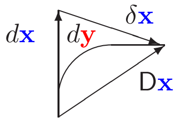

Рис.2

Из Рис. 2 следует, что этому вектору ставится в соответствие вектор

$$\mathsf{D}\mathbf{x} = d\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\,. \tag{4}$$

Итак, мы должны записать

$$\mathsf{D}\mathbf{x} \;\sim\; d\mathbf{y}\,. \tag{5}$$

Далее вектор $\mathsf{D}\mathbf{x}$ будем рассматривать как линейно преобразованный вектор $d\mathbf{x}$, то есть запишем

$$\mathsf{D}\mathbf{x} = d\mathbf{x} \circ l\,. \tag{6}$$

Здесь l – линейное преобразование на X, $l \in L$. Если воспользоваться координатной записью векторов $d\mathbf{x}$ и l:

$$d\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot dx^i\,, \quad l = I^k{}_i \cdot l^i{}_k$$

и правилами произведения базисных векторов (1), то получим координатную запись вектора $\mathsf{D}\mathbf{x}$

$$\mathsf{D}\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot l^i{}_k \cdot dx^k\,. \tag{7}$$

Дифференциал D назовем *дифференциалом представления*.

Соответствие векторов $d\mathbf{y}$ и $D\mathbf{x}$ необходимо дополнить соответствием скалярных произведений $\langle d\mathbf{y}\,, d\mathbf{y}\rangle$ и $\langle \mathsf{D}\mathbf{x}\,, \mathsf{D}\mathbf{x}\rangle$. Так как скалярные произведения есть числа, то указанное соответствие представляет собой равенство, то есть необходимо записать

$$\langle d\mathbf{y}\,, d\mathbf{y}\rangle = \langle \mathsf{D}\mathbf{x}\,, \mathsf{D}\mathbf{x}\rangle\,. \tag{8}$$

Если учесть, что

$$\langle d\mathbf{y}\,, d\mathbf{y}\rangle = dy^2\,,$$

где y – нормальная координата на геодезической, и обозначить

$$(\mathsf{D}x)^2 \equiv \langle \mathsf{D}\mathbf{x}\,, \mathsf{D}\mathbf{x}\rangle\,,$$

то получим

$$dy = \mathsf{D}x\,.$$

Используя (7) и (8), получим

$$dy^2 = \langle \mathsf{D}\mathbf{x}\,, \mathsf{D}\mathbf{x}\rangle = \langle \mathfrak{E}_i\,, \mathfrak{E}_k\rangle \cdot l^i{}_l \cdot l^k{}_m \cdot dx^l \cdot dx^m\,.$$

Или

$$dy^2 = g_{ik} \cdot l^i{}_l \cdot l^k{}_m \cdot dx^l \cdot dx^m\,. \tag{9}$$

Введем *метрический тензор*[*]

$$g_{lm} = g_{ik} \cdot l^i{}_l \cdot l^k{}_m\,, \tag{10}$$

тогда

$$dy^2 = g_{lm} \cdot dx^l \cdot dx^m\,.$$

Таким образом, мы получили линейный элемент и метрический тензор, используемые в *тетрадной* формулировке теории гравитации.

2. Второй дифференциал. Уравнение геодезической

Дифференцируя соотношение (5), получим следующее соответствие между вторыми дифференциалами

$$\mathsf{D}^2\mathbf{x} \;\sim\; d^2\mathbf{y}\,. \tag{11}$$

Запишем дифференциал $\mathsf{D}^2\mathbf{x}$ с учетом (6). Получим

$$\mathsf{D}(\mathsf{D}\mathbf{x}) = \mathsf{D}(d\mathbf{x} \circ l) = \mathsf{D}(d\mathbf{x}) \circ l + d\mathbf{x} \circ \mathsf{D}(l)\,. \tag{12}$$

Это выражение преобразуем, полагая, во-первых, что

$$\mathsf{D}(d\mathbf{x}) = d(d\mathbf{x})\,. \tag{13}$$

И, во-вторых, подчиним $\mathsf{D}(l)$ – дифференциал представления от l – соотношениям, аналогичным (4) и (6):

$$\mathsf{D}l = dl + \delta l\,, \tag{14}$$

далее вектор $\mathsf{D}l$ будем рассматривать как линейно преобразованный вектор $d\mathbf{x}$, то есть запишем[†]

$$\mathsf{D}l = d\mathbf{x} \circ \Gamma \circ l\,. \tag{15}$$

Здесь Γ – линейное преобразование $X \to L$, где $\Gamma \in \mathsf{\Gamma}$.

---

[*]Для того, чтобы отличать этот тензор от метрического тензора системы отсчета, будем называть его *метрический тензор представления.*

[†]Порядок умножения сомножителей в правой части может быть любым. Далее мы воспользуемся следующим порядком умножения

$$(d\mathbf{x} \circ \Gamma) \circ l\,.$$

Полагая

$$\delta l = d\mathbf{x} \circ \gamma \circ l\,,$$

соотношение (14) можно записать так

$$\mathsf{D}l = dl + d\mathbf{x} \circ \gamma \circ l\,.$$

Здесь $\gamma \in \Gamma$.

Сравнивая это выражение и (15), получим

$$d\mathbf{x} \circ \Gamma = dl \circ l^{-1} + d\mathbf{x} \circ \gamma\,. \tag{16}$$

Здесь l^{-1} линейное преобразование, обратное линейному преобразованию l, то есть для которого

$$l \circ l^{-1} = I^k{}_i \cdot \delta^i{}_k\,.$$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$, l, Γ и γ:

$$d\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot dx^i\,, \quad l = I^k{}_i \cdot l^i{}_k\,,$$
$$\Gamma = J^{lk}{}_i \cdot \Gamma^i{}_{kl}\,, \quad \gamma = J^{lk}{}_i \cdot \gamma^i{}_{kl}$$

и правила произведения базисных векторов (2), получим уравнение (16) в координатной записи*

$$\Gamma^i{}_{kl} \cdot dx^l = (l^{-1})^i{}_n \cdot dl^n{}_k + \gamma^i{}_{kl} \cdot dx^l\,.$$

Отсюда

$$\Gamma^i{}_{kl} = (l^{-1})^i{}_n \cdot l^n{}_{k,l} + \gamma^i{}_{kl}\,. \tag{17}$$

Здесь и далее индекс, отделенный запятой, означает частное дифференцирование по координате с этим индексом. Например, в нашем случае

$$l^n{}_{k,l} = \frac{\partial l^n{}_k}{\partial x^l}\,.$$

Подставляя (13) и (15) в (12), имеем

$$\mathsf{D}(\mathsf{D}\mathbf{x}) = d(d\mathbf{x}) \circ l + d\mathbf{x} \circ ((d\mathbf{x} \circ \Gamma) \circ l)\,.$$

Далее учтем, что скобки в последнем слагаемом могут быть записаны иначе

$$d\mathbf{x} \circ ((d\mathbf{x} \circ \Gamma) \circ l) = (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ l\,.$$

Поэтому запишем

$$\mathsf{D}(\mathsf{D}\mathbf{x}) = (d^2\mathbf{x} + d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ l\,. \tag{18}$$

Во введении мы отметили, что уравнение геодезической в нормальной системе координат искривленного пространства имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{y}}{dy^2} = 0\,.$$

*Заметим, что величины $\Gamma^i{}_{kl}$ называются коэффициентами *связности*.

Опираясь на рассмотренное соответствие, имеем

$$\frac{\mathsf{D}^2\mathbf{x}}{\mathsf{D}x^2} \sim \frac{d^2\mathbf{y}}{dy^2}\,.$$

Поэтому уравнение геодезической в системе отсчета следует записать так

$$\frac{\mathsf{D}^2\mathbf{x}}{\mathsf{D}x^2} = 0\,.$$

Учитывая соотношение (18) и то обстоятельство, что

$$\det ||l^i{}_k|| \neq 0\,,$$

приходим к инвариантному уравнению геодезической в системе отсчета

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dy^2} + \frac{d\mathbf{x}}{dy} \circ \left(\frac{d\mathbf{x}}{dy} \circ \Gamma\right) = 0\,. \tag{19}$$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$ и Γ:

$$d\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot dx^i\,, \quad \Gamma = J^{lk}{}_i \cdot \Gamma^i{}_{kl}$$

и правила произведения базисных векторов (2), получим уравнение геодезической относительно координат системы отсчета

$$\frac{d^2x^i}{dy^2} + \Gamma^i{}_{kl} \cdot \frac{dx^k}{dy} \cdot \frac{dx^l}{dy} = 0\,.$$

3. Третий дифференциал. Объект кривизны

Дифференцируя соотношение (11), получим следующее соответствие между третьими дифференциалами

$$\mathsf{D}^3\mathbf{x} \sim d^3\mathbf{y}\,. \tag{20}$$

Запишем дифференциал $\mathsf{D}^2\mathbf{x}$ с учетом (18). Получим

$$\begin{aligned}\mathsf{D}(\mathsf{D}^2\mathbf{x}) = \mathsf{D}(d^2\mathbf{x} + d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ l +\\ (d^2\mathbf{x} + d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ \mathsf{D}l\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Это выражение преобразуем, учитывая, во-первых, что

$$\mathsf{D}(d^2\mathbf{x}) = d(d^2\mathbf{x})\,.$$

И, во-вторых, подчиним $\mathsf{D}(\Gamma)$ дифференциал представления от Γ соотношениям, аналогичным (14) и (15):

$$\mathsf{D}\Gamma = d\Gamma + \delta\Gamma\,. \tag{22}$$

Далее вектор $\mathsf{D}\Gamma$ будем рассматривать как линейно преобразованный вектор $d\mathbf{x}$, то есть запишем

$$\mathsf{D}\Gamma = d\mathbf{x} \circ r\,. \tag{23}$$

Здесь r – линейное преобразование $X \to \mathsf{\Gamma}$, $r \in \mathsf{R}$.

Полагая

$$\delta\Gamma = d\mathbf{x} \circ \rho \,,$$

соотношение (22) можно записать так:

$$\mathsf{D}\Gamma = d\Gamma + d\mathbf{x} \circ \rho \,.$$

Сравнивая это выражение и (23), получим

$$d\mathbf{x} \circ r = d\Gamma + d\mathbf{x} \circ \rho \,. \tag{24}$$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$, Γ, r и ρ:

$$d\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot dx^i \,, \quad \Gamma = J^{lk}{}_i \cdot \Gamma^i{}_{kl} \,,$$
$$r = K^{mlk}{}_i \cdot r^i{}_{klm} \,, \quad \rho = K^{mlk}{}_i \cdot \gamma^i{}_{klm}$$

и правила произведения базисных векторов (2) и (3), получим уравнение (24) в координатной записи

$$r^i{}_{klm} \cdot dx^m = d\Gamma^i{}_{kl} + \gamma^i{}_{klm} \cdot dx^m \,. \tag{25}$$

Отсюда

$$r^i{}_{klm} = \Gamma^i{}_{kl,m} + \gamma^i{}_{klm} \,.$$

Подставляя (15) и (23) в (21), имеем

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\mathsf{D}^2\mathbf{x}) = \big(& d^3\mathbf{x} + d^2\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma) + \\ & d\mathbf{x} \circ (d^2\mathbf{x} \circ \Gamma) + d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ r)) + \\ & d^2\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma) + d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma) \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)\big) \circ l \,. \end{aligned} \tag{26}$$

Из этого выражения выделим два слагаемых $d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ r))$ и $d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)$ и введем следующее обозначение

$$\begin{aligned} & d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ R)) \equiv \\ & \quad d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ r)) + d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma) \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma) \,. \end{aligned} \tag{27}$$

Величину R назовем *объектом кривизны*.

Воспользовавшись координатной записью векторов $d\mathbf{x}$ и R:

$$d\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot dx^i \,, \quad R = K^{mlk}{}_i \cdot R^i{}_{klm}$$

и правилами произведения базисных векторов (2) и (3), получим координатную запись правой части соотношения (27)

$$\begin{aligned} & d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ R)) = \\ & \quad d\mathbf{x} \circ \big(d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ K^{mlk}{}_i \cdot R^i{}_{klm})\big) = \\ & \quad \mathfrak{E}_i \cdot R^i{}_{klm} \cdot dx^k \cdot dx^l \cdot dx^m \,. \end{aligned}$$

Вычислим координатную запись слагаемых в левой части соотношения (27).

$$\begin{aligned} & d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ r)) = \\ & \quad \mathfrak{E}_i \cdot (\gamma^i{}_{klm} + \Gamma^i{}_{kl,m}) \cdot dx^k \cdot dx^l \cdot dx^m \,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma) = \\ & \quad \mathfrak{E}_i \cdot \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} \cdot dx^k \cdot dx^l \cdot dx^m \,. \end{aligned}$$

В результате для координат объекта кривизны получим

$$R^i{}_{klm} = \gamma^i{}_{klm} + \Gamma^i{}_{kl,m} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} \,.$$

4. Искривленное пространство и геометрия Римана

Подводя некоторый итог сказанному, отметим, что в общем случае искривленное пространство строится на векторах и линейных преобразованиях системы отсчета всех порядков и их дифференциалах представления. Мы рассмотрели векторы $\mathbf{x}$ и линейные преобразования трех порядков $l\,, \Gamma\,, R$. Их дифференциалы представления строятся идентичным образом. Мы записали

$$\begin{aligned} \mathsf{D}\mathbf{x} &= d\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = d\mathbf{x} \circ l = d\mathbf{x} \circ (\delta + h) \,, \\ \mathsf{D}l &= dl + \delta l = d\mathbf{x} \circ \Gamma \circ l = dl + d\mathbf{x} \circ \gamma \circ l \,, \\ \mathsf{D}\Gamma &= d\Gamma + \delta\Gamma = d\mathbf{x} \circ r = d\Gamma + d\mathbf{x} \circ \rho \,. \end{aligned}$$

По тому же принципу мы должны ввести дифференциал представления от линейного преобразования R

$$\mathsf{D}R = dR + \delta R = d\mathbf{x} \circ T = dR + d\mathbf{x} \circ \tau$$

и дифференциалы от линейных преобразований последующих порядков.

Геометрии Римана соответствует частный случай рассмотренных соотношений

$$\begin{aligned} \mathsf{D}l &= dl + d\mathbf{x} \circ \gamma \circ l \,. \\ \mathsf{D}\Gamma &= d\Gamma \,. \\ \mathsf{D}R &= dR \,. \end{aligned}$$

Таким образом, в геометрии Римана $\gamma^i{}_{klm} = 0$ и объект кривизны приобретает вид

$$R^i{}_{klm} = \Gamma^i{}_{kl,m} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} \,.$$

после антисимметризации этого выражения по индексам l и m, получим общеизвестный тензор кривизны

$$R^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{k[l,m]} + \Gamma^i{}_{n[m} \cdot \Gamma^n{}_{|k|l]} \,.$$

5. Базисное и координатное представления

Дифференциал представления вектора

$$\mathsf{D}\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot l^i{}_k \cdot dx^k \,. \tag{28}$$

можно рассматривать двояким образом.

1. Можно считать, что вычисление дифференциала сопровождается линейным преобразованием базисных векторов $\mathfrak{E}_i$

$$\mathsf{D}\mathbf{x} = (\mathfrak{E}_i \cdot l^i{}_k) \cdot dx^k \,.$$

Обозначим векторы, получаемые в результате преобразования

$$\mathfrak{N}_k = \mathfrak{E}_i \cdot l^i{}_k = \mathfrak{E}_k \circ l \,.$$

Тогда дифференциал представления вектора приобретает вид

$$\mathsf{D}\mathbf{x} = \mathfrak{N}_k \cdot dx^k \,. \tag{29}$$

Представление искривленного пространства в системе отсчета, сопровождаемое указанной записью дифференциала вектора, будем называть *базисным представлением.*

2. Можно считать, что вычисление дифференциала сопровождается линейным преобразованием дифференциалов координат

$$\mathsf{D}\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot (l^i{}_k \cdot dx^k) \,.$$

Введем дифференциалы, получаемые в результате преобразования

$$\mathsf{D}x^i = l^i{}_k \cdot dx^k \,. \tag{30}$$

Такие дифференциалы будем называть дифференциалами представления координат. Тогда дифференциал представления вектора приобретает вид

$$\mathsf{D}\mathbf{x} = \mathfrak{E}_k \cdot \mathsf{D}x^k \,.$$

Представление искривленного пространства в системе отсчета, сопровождаемое указанной записью дифференциала представления вектора, будем называть *координатным представлением.*

В координатном представлении имеем

$$\mathsf{D}(dx^i) = ddx^i \,. \tag{31}$$

Кроме того

$$\mathsf{D}l^i{}_k = l^i{}_n \cdot \Gamma^n{}_{kl} \cdot dx^l \tag{32}$$

а также

$$\mathsf{D}l^i{}_k = dl^i{}_k + l^i{}_n \cdot \gamma^n{}_{kl} \cdot dx^l \,. \tag{33}$$

Отсюда следует ранее выведенное соотношение

$$\Gamma^n{}_{kl} = (l^{-1})^n{}_i \cdot l^i{}_{k,l} + \gamma^n{}_{kl} \,.$$

Кроме того координатном представлении имеем

$$\mathsf{D}\Gamma^i{}_{kl} = r^i{}_{klm} \cdot dx^m \tag{34}$$

а также

$$\mathsf{D}\Gamma^i{}_{kl} = d\Gamma^i{}_{kl} + \gamma^i{}_{klm} \cdot dx^m \,.$$

Отсюда следует ранее выведенное соотношение

$$r^i{}_{klm} = \Gamma^i{}_{kl,m} + \gamma^i{}_{klm} \,.$$

В случае геометрии Римана $\gamma^n{}_{klm} = 0$ и

$$\mathsf{D}\Gamma^i{}_{kl} = d\Gamma^i{}_{kl} \,,$$

поэтому

$$r^i{}_{klm} = \Gamma^i{}_{kl,m} \,.$$

IV. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Дифференциал по направлению

Введем понятие *дифференциал по направлению.* Обозначать такие дифференциалы будем следующим образом d_1, d_2,... – соответственно дифференциал по направлению 1, дифференциал по направлению 2 и так далее. Аналогично для дифференциалов представления D_1, D_2,... Дифференциал по направлению определяется через частную производную по координате направления. Например,

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot dx_1 \,,$$

где x_1 – координата по направлению 1.

Пусть сначала рассматривается дифференциал вектора искривленного пространства $\mathbf{y}$ по направлению, которое условно обозначим 1,

$$d_1\mathbf{y} \,.$$

Ему соответствует вектор системы отсчета

$$\mathsf{D}_1\mathbf{x} = d_1\mathbf{x} \circ l_1 \,.$$

И пусть последующее дифференцирование выполняется по направлению 2. В этом случае вместо (11) имеем

$$\mathsf{D}_2(\mathsf{D}_1\mathbf{x}) \;\sim\; d_2 d_1\mathbf{y}$$

и

$$\mathsf{D}_2(\mathsf{D}_1\mathbf{x}) = \mathsf{D}_2(d_1\mathbf{x}) \circ l_1 + d_1\mathbf{x} \circ D_2(l_1) \,.$$

Или

$$\mathsf{D}_2\mathsf{D}_1\mathbf{x} = (d_2 d_1\mathbf{x} + d_1\mathbf{x} \circ (d_2\mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ l_1 \,. \tag{35}$$

Заметим, что, если дифференцирование проводится по нормальным координатам x_1 и x_2 в системе отсчета, то

$$d_2 d_1\mathbf{x} = 0 \,,$$

и, если дифференцирование проводится по нормальным координатам y_1 и y_2 в искривленном пространстве, то

$$\mathsf{D}_2\mathsf{D}_1\mathbf{x} = 0 \sim d_2 d_1\mathbf{y} = 0 \,.$$

При вычислении третьего дифференциала по трем направлениям вместо (26) получим

$$\begin{aligned}\mathsf{D}_3(\mathsf{D}_2\mathsf{D}_1\mathbf{x}) = (&d_3 d_2 d_1\mathbf{x} + d_3 d_1\mathbf{x} \circ (d_2\mathbf{x} \circ \Gamma) + \\ &d_1\mathbf{x} \circ (d_3 d_2\mathbf{x} \circ \Gamma) + d_1\mathbf{x} \circ (d_2\mathbf{x} \circ (d_3\mathbf{x} \circ r)) + \\ &d_2 d_1\mathbf{x} \circ (d_3\mathbf{x} \circ \Gamma) + d_1\mathbf{x} \circ (d_2\mathbf{x} \circ \Gamma) \circ (d_3\mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ l_1 \,.\end{aligned}$$

2. Внешнее дифференцирование

Первый внешний дифференциал не отличается от обычного дифференциала - d_1 или D_1.

Второй внешний дифференциал есть разность вторых дифференциалов по двум направлениям, отличающихся порядком дифференцирования. Для дифференциалов d он обозначается $d_2 \wedge d_1$. Таким образом,

$$d_2 \wedge d_1 = d_2 d_1 - d_1 d_2 \,.$$

Соответственно для дифференциалов представления

$$\mathsf{D}_2 \wedge \mathsf{D}_1 = \mathsf{D}_2\mathsf{D}_1 - \mathsf{D}_1\mathsf{D}_2 \,.$$

Третий внешний дифференциал есть антисимметричная комбинация дифференциалов по трем направлениям. Для дифференциалов d он обозначается $d_3 \wedge d_2 \wedge d_1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} d_3 \wedge d_2 \wedge d_1 = d_3 d_2 d_1 + d_2 d_1 d_3 + d_1 d_3 d_2 - \\ d_2 d_3 d_1 - d_3 d_1 d_2 - d_1 d_2 d_3 = \\ (d_3 \wedge d_2) d_1 + (d_2 \wedge d_1) d_3 + (d_1 \wedge d_3) d_2 \,. \end{aligned}$$

Аналогично записывается третий внешний дифференциал для дифференциалов представления.

Внешний дифференциал n-го порядка есть антисимметричная комбинация дифференциалов по n направлениям*. Максимальный порядок внешнего дифференциала равен числу независимых направлений, то есть размерности пространства.

Внешнее дифференцирование уравнения (6) дает†

$$\mathsf{D}_2 \wedge \mathsf{D}_1 \mathbf{x} = (d_2 \wedge d_1 \mathbf{x} + d_1 \mathbf{x} \wedge (d_2 \mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ l_1 \,. \tag{36}$$

Заметим, что, если внешнее дифференцирование проводится по координатам (не обязательно нормальным) в системе отсчета, то

$$d_2 \wedge d_1 \mathbf{x} = 0 \,, \tag{37}$$

и, если внешнее дифференцирование проводится по координатам в искривленном пространстве, то

$$\mathsf{D}_2 \wedge \mathsf{D}_1 \mathbf{x} = 0 \sim d_2 \wedge d_1 \mathbf{y} = 0 \,.$$

*Можно представить себе дифференциалы n-го порядка, в которых используются как антисимметричные комбинации, так и симметричные комбинации дифференциалов по направлениям. Для подалгебр универсальной алгебры, рассмотренных в Лекции 20, целесообразно антисимметричные и симметричные комбинации дифференциалов поставить в соответствие антисимметричным и симметричным произведениям базисных векторов. С этой точки зрения внешнее дифференцирование соответствует алгебре Клиффорда.

†Это же соотношение можно получить путем антисимметризации соотношения (35).

Уравнение (36) в системе отсчета выглядит следующим образом

$$\mathsf{D}_2 \wedge \mathsf{D}_1 \mathbf{x} = (d_1 \mathbf{x} \wedge (d_2 \mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ l_1 \,. \tag{38}$$

И по отношению к координатам

$$\mathsf{D}_2 \wedge \mathsf{D}_1 x^i = l^i{}_n \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} \cdot d_1 x^k \wedge d_2 x^l \,. \tag{39}$$

Антисимметричная часть коэффициентов связности называется *тензором кручения* и обозначается

$$T^n{}_{[kl]} = \Gamma^n{}_{[kl]} \,.$$

Внешнее дифференцирование уравнения (38) в системе отсчета дает

$$\begin{aligned} \mathsf{D}_3 \wedge \mathsf{D}_2 \wedge \mathsf{D}_1 \mathbf{x} = (d_1 \mathbf{x} \wedge (d_2 \mathbf{x} \wedge (d_3 \mathbf{x} \circ r)) + \\ d_1 \mathbf{x} \wedge (d_2 \mathbf{x} \circ \Gamma)) \wedge (d_3 \mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ l_1 \,. \end{aligned}$$

По отношению к координатам это соотношение имеет вид

$$\mathsf{D}_3 \wedge \mathsf{D}_2 \wedge \mathsf{D}_1 x^i = l^i{}_n \cdot R^n{}_{[klm]} \cdot d_1 x^k \wedge d_2 x^l \wedge d_3 x^m \,. \tag{40}$$

Вычислим внешний дифференциал от второго дифференциала $\mathsf{D}_2(\mathsf{D}_1 \mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \mathsf{D}_3 \wedge \mathsf{D}_2(\mathsf{D}_1 \mathbf{x}) = (d_3 \wedge d_2 d_1 \mathbf{x} + d_3 d_1 \mathbf{x} \circ (d_2 \mathbf{x} \circ \Gamma) - \\ d_2 d_1 \mathbf{x} \circ (d_3 \mathbf{x} \circ \Gamma) + d_1 \mathbf{x} \circ (d_3 \wedge d_2 \mathbf{x} \circ \Gamma) + \\ d_1 \mathbf{x} \circ (d_2 \mathbf{x} \wedge (d_3 \mathbf{x} \circ r)) + d_2 d_1 \mathbf{x} \circ (d_3 \mathbf{x} \circ \Gamma) - \\ d_3 d_1 \mathbf{x} \circ (d_2 \mathbf{x} \circ \Gamma) + d_1 \mathbf{x} \circ (d_2 \mathbf{x} \circ \Gamma) \circ (d_3 \mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ l_1 \,. \end{aligned} \tag{41}$$

Или

$$\mathsf{D}_3 \wedge \mathsf{D}_2(\mathsf{D}_1 \mathbf{x}) = d_1 \mathbf{x} \circ (d_2 \mathbf{x} \wedge (d_3 \mathbf{x} \circ R)) \circ l_1 \,.$$

И по отношению к координатам

$$\mathsf{D}_3 \wedge \mathsf{D}_2(\mathsf{D}_1 x^i) = l^i{}_n \cdot R^n{}_{k[lm]} \cdot d_1 x^k \cdot d_1 x^l \wedge d_2 x^m \,.$$

3. Первое уравнение структуры искривленного пространства

Рассмотрим уравнения (36) в форме, в которой они в дифференциальной геометрии называются *уравнениями структуры*. Для этого обратимся к координатному представлению и запишем дифференциал представления от координат вектора

$$\mathsf{D} x^i = l^i{}_k \cdot d x^k \,.$$

Далее введем переобозначение‡

$$\omega^i \equiv \mathsf{D} x^i \,.$$

‡Дифференциальные формы, к которым относится $\mathsf{D} x^i$, в дифференциальной геометрии принято обозначать буквой ω.

Таким образом, имеем

$$\omega^i = l^i{}_k \cdot dx^k\,.$$

Выполним внешнее D-дифференцирование этого соотношения:

$$\mathsf{D}_2 \wedge \omega^i(d_1) = \mathsf{D}_2 l^i{}_k \wedge d_1 x^k + l^i{}_k \cdot \mathsf{D}_2 \wedge d_1 x^k\,.$$

И в силу (32) и (37) получим

$$\mathsf{D}_2 \wedge \omega^i(d_1) = \mathsf{D}_2 l^i{}_k \wedge d_1 x^k\,.$$

Далее выполним преобразование

$$\mathsf{D}_2 \wedge \omega^i(d_1) = (\mathsf{D}_2 l^i{}_n \cdot (l^{-1})^n{}_k) \wedge (l^k{}_m \cdot d_1 x^m)\,. \tag{42}$$

Здесь матрица l^{-1} является обратной по отношению к матрице l, то есть

$$(l^{-1})^n{}_k \cdot l^k{}_m = \delta^n{}_m\,.$$

Теперь учтем, что

$$l^k{}_m \cdot d_1 x^m = \omega^k(d_1)\,,$$

а также введем обозначение

$$\omega^i{}_k(D_2) = \mathsf{D}_2 l^i{}_n \cdot (l^{-1})^n{}_k\,. \tag{43}$$

В результате уравнение (42) приобретает вид

$$\mathsf{D}_2 \wedge \omega^i(d_1) = \omega^i{}_k(D_2) \wedge \omega^k(d_1)\,. \tag{44}$$

Это уравнение мы и назовем *первым уравнением структуры искривленного пространства.*

Для простоты записи уравнений структуры принято опускать индексы направлений при дифференциалах и знак альтернирования $\wedge$ для дифференциалов форм. С учетом этого первое уравнение структуры приобретает вид

$$\mathsf{D}\omega^i = \omega^i{}_k \wedge \omega^k\,. \tag{45}$$

Рассмотрим формы $\omega^i{}_k(\mathsf{D})$. Из (43) и (33) имеем

$$\omega^i{}_k(\mathsf{D}) = \mathsf{D} l^i{}_n \cdot (l^{-1})^n{}_k = (dl^i{}_n + l^i{}_p \cdot \gamma^p{}_{nm} \cdot dx^m) \cdot (l^{-1})^n{}_k\,.$$

Или

$$\begin{aligned}\omega^i{}_k(\mathsf{D}) = dl^i{}_n \cdot (l^{-1})^n{}_k +\\ l^i{}_p \cdot \gamma^p{}_{nm} \cdot (l^{-1})^n{}_k \cdot (l^{-1})^m{}_l \cdot \omega^l\,.\end{aligned} \tag{46}$$

Введем обозначения

$$\omega'^i{}_k = \omega^i{}_k(d) = dl^i{}_n \cdot (l^{-1})^n{}_k$$

и

$$\gamma'^i{}_{kl} = l^i{}_p \cdot \gamma^p{}_{nm} \cdot (l^{-1})^n{}_k \cdot (l^{-1})^m{}_l\,.$$

В результате получим

$$\omega^i{}_k = \omega'^i{}_k + \gamma'^i{}_{kl} \cdot \omega^l\,. \tag{47}$$

Введем коэффициенты связности $\Gamma'^i{}_{kl}$ в соответствии с определением

$$\omega^i{}_k = \Gamma'^i{}_{kl} \cdot \omega^l\,.$$

Из (46) имеем

$$\begin{aligned}\omega^i{}_k(\mathsf{D}) = l^i{}_p \cdot (l^{-1})^p{}_q \cdot l^q{}_{n,m} \cdot (l^{-1})^n{}_k \cdot (l^{-1})^m{}_l \cdot \omega^l +\\ l^i{}_p \cdot \gamma^p{}_{nm} \cdot (l^{-1})^n{}_k \cdot (l^{-1})^m{}_l \cdot \omega^l\,.\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}&\omega^i{}_k(\mathsf{D}) =\\ &\quad l^i{}_p \cdot \Big((l^{-1})^p{}_q \cdot l^q{}_{n,m} + \gamma^p{}_{nm}\Big) \cdot (l^{-1})^n{}_k \cdot (l^{-1})^m{}_l \cdot \omega^l\,.\end{aligned}$$

Так как выражение в скобках*

$$(l^{-1})^p{}_q \cdot l^q{}_{n,m} + \gamma^p{}_{nm} = \Gamma^p{}_{nm}\,,$$

то для введенных коэффициентов связности $\Gamma'^i{}_{kl}$ получим

$$\Gamma'^i{}_{kl} = l^i{}_p \cdot \Gamma^p{}_{nm} \cdot (l^{-1})^n{}_k \cdot (l^{-1})^m{}_l\,.$$

4. Второе уравнение структуры искривленного пространства

Рассмотрим уравнения (41) в форме, в которой они в дифференциальной геометрии называются *уравнениями структуры.* Для этого обратимся к координатному представлению и выполним внешнее D-дифференцирование соотношения (44)

$$\begin{aligned}&\mathsf{D}_3 \wedge \mathsf{D}_2 \wedge \omega^i(d_1) =\\ &\quad \mathsf{D}_3 \wedge \omega^i{}_k(D_2) \wedge \omega^k(d_1) + \omega^i{}_k(D_2) \wedge \mathsf{D}_3 \wedge \omega^k(d_1)\,.\end{aligned}$$

И в силу (44) получим

$$\begin{aligned}&\mathsf{D}_3 \wedge \mathsf{D}_2 \wedge \omega^i(d_1) =\\ &\quad \big(\mathsf{D}_3 \wedge \omega^i{}_k(D_2) + \omega^i{}_n(D_2) \wedge \omega^n{}_k(D_3)\big) \wedge \omega^k(d_1)\,.\end{aligned}$$

Выражение в скобках обозначим следующим образом

$$\mathsf{D}_3 \wedge \omega^i{}_k(\mathsf{D}_2) + \omega^i{}_n(\mathsf{D}_2) \wedge \omega^n{}_k(\mathsf{D}_3) = \omega^i{}_{kl}(\mathsf{D}_3) \wedge \omega^l(d_2)\,.$$

Или

$$\mathsf{D}_3 \wedge \omega^i{}_k(\mathsf{D}_2) = \omega^n{}_k(\mathsf{D}_3) \wedge \omega^i{}_n(\mathsf{D}_2) + \omega^i{}_{kl}(\mathsf{D}_3) \wedge \omega^l(d_2)\,. \tag{48}$$

Это уравнение мы назовем *вторым уравнением структуры искривленного пространства.*

---

*Смотрите соотношение (17).

Для простоты записи уравнений структуры принято опускать индексы направлений при дифференциалах и знак альтернирования $\wedge$ для дифференциалов форм. В результате второе уравнение структуры приобретает вид

$$\mathsf{D}\omega^i{}_k = \omega^n{}_k \wedge \omega^i{}_n + \omega^i{}_{kl} \wedge \omega^l \,. \tag{49}$$

Рассмотрим формы $\omega^i{}_{kl}$. Запишем их следующим образом

$$\omega^i{}_{kl} = R'^i{}_{klm} \cdot \omega^m \,.$$

Из уравнения структуры следует

$$R'^i{}_{k[lm]} = \gamma'^i{}_{k[lm]} + \Gamma'^i{}_{k[l,m]} + \Gamma'^i{}_{n[m} \cdot \Gamma'^n{}_{|k|l]} \,.$$

Для геометрии Римана $\gamma'^i{}_{k[lm]} = 0$ и

$$R'^i{}_{k[lm]} = \Gamma'^i{}_{k[l,m]} + \Gamma'^i{}_{n[m} \cdot \Gamma'^n{}_{|k|l]} \,.$$

В общем случае последующее внешнее дифференцирование уравнений структуры позволяет установить последовательность дифференциальных форм

$$\omega^i \,, \quad \omega^i{}_k \,, \quad \omega^i{}_{kl} \,, \quad \dots$$

и соответствующих им уравнений структуры. Указанный метод его автор – Г.Ф.Лаптев – назвал методом продолжений. Для наших целей мы ограничимся приведенными двумя уравнениями структуры. Эти уравнения обобщают известные уравнения Картана-Лаптева в том отношении, что здесь используется дифференциал представления D, а коэффициенты связности обладают произвольной симметрией относительно нижних индексов.

5. Инвариантный вывод уравнений структуры искривленного пространства

Рассмотрим вектор кинематической алгебры T_2

$$\mathsf{D}_1\mathbf{t} = \mathfrak{E}_i \cdot \omega^i(d_1) + I^k{}_i \cdot \omega^i{}_k(\mathsf{D}_1) + J^{lk}{}_i \cdot \omega^i{}_{kl}(\mathsf{D}_1) \,,$$

Возьмем D_2 – дифференциал от этого вектора по направлению 2. Выражение

$$\mathsf{D}_2\mathsf{D}_1\mathbf{t} = \mathsf{D}_1\mathbf{t} \circ \mathsf{D}_2\mathbf{t}$$

определим как *уравнение структуры* алгебры T_2. Вычислим антисимметричную часть этого выражения

$$\begin{aligned}\mathsf{D}_2 \wedge (\mathfrak{E}_i \cdot \omega^i(d_1) + I^k{}_i \cdot \omega^i{}_k(\mathsf{D}_1) + J^{lk}{}_i \cdot \omega^i{}_{kl}(\mathsf{D}_1)) = \\ (\mathfrak{E}_i \cdot \omega^i(d_1) + I^k{}_i \cdot \omega^i{}_k(\mathsf{D}_1) + J^{lk}{}_i \cdot \omega^i{}_{kl}(\mathsf{D}_1)) \wedge \\ (\mathfrak{E}_i \cdot \omega^i(d_2) + I^k{}_i \cdot \omega^i{}_k(\mathsf{D}_2) + J^{lk}{}_i \cdot \omega^i{}_{kl}(\mathsf{D}_2)) \,,\end{aligned}$$

раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных векторах в левой и правой частях уравнения. Получим

$$\begin{aligned}\mathsf{D}_2 \wedge \omega^i(d_1) &= \omega^i{}_k(\mathsf{D}_2) \wedge \omega^i(d_1) \,, \\ \mathsf{D}_2 \wedge \omega^i{}_k(\mathsf{D}_1) &= \omega^n{}_k(\mathsf{D}_2) \wedge \omega^i{}_n(\mathsf{D}_1) + \omega^i{}_{kl}(\mathsf{D}_2) \wedge \omega^l(d_1) \,.\end{aligned}$$

Эти уравнения представляют собой ранее полученные уравнения структуры искривленного пространства (44) и (48).

6. Уравнения структуры Картана-Лаптева

Уравнениям структуры искривленного пространства можно придать другой вид. Как и в Разделе IV.3 рассмотрим форму

$$\omega^i = l^i{}_k \cdot dx^k \,.$$

Однако, теперь выполним внешнее не D-, а d-дифференцирование этого соотношения:

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = d_2 l^i{}_k \wedge d_1 x^k + l^i{}_k \cdot d_2 \wedge d_1 x^k \,.$$

И в силу (37) получим

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = d_2 l^i{}_k \wedge d_1 x^k \,. \tag{50}$$

Далее выполним преобразование

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = d_2 l^i{}_n \cdot (l^{-1})^n{}_k) \wedge (l^k{}_m \cdot d_1 x^m) \,.$$

Здесь матрица l^{-1} является обратной по отношению к матрице l. Теперь учтем, что

$$l^k{}_m \cdot d_1 x^m = \omega^k(d_1)$$

и

$$\omega'^i{}_k(d_2) = d_2 l^i{}_n \cdot (l^{-1})^n{}_k \,. \tag{51}$$

В результате уравнение (50) приобретает вид

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = \omega'^i{}_k(d_2) \wedge \omega^k(d_1) \,. \tag{52}$$

Воспользуемся соотношением (47), из которого следует

$$\omega'^i{}_k = \omega^i{}_k - \gamma'^i{}_{kl} \cdot \omega^l \,. \tag{53}$$

Получим

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = \omega^i{}_k(d_2) \wedge \omega^k(d_1) - \gamma'^i{}_{kl} \cdot \omega^l(d_2) \wedge \omega^k(d_1) \,. \tag{54}$$

Или в сокращенном виде

$$d\omega^i = \omega^i{}_k \wedge \omega^k - \gamma'^i{}_{kl} \cdot \omega^l \wedge \omega^k \,. \tag{55}$$

Это уравнение мы и назовем *первым уравнением структуры искривленного пространства Картана-Лаптева.*

Рассмотрим второе уравнение структуры. Для этого выполним внешнее d-дифференцирование соотношения (52), получим

$$\begin{aligned}d_3 \wedge d_2 \wedge \omega^i(d_1) = \\ \big(d_3 \wedge \omega'^i{}_k(d_2) + \omega'^i{}_n(d_2) \wedge \omega'^n{}_k(d_3)\big) \wedge \omega^k(d_1) \,.\end{aligned}$$

Так как
$$d_3 \wedge d_2 \wedge \omega^i(d_1) = 0\,,$$
то имеем
$$\big(d_3 \wedge \omega'^i{}_k(d_2) + \omega'^i{}_n(d_2) \wedge \omega'^n{}_k(d_3)\big) \wedge \omega^k(d_1) = 0\,.$$
Для форм вида (51) отсюда следует
$$d_3 \wedge \omega'^i{}_k(d_2) = \omega'^n{}_k(d_3) \wedge \omega'^i{}_n(d_2)\,.$$
Или в сокращенном виде
$$d\omega'^i{}_k = \omega'^n{}_k \wedge \omega'^i{}_n\,.$$
Подставим сюда выражения (53) для форм $\omega'^i{}_k$. Получим
$$\begin{aligned}&d_3 \wedge \big(\omega^i{}_k(d_2) - \gamma'^i{}_{kl}\cdot\omega^l(d_2)\big) =\\ &\big(\omega^n{}_k(d_3) - \gamma'^n{}_{kl}\cdot\omega^l(d_3)\big) \wedge \big(\omega^i{}_n(d_2) - \gamma'^i{}_{nm}\cdot\omega^m(d_2)\big)\end{aligned}$$
или
$$\begin{aligned}&d_3 \wedge \omega^i{}_k(d_2) - d_3\gamma'^i{}_{kl} \wedge \omega^l(d_2) - \gamma'^i{}_{kl}\cdot d_3 \wedge \omega^l(d_2) =\\ &\omega^n{}_k(d_3) \wedge \omega^i{}_n(d_2) - \gamma'^n{}_{kl}\cdot\omega^l(d_3) \wedge \omega^i{}_n(d_2) -\\ &\omega^n{}_k(d_3) \wedge \gamma'^i{}_{nm}\cdot\omega^m(d_2) - \gamma'^n{}_{kl}\cdot\omega^l(d_3) \wedge \gamma'^i{}_{nm}\cdot\omega^m(d_2)\,.\end{aligned}$$
После необходимых преобразований с учетом первого уравнения структуры, получим
$$\begin{aligned}&d_3 \wedge \omega^i{}_k(d_2) = \omega^n{}_k(d_3) \wedge \omega^i{}_n(d_2) +\\ &\gamma'^i{}_{kl}\omega^l{}_m(d_3) \wedge \omega^m(d_2) + \gamma'^n{}_{kl}\cdot\omega^i{}_n(d_3) \wedge \omega^l(d_2) -\\ &\gamma'^i{}_{nl}\cdot\omega^n{}_k(d_3) \wedge \omega^l(d_2) + r'^i{}_{k[l,m]}\cdot\omega^m(d_3) \wedge \omega^l(d_2)\,.\end{aligned} \tag{56}$$
Здесь
$$r'^i{}_{k[l,m]} = \gamma'^i{}_{k[l,m]} + \gamma'^i{}_{n[m}\gamma'^n{}_{|k|l]} - \gamma'^i{}_{kn}\cdot\gamma'^n{}_{[lm]}$$
– тензор кривизны относительно коэффициентов связности γ'.

Или в сокращенном виде
$$\begin{aligned}d\omega^i{}_k = \omega^n{}_k \wedge \omega^i{}_n + \gamma'^i{}_{kl}\omega^l{}_m \wedge \omega^m + \gamma'^n{}_{kl}\cdot\omega^i{}_n \wedge \omega^l -&\\ \gamma'^i{}_{nl}\cdot\omega^n{}_k \wedge \omega^l + r'^i{}_{k[l,m]}\cdot\omega^m \wedge \omega^l\,.&\end{aligned}$$
Это уравнение мы и назовем *вторым уравнением структуры искривленного пространства Картана-Лаптева.*

V. АБСОЛЮТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

1. Оператор дифференцирования X_i

Введем оператор дифференцирования
$$X_i = \frac{\mathsf{D}}{\partial x^i}\,.$$
Назовем его *производной представления.* Она связана с частной производной по координатам следующим образом
$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\delta}{\partial x^i}\,.$$
Используя производную представления соотношение (30) координатного представления можно записать так
$$X_k(x^i) = l^i{}_k\,.$$
Соотношение (32) координатного представления можно записать так
$$X_l(l^i{}_k) = l^i{}_n\cdot\Gamma^i{}_{kl}\,,$$
или
$$X_l(l^i{}_k) = l^i{}_{k,l} + l^i{}_n\cdot\gamma^n{}_{kl}\,.$$
Соотношение (34) координатного представления можно записать так
$$X_m(\Gamma^i{}_{kl}) = r^n{}_{klm}\,,$$
или
$$X_m(\Gamma^i{}_{kl}) = \Gamma^i{}_{kl,m} + \gamma^i{}_{klm}\,.$$
Для геометрии Римана $\gamma^n{}_{klm} = 0$ и поэтому
$$X_m(\Gamma^i{}_{kl}) = \frac{\partial\Gamma^i{}_{kl}}{\partial x^m} = \Gamma^i{}_{kl,m}\,.$$
Соотношение базисного представления (28) можно записать следующим образом
$$X_k(\mathbf{x}) = \mathfrak{E}_i\cdot l^i{}_k\,,$$
или
$$X_k(\mathbf{x}) = \mathfrak{N}_k\,.$$
Применяя к этому выражению оператор X_l, получим
$$X_lX_k(\mathbf{x}) = \mathfrak{E}_i\cdot X_l(l^i{}_k) = \mathfrak{E}_i\cdot l^i{}_n\cdot\Gamma^n{}_{kl} = X_n(\mathbf{x})\cdot\Gamma^n{}_{kl}\,. \tag{57}$$
Или в другой записи
$$X_l(\mathfrak{N}_k) = \mathfrak{N}_n\cdot\Gamma^n{}_{kl}\,. \tag{58}$$
Отсюда
$$X_l \wedge X_k(\mathbf{x}) = \mathfrak{N}_n\cdot\Gamma^n{}_{[kl]}\,.$$
Дифференцируя соотношение (57) еще раз, получим
$$\begin{aligned}X_mX_lX_k(\mathbf{x}) &= X_mX_l(\mathfrak{N}_k) =\\ &X_m(\mathfrak{N}_n)\cdot\Gamma^n{}_{kl} + \mathfrak{N}_n\cdot X_m(\Gamma^n{}_{kl}) =\\ &\mathfrak{N}_i\cdot(X_m(\Gamma^i{}_{kl}) + \Gamma^i{}_{nm}\cdot\Gamma^n{}_{kl}) = \mathfrak{N}_i\cdot R^i{}_{klm}\,.\end{aligned}$$
В частном случае отсюда имеем
$$X_m \wedge X_l(\mathfrak{N}_k) = \mathfrak{N}_i\cdot R^i{}_{k[lm]}\,. \tag{59}$$
А также
$$X_m(X_l \wedge X_k(\mathbf{x})) = \mathfrak{N}_i\cdot R^i{}_{[kl]m}\,. \tag{60}$$

2. Ковариантное дифференцирование

1. Обратимся к соотношению (6)

$$\mathsf{D}_1\mathbf{x} = d_1\mathbf{x} \circ l \sim d\mathbf{y}$$

и второму дифференциалу от этого выражения

$$\mathsf{D}\mathsf{D}_1\mathbf{x} = (dd_1\mathbf{x} + d_1\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ l\,. \tag{61}$$

После умножения справа на обратное линейное преобразование l^{-1} получим

$$\mathsf{D}\mathsf{D}_1\mathbf{x} \circ l^{-1} = dd_1\mathbf{x} + d_1\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)\,.$$

Для выражения в левой части введем новое обозначение

$$\mathsf{D}\mathsf{D}_1\mathbf{x} \circ l^{-1} = \mathcal{D}(d_1\mathbf{x})\,.$$

Дифференциал $\mathcal{D}$ назовем *ковариантным*. Таким образом,

$$\mathcal{D}(d_1\mathbf{x}) = dd_1\mathbf{x} + d_1\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)\,.$$

Ковариантный дифференциал можно записать и по отношению к координатам вектора $d_1\mathbf{x}$

$$\mathcal{D}(d_1x^i) = d(d_1x^i) + \Gamma^i{}_{kl} \cdot d_1x^k \cdot dx^l\,.$$

2. Определение ковариантного дифференциала обобщается на случай векторных и тензорных полей на системе отсчета X и искривленном пространстве Y.

Пусть на точках системы отсчета задано поле векторов $S(x)$. Используя базисные векторы системы отсчета, можно записать

$$S(x) = \mathfrak{E}_i \cdot S^i(x)\,.$$

Здесь $S^i(x)$ – координаты вектора. И пусть кроме того на точках искривленного пространства задано поле векторов $\mathsf{S}(y)$. Этому вектору мы ставим в соответствие линейно преобразованный вектор $S(x)$, то есть

$$S'(x) = S(x) \circ l(x) \sim \mathsf{S}(y)\,.$$

При этом дифференциалу $d\mathsf{S}$ соответствует дифференциал $\mathsf{D}S'$:

$$\mathsf{D}S' \sim d\mathsf{S}\,.$$

По аналогии с (61) для $\mathsf{D}S'$ имеем

$$\mathsf{D}S' = (dS + S \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)) \circ l\,. \tag{62}$$

После умножения справа на обратное линейное преобразование l^{-1} получим

$$\mathsf{D}S' \circ l^{-1} = dS + S \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)\,.$$

Для выражения в левой части введем новое обозначение

$$\mathsf{D}S' \circ l^{-1} = \mathcal{D}S\,.$$

Дифференциал $\mathcal{D}$ назовем *ковариантным*. Таким образом,

$$\mathcal{D}S = dS + S \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma)\,.$$

От дифференциалов перейдем к производным

$$\frac{\mathcal{D}S}{\partial x^i} = \frac{\partial S}{\partial x^i} + S \circ (\mathfrak{E}_i \circ \Gamma)\,. \tag{63}$$

Выражение $\frac{\mathcal{D}}{\partial x^i}$ называется *ковариантной* производной. Соотношение (63) может быть записано в других обозначениях

$$S_{;i} = S_{,i} + S \circ (\mathfrak{E}_i \circ \Gamma)\,.$$

Здесь и далее индекс, отделенный точкой с запятой, означает частное ковариантное дифференцирование по координате с этим индексом.

Ковариантный дифференциал можно записать и по отношению к координатам вектора S

$$\mathcal{D}S^i = dS^i + \Gamma^i{}_{kl} \cdot S^k \cdot dx^l\,.$$

От дифференциалов перейдем к производным

$$\frac{\mathcal{D}S^i}{\partial x^l} = \frac{\partial S^i}{\partial x^l} + \Gamma^i{}_{kl} \cdot S^k\,. \tag{64}$$

Это соотношение может быть записано иначе

$$S^i{}_{;l} = S^i{}_{,l} + \Gamma^i{}_{kl} \cdot S^k\,.$$

Кроме того, отметим, что из (62) следует

$$X_l(S') = S_{;l} \circ l\,, \tag{65}$$

или

$$X_l(S'^i) = l^i{}_k \cdot S^k{}_{;l}\,. \tag{66}$$

3. Пусть на точках системы отсчета задано поле *сопряженных* векторов $\tilde{S}(x)$. Используя базисные векторы системы отсчета, можно записать

$$\tilde{S}(x) = S_i(x) \cdot \mathfrak{E}^i\,.$$

Здесь $S_i(x)$ – координаты вектора. И пусть на точках искривленного пространства задано поле сопряженных векторов $\tilde{S}(y)$. Этому вектору мы ставим в соответствие линейно преобразованный вектор $\tilde{S}(x)$, то есть

$$\tilde{S}(y) \sim \tilde{S}'(x) = l^{-1}(x) \circ \tilde{S}(x)\,.$$

При этом дифференциалу $d\tilde{S}$ соответствует дифференциал $\mathsf{D}\tilde{S}'$:

$$\mathsf{D}\tilde{S}' \sim d\tilde{S}\,.$$

Для $\mathsf{D}\tilde{S}'$ имеем

$$\mathsf{D}\tilde{S}' = l^{-1} \circ (d\tilde{S} - (d\mathbf{x} \circ \Gamma) \circ \tilde{S}) \ . \tag{67}$$

Здесь учтено, что

$$\mathsf{D}l^{-1} \circ l + l^{-1} \circ \mathsf{D}l = 0 \, ,$$

или

$$\mathsf{D}l^{-1} = -l^{-1} \circ (d\mathbf{x} \circ \Gamma) \, .$$

После умножения слева на линейное преобразование l получим

$$l \circ \mathsf{D}\tilde{S}' = d\tilde{S} - (d\mathbf{x} \circ \Gamma) \circ \tilde{S} \, .$$

Для выражения в левой части введем обозначение ковариантного дифференциала

$$\mathsf{D}\tilde{S}' \circ l^{-1} = \mathcal{D}(\tilde{S}) \, .$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}(\tilde{S}) = d\tilde{S} - (d\mathbf{x} \circ \Gamma) \circ \tilde{S} \, .$$

Или с использованием ковариантной производной

$$\frac{\mathcal{D}(\tilde{S})}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i} - (\mathfrak{E}_i \circ \Gamma) \circ \tilde{S} \, .$$

И в других обозначениях

$$\tilde{S}_{;i} = \tilde{S}_{,i} - (\mathfrak{E}_i \circ \Gamma) \circ \tilde{S} \, .$$

Ковариантный дифференциал можно ввести и по отношению к координатам вектора $\tilde{S}$

$$\mathcal{D}(S_k) = d(S_k) - S_i \cdot \Gamma^i{}_{kl} \cdot dx^l \, .$$

Запишем это соотношение через ковариантную производную

$$\frac{\mathcal{D}S_k}{\partial x^l} = \frac{\partial S_k}{\partial x^l} - S_i \cdot \Gamma^i{}_{kl} \, .$$

Или в других обозначениях

$$S_{k;l} = S_{k,l} - S_i \cdot \Gamma^i{}_{kl} \, .$$

Кроме того, отметим, что из (67) следует

$$X_l(\tilde{S}') = l^{-1} \circ \tilde{S}_{;l} \, , \tag{68}$$

или

$$X_l(S'_i) = S_{k;l} \cdot (l^{-1})^k{}_i \, . \tag{69}$$

4. Пусть теперь задано преобразование

$$l' = l^{-1} \circ l_0 \circ l \, ,$$

или по отношению к координатам

$$l'^m{}_n = l^m{}_k \cdot (l_0)^k_i \cdot (l^{-1})^i{}_n \, . \tag{70}$$

Рассмотрим дифференциал этого выражения

$$\begin{gathered}\mathsf{D}l'^m{}_n = l^m{}_k \cdot \mathsf{D}(l_0)^k_i \cdot (l^{-1})^i{}_n + \\ \mathsf{D}l^m{}_k \cdot (l_0)^k_i \cdot (l^{-1})^i{}_n + l^m{}_k \cdot (l_0)^k_i \cdot \mathsf{D}(l^{-1})^i_n \, ,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\mathsf{D}l'^m{}_n = l^m{}_k \cdot \big(d(l_0)^k_i + \\ (l^{-1})^k_q \cdot \mathsf{D}l^q_p \cdot (l_0)^p_i + (l_0)^k_p \cdot \mathsf{D}(l^{-1})^p_q \cdot (l_0)^q_i\big) \cdot (l^{-1})^i{}_n \, .\end{gathered}$$

Запишем это выражение в следующем виде

$$\mathsf{D}l'^m{}_n = l^m{}_k \cdot \mathcal{D}(l_0)^k_i \cdot (l^{-1})^i{}_n \, ,$$

где

$$\mathcal{D}(l_0)^k_i = d(l_0)^k_i + (l^{-1})^k_q \cdot \mathsf{D}l^q_p \cdot (l_0)^p_i + (l_0)^k_p \cdot \mathsf{D}(l^{-1})^p_q \cdot (l_0)^q_i$$

есть ковариантный дифференциал функции $(l_0)^k_i$. Используя коэффициенты связности (32), для ковариантного дифференциала получим

$$\mathcal{D}(l_0)^k_i = d(l_0)^k_i + \Gamma^k{}_{pl} \cdot dx^l \cdot (l_0)^p_i - (l_0)^k{}_p \cdot \Gamma^p{}_{il} \cdot dx^l \, .$$

Дифференциалу $\mathcal{D}$ соответствует ковариантная производная

$$\frac{\mathcal{D}(l_0)^k_i}{\partial x^l} = \frac{\partial (l_0)^k_i}{\partial x^l} + \Gamma^k{}_{pl} \cdot (l_0)^p_i - (l_0)^k{}_p \cdot \Gamma^p{}_{il} \, .$$

Для произвольного вектора S^k_i, который изменяется при преобразовании линейной группы подобно (70):

$$S'^m{}_n = l^m{}_k \cdot S^k_i \cdot (l^{-1})^i_n \, ,$$

ковариантная производная имеет вид:

$$\frac{\mathcal{D}S^k{}_i}{\partial x^l} = \frac{\partial S^k{}_i}{\partial x^l} + \Gamma^k{}_{pl} \cdot S^p_i - S^k{}_p \cdot \Gamma^p{}_{il} \, .$$

Запишем ковариантную производную от тензора кручения:

$$\frac{\mathcal{D}T^i{}_{ml}}{\partial x^n} = \frac{\partial T^i{}_{ml}}{\partial x^n} + \Gamma^i{}_{pn} \cdot T^p{}_{ml} - T^i{}_{pl} \cdot \Gamma^p{}_{mn} - T^i{}_{mp} \cdot \Gamma^p{}_{ln} \, ,$$

и ковариантную производную от тензора кривизны:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{D}R^i{}_{klm}}{\partial x^n} = \frac{\partial R^i{}_{klm}}{\partial x^n} + \Gamma^i{}_{pn} \cdot R^p{}_{klm} - R^i{}_{plm} \cdot \Gamma^p{}_{kn} - \\ R^i{}_{kpm} \cdot \Gamma^p{}_{ln} - R^i{}_{klp} \cdot \Gamma^p{}_{mn} \, .\end{aligned}$$

3. Дифференцирование метрического тензора

Продифференцируем соотношение, определяющее метрический тензор

$$g_{ik} = \langle \mathfrak{N}_i \ , \mathfrak{N}_k \rangle \, .$$

Получим

$$X_l(g_{ik}) = \langle X_l(\mathfrak{N}_i)\ , \mathfrak{N}_k\rangle + \langle \mathfrak{N}_i\ , X_l(\mathfrak{N}_k)\rangle\,.$$

Применив (58), получим

$$X_l(g_{ik}) = \langle \mathfrak{N}_n\ , \mathfrak{N}_k\rangle \cdot \Gamma^n{}_{il} + \langle \mathfrak{N}_i\ , \mathfrak{N}_n\rangle \cdot \Gamma^n{}_{kl}\,,$$

или

$$X_l(g_{ik}) = g_{nk} \cdot \Gamma^n{}_{il} + g_{in} \cdot \Gamma^n{}_{kl}\,. \tag{71}$$

Это уравнение обобщает условие равенства нулю ковариантной производной от метрического тензора, используемое в геометрии Римана

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{nk} \cdot \Gamma^n{}_{il} - g_{in} \cdot \Gamma^n{}_{kl} = 0\,. \tag{72}$$

Обобщение состоит в том, что вместо частной производной использована производная представления. Т.е. вместо предыдущего соотношения мы получили:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\delta g_{ik}}{\partial x^l} - g_{nk} \cdot \Gamma^n{}_{il} - g_{in} \cdot \Gamma^n{}_{kl} = 0\,.$$

Или, если ввести обозначение

$$g_{ikl} \equiv \frac{\delta g_{ik}}{\partial x^l}\,,$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + g_{ikl} - g_{nk} \cdot \Gamma^n{}_{il} - g_{in} \cdot \Gamma^n{}_{kl} = 0\,.$$

Указанное различие является существенным. Если в геометрии Римана соотношение (72) устанавливает связь между коэффициентами связности и метрическим тензором и позволяет выразить коэффициенты связности через метрический тензор, то в нашем случае такое выражение не имеет под собой основы. В Разделе VII.1 мы подробнее остановимся на этом обстоятельстве. Кроме того, нужно отметить, что в геометрии Римана соотношение (72) постулируется, а в нашем случае векторного искривленного пространства соотношение (71) выведено.

4. Преобразование пространства и преобразование координат

Для пространства Римана как точечного многообразия невозможно ясно решить вопрос о том как отличить физическое преобразование пространства, за которым стоит изменение положения точек пространства, от не физического преобразования системы координат, являющегося переобозначением (изменением числового обозначения) точек.

Представление о системе отсчета и об искривленном пространстве как о векторных пространствах очевидно решает этот вопрос. Изменение системы координат в системе отсчета не изменяет вектора в этом пространстве.

Пусть $d\mathbf{x} = \mathfrak{E}_k \cdot dx^k$ – вектор пространства X, а $l^k{}_i(x)$ – матрица линейного преобразования. Тогда линейное преобразование осуществляет преобразование вектора $d\mathbf{x}$ в вектор $(d\mathbf{x})' = \mathfrak{E}_k \cdot l^k{}_i \cdot dx^i$. И в этом понимании линейное преобразование наделяется физическим смыслом как преобразование пространства. Таким образом, физическим смыслом наделяется следующая система преобразований*:

$$\begin{aligned}
(dx)'^k &= l^k{}_i \cdot dx^i\\
\mathfrak{E}'_k &= \mathfrak{E}_k\\
l'^k{}_i &= (l_0)^k{}_n \cdot l^n{}_i\,,
\end{aligned}$$

или эквивалентная ей†

$$\begin{aligned}
(dx)'^i &= dx^i\\
\mathfrak{E}'_i &= \mathfrak{E}_k \cdot l^k{}_i\\
l'^k{}_i &= (l_0)^k{}_n \cdot l^n{}_i\,.
\end{aligned}$$

В отличие от этих преобразований рассмотрим преобразования:

$$\begin{aligned}
(dx)'^i &= x^i{}_k \cdot dx^k\\
\mathfrak{E}'_i &= \mathfrak{E}_k \cdot (x^{-1})^k{}_i\\
l'^k{}_i &= x^k{}_m \cdot l^m{}_n \cdot (x^{-1})^n{}_i\,.
\end{aligned} \tag{73}$$

Они преобразуют систему координат, оставляя неизменными векторы пространства. Действительно пусть исходный вектор

$$d\mathbf{x}' = \mathfrak{E}_k \cdot l^k{}_i \cdot dx^i\,,$$

а преобразованный вектор

$$d\mathbf{x}'' = \mathfrak{E}'_k \cdot l'^k{}_i \cdot dx'^i\,.$$

Используя (73), получим

$$d\mathbf{x}'' = d\mathbf{x}'\,.$$

И в этом понимании преобразования системы координат не меняют вектор и поэтому не наделяются физическим смыслом. В частном случае преобразования системы координат, когда $l^k{}_i = \delta^k{}_i$, имеем

$$\begin{aligned}
(dx)'^k &= x^k{}_i \cdot dx^i\\
\mathfrak{E}'_i &= \mathfrak{E}_k \cdot (x^{-1})^k{}_i\\
l'^k{}_i &= \delta^k{}_i\,.\\
d\mathbf{x}' &= d\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot dx^i\,.
\end{aligned} \tag{74}$$

*Эта система преобразований соответствует координатному представлению искривленного пространства.

†Эта система преобразований соответствует базисному представлению искривленного пространства.

Здесь полезно рассмотреть следующий пример. Пусть в пространстве с системой преобразований (74) задан вектор $A(x) = \mathfrak{E}_k \cdot A^k(x)$. В соответствии с (74) координаты этого вектора преобразуются следующим образом

$$A'^k = x^k{}_i \cdot A^i \,.$$

Отсюда следует, что

$$X_l(A'^k) = x^k{}_i \cdot A^i{}_{;l} = x^k{}_i \cdot (A^i{}_{,l} + \Gamma^i{}_{nl} \cdot A^n) \,,$$

то есть ковариантная производная от координат вектора

$$A^i{}_{;l} = A^i{}_{,l} + \Gamma^i{}_{nl} \cdot A^n \,,$$

а коэффициенты связности

$$\Gamma^i{}_{nl} = (x^{-1})^i{}_p X_l(x^p{}_n) \,.$$

Казалось бы, мы имеем дело с искривленным пространством. Однако, при дифференцировании надо анализировать не координаты вектора, а сам вектор:

$$X_l(A') = X_l(\mathfrak{E}'_k) \cdot A'^k + \mathfrak{E}'_k \cdot X_l(A'^k) \,.$$

Учитывая второе соотношение в (74), получим

$$X_l(\mathfrak{E}'_k) = -\mathfrak{E}_i \cdot \Gamma^i{}_{kl} \,.$$

И в результате

$$X_l(A') = A_{;l} = A_{,l} \,.$$

То есть рассматриваемое пространство является евклидовым.

5. Ковариантное дифференцирование по подгруппе группы линейных преобразований

1. Для произвольного вектора S^k, который изменяется при линейном преобразовании как: $S'^k = l^k{}_i \cdot S^i$, ковариантная производная имеет вид:

$$\frac{\mathcal{D}S^k}{\partial x^l} = \frac{\partial S^k}{\partial x^l} + \Gamma^k{}_{il} \cdot S^i \,.$$

Перейдем к подгруппе группы линейных преобразований. Для этого учтем, что

$$\Gamma^k{}_{il} = \frac{\mathcal{D}l^k{}_i}{\partial x^l} = \frac{\mathcal{D}l^k{}_i}{\mathcal{D}\varphi^\alpha} \cdot \frac{\mathcal{D}\varphi^\alpha}{\partial x^L} = K^k{}_{i\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_l \,, \tag{75}$$

где φ^α – параметры подгруппы группы линейных преобразований,

$$K^k{}_{i\alpha} = \frac{\mathcal{D}l^k{}_i}{\mathcal{D}\varphi^\alpha} \,.$$

Получим

$$\frac{\mathcal{D}S^k}{\partial x^l} = \frac{\partial S^k}{\partial x^l} + K^k{}_{i\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_l \cdot S^i \,.$$

2. Пусть произвольный вектор S_i преобразуется под действием группы линейных преобразований следующим образом:

$$S'_i = S_k \cdot (l^{-1})^k{}_i \,,$$

где $l^l{}_k \cdot (l^{-1})^k{}_i = \delta^l{}_i$. Ковариантная производная от S_i имеет вид:

$$\frac{\mathcal{D}S_i}{\partial x^l} = \frac{\partial S_i}{\partial x^l} - S_k \cdot K^k{}_{i\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_l \,.$$

3. Пусть теперь задан вектор $S^k{}_i$ с преобразованием

$$S'^k{}_i = l^k{}_m \cdot S^m{}_n \cdot (l^{-1})^n{}_i \,.$$

Ковариантная производная от $S^k{}_i$ выглядит следующим образом:

$$\frac{\mathcal{D}S^k{}_i}{\partial x^l} = \frac{\partial S^k{}_i}{\partial x^l} + \Gamma^k{}_{ml} \cdot S^m{}_i - S^k{}_n \cdot \Gamma^n{}_{il} \,.$$

Перейдем к подгруппе группы линейных преобразований. Для этого учтем (75) и кроме того

$$S^k{}_i = K^k{}_{i\alpha} \cdot S^\alpha \,.$$

В результате получим

$$\frac{\mathcal{D}(K^k{}_{i\alpha} \cdot S^\alpha)}{\partial x^l} = \frac{\partial (K^k{}_{i\alpha} \cdot S^\alpha)}{\partial x^l} +$$

$$K^k{}_{m\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_l \cdot (K^m{}_{i\beta} \cdot S^\beta) - (K^k{}_{n\beta} \cdot S^\beta) \cdot K^n{}_{i\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_l \,.$$

Или

$$K^k{}_{i\alpha} \cdot \frac{\mathcal{D}S^\alpha}{\partial x^l} = K^k{}_{i\alpha} \cdot \frac{\partial S^\alpha}{\partial x^l} +$$

$$(K^k{}_{m\gamma} \cdot K^m{}_{i\beta} - K^k{}_{m\beta} \cdot K^m{}_{i\gamma}) \cdot \Gamma^\gamma{}_l \cdot S^\beta \,.$$

Примем во внимание, что

$$K^k{}_{m\gamma} \cdot K^m{}_{i\beta} - K^k{}_{m\beta} \cdot K^m{}_{i\gamma} = K^k{}_{i\alpha} \cdot C^\alpha{}_{\beta\gamma} \,, \tag{76}$$

где $C^\alpha{}_{\beta\gamma}$ – структурные постоянные подгруппы. В результате получим выражение для ковариантной производной от S^α по подгруппе группы линейных преобразований:

$$\frac{\mathcal{D}S^\alpha}{\partial x^l} = \frac{\partial S^\alpha}{\partial x^l} + C^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_l \cdot S^\beta \,.$$

4. Запишем ковариантную производную по подгруппе группы линейных преобразований от тензора кручения. Для этого в ковариантной производной общего вида

$$\frac{\mathcal{D}T^i{}_{ml}}{\partial x^n} = \frac{\partial T^i{}_{ml}}{\partial x^n} + \Gamma^i{}_{pn} \cdot T^p{}_{ml} - T^i{}_{pl} \cdot \Gamma^p{}_{mn} - T^i{}_{mp} \cdot \Gamma^p{}_{ln}$$

учтем, что

$$T^i{}_{ml} = K^i{}_{m\alpha} \cdot T^\alpha{}_l \quad \text{и} \quad \Gamma^i{}_{pn} = K^i{}_{p\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_n \,.$$

Тогда

$$\frac{\mathcal{D}(K^i{}_{m\alpha} \cdot T^\alpha{}_l)}{\partial x^n} = \frac{\partial(K^i{}_{m\alpha} \cdot T^\alpha{}_l)}{\partial x^n} + (K^i{}_{p\gamma} \cdot K^p{}_{m\beta} - K^p{}_{m\gamma} \cdot K^i{}_{p\beta}) \cdot \Gamma^\gamma{}_n \cdot T^\beta{}_l - K^i{}_{m\alpha} \cdot T^\alpha{}_p \cdot K^p{}_{l\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_n \,.$$

Используя (76), получим

$$\frac{\mathcal{D}T^\alpha{}_l}{\partial x^n} = \frac{\partial T^\alpha{}_l}{\partial x^n} + C^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_n \cdot T^\beta{}_l - T^\alpha{}_p \cdot K^p{}_{l\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_n \,.$$

5. Запишем ковариантную производную по подгруппе группы линейных преобразований от тензора кривизны. Для этого в ковариантной производной общего вида

$$\frac{\mathcal{D}R^i{}_{klm}}{\partial x^n} = \frac{\partial R^i{}_{klm}}{\partial x^n} + \Gamma^i{}_{pn} \cdot R^p{}_{klm} - R^i{}_{plm} \cdot \Gamma^p{}_{kn} - R^i{}_{kpm} \cdot \Gamma^p{}_{ln} - R^i{}_{klp} \cdot \Gamma^p{}_{mn} \,.$$

учтем

$$R^i{}_{klm} = K^i{}_{k\alpha} \cdot R^\alpha{}_{lm} \,, \qquad \Gamma^i{}_{pn} = K^i{}_{p\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_n \,.$$

Тогда

$$\frac{\mathcal{D}(K^i{}_{k\alpha} \cdot R^\alpha{}_{lm})}{\partial x^n} = \frac{\partial(K^i{}_{k\alpha} \cdot R^\alpha{}_{lm})}{\partial x^n} + (K^i{}_{p\gamma} \cdot K^p{}_{k\beta} - K^i{}_{p\beta} \cdot K^p{}_{k\gamma}) \cdot R^\beta{}_{lm} \cdot \Gamma^\gamma{}_n - K^i{}_{k\alpha} \cdot R^\alpha{}_{pm} \cdot K^p{}_{l\beta} \cdot \Gamma^\beta{}_n - K^i{}_{k\alpha} \cdot R^\alpha{}_{lp} \cdot K^p{}_{m\beta} \cdot \Gamma^\beta{}_n \,.$$

Используя (76), получим

$$\frac{\mathcal{D}R^\alpha{}_{lm}}{\partial x^n} = \frac{\partial R^\alpha{}_{lm}}{\partial x^n} + C^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_n \cdot R^\beta{}_{lm} - R^\alpha{}_{pm} \cdot K^p{}_{l\beta} \cdot \Gamma^\beta{}_n - R^\alpha{}_{lp} \cdot K^p{}_{m\beta} \cdot \Gamma^\beta{}_n \,.$$

Компоненты вектора x^i разделим на две части x^{i_1} , x^{i_2}. Пусть подгруппа калибровочной группы действует только на x^{i_1}. То есть $dx'^{i_1} = l^{i_1}{}_{k_1} \cdot dx^{k_1}$. Тогда из всех коэффициентов $K^i{}_{k\beta}$ отличны от нуля только коэффициенты вида $K^{i_1}{}_{k_1\beta}$. Поэтому, в частности, ковариантные производные имеют вид:

$$\frac{\mathcal{D}T^\alpha{}_{i_2}}{\partial x^{n_2}} = \frac{\partial T^\alpha{}_{i_2}}{\partial x^{n_2}} + C^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_{n_2} \cdot T^\beta{}_{i_2}$$

$$\frac{\mathcal{D}R^\alpha{}_{k_2 l_2}}{\partial x^{n_2}} = \frac{\partial R^\alpha{}_{k_2 l_2}}{\partial x^{n_2}} + C^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_{n_2} \cdot R^\beta{}_{k_2 l_2} \,.$$

VI. КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Из (58) следует, что коэффициенты связности могут быть записаны следующим образом

$$\Gamma^i{}_{kl} = \langle \mathfrak{N}^i \,,\, X_l(\mathfrak{N}_k) \rangle \,.$$

Здесь векторы $\mathfrak{N}^i$ определяются тем,что

$$\langle \mathfrak{N}^i \,,\, \mathfrak{N}_k \rangle = \delta^i{}_k \,.$$

В общем случае коэффициенты связности несимметричны по нижним индексам

$$\Gamma^i{}_{kl} = \Gamma^i{}_{<kl>} + \Gamma^i{}_{[kl]} \,.$$

Здесь

$$\Gamma^i{}_{<kl>} = \frac{1}{2} \left(\langle \mathfrak{N}^i \,,\, X_l(\mathfrak{N}_k) \rangle + \langle \mathfrak{N}^i \,,\, X_k(\mathfrak{N}_l) \rangle \right) \,.$$

и

$$\Gamma^i{}_{[kl]} = \frac{1}{2} \left(\langle \mathfrak{N}^i \,,\, X_l(\mathfrak{N}_k) \rangle - \langle \mathfrak{N}^i \,,\, X_k(\mathfrak{N}_l) \rangle \right) \,.$$

Укажем, что в ряде случаев удобно пользоваться обозначением

$$\Gamma_{ikl} = g_{in} \cdot \Gamma^n{}_{kl} = \langle \mathfrak{N}_i \,, X_l(\mathfrak{N}_k) \rangle \,.$$

Введем символы Кристоффеля

$$\{i \,,\, kl\} \equiv \frac{1}{2} \left(X_l(g_{ik}) + X_k(g_{li}) - X_i(g_{kl}) \right)$$

и найдем их связь с коэффициентами связности Γ_{ikl}. Для этого раскроем $\{i \,,\, kl\}$ через базисные векторы

$$\{i \,,\, kl\} = \tfrac{1}{2} \left(\langle \mathfrak{N}_i \,, X_l(\mathfrak{N}_k) \rangle + \langle X_l(\mathfrak{N}_k) \,, \mathfrak{N}_i \rangle + \langle \mathfrak{N}_l \,, X_k \wedge X_i(\mathbf{x}) \rangle - \langle \mathfrak{N}_k \,, X_i \wedge X_l(\mathbf{x}) \rangle \right)$$

Откуда

$$\{i \,,\, kl\} = \frac{1}{2} \Gamma_{i<kl>} + \frac{1}{2} \left(\Gamma_{l[ik]} - \Gamma_{k[li]} \right) \,.$$

В результате получаем

$$\Gamma_{ikl} = \{i \,,\, kl\} + \frac{1}{2} \left(\Gamma_{i[kl]} + \Gamma_{k[li]} - \Gamma_{l[ik]} \right) \,.$$

Если коэффициенты связности симметричны по последним двум индексам, то они совпадают с символами Кристоффеля:

$$\Gamma_{i<kl>} = \{i \,,\, kl\} \,.$$

VII. ТЕНЗОРЫ КРУЧЕНИЯ И КРИВИЗНЫ

1. Тензор кручения

В соответствии с определением тензор кручения

$$T^n{}_{[kl]} \equiv \Gamma^n{}_{[kl]} \,.$$

2. Тензор кривизны

В соответствии с определением тензор кривизны

$$R^i{}_{k[lm]} \equiv \Gamma^i{}_{kl,m} - \Gamma^i{}_{km,l} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} - \Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{km}\,.$$

Разбивая коэффициенты связности на слагаемые, симметричные и антисимметричные по нижним индексам, тензор кривизны можно записать в следующем виде (смотрите Приложение 1.)

$$R^i{}_{k[lm]} = B^i{}_{k[lm]} + \Omega^i{}_{k[lm]}\,,$$

где

$$B^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{<kl>,m} - \Gamma^i{}_{<km>,l} + \Gamma^i{}_{<nm>} \cdot \Gamma^n{}_{<kl>} - \Gamma^i{}_{<nl>} \cdot \Gamma^n{}_{<km>}\,,$$

$$\Omega^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{[kl];m} - \Gamma^i{}_{[km];l} + \Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} - \Gamma^i{}_{[nm]} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} + 2\Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{[lm]}\,.$$

Свертка тензора кривизны по индексам i и m приводит к тензору второго ранга – тензору Риччи

$$R_{kl} = B_{kl} + \Omega_{kl}\,.$$

Разберем свойства тензора Ω_{kl} при специально заданном условии

$$\Gamma^i{}_{[ki]} = 0\,.$$

Тогда

$$\Omega_{kl} = \Gamma^i{}_{[kl];i} + \Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{[li]}\,.$$

То есть

$$\Omega_{kl} = \Omega_{<kl>} + \Omega_{[kl]}\,,$$

где

$$\Omega_{<kl>} = \Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{[li]}\,, \quad \Omega_{[kl]} = \Gamma^i{}_{[kl];i}\,.$$

Разбивая коэффициенты связности на слагаемые в соответствии с (17)

$$\Gamma^i{}_{kl} = (l^{-1})^i{}_n \cdot l^n{}_{k,l} + \gamma^i{}_{kl}\,,$$

или

$$\Gamma^i{}_{kl} = l^i{}_{kl} + \gamma^i{}_{kl}\,,$$

где введено обозначение

$$l^i{}_{kl} = (l^{-1})^i{}_n \cdot l^n{}_{k,l}\,,$$

тензор кривизны можно записать в следующем виде

$$R^i{}_{k[lm]} = R^i{}_{k[lm]}(l) + R^i{}_{k[lm]}(\gamma) + l^i{}_{n[m} \cdot \gamma^n{}_{|k|l]} + \gamma^i{}_{n[m} \cdot l^n{}_{|k|l]}\,,$$

где

$$R^i{}_{k[lm]}(l) = l^i{}_{kl,m} - l^i{}_{km,l} + l^i{}_{nm} \cdot l^n{}_{kl} - l^i{}_{nl} \cdot l^n{}_{km}\,,$$

– тензор кривизны по отношению к слагаемым коэффициентов связности l, а

$$R^i{}_{k[lm]}(\gamma) = \gamma^i{}_{kl,m} - \gamma^i{}_{km,l} + \gamma^i{}_{nm} \cdot \gamma^n{}_{kl} - \gamma^i{}_{nl} \cdot \gamma^n{}_{km}$$

– тензор кривизны по отношению к слагаемым коэффициентов связности γ. При этом тензор кривизны по отношению к слагаемым коэффициентов связности l

$$R^i{}_{k[lm]}(l) = 0\,.$$

Отсюда следует важный результат. Коэффициенты связности содержат два слагаемых: одно задается линейным преобразованием, которым также определяется метрический тензор, а другое представлено коэффициентами γ. В общем случае эти величины не связаны друг с другом. Если коэффициенты связности определяются только линейным преобразованием, то есть они представлены только первым слагаемым, тензор кривизны в этом случае равен нулю*. Таким образом, если строить теорию гравитации на метрическом тензоре вида (10), другими словами, на линейных преобразованиях, то такая теория не может использовать тензор кривизны. И, напротив, если мы хотим использовать тензор кривизны, то исходным объектом теории гравитации должны быть независимые слагаемые γ коэффициентов связности. Понятно, что вышесказанное не имеет место, если на величины l и γ наложены условия, связывающие их между собой. Например, таким условием может быть равенство нулю ковариантной производной от метрического тензора $\mathcal{D}g_{ik} = 0$.

3. Тождества Бианки

Внешнее дифференцирование уравнений структуры приводит к тождествам Бианки. Эти тождества можно получить иначе, используя тождества Якоби, которым подчиняются антисимметричные операторы

$$((X_m \wedge X_l) \wedge X_k) + ((X_l \wedge X_k) \wedge X_m) + ((X_k \wedge X_m) \wedge X_l) = 0\,. \tag{77}$$

Действительно, воздействуем этим оператором на вектор $\mathbf{x}$

$$(X_m \wedge X_l)X_k(\mathbf{x}) + (X_l \wedge X_k)X_m(\mathbf{x}) + (X_k \wedge X_m)X_l(\mathbf{x}) - X_k(X_m \wedge X_l)(\mathbf{x}) - X_m(X_l \wedge X_k)(\mathbf{x}) - X_l(X_k \wedge X_m)(\mathbf{x}) = 0\,.$$

---

*Искривленное пространство в этом случае было названо пространством абсолютного параллелизма.

и используем соотношения (59) и (60). Получим

$$\mathfrak{N}_i\cdot R^i{}_{k[lm]}+\mathfrak{N}_i\cdot R^i{}_{m[kl]}+\mathfrak{N}_i\cdot R^i{}_{l[mk]}-X_k(\mathfrak{N}_n\cdot\Gamma^n{}_{[lm]})-X_m(\mathfrak{N}_n\cdot\Gamma^n{}_{[kl]})-X_l(\mathfrak{N}_n\cdot\Gamma^n{}_{[mk]})=0\,.$$

Отсюда получаем *первое тождество Бианки*

$$R^i{}_{k[lm]}+R^i{}_{m[kl]}+R^i{}_{l[mk]}-R^i{}_{[lm]k}-R^i{}_{[kl]m}-R^i{}_{[mk]l}=0\,.$$

В частном случае, когда коэффициенты связности симметричны по нижним индексам, первое тождество Бианки приобретает вид

$$R^i{}_{k[lm]}+R^i{}_{m[kl]}+R^i{}_{l[mk]}=0\,.$$

Воздействуем оператором (77) на вектор $\mathfrak{N}_k$. Получим

$$(X_n\wedge X_m)X_l(\mathfrak{N}_k)+(X_m\wedge X_l)X_n(\mathfrak{N}_k)+(X_l\wedge X_n)X_m(\mathfrak{N}_k)-X_l(X_n\wedge X_m)(\mathfrak{N}_k)-X_n(X_m\wedge X_l)(\mathfrak{N}_k)-X_m(X_l\wedge X_n)(\mathfrak{N}_k)=0\,.$$

Отсюда получаем *второе тождество Бианки* (смотрите Приложение)

$$R^i{}_{k[lm];n}+R^i{}_{k[nl];m}+R^i{}_{k[mn];l}+2(R^i{}_{k[mp]}\cdot\Gamma^p{}_{[nl]}+R^i{}_{k[lp]}\cdot\Gamma^p{}_{[mn]}+R^i{}_{k[np]}\cdot\Gamma^p{}_{[lm]})=0\,.$$

В частном случае, когда коэффициенты связности симметричны по нижним индексам, второе тождество Бианки приобретает вид

$$R^i{}_{k[lm];n}+R^i{}_{k[nl];m}+R^i{}_{k[mn];l}=0\,.$$

VIII. ГРУППА СДВИГОВ G_Y КАК ГРУППА ЛИ В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

На точках пространства системы отсчета X действует группа сдвигов G_x. Закон композиции этой группы можно записать через сложение векторов системы отсчета

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2\,. \tag{78}$$

В свою очередь на точках искривленного пространства Y действует группа сдвигов G_y. Закон композиции этой группы можно записать через сложение векторов искривленного пространства

$$\mathbf{y}=\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2\,. \tag{79}$$

Векторам $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, входящим в указанный закон композиции можно поставить в соответствие векторы системы отсчета*

$$\mathbf{x}\sim\mathbf{y}\,,\quad \mathbf{x}_1\sim\mathbf{y}_1\,,\quad \mathbf{x}_2\sim\mathbf{y}_2$$

и считать, что закону композиции (79) соответствует закон композиции, позволяющий по двум векторам $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ определять вектор $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}=f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\,. \tag{80}$$

Нулевому вектору в Y соответствует нулевой вектор в X

$$0_y\sim 0_x\,.$$

Для них

$$\mathbf{y}_1=\mathbf{y}_1+0_y\sim\mathbf{x}_1=f(\mathbf{x}_1,0_x)\,,$$
$$\mathbf{y}_1=0_y+\mathbf{y}_1\sim\mathbf{x}_1=f(0_x,\mathbf{x}_1)\,.$$

Обратному вектору в Y соответствует обратный вектор в X

$$\mathbf{y}_1+(-\mathbf{y}_1)=0_y\sim f(\mathbf{x}_1,-\mathbf{x}_1)=0_x\,,$$
$$-\mathbf{y}_1\sim-\mathbf{x}_1\,.$$

Ассоциативности сложения в Y соответствует ассоциативность закона композиции (80) в X:

$$\mathbf{y}=(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2)+\mathbf{y}_3=\mathbf{y}_1+(\mathbf{y}_2+\mathbf{y}_3)\sim$$
$$\mathbf{x}=f(f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),\mathbf{x}_3)=f(\mathbf{x}_1,f(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3))\,.$$

Таким образом, закон композиции (80) определяет группу в системе отсчета X. Обозначим эту группу G. Эта группа представляет группу сдвигов G_y искривленного пространства в системе отсчета. Так как элементами группы G являются векторы в X, которые кроме того подчиняются закону сложения векторов (78), то группа G является группой Ли.

Важно отметить следующее. Так как точки пространства системы отсчета и искривленного пространства совпадают, законы композиции (78) и (80) относятся к одной и той же точке. При переходе к другой точке закон композиции (78) остается прежним, закон композиции (80) меняется, так как меняются соответствующие векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$. Иначе говоря, искривленное пространство само по себе является однородным, а представляющее его пространство, напротив, неоднородно.

Дифференциал вектора $\mathbf{x}$, соответствующий закону сложения (78), обозначим $d\mathbf{x}$. А дифференциал этого же вектора, соответствующий закону композиции (80), обозначим $\mathsf{D}\mathbf{x}$ и отождествим его с дифференциалом представления, введенным в Разделе III.1. Связь между дифференциалами $d\mathbf{x}$ и $\mathsf{D}\mathbf{x}$ найдем из условия

$$\mathbf{x}+d\mathbf{x}=f(\mathbf{x},\mathsf{D}\mathbf{x})\,.$$

Вычитая отсюда

$$\mathbf{x}=f(\mathbf{x},0_x)\,,$$

получим

$$d\mathbf{x}=f(\mathbf{x},\mathsf{D}\mathbf{x})-f(\mathbf{x},0_x)\,.$$

*Несмотря на одинаковые обозначения, эти векторы отличны от тех, которые входят в закон сложения (78).

В правой части этого соотношения выделим главную (линейную) часть относительно $\mathsf{D}\mathbf{x}$ и запишем соотношение в следующем виде

$$d\mathbf{x} = \mathsf{D}\mathbf{x} \circ (\mathbf{l}^{-1}) .$$

Отсюда получим соотношение

$$\mathsf{D}\mathbf{x} = d\mathbf{x} \circ \mathbf{l} ,$$

которое в соответствии с нашим допущением совпадает с (6).

IX. ИСКРИВЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ И ГЕОМЕТРИЯ КЛЕЙНА

Общность геометрии Римана, лежащей в основе теории гравитации Эйнштейна, достигается ценой отказа от соотношений

$$d\mathbf{x} = \mathfrak{E}_i \cdot dx^i \,, \quad dx^2 = \langle d\mathbf{x} \,,\; d\mathbf{x} \rangle \,, \quad g_{ik} = \langle \mathfrak{E}_i \,,\; \mathfrak{E}_k \rangle \,,$$

имеющих место в геометрии Евклида, то есть ценой отказа от направленных измерений в пространстве-времени. Иначе говоря, геометрия Римана не допускает введения эталонов длины и времени, а в качестве измеряемой величины принимает линейный элемент*

$$dx^2 = \sqrt{g_{ik} \cdot dx^i \cdot dx^k} \,.$$

Эта особенность геометрии Римана приводит к трудностям в теории гравитации, связанным с измерением компонент импульса и энергии. Кроме того, положение, когда отсутствуют измерительные эталоны времени и длины, с физической точки зрения само по себе представляется неудовлетворительным.

Все это заставляет отказаться от геометрии Римана как основы теории гравитации и искать геометрию не менее общую, но допускающую введение в теорию линеек и часов. Ввести в геометрию понятие направления математически означает ввести группу, описывающую направленные движения в пространстве. А это наводит на мысль, что искомая геометрия должна подчиняться идее Ф.Клейна: она должна быть следствием действия группы на множество точек пространства. Соображения предыдущего Раздела позволяют рассматривать искривленное пространство как пространство Клейна, фундаментальной группой которого является группа Ли G, действующая на векторах системы отсчета и представляющая группу сдвигов G_y искривленного пространства. Геометрия Клейна, очевидно, должна быть ковариантна относительно фундаментальной группы†. Поэтому если теорию гравитации строить на геометрии Клейна, то необходимо отказаться от идеи *общей ковариантности*, которая, согласно Эйнштейну, состоит в инвариантности теории гравитации относительно преобразований координат точек пространства Римана

$$x'^i = f^i(x^k) \,.$$

А так как в геометрии Римана преобразование точек пространства не отделимо от преобразования числового обозначения точек (преобразования системы координат), то использование идеи общей ковариантности неудовлетворительно и с этой точки зрения.

В заключение заметим, что изложенная теория искривленного пространства включает в себя и уточняет все соотношения геометрии Римана.

X. ВЫВОДЫ

- Линейный элемент и метрический тензор, полученные для искривленного пространства, совпадают с теми, которые используются в тетрадной формулировке теории гравитации.

- Подход к искривленному пространству как векторному пространству приводит к новому взгляду на коэффициенты связности. А именно, в основе этих коэффициентов и всей структуры искривленного пространства лежит группа линейных преобразований.

- Равенство нулю ковариантной производной от метрического тензора противоречит подходу к искривленному пространству как векторному пространству со скалярным произведением векторов. Поэтому, отказываясь от геометрии Римана как основы теории гравитации, необходимо отказаться и от этого равенства.

- Коэффициенты связности не определяются через метрический тензор, а представляют собой самостоятельные независимые переменные.

- Один из вопросов, который нужно решить при построении теории гравитации, основанной на искривленном пространстве, состоит в том, чтобы определить подгруппу группы линейных преобразований, ответственную за гравитационное взаимодействие.

---

*Отсюда следует инвариантность теории гравитации Эйнштейна относительно конформных преобразований.

†Ковариантность геометрии относительно фундаментальной группы означает инвариантность соотношений геометрии при преобразованиях этой группы.

XI. ПРИЛОЖЕНИЕ 1. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

$$R^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{kl,m} - \Gamma^i{}_{km,l} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} - \Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{km} \,.$$

Разделим коэффициенты связности на симметричную и антисимметричную части и запишем последовательно слагаемые в правой части

$$\Gamma^i{}_{kl,m} = \Gamma^i{}_{<kl>,m} + \Gamma^i{}_{[kl],m} \,,$$

$$-\Gamma^i{}_{km,l} = -\Gamma^i{}_{<km>,l} - \Gamma^i{}_{km,l} \,,$$

$$\begin{aligned}\Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} = (\Gamma^i{}_{<nm>} + \Gamma^i{}_{[nm]})\Gamma^n{}_{<kl>}\Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} \\ = \Gamma^i{}_{<nm>} \cdot \Gamma^n{}_{<kl>} + \Gamma^i{}_{[nm]} \cdot \Gamma^n{}_{kl} - \\ \Gamma^i{}_{[nm]} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} \,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{km} = -(\Gamma^i{}_{<nl>} + \Gamma^i{}_{[nl]})\Gamma^n{}_{<km>} - \Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} \\ = -\Gamma^i{}_{<nl>} \cdot \Gamma^n{}_{<km>} - \Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{km} + \\ \Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} - \Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} \,,\end{aligned}$$

Теперь учтем, что

$$\Gamma^i{}_{[kl];m} = \Gamma^i{}_{[kl],m} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} - \Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{km} - \Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{lm}$$

и

$$\begin{aligned}-\Gamma^i{}_{[km];l} = -\Gamma^i{}_{[km],l} - \Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} + \\ \Gamma^i{}_{[nm]} \cdot \Gamma^n{}_{kl} + \Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{ml} \,.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что тензор кривизны можно записать так:

$$R^i{}_{k[lm]} = B^i{}_{k[lm]} + \Omega^i{}_{k[lm]} \,,$$

где

$$\begin{aligned}B^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{<kl>,m} - \Gamma^i{}_{<km>,l} + \\ \Gamma^i{}_{<nm>} \cdot \Gamma^n{}_{<kl>} - \Gamma^i{}_{<nl>} \cdot \Gamma^n{}_{<km>} \,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{[kl];m} - \Gamma^i{}_{[km];l} + \Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} - \\ \Gamma^i{}_{[nm]} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} + 2\Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{[lm]} \,.\end{aligned}$$

XII. ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ВЫВОД ВТОРОГО ТОЖДЕСТВА БИАНКИ

Исходим из тождества Якоби

$$\begin{aligned}(X_n \wedge X_m)X_l(\mathfrak{N}_k) + (X_m \wedge X_l)X_n(\mathfrak{N}_k) + \\ (X_l \wedge X_n)X_m(\mathfrak{N}_k) - X_l(X_n \wedge X_m)(\mathfrak{N}_k) - \\ X_n(X_m \wedge X_l)(\mathfrak{N}_k) - X_m(X_l \wedge X_n)(\mathfrak{N}_k) = 0 \,.\end{aligned}$$

Используя соотношения (58) и (60), получим

$$\begin{aligned}(X_n \wedge X_m)(\mathfrak{N}_p \cdot \Gamma^p{}_{kl}) + (X_m \wedge X_l)(\mathfrak{N}_p \cdot \Gamma^p{}_{kn}) + \\ (X_l \wedge X_n)(\mathfrak{N}_p \cdot \Gamma^p{}_{km}) - X_l(\mathfrak{N}_i \cdot R^i{}_{k[mn]}) - \\ X_n(\mathfrak{N}_i \cdot R^i{}_{k[lm]}) - X_m(\mathfrak{N}_i \cdot R^i{}_{k[nl]}) = 0 \,.\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}(X_n \wedge X_m)(\mathfrak{N}_p) \cdot \Gamma^p{}_{kl} + (X_m \wedge X_l)(\mathfrak{N}_p) \cdot \Gamma^p{}_{kn} + \\ (X_l \wedge X_n)(\mathfrak{N}_p) \cdot \Gamma^p{}_{km} - \mathfrak{N}_p \cdot (X_n \wedge X_m)(\Gamma^p{}_{kl}) + \\ \mathfrak{N}_p \cdot (X_m \wedge X_l)(\Gamma^p{}_{kn}) + \mathfrak{N}_p \cdot (X_l \wedge X_n)(\Gamma^p{}_{km}) - \\ X_l(\mathfrak{N}_i) \cdot R^i{}_{k[mn]} - X_n(\mathfrak{N}_i) \cdot R^i{}_{k[lm]} - \\ X_m(\mathfrak{N}_i) \cdot R^i{}_{k[nl]} - \mathfrak{N}_i \cdot X_l(R^i{}_{k[mn]}) - \\ \mathfrak{N}_i \cdot X_n(R^i{}_{k[lm]}) - \mathfrak{N}_i \cdot X_m(R^i{}_{k[nl]}) = 0 \,.\end{aligned}$$

Далее учтем (59) и (58), и кроме того, что в геометрии Римана выражения вида

$$(X_n \wedge X_m)(\Gamma^p{}_{kl}) = 0 \,,$$

так как по отношению к $\Gamma^p{}_{kl}$ оператор $(X_n \wedge X_m)$ означает:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^n \partial x^m} - \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^n} \,,$$

а также выражения вида $X_l(R^i{}_{k[mn]})$ означают частное дифференцирование $R^i{}_{k[mn]}$ по x^l:

$$X_l(R^i{}_{k[mn]}) = \frac{\partial R^i{}_{k[mn]}}{\partial x^l} = R^i{}_{k[mn],l} \,.$$

Получим:

$$\begin{aligned}R^i{}_{p[mn]} \cdot \Gamma^p{}_{kl} + R^i{}_{p[lm]} \cdot \Gamma^p{}_{kn} + R^i{}_{p[nl]} \cdot \Gamma^p{}_{km} - \\ \Gamma^i{}_{pl} \cdot R^p{}_{k[mn]} - \Gamma^i{}_{pn} \cdot R^p{}_{k[lm]} - \Gamma^i{}_{pm} \cdot R^p{}_{k[nl]} - \\ R^i{}_{k[mn],l} - R^i{}_{k[lm],n} - R^i{}_{k[nl],m} = 0 \,.\end{aligned} \tag{81}$$

Далее воспользуемся следующим тождеством:

$$\begin{aligned}R^i{}_{k[pm]} \cdot \Gamma^p{}_{<ln>} + R^i{}_{k[pl]} \cdot \Gamma^p{}_{<nm>} + \\ R^i{}_{k[pn]} \cdot \Gamma^p{}_{<ml>} + R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{<mn>} + \\ R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{<lm>} + R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{<nl>} = 0 \,.\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}R^i{}_{k[pm]} \cdot \Gamma^p{}_{ln} + R^i{}_{k[pl]} \cdot \Gamma^p{}_{nm} + R^i{}_{k[pn]} \cdot \Gamma^p{}_{ml} + \\ R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{mn} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{lm} + R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{nl} - \\ R^i{}_{k[pm]} \cdot \Gamma^p{}_{[ln]} - R^i{}_{k[pl]} \cdot \Gamma^p{}_{[nm]} - R^i{}_{k[pn]} \cdot \Gamma^p{}_{[ml]} - \\ R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{[mn]} - R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{[lm]} - R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{[nl]} = 0 \,.\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}R^i{}_{k[pm]} \cdot \Gamma^p{}_{ln} + R^i{}_{k[pl]} \cdot \Gamma^p{}_{nm} + R^i{}_{k[pn]} \cdot \Gamma^p{}_{ml} + \\ R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{mn} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{lm} + R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{nl} - \\ 2(R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{[nl]} + R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{[mn]} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{[lm]}) = 0 \,.\end{aligned}$$

Сложим это тождество с тождеством Бианки (81):

$$
\begin{aligned}
&-R^i{}_{k[lm],n} - R^i{}_{k[nl],m} - R^i{}_{k[mn],l} - \\
&\Gamma^i{}_{pn} \cdot R^p{}_{k[lm]} - \Gamma^i{}_{pm} \cdot R^p{}_{k[nl]} - \Gamma^i{}_{pl} \cdot R^p{}_{k[mn]} + \\
&R^i{}_{p[lm]} \cdot \Gamma^p{}_{kn} + R^i{}_{p[nl]} \cdot \Gamma^p{}_{km} + R^i{}_{p[mn]} \cdot \Gamma^p{}_{kl} + \\
&R^i{}_{k[pm]} \cdot \Gamma^p{}_{ln} + R^i{}_{k[pl]} \cdot \Gamma^p{}_{nm} + R^i{}_{k[pn]} \cdot \Gamma^p{}_{ml} + \\
&R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{mn} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{lm} + R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{nl} - \\
&2(R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{[nl]} + R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{[mn]} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{[lm]}) = 0\,.
\end{aligned}
$$

И в результате получим второе тождество Бианки в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&R^i{}_{k[lm];n} + R^i{}_{k[nl];m} + R^i{}_{k[mn];l} + \\
&2(R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{[nl]} + R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{[mn]} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{[lm]}) = 0\,.
\end{aligned}
$$