# Лекция 22. Пространство и время как афинное пространство

А. А. Кецарис*
(18 февраля 2007 г.)

В этой Лекции мы рассматриваем формирование пространственно-временных представлений в физике. Выделяются те математические понятия, из которых следуют указанные представления. Это прежде всего *группа сдвигов*, *вектор*, *скалярное произведение векторов*. Делается вывод о том, что эти понятия должны быть перенесены в искривленное пространство-время. А отсюда следует необходимость пересмотра основ геометрии Римана, на которой строится теория гравитации Эйнштейна.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Этой Лекцией мы начинаем рассматривать гравитационное взаимодействие и общую теорию относительности как основание теории гравитации.

Ключевым недостатком общей теории относительности является ее опора на геометрию Римана в ее классическом виде. Дело в том, что геометрия Римана использует в своих построениях числовые конструкции, не имеющие ясного соответствия геометрическим образам. Следствием этого является то обстоятельство, что результаты общей теории относительности требуют дополнительного толкования (должны быть проинтерпретированы). В этом отношении общая теория относительности похожа на квантовую теорию, что является свидетельством недостаточной развитости основ теории.

Прежде всего, координаты в геометрии Римана есть числа, поставленные в соответствие точкам многообразия произвольным образом, что не мыслимо для физики. С точки зрения физики координаты в пространстве есть результат измерения участков пространства участками же пространства, принятыми за эталоны, координаты во времени есть результат измерения отрезков времени отрезком времени, принятым за эталон. В результате физический подход к формированию координат аккумулируется в следующих выражениях

$$x = e_a \cdot x^a \,, \qquad t = \tau \cdot t \,. \tag{1}$$

$$x^a = \langle e^a \,, x \rangle \,, \qquad t = \langle \tau \,, t \rangle \,. \tag{2}$$

Здесь $x$ – пространственный вектор – соответствующий геометрический образ, к которому сводится представление о пространстве; $e_a$ и $e^a$ – пространственные векторы, принятые за эталоны; $x^a$ – координаты пространственного вектора. Аналогично, $t$ – отрезок времени, $\tau$ – отрезок времени, принятый за эталон, $t$ – координата отрезка времени.[1]

Первое соотношение в (1) означает построение вектора $x$ из некоторого числа (координат $x^a$) эталонов $e_a$. Первое соотношение в (2) означает[2] обратную процедуру, которая есть *измерение* вектора $x$ с помощью эталонов $e^a$ (то есть установление числа (координат $x^a$) эталонов $e^a$ в векторе $x$). Аналогично второе соотношение в (1) означает формирование отрезка времени $t$ из некоторого числа (координат $t$) эталона времени $\tau$. Второе соотношение в (2) означает обратную процедуру, которая есть *измерение* отрезка времени $t$ с помощью эталона $\tau$ (то есть установление числа (координат $t$) эталонов $\tau$ в отрезке времени $t$).

Приведенные соотношения свидетельствуют о том, что физический подход к координатам предполагает представление о геометрическом пространстве и времени как о векторных пространствах, снабженных скалярным произведением векторов. Но именно эти понятия (векторное пространство и скалярное произведение векторов) отсутствуют в геометрии Римана. Отсюда возникает необходимость приведения основ геометрии Римана в соответствие требованиям физики.

На первом этапе наша задача состоит в том, чтобы проанализировать формирование представлений о геометрии и времени в физике и выделить те математические понятия, которые необходимо перенести в геометрию Римана.

## II. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### 1. Первичные понятия и суждения

Первичными понятиями физики, точнее кинематики, являются *тело*, *процесс*, *движение*. Опыт предоставляет *множество* тел, процессов и движений. Первичным суждением, связывающим первичные понятия, является следующее: тела и процессы *движутся*. Эти понятия и суждение, по существу, подходят для описания самых разнообразных явлений. Под движением, в общем случае, можно понимать любое отношение нескольких тел, приводящее к их изменению.

---

* ketsaris@mail.ru; http://toe-physics.org

[1] Начиная с этой Лекции мы обозначаем векторы цветными буквами. Такое обозначение в дальнейшем значительно упростит изложение материала.

[2] Как обычно скобки $\langle \,, \rangle$ означают скалярное произведение

В физике, однако, изучается значительно более узкий круг явлений, к рассмотрению которого перейдем.

## 2. Тела и процессы

Прежде всего потребуем, чтобы оба множества тел и процессов составляли множества в математическом смысле. Тем самым на множества тел и процессов распространяются понятия, аксиомы и определения теории множеств. К ним, в частности, относится понятие *подмножества*. Для введения этого понятия снабдим тела и процессы *качеством*. *Качество* позволяет выделять из множества тел и процессов подмножества согласно определению: подмножеством $E$ называется множество тел (или процессов), снабженных качеством $e$. Качество $e$ не меняется при переходе от одного элемента подмножества к другому, в этом смысле оно может быть названо *инвариантом* подмножества.

Далее введем понятие *отображения* $f : A \to B$ или $B = f(A)$ подмножества тел (процессов) $A$ в подмножество тел (процессов) $B$. Пусть подмножество тел (процессов) $A$, характеризуемое качеством $a$, отображается в подмножество тел (процессов) $B$, причем подмножество $B$ также может быть охарактеризовано качеством $a$. Тогда качество $a$ называется *инвариантом отображения* $f$. *Число* представляет собой инвариант взаимно однозначных отображений множеств.

Следующую конкретизацию множества тел и процессов свяжем с привлечением таких понятий как *дальше*, *ближе* для тел и *раньше*, *позже* для процессов. Для этого на множествах пар тел и пар процессов введем *бинарные отношения* со свойствами *отношения порядка*. Под бинарным отношением понимается качество, свойственное парам тел или процессов, выделяющее эти пары в подмножество. Если $x$ и $y$ – тела, а

$$\leq, \quad =, \quad \geq$$

– символы отношения порядка, то запись

$$x \geq y$$

означает, что тело $x$ находится дальше тела $y$, а выражение

$$x \leq y$$

означает, что тело $x$ находится ближе тела $y$, выражение

$$x = y$$

означает, что тело $x$ находится там же, где и тело $y$. Если $t$ и $s$ – процессы, то запись

$$t \geq s$$

означает, что процесс $t$ происходит позже процесса $s$, выражение

$$t \leq s$$

соответствует тому, что процесс $t$ происходит раньше процесса $s$, а выражение

$$t = s$$

означает, что процессы $t$ и $s$ происходят одновременно. Необходимо отметить, что введение отношения порядка на множествах тел и процессов означает, что установлен способ определения близости между телами и способ определения одновременности процессов.

Свойства отношения порядка заключаются в следующем

1. если для тел (процессов) $x$ и $y$ имеет место $x \geq y$, а для тел (процессов) $y$ и $z$ выполняется $y \geq z$, то $x \geq z$;

2. если $x \geq y$, а $y \geq x$, то $x = y$.

Множество тел, наделенное отношением порядка (упорядоченное множество) назовем *пространством*. Упорядоченное множество процессов назовем *временем*. *Объединение* пространства и времени назовем *пространством-временем*.[3]

## 3. Движение тел и процессов

Перейдем к конкретизации представления о движении тел и процессов.

Назовем тела, составляющие некоторое подмножество, *неподвижными* друг относительно друга, если отношение порядка на этом подмножестве не меняется. И наоборот, тела называются *движущимися* друг относительно друга, если отношение порядка меняется. Назовем процессы, составляющие некоторое подмножество, *установившимися*, если отношение порядка на указанном подмножестве не меняется, и *неустановившимся*, если это условие не выполняется.

Уточним далее представление о пространстве-времени, потребовав, чтобы тела, составляющие пространство, были неподвижными друг относительно друга, а процессы, составляющие время, были установившимися.

Пусть даны два пространства- времени $X$ и $Y$, каждое из которых состоит из неподвижных друг по отношению к другу тел и установившихся друг по отношению к другу процессов. Пусть после некоторого изменения отношения порядка на $X$ образуется пространство-время $Y$. Указанное изменение будем называть *движением* пространства-времени $Y$ относительно $X$. Будем считать, что указанное движение

---

[3] Объединение пространства и времени в один объект пространство-время на рассматриваемом этапе представляется искуственным. Однако, с введением постулатов специальной теории относительности такое объединение приобретает конструктивный смысл.

определено, если определено отображение $u\colon X\to Y$ ($Y = u(X)$). Пространство-время, по отношению к которому определяется движение, назовем *системой отсчета*.

Пусть даны движения $u_1 : X \to Y$ и $u_2 : Y \to Z$. Движение $u\colon X\to Z$ будем называть *композицией* или *произведением движений* $u_1$ и $u_2$ и записывать закон композиции движений следующим образом:

$$u = u_2 \circ u_1 \,.$$

Введем *единичное* движение $e$ – движение, при котором отношение порядка на множестве тел и процессов не меняется. Введем *обратное* движение $u^{-1}$ согласно условию $u\circ u^{-1} = e$. Введенное таким образом множество движений составляет *группу движений*, которую будем обозначать символом $U$.

Далее, говоря о движениях тел и процессов, будем подразумевать группу отображений $U$ пространства-времени в себя.

## III. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

Пусть дано упорядоченное множество тел и процессов $X$, называемое нами пространством-временем, и некоторое упорядоченное подмножество тел и процессов $A_1$. Тогда для подмножества $A_1$ относительно пространства-времени $X$ определяются верхняя и нижняя грани $\sup_x A_1$ и $\inf_x A_1$. Тела и процессы, выделенные верхней и нижней гранями, назовем *вложенными* в пространство-время $X$, а само $X$ *составным*. На множестве составных и вложенных тел и процессов введем дополнительное отношение порядка: если $a$ и $b$ тела этого множества и $b$ вложено в $a$, то $a > b$ означает, что тело $a$ больше вложенного тела $b$. Если $t$ и $s$ процессы и $s$ вложено в $t$, то $t > s$, означает, что процесс $t$ продолжительнее процесса $s$, или процесс $s$ короче процесса $t$. $a = b$, $t = s$ означает, что тела $a$ и $b$, процессы $t$ и $s$ одинаковы.

Обобщим представление о составном теле (процессе), положив, что каждое тело и процесс являются множеством *элементарных* тел и процессов. Элементарное тело назовем *точкой*, элементарный процесс – *событием*.

Следующий шаг в развитии понятий тело, процесс, пространство-время состоит в утверждении, что каждое тело и процесс представляет собой *топологическое пространство*. То есть, каждой точке (событию) $x$ тела (процесса) $A$ можно поставить в соответствие *фундаментальное семейство подмножеств* $B(A)$ – *база открытых окрестностей*. Таким образом, пространство-время представляет собой упорядоченное топологическое множество. Вместе с понятием топологии в наше построение входят такие понятия как *внутренняя* и *внешняя* точки (события), *граничная* точка (событие), *предельная* точка (событие), *компактные*, *связные* множества точек и событий. Понятия порядка и топологии позволяют развить представление об отображении одного множества тел и процессов на другое. Отображение может быть снабжено дополнительными характеристиками. Оно может быть *монотонно возрастающим*, *монотонно убывающим*, *непрерывным*.

Заметим, что введенные столь общим образом отношение порядка и топология допускают множество конкретных реализаций.

Далее можно ввести общие представления о *сравнении* двух отношений порядка и двух топологий. А именно, можно говорить о *более* и *менее сильном* отношении порядка и о *более* и *менее сильной* топологии. По аналогии с понятием более сильной топологии назовем отношение порядка $R_1$ более сильным по сравнению с отношением порядка $R_2$, если для любых точек (событий) $a$ и $b$, связанных отношением $a\,R_2\,b$, выполняется отношение $a\,R_1\,b$.

Заметим также, что свойства множества точек и событий зависят от выбранных отношений порядка и топологии. Так, например, одно и то же множество точек может быть компактным пространством по отношению к одной базе открытых окрестностей и некомпактным по отношению к другой. Понятие граничных точек и событий позволяет ввести *касающиеся* тела и процессы, под которыми подразумеваются тела и процессы, общие точки которых являются граничными. Далее будем считать, что пространство-время состоит только из касающихся тел и процессов.

## IV. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ КАК АФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Из движений тел и процессов выделим те, которые составляют *просто транзитивную абелеву группу*.[4]

Назовем эти движения *сдвигами* и будем считать, что пространство-время снабжено группой сдвигов. А так как пространство-время является топологическим пространством, то оно, следовательно, является непрерывной группой сдвигов. Сдвиги можно описать с помощью отображения пространства-времени,

---

[4] Группа $U$, действующая на пространстве, называется *транзитивной*, если любая точка пространства преобразуется в любую другую точку элементом группы. Если преобразование любой точки пространства в любую другую точку осуществляется единственным элементом группы $U$, то такая группа называется *просто транзитивной*. Если любая точка пространства не может быть преобразована в любую другую точку пространства элементом группы, то такая группа называется *интранзитивной*. Группа преобразований называется абелевой, если ее элементы перестановочны.

Например: группа сдвигов и вращений на евклидовой плоскости является транзитивной, но не просто транзитивной, так как некоторые пары точек могут быть связаны между собой несколькими, а не единственным, элементами группы; группа вращений на евклидовой плоскости не является транзитивной, так как не всякие две произвольные точки связаны элементом группы.

движущегося посредством сдвигов, на пространство-время, принятое за систему отсчета. Сдвиги позволяют построить пространство-время из некоторого набора тел и процессов. Для этого введем представление о *линии сдвигов*, под которой будем понимать множество точек-событий системы отсчета, в которое отображается точка-событие, совершающая движение под действием конечного непрерывного преобразования группы сдвигов. Пару точек-событий $(A, A_1)$, где $A$ точка-событие, которая под действием сдвига отображается в точку-событие $A_1$, и отрезок линии сдвигов, заключенный между этими точками-событиями, назовем *вектором* $AA_1$. Вектор, с одной стороны, – элемент (тело, процесс) пространства-времени, а, с другой, – образ сдвига. Закон композиции на группе сдвигов и в пространстве-времени можно записать как сложение векторов:

$$AA_2 = AA_1 + A_1A_2\,. \tag{3}$$

Вектор $AA_1$ называется нулевым, если точка $A$ совпадает с точкой $A_1$. Для нулевого вектора имеют место соотношения

$$AA + AA_1 = AA_1 + A_1A_1 = AA_1\,.$$

Каждому вектору $AA_1$ соответствует *обратный* вектор $A_1A$, для которого выполняется

$$AA_1 + A_1A = AA\,.$$

Вышеуказанные соотношения представляют собой аксиомы *афинного* пространства. В результате пространство-время выступает как *афинное* пространство.

### 1. Пространство-время как четырехмерное векторное пространство

Определим равенство векторов афинного пространства-времени следующим образом: вектор $AA_1$, выходящий из точки-события $A$ и вектор $BB_1$, выходящий из точки-события $B$, называются равными друг другу, если им соответствует одно преобразование группы сдвигов. Равные векторы целесообразно обозначать одним символом. Например,

$$AA_1 = BB_1 \equiv a\,.$$

Определенное так равенство векторов позволяет представить группу сдвигов и пространство-время как векторное пространство. Действительно, пусть с точкой $A$ связано соотношение (3) а с точкой $B$ связано соотношение

$$BB_2 = BB_1 + B_1B_2\,.$$

И пусть

$$AA_2 = BB_2 \equiv a,\ AA_1 = BB_1 \equiv a_1,\ A_1A_2 = B_1B_2 \equiv a_2.$$

Тогда закон композиции векторов

$$a = a_1 + a_2\,. \tag{4}$$

можно рассматривать независимо от точки пространства-времени. Таким образом, пространство-время выступает как множество векторов, снабженных законом композиции (4). В силу ассоциативности и коммутативности группового закона группы сдвигов закон композиции векторов ассоциативен и коммутативен. Введенное равенство векторов позволяет определить не только закон композиции векторов, но и закон умножения вектора на число. Действительно, пусть задан вектор $AB$ с началом в точке $A$ и концом в точке $B$, а из точки $B$ выходит вектор $BD$ с концом в точке $D$, равный вектору $AB$. Тогда вектор $AD$ составлен из двух равных друг другу векторов. И в общем случае произвольный вектор всегда можно составить из нескольких равных друг другу векторов. Тем самым на пространстве-времени введено умножение вектора на число:

$$a = e \cdot a\,.$$

Здесь $a \in K$ – множеству действительных чисел. Из ассоциативности и коммутативности группового закона композиции следуют соотношения

$$(a \cdot b) \cdot e = a \cdot (b \cdot e)$$

и

$$a \cdot (e_1 + e_2) = a \cdot e_1 + a \cdot e_2,$$

где $a, b \in K$. Вышеприведенные соотношения составляют аксиомы векторного пространства.

С введением векторного пространства в рассмотрение входят такие понятия как *базисные векторы*

$$e_1\,,\quad e_2\,,\quad e_3\,,\quad \tau\,,$$

*размерность* пространства, *координаты* вектора

$$x^1\,,\quad x^2\,,\quad x^3\,,\quad t\,.$$

Система, состоящая из точки-события и произвольного базиса векторного пространства, называется *репером* пространства-времени. *Поле* реперов, полученное из исходного преобразованием группы сдвигов, представляет собой реализацию системы отсчета.

Числа $x^i$, поставленные в соответствие точкам-событиям пространства-времени при записи вектора через базисные векторы, назовем *нормальной системой координат*. Очевидно, что базису однозначно соответствует нормальная система координат и наоборот. Заметим, что также, как отношение порядка и топология, базисные векторы определяются не однозначно, в выборе нормальной системы координат существует произвол. Однако, каждая из нормальных систем координат обладает следующими инвариантными свойствами:

1. *координатные* линии – линии, вдоль которых меняется только одна из координат,– являются линиями сдвигов;

2. сложение сдвигов (векторов) записывается через сложение координат граничных точек и событий векторов, которые приводятся в соприкосновение в результате слагаемых движений:

$$x'^i = x^i + a^i.$$

### 1. *Линии сдвигов в нормальной системе координат*

Пусть $e$ – базисный вектор вдоль некоторой линии сдвигов. Тогда уравнение этой линии сдвигов имеет вид

$$x(x) = x_0 + e \cdot x\,.$$

Здесь векторы $x_0$ и $e$ не зависят от нормальной координаты $x$. Отсюда имеем следующие уравнения

$$\frac{dx(x)}{dx} = e \tag{5}$$

и

$$\frac{d^2x(x)}{dx^2} = 0\,. \tag{6}$$

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение линии сдвигов. Оно носит инвариантный характер и не зависит от системы координат.

Пусть

$$e = e_i \cdot k^i\,,$$

где $k^i \in K$ – проекции базисного вектора $e$ на базисные векторы $e_i$. Тогда

$$x(x) = e \cdot (x_0^i + k^i \cdot x)$$

и уравнение линии сдвигов по отношению к нормальным координатам имеет вид

$$x^i(x) = x_0^i + k^i \cdot x\,.$$

Отсюда дифференциальное уравнение линии сдвигов по отношению к нормальным координатам имеет вид

$$\frac{d^2x^i(x)}{dx^2} = 0\,.$$

Это уравнение не является инвариантным и в указанной форме записывается только для нормальной системы координат.

### 2. *Линии сдвигов в произвольной системе координат*

Введем на пространстве-времени произвольную систему координат, выполнив отображение точек пространства-времени в числа $y^\alpha$[5]. Так как координаты $x$ и $y$ определены на одних и тех же точках, то, следовательно, определены функции

$$x^i(y^\alpha)\,.$$

Уравнение (5) приобретает следующий вид[6]

$$\frac{dx(x)}{dx} = e_i \cdot x^i_{,\beta} \cdot \frac{dy^\beta}{dx} = e_i \cdot k^i\,.$$

Отсюда уравнение (6) приобретает следующий вид

$$e_i \cdot \left( x^i_{,\beta} \cdot \frac{d^2y^\beta}{dx^2} + \frac{dx^i_{,\beta}}{dx} \cdot \frac{dy^\beta}{dx} \right) = 0\,.$$

Или

$$x^i_{,\beta} \cdot \frac{d^2y^\beta}{dx^2} + x^i_{,\beta,\gamma} \cdot \frac{dy^\beta}{dx} \cdot \frac{dy^\gamma}{dx} = 0\,. \tag{7}$$

Введем производные

$$y^\alpha_{,i}$$

и умножим на них выведенное уравнение (7), выполнив соответствующую свертку. При этом учтем, что

$$y^\alpha_{,i} \cdot x^i_{,\beta} = \delta^\alpha{}_\beta\,.$$

Получим

$$\frac{d^2y^\alpha}{dx^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \frac{dy^\beta}{dx} \cdot \frac{dy^\gamma}{dx} = 0\,. \tag{8}$$

где введено обозначение

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = y^\alpha_{,i} \cdot x^i_{,\beta,\gamma}\,.$$

Это уравнение есть уравнение линии сдвигов в произвольной системе координат. Нужно отметить, что в произвольной системе координат уравнение линии сдвигов теряет свой наглядный смысл постоянства проекций $k^i$ вдоль линии сдвигов. Кроме того, всегда нужно иметь в виду, что в этой записи $y$ – это произвольные координаты, а $x$ – это нормальная координата на линии сдвигов.

---

[5] С физической точки зрения введение такого отображения недопустимо, пока не определена процедура измерения пространственно-временных объектов, приводящая к указанной системе координат.

[6] Мы используем часто применяющееся обозначение: запятая перед индексом означает дифференцирование по координате с указанным индексом. Пример

$$x^i_{,\beta} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial y^\beta}\,.$$

## V. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ КАК АФИННОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

### 1. Геометрическое пространство как евклидово пространство

На геометрическом пространстве $X_3$ введем закон композиции, который каждой паре векторов $x_1$ и $x_2$ ставит в соответствие число, обозначаемое следующим образом

$$\langle x_2, x_1 \rangle .$$

И пусть этот закон композиции связан с законами векторного пространства[7] следующими соотношениями

$$\begin{gathered} \langle a \cdot x_2, x_1 \rangle = \langle x_2, a \cdot x_1 \rangle = a \cdot \langle x_2, x_1 \rangle \\ \langle x_2, (x_1 + x) \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle + \langle x_2, x \rangle . \end{gathered} \tag{9}$$

Такой закон композиции называется *скалярным умножением* векторов, а соответствующее число *скалярным произведением* векторов.

Скалярное произведение с физической точки зрения представляет собой операцию *измерения*. Вектор $x$ геометрического пространства $X_3$ представляет собой *измеряемый вектор*. Вектор $e$ представляет собой *измерительный эталон*. Операция измерения ставит в соответствие вектору $x$ и эталону $e$ число $x = \langle x\,, e \rangle$ – *проекцию* вектора $x$ на эталон $e$ – результат измерения. Измерение, рассматриваемое как соответствие между векторами $x$ и числами $x^a$, представляет собой отображение геометрического пространства $X_3$ в множество действительных чисел $K^3$.

Пусть $x = AB$ – вектор, соединяющий точки $A$ и $B$. Пусть $e = AE$ – вектор, соединяющий точки $A$ и $E$, причем точка $E$ находится на линии $AB$. И пусть вектор $AE$ принят за измерительный эталон. Тогда

$$l_x = l_{AB} = \langle x\,, e \rangle = \langle AB\,, AE \rangle$$

называется *расстоянием* между точками $A$ и $B$.

Пусть векторы, участвующие в скалярном произведении, записаны через базисные векторы

$$x_2 = e_a \cdot {x_1}^a\,, \quad x_1 = e_b \cdot {x_2}^b\,.$$

Здесь $a\,, b = 1, 2, 3$. Тогда в силу (9) имеем

$$\begin{gathered} \langle x_2\,, x_1 \rangle = \langle e_a \cdot {x_2}^a\,, e_b \cdot {x_1}^b \rangle = \\ \langle e_a\,, e_b \rangle \cdot {x_2}^a \cdot {x_1}^b = g_{ab} \cdot {x_2}^a \cdot {x_1}^b\,. \end{gathered}$$

Величина

$$g_{ab} = \langle e_a\,, e_b \rangle$$

называется *метрическим тензором*. Потребуем, чтобы базисные векторы $e_a$ удовлетворяли условию *ортонормированности*:

$$\begin{gathered} \langle e_1\,, e_1 \rangle = 1\,, \quad \langle e_2\,, e_2 \rangle = 1\,, \quad \langle e_3\,, e_3 \rangle = 1\,, \\ \langle e_a\,, e_b \rangle = 0\,, \quad a \neq b\,. \end{gathered}$$

В этом случае метрический тензор имеет вид:

$$g_{ab} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Скалярное произведение вектора на себя называется *нормой* вектора:

$$x^2 = \langle x\,, x \rangle = x^a \cdot x^b \cdot g_{ab}\,.$$

Движение, отличное от сдвига и сохраняющее норму вектора, называется *поворотом*. Таким образом, для поворотов имеет место

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2\,. \tag{10}$$

Здесь $x^a$ – координаты вектора в системе отсчета, $x'^a$ – координаты вектора в повернутом геометрическом пространстве.

### 2. Пространство-время и специальная теория относительности

Согласно СТО скорость распространения электромагнитных волн (скорость света $c$) есть инвариант, не зависящий от движения системы отсчета. А это означает, что волновой оператор (оператор Даламбера) сохраняется при переходе к движущейся системе отсчета

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \cdot (\partial t)^2} = \\ \frac{\partial^2}{(\partial x'^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x'^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x'^3)^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \cdot (\partial t')^2}\,. \end{gathered}$$

Здесь $x^a$ – координаты вектора, а $t$ – координата времени в неподвижной системе отсчета, $x'^a$ – координаты вектора, а $t'$ – координата времени в движущейся системе отсчета.

Отсюда, в свою очередь, следует, что уравнение характеристической поверхности

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (c \cdot t)^2 = const$$

также сохраняется при переходе к движущейся системе отсчета. То есть имеет место

$$\begin{gathered} (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (c \cdot t)^2 = \\ (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 - (c \cdot t')^2\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Ключевое предположение СТО состоит в том, что соотношение (11) есть обобщение соотношения (10). И уже отсюда следует, что

[7] сложением векторов и умножением вектора на число

- выражение
$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (c \cdot t)^2 = x^2 \qquad (12)$$
необходимо рассматривать как норму четырехмерного вектора вида
$$x = e_1 \cdot x^1 + e_2 \cdot x^2 + e_3 \cdot x^3 + e_4 \cdot x^4\,,$$
где введено обозначение $x^4 = c \cdot t$.

- Пространство и время должны быть объединены в четырехмерное векторное пространство $X_4$ (пространство-время), снабженное скалярным умножением векторов, которое каждой паре векторов $x_1$ и $x_2$ из $X_4$ ставит в соответствие число
$$\langle x_2, x_1 \rangle$$
– скалярное произведение – со свойствами (9).

  Пусть векторы, участвующие в скалярном произведении, записаны через базисные векторы
$$x_2 = e_i \cdot {x_1}^i\,, \quad x_1 = e_k \cdot {x_2}^k\,.$$
Здесь $i\,, k = 1, 2, 3, 4$. Тогда в силу (9) имеем
$$\langle x_2\,, x_1 \rangle = \langle e_i \cdot {x_2}^i\,, e_k \cdot {x_1}^k \rangle = \langle e_i\,, e_k \rangle \cdot {x_2}^i \cdot {x_1}^k = g_{ik} \cdot {x_2}^i \cdot {x_1}^k\,.$$
Величина
$$g_{ik} = \langle e_i\,, e_k \rangle$$
по прежнему называется *метрическим тензором*. Норма вектора запишется следующим образом
$$x^2 = \langle x\,, x \rangle = x^i \cdot x^k \cdot g_{ik}\,.$$
Из сравнения этого выражения с (12) определяется скалярное произведение гипотетического базисного вектора $e_4$ на себя
$$g_{44} = \langle e_4\,, e_4 \rangle = -1\,.$$
В результате условие ортонормированности обобщается следующим образом
$$\langle e_1\,, e_1 \rangle = 1\,, \quad \langle e_2\,, e_2 \rangle = 1\,, \quad \langle e_3\,, e_3 \rangle = 1\,, \quad \langle e_4\,, e_4 \rangle = -1\,, \quad \langle e_i\,, e_k \rangle = 0\,, \quad i \neq k$$
и метрический тензор имеет вид:
$$g_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

- Равномерное движение геометрического пространства, подчиняющееся принципу инвариантности скорости света, сохраняет норму четырехмерного вектора (11). Поэтому такое движение является поворотом (точнее гиперболическим поворотом) пространства-времени.

*1. Замечание к инвариантности скорости света*

Помимо электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света, в физике рассматриваются волновые процессы другой природы. Например, распространение звука в воздушной среде, характеризуемое скоростью звука в воздухе. Однако, только электромагнитной волне приписывается необыкновенное свойство: скорость ее распространения является инвариантной по отношению к движению тел. Иначе говоря, скорость света является физической константой, не зависящей от движения тела. Отсюда возникает естественный вопрос: чем звуковая волна "хуже"электромагнитной, почему скорость звука нельзя считать инвариантом движения тел? Можно поставить вопрос иначе: как должна выглядеть реальность, чтобы скорость звука сохраняла свое значение (была инвариантом) при движении тел?

Размышления на эту тему приводят к довольно туманному ответу, но содержащему, тем не менее, конструктивный смысл. Видимо, дело заключается в свойствах тел. Если бы тела были сконструированы из воздушной среды, то для таких тел скорость звука являлась инвариантом. И мы имели бы дело с преобразованиями Лоренца, в которые входила бы скорость звука в воздухе, а сама эта скорость была бы предельной для движения тел вышеуказанной природы.

А то, что мы вынуждены приписывать инвариантные свойства скорости света, означает, что тела, с которыми мы имеем дело, образованы из электромагнитной среды.

## VI. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ КАК АФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

### 1. Пространство-время как афинное пространство 2-векторов

Обратимся к пространству-времени как четырехмерному афинному пространству. Пусть из точки-события $A$ выходит два вектора $AB$ и $AC$ (Рис.1).

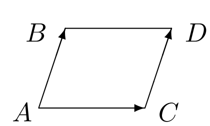


Рис.1

Пусть под действием конечного непрерывного преобразования группы сдвигов вектор $AB$ движется вдоль вектора $AC$. Причем в результате вектор $AB$ отображается в вектор $CD$, то есть
$$AB = CD\,.$$
Тогда два вектора $AB$ и $CD$ и поверхность, заключен-

ную между ними назовем 2-вектором[8] и обозначим его $ACDB$. Композиция сдвигов с участием вектора $AB$ может быть записана как сложение 2-векторов (Рис.2)

$$ACDB + CEFD = AEFB\,.$$

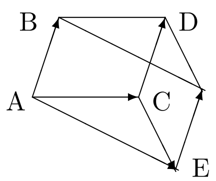


Рис.2

Вектор $ACDB$ называется нулевым, если либо вектор $AB$ либо вектор $AC$ равен нулю. Для нулевого вектора выполняется соотношение[9]

$$AABB + AEFB = AEFB\,.$$

Каждому вектору $ACDB$ соответствует *обратный* вектор $CABD$, для которого выполняется

$$ACDB + CABD = AABB\,.$$

Вышеуказанные соотношения представляют собой аксиомы *афинного* пространства. В результате пространство-время выступает как *афинное* пространство 2-векторов.

Определенное в Разделе IV.1 настоящей Лекции равенство векторов позволяет определить равенство 2-векторов и перейти к векторному пространству 2-векторов, не зависящему от точки-события пространства-времени. Это пространство в Лекции 16 Раздел III.1 мы обозначили $X^2$. С введением этого векторного пространства в наше рассмотрение вошли такие понятия как *базисные векторы*

$$e_{ik}\,,$$

*координаты* 2-вектора

$$x^{ik}$$

и разложение 2-вектора $x$ по базисным векторам

$$x = e_{ik} \cdot x^{ik}\,.$$

[8] Это понятие совпадает с тем, которое было введено в Лекции 16 Раздел III.1.

[9] В рассматриваемом случае

$$AC = 0\,.$$

## 2. Пространство-время как афинное пространство $n$-векторов

Пусть к точке-событию $A$ пространства-времени присоединен 2-вектор и вектор $AD$. И пусть под действием конечного непрерывного преобразования группы сдвигов 2-вектор движется вдоль вектора $AD$. Причем в результате 2-вектор отображается в 2-вектор, присоединенный к точке-событию $D$. Тогда начальный 2-вектор (присоединенный к точке-событию $A$), конечный 2-вектор (присоединенный к точке-событию $D$) и объем, заключенный между указанными 2-векторами назовем 3-вектором. Преобразования группы сдвигов позволяют ввести на множестве 3-векторов операцию сложения, определить нулевой 3-вектор и обратный 3-вектор. И, следовательно, пространство-время есть *афинное* пространство 3-векторов.

Определенное в Разделе IV.1 настоящей Лекции равенство векторов позволяет определить равенство 3-векторов и выделить векторное пространство 3-векторов, не зависящее от точки-события пространства-времени. Это пространство в Лекции 16 Раздел III.2 мы обозначили $X^3$. С введением этого векторного пространства в наше рассмотрение вошли такие понятия как *базисные векторы*

$$e_{ikl}\,,$$

*координаты* 3-вектора

$$x^{ikl}$$

и разложение 3-вектора $x$ по базисным векторам

$$x = e_{ikl} \cdot x^{ikl}\,.$$

Обобщая по индукции, получим следующую канву рассуждений. Пусть к точке-событию $A$ пространства-времени присоединен $(n-1)$-вектор и вектор $AH$. И пусть под действием конечного непрерывного преобразования группы сдвигов $(n-1)$-вектор движется вдоль вектора $AH$. Причем в результате $(n-1)$-вектор отображается в $(n-1)$-вектор, присоединенный к точке-событию $H$. Тогда начальный $(n-1)$-вектор (присоединенный к точке-событию $A$), конечный $(n-1)$-вектор (присоединенный к точке-событию $D$) и гиперобъем, заключенный между указанными $(n-1)$-векторами назовем $n$-вектором. Преобразования группы сдвигов позволяют ввести на множестве $n$-векторов операцию сложения, определить нулевой $n$-вектор и обратный $n$-вектор. И, следовательно, пространство-время есть *афинное* пространство $n$-векторов.

Определенное в Разделе IV.1 настоящей Лекции равенство векторов позволяет также определить равенство $n$-векторов и выделить векторное пространство $n$-векторов, не зависящее от точки-события пространства-времени. Это пространство в Лекции 16

Раздел III.2 мы обозначили $X^n$. С введением этого векторного пространства в наше рассмотрение вошли такие понятия как *базисные векторы*

$$e_{i_1 i_2 \dots i_n} ,$$

*координаты* $n$-вектора

$$x^{i_1 i_2 \dots i_n}$$

и разложение $n$-вектора $x$ по базисным векторам

$$x = e_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot x^{i_1 i_2 \dots i_n} .$$

Максимальный порядок $n$-векторов равен размерности пространства-времени, то есть четырем.

Объединение векторных пространств $n$-векторов, где $n = 1, 2, 3, 4$, и множества действительных чисел приводит к векторному пространству

$$\mathbb{X} = K + X^1 + X^2 + X^3 + X^4 ,$$

которое, в частном случае, является пространством алгебры Клиффорда.

## VII. ВЫВОДЫ

- Первичными понятиями кинематики являются: тело, процесс, движение.

- Пространство есть упорядоченное множество тел. Время есть упорядоченное множество процессов. Объединение этих множеств определяется как пространство-время.

- Движение это преобразование пространства и времени, изменяющее порядок тел и порядок процессов. Движения составляют группу.

- Основополагающим понятием, относящимся к пространству-времени, является просто транзитивная абелева группа движений – группа сдвигов. Группа сдвигов позволяет рассматривать пространство-время как афинное пространство, а затем как векторное пространство.

- Из условия, что координаты в пространстве и времени есть результат измерения, следует, что пространство-время нужно рассматривать как векторное пространство, снабженное скалярным произведением векторов.

- Основополагающие понятия: группа сдвигов, векторное пространство, скалярное произведение векторов должны быть перенесены в искривленное пространство-время.