# Лекция 21. Промежуточные частицы второго рода

А. А. Кецарис
(22 октября 2006 г.)

В этой Лекции мы вводим новые гипотетические частицы, которые названы промежуточными частицами второго рода. Постулат об их существовании продиктован требованием логической законченности единой теории взаимодействий, а именно, необходимостью формирования лагранжиана частиц и поля из предпосылок самой теории.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Внутренняя логика единой теории поля требует введения новых гипотетических промежуточных частиц. При этом мы руководствуемся соображениями, вытекающими из анализа логической непоследовательности в формировании лагранжиана заряженной частицы и калибровочного поля. Напомним, что в классической физике лагранжиан для электрически заряженной частицы и электромагнитного поля имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{вз}} + \mathcal{L}(F)\,.$$

Первое слагаемое в правой части это лагранжиан свободной частицы. Второе слагаемое это лагранжиан взаимодействия частицы и электромагнитного поля

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -\frac{1}{c^2}\, j^i\, A_i\,,$$

где $A_i$ – потенциал электромагнитного поля, $j^i$ – плотность тока. И третье слагаемое это лагранжиан свободного электромагнитного поля

$$\mathcal{L}(F) = -\frac{1}{c}\,\frac{F_{ik}\,F^{ik}}{4}\,,$$

где $F_{ik}$ – тензор электромагнитного поля.

Здесь важно отметить, что лагранжиан $\mathcal{L}$ формируется волевым путем. Обоснование его истинности заключается в том, что варьирование лагранжиана в соответствии с принципом наименьшего действия приводит к уравнениям движения частицы и уравнениям Максвелла.

В квантовой теории ситуация несколько лучше. Согласно Утияме формирование лагранжиана взаимодействия подчиняется теоретическим соображениям. А именно, переход от лагранжиана свободной частицы

$$\mathcal{L}_0(\psi\,, \partial\psi)\,,$$

где $\psi$ – волновая функция частицы, а $\partial\psi$ – частная производная от волновой функции по координате, к лагранжиану

$$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{вз}} \tag{1}$$

осуществляется путем перехода от частной производной к ковариантной

$$\partial \to \partial + A\,,$$

здесь через $A$ обозначен коэффициент связности, пропорциональный потенциалу калибровочного (в нашем случае электромагнитного) поля. Этот алгоритм вытекает из условия инвариантности лагранжиана (1) относительно калибровочного преобразования волновой функции.

Однако, формирование лагранжиана свободного поля по прежнему остается необъяснимым с логической точки зрения. В квантовой теории также как и в классической теории лагранжиан $\mathcal{L}(F)$ добавляется к лагранжиану (1) волевым путем.

В результате лагранжиан для дираковской заряженной частицы (электрона) и электромагнитного поля в принятых нами ранее обозначениях (смотрите Лекцию 9 Раздел II и Лекцию 19 Раздел V.1) имеет вид

$$\mathcal{L} = -\psi_{K_1}\, C^{mK_1}{}_{I_1} \cdot (\partial_m \psi^{I_1} + \frac{e}{\hbar} \cdot C^{I_1}{}_{L_1 21} \cdot A_m \cdot \psi^{L_1}) - \\ -\frac{\mathrm{m}\, c}{\hbar}\,\psi_{K_1}\,\psi^{K_1} - \frac{1}{c}\,\frac{F_{ik}\,F^{ik}}{4}\,.$$

Здесь индексы с цифрой 1 внизу $(I_1, K_1, L_1)$ принимают значения*

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

Обратим внимание на так называемое *массовое* слагаемое

$$-\frac{\mathrm{m}\, c}{\hbar}\,\psi_{K_1}\,\psi^{K_1}\,.$$

Оно будет участвовать в наших дальнейших рассуждениях.

В настоящей Лекции мы показываем, что полевое слагаемое может быть сформировано и введено логическим образом. Однако, при этом необходимо допустить существование гипотетических частиц определенного вида. Канва наводящих соображений здесь такова.

*Иначе говоря, уравнение Дирака относится к первому сжатому представлению алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$

В Лекции 20 мы показали, что обобщение частной производной до ковариантной, необходимое для формирования лагранжиана (1), связано с двумя обстоятельствами

- наряду с фундаментальной частицей вводится промежуточная частица, которая характеризуется действием $\mathsf{S}$ и волновой функцией $\psi_2$. Дифференциал действия $\mathsf{S}$ является абсолютным и состоит из суммы обычного (полного) дифференциала и неполного дифференциала, пропорционального потенциалу калибровочного поля*.
$$D\mathsf{S} = d\mathsf{S} + \delta\mathsf{S}\,.$$
Здесь
$$\delta\mathsf{S} = \mathfrak{I}^K{}_M \cdot A^M{}_{KL} \cdot dx^L = \mathfrak{I}^K{}_M \cdot C^M{}_{K\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_L \cdot dx^L\,.$$
- квантовые уравнения (уравнения структуры) содержат тензорное произведение вектора волновой функции фундаментальной частицы
$$\psi = \mathfrak{e}_I\, \psi^I$$
на вектор неполного дифференциала $\delta\mathsf{S}$
$$\frac{1}{\hbar}\,\psi \circ \delta\mathsf{S} = \mathfrak{e}_I\,\frac{1}{\hbar}\,A^I{}_{KL} \cdot \psi^K \cdot dx^L = \mathfrak{e}_I\,\frac{g}{\hbar}\,C^M{}_{K\alpha} \cdot A^\alpha{}_L \cdot \psi^K \cdot dx^L\,,$$
которое и определяет слагаемое, обобщающее частную производную до ковариантной в соображениях Утиямы.

Для того, чтобы перейти от лагранжиана свободной частицы $\mathcal{L}_0$ к лагранжиану (1) необходимо выполнить замену
$$\psi_2 \to \psi_2 + \chi \circ A\,.$$
А отсюда, в свою очередь, следует, что входящее в лагранжиан массовое слагаемое для промежуточной частицы, сформированное аналогично массовому слагаемому для фундаментальной частицы, имеет вид
$$\mathrm{m}_2\,\langle({}^+\psi_2 + {}^+A \circ {}^+\chi),\,(\psi_2 + \chi \circ A)\rangle\,.$$
Для нас ключевое значение имеет то обстоятельство, что в массовое слагаемое входит составляющая, квадратичная относительно потенциала калибровочного поля. Это важно потому, что лагранжиан свободного поля, который мы хотим сформировать, также квадратичен относительно тензора поля.

Отсюда естественным образом возникает следующее направление в формировании лагранжиана свободного поля

- Необходимо ввести другие промежуточные частицы (второго рода), действие которых обозначим $\mathfrak{S}$, а волновую функцию $\psi_3$. Дифференциал действия $\mathfrak{S}$ также является абсолютным и содержит два слагаемых, одно из которых есть полный дифференциал, а другое неполный
$$D\mathfrak{S} = d\mathfrak{S} + \delta\mathfrak{S}\,,$$
причем, неполный дифференциал пропорционален тензору калибровочного поля. Соответственно для волновой функции имеем
$$\psi_3' = \psi_3 + \chi \circ F\,.$$
- Массовое слагаемое, с которым промежуточные частицы второго рода участвуют в лагранжиане взаимодействия, имеет вид
$$\mathrm{m}_3\,\langle({}^+\psi_3 + {}^+F \circ {}^+\chi)\,,\,(\psi_3 + \chi \circ F)\rangle\,.$$

В результате в состав массового слагаемого промежуточной частицы второго рода входит слагаемое, квадратичное относительно тензора поля, которое мы хотим рассматривать как лагранжиан свободного поля.

Таков ход наших рассуждений. Здесь мы не упомянули о ряде условий, которые должны сопровождать указанную логику, об этом будет сказано далее.

## II. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЧАСТИЦЫ ВТОРОГО РОДА

Введем гипотетические частицы, которые будем считать ответственными за взаимодействие фундаментальных и промежуточных частиц. В связи с этим ранее введенные промежуточные частицы назовем промежуточными частицами первого рода, а вновь введенные промежуточные частицы назовем промежуточными частицами второго рода. Вектор действия этих частиц запишем следующим образом
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{J}^{ML}{}_K \cdot S^K{}_{LM}\,.$$
Базисные векторы $\mathfrak{J}^{ML}{}_K$ определим через тензорное произведение базисных векторов $\mathfrak{E}^L$ и $\mathfrak{e}_K$ как
$$\mathfrak{J}^{ML}{}_K = \mathfrak{E}^M \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K\,.$$

*Напомним, что такое представление делает эквивалентным описание взаимодействия как с помощью промежуточных частиц, так и с помощью калибровочного поля.

Векторное пространство этих векторов обозначим $\mathbb{S}_J$.

Введем гипотетические частицы, которые будем считать промежуточными античастицами второго рода. Их также будем считать ответственными за взаимодействие фундаментальных и промежуточных частиц первого рода. Вектор действия этих частиц запишем следующим образом

$$ {}^{+}\mathfrak{S} = S^{ML}{}_K \cdot \mathfrak{L}^K{}_{LM} \, . $$

Базисные векторы $\mathfrak{L}^K{}_{LM}$ выражаются тензорное произведение базисных векторов $\mathfrak{E}^L$ и $\mathfrak{e}_K$ следующим образом

$$ \mathfrak{L}^K{}_{LM} = \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{e}_L \otimes \mathfrak{E}^K \, . $$

Векторное пространство этих векторов обозначим ${}^{+}\mathbb{S}_J$.

## 1. Алгебра действия фундаментальных частиц и промежуточных частиц первого и второго рода

Далее для рассмотрения взаимодействий нам понадобится обобщение алгебры действия фундаментальных и промежуточных частиц первого рода, включающее в себя векторное пространство, натянутое на базисные векторы $\mathfrak{J}^{IK}{}_L$. Это обобщение назовем алгеброй действия фундаментальных и промежуточных частиц:

$$ \mathbb{S} = \mathbb{S}_e + \mathbb{S}_I + \mathbb{S}_J \, . $$

Для того, чтобы определить эту алгебру, необходимо к ранее определенной таблице умножения базисных векторов алгебры действия фундаментальных и промежуточных частиц первого рода $\mathbb{S}_e + \mathbb{S}_I$ (смотрите Лекцию 17 Раздел VI) добавить произведения, в которых участвуют базисные векторы $\mathfrak{J}^{IK}{}_L$. Эти произведения вычисляются на основании правил тензорной алгебры:

$$ \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M = \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M = \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M + \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^P \rangle \cdot \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M = \delta^P{}_K \cdot \mathfrak{I}^I{}_M \, , $$

$$ \mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{e}_M = \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_M = \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{e}_M + \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_M \rangle = 0 \, , $$

$$ \begin{aligned} \mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M = {} & \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M = \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M + \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^P \rangle + \\ & \mathfrak{e}_M \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^P \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^I \rangle = \mathfrak{J}^{LI}{}_M \cdot \delta^P{}_K + \mathfrak{e}_M \cdot \delta^P{}_K \cdot g^{LI} \, , \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} \mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M = {} & \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M = \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M + \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_M \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^I \rangle + \\ & \mathfrak{E}^N \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^I \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_M \rangle = \mathfrak{J}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K + \mathfrak{E}^N \cdot \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M = \mathfrak{J}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K \, , \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} \mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M = {} & \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M = \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M + \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^P \rangle + \\ & \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{e}_M \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^I \rangle \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^P \rangle + \langle \mathfrak{E}^N, \mathfrak{e}_M \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^I \rangle \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^P \rangle = \mathfrak{I}^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K + \delta^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K \, . \end{aligned} $$

Здесь из конечных выражений исключены базисные векторы, выходящие за рамки рассматриваемой алгебры.

В результате алгебра действия фундаментальных и промежуточных частиц определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$ \begin{aligned} \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I &= \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI} + \mathfrak{I}^M{}_L \cdot C^L{}_{MKI} \\ \mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{e}_I &= 0 \\ \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_M \\ \mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{I}^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M \\ \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \delta^P{}_K \cdot \mathfrak{I}^I{}_M \\ \mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{e}_M &= 0 \\ \mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \mathfrak{J}^{LI}{}_M \cdot \delta^P{}_K + \mathfrak{e}_M \cdot \delta^P{}_K \cdot g^{LI} \\ \mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \mathfrak{J}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K \\ \mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \mathfrak{I}^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K + \delta^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K \, . \end{aligned} \tag{2} $$

Из этой таблицы следует, что, в отличие от векторов действия фундаментальных частиц $\boldsymbol{S}$ и промежуточных частиц первого рода $\mathsf{S}$, векторы действия промежуточных частиц второго рода $\mathfrak{S}$ не составляют подалгебру. Это обстоятельство нужно интерпретировать так: в отличие от фундаментальных и промежуточных частиц первого рода, промежуточные частицы второго рода не существуют в свободном состоянии.

## 2. Уравнения структуры алгебры действия фундаментальных и промежуточных частиц

Приведем уравнения структуры алгебры $\mathbb{S} = \mathbb{S}_e + \mathbb{S}_I + \mathbb{S}_J$. Векторы этой алгебры $S = \boldsymbol{S} + \mathsf{S} + \mathfrak{S}$ подчиняются уравнению структуры

$$d_2 \circ d_1 S = d_1 S \circ d_2 S \,.$$

(Для того, чтобы сделать выкладки менее громоздкими, мы опустили согласующий множитель $\frac{1}{S_0}$ перед правой частью уравнения. Иначе говоря, мы рассматриваем безразмерное действие. Правило перехода к размерному действию таково: все слагаемые, состоящие из двух множителей, должны быть умножены на $\frac{1}{S_0}$.)

Или

$$d_2(d_1\boldsymbol{S} + d_1\mathsf{S} + d_1\mathfrak{S}) = (d_1\boldsymbol{S} + d_1\mathsf{S} + d_1\mathfrak{S}) \circ (d_2\boldsymbol{S} + d_2\mathsf{S} + d_2\mathfrak{S})\,. \tag{3}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} d_2d_1\boldsymbol{S} + d_2d_1\mathsf{S} + d_2d_1\mathfrak{S} = d_1\boldsymbol{S} \circ d_2\boldsymbol{S} + d_1\boldsymbol{S} \circ d_2\mathsf{S} + d_1\boldsymbol{S} \circ d_2\mathfrak{S} +&\\ + d_1\mathsf{S} \circ d_2\boldsymbol{S} + d_1\mathsf{S} \circ d_2\mathsf{S} + d_1\mathsf{S} \circ d_2\mathfrak{S} + d_1\mathfrak{S} \circ d_2\boldsymbol{S} + d_1\mathfrak{S} \circ d_2\mathsf{S} + d_1\mathfrak{S} \circ d_2\mathfrak{S}\,.&\end{aligned}$$

Запишем уравнения структуры относительно координат векторов. Для этого подставим в уравнения структуры выражения дифференциалов векторов через базисные векторы

$$d\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_I \cdot dS^I\,, \qquad d\mathsf{S} = \mathfrak{I}^K{}_I \cdot dS^I{}_K\,, \qquad d\mathfrak{S} = \mathfrak{J}^{LI}{}_K \cdot dS^K{}_{IL}\,.$$

Получим

$$\begin{aligned} &(d_2d_1S^I)\cdot\mathfrak{e}_I + (d_2d_1S^M{}_L)\cdot\mathfrak{I}^L{}_M + (d_2d_1S^K{}_{IL})\cdot\mathfrak{J}^{LI}{}_M = \\ &\quad = (d_1S^K\cdot d_2S^M)\cdot(\mathfrak{e}_K\circ\mathfrak{e}_M) + (d_1S^K\cdot d_2S^M{}_I)\cdot(\mathfrak{e}_K\circ\mathfrak{I}^I{}_M) + (d_1S^K\cdot d_2S^M{}_{IP})\cdot(\mathfrak{e}_K\circ\mathfrak{J}^{PI}{}_M) + \\ &\qquad + (d_1S^K{}_L\cdot d_2S^M)\cdot(\mathfrak{I}^L{}_K\circ\mathfrak{e}_M) + (d_1S^K{}_L\cdot d_2S^M{}_I)\cdot(\mathfrak{I}^L{}_K\circ\mathfrak{I}^I{}_M) + (d_1S^K{}_L\cdot d_2S^M{}_{IP})\cdot(\mathfrak{I}^L{}_K\circ\mathfrak{J}^{PI}{}_M) + \\ &\qquad + (d_1S^K{}_{LN}\cdot d_2S^M)\cdot(\mathfrak{J}^{NL}{}_K\circ\mathfrak{e}_M) + (d_1S^K{}_{LN}\cdot d_2S^M{}_I)\cdot(\mathfrak{J}^{NL}{}_K\circ\mathfrak{I}^I{}_M) + (d_1S^K{}_{LN}\cdot d_2S^M{}_{IP})\cdot(\mathfrak{J}^{NL}{}_K\circ\mathfrak{J}^{PI}{}_M)\,.\end{aligned}$$

Далее воспользуемся таблицей умножения (2) базисных векторов. В результате имеем

$$\begin{aligned} &(d_2d_1S^I)\cdot\mathfrak{e}_I + (d_2d_1S^M{}_L)\cdot\mathfrak{I}^L{}_M + (d_2d_1S^M{}_{IL})\cdot\mathfrak{J}^{LI}{}_M = \\ &\quad = (d_2S^M\cdot d_1S^K)\cdot(\mathfrak{e}_I\cdot C^I{}_{KM} + \mathfrak{I}^L{}_I\cdot C^I{}_{LKM}) + (d_2S^M{}_K\cdot d_1S^K)\cdot\mathfrak{e}_M + (d_2S^M{}_{IK}\cdot d_1S^K)\cdot\mathfrak{I}^I{}_M + \\ &\qquad + (d_2S^M{}_K\cdot d_1S^K{}_L)\cdot(\mathfrak{I}^L{}_M + \delta^L{}_M) + (d_2S^M{}_{IK}\cdot d_1S^K{}_L)\cdot(\mathfrak{J}^{LI}{}_M + \mathfrak{e}_M\cdot g^{LI}) + \\ &\qquad + (d_2S^M{}_K\cdot d_1S^K{}_{LN})\cdot\mathfrak{J}^{NL}{}_M + (d_2S^M{}_{IK}\cdot d_1S^K{}_{LN})\cdot(\mathfrak{I}^N{}_M + \delta^N{}_M)\cdot g^{LI}\,.\end{aligned}$$

После разделения уравнений, получим уравнения структуры алгебры действия:

$$\begin{aligned} d_2d_1S^L &= C^L{}_{KI}\cdot d_2S^I\cdot d_1S^K + d_2S^L{}_K\cdot d_1S^K + d_2S^L{}_{KN}\cdot d_1S^N{}_I\cdot g^{IK}\,, \\ d_2d_1S^L{}_K &= C^L{}_{KQN}\cdot d_2S^N\cdot d_1S^Q + d_2S^L{}_I\cdot d_1S^I{}_K + d_2S^L{}_{KI}\cdot d_1S^I + d_2S^L{}_{QN}\cdot d_1S^N{}_{PK}\cdot g^{PQ}\,, \\ d_2d_1S^L{}_{KI} &= d_2S^L{}_{KN}\cdot d_1S^N{}_I + d_2S^L{}_N\cdot d_1S^N{}_{KI}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Кроме того, получим скалярное алгебраическое соотношение

$$d_2S^L{}_K\cdot d_1S^K{}_L + d_2S^M{}_{IK}\cdot d_1S^K{}_{LM}\cdot g^{LI} = 0\,.$$

## 3. Квантовые постулаты механики фундаментальных и промежуточных частиц

Как обычно, мы переходим от уравнений структуры к квантовым постулатам, используя переобозначения

$$d_1S = \psi\,, \quad d_2 = d\,.$$

Тогда вместо (4) получим

$$\begin{aligned} d\psi^L &= C^L{}_{KI} \cdot dS^I \cdot \psi^K + dS^L{}_K \cdot \psi^K + dS^L{}_{KN} \cdot \psi^N{}_I \cdot g^{IK}\,, \\ d\psi^L{}_K &= C^L{}_{KQN} \cdot dS^N \cdot \psi^Q + dS^L{}_I \cdot \psi^I{}_K + dS^L{}_{KI} \cdot \psi^I + dS^L{}_{QN} \cdot \psi^N{}_{PK} \cdot g^{PQ}\,, \\ d\psi^L{}_{KI} &= dS^L{}_{KN} \cdot \psi^N{}_I + dS^L{}_N \cdot \psi^N{}_{KI}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Алгебраическое условие приобретает вид

$$dS^L{}_K \cdot \psi^K{}_L + dS^M{}_{IK} \cdot \psi^K{}_{LM} \cdot g^{LI} = 0\,.$$

Далее в (5) учтем, что $dS = p_M \cdot dx^M$. Тогда получим уравнения

$$\begin{aligned} d\psi^L &= C^L{}_{KI} \cdot p^I{}_M \cdot dx^M \cdot \psi^K + p^L{}_{KM} \cdot dx^M \cdot \psi^K + p^L{}_{KNM} \cdot dx^M \cdot \psi^N{}_I \cdot g^{IK}\,, \\ d\psi^L{}_K &= C^L{}_{KQN} \cdot p^N{}_M \cdot dx^M \cdot \psi^Q + p^L{}_{IM} \cdot dx^M \cdot \psi^I{}_K + p^L{}_{KIM} \cdot dx^M \cdot \psi^I + p^L{}_{QNM} \cdot dx^M \cdot \psi^N{}_{PK} \cdot g^{PQ}\,, \\ d\psi^L{}_{KI} &= p^L{}_{KNM} \cdot dx^M \cdot \psi^N{}_I + p^L{}_{NM} \cdot dx^M \cdot \psi^N{}_{KI}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

которые представляют собой квантовые постулаты в дифференциалах. Здесь

$p^I{}_M = \partial_M S^I$ – координаты импульса фундаментальной частицы,
$p^I{}_{LM} = \partial_M S^I{}_L$ – координаты импульса промежуточной частицы первого рода,
$p^I{}_{LNM} = \partial_M S^I{}_{LN}$ – координаты импульса промежуточной частицы второго рода.

Перейдем от этих уравнений к квантовым постулатам в частных производных

$$\begin{aligned} \partial_M\psi^L &= C^L{}_{KI} \cdot p^I{}_M \cdot \psi^K + p^L{}_{KM} \cdot \psi^K + p^L{}_{KNM} \cdot \psi^N{}_I \cdot g^{IK}\,, \\ \partial_M\psi^L{}_K &= C^L{}_{KQN} \cdot p^N{}_M \cdot \psi^Q + p^L{}_{IM} \cdot \psi^I{}_K + p^L{}_{KIM} \cdot \psi^I + p^L{}_{QNM} \cdot \psi^N{}_{PK} \cdot g^{PQ}\,, \\ \partial_L\psi^L{}_{KI} &= p^L{}_{KNM} \cdot \psi^N{}_I + p^L{}_{NM} \cdot \psi^N{}_{KI}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

### 4. Волновые уравнения фундаментальной и промежуточных частиц

Для вывода волновых уравнений для фундаментальной и промежуточных частиц воспользуемся квантовыми постулатами (7). Умножим первое уравнение на структурные константы $C^{MP}{}_L$, а второе и третье уравнения на структурные константы $C^{MK}{}_P$, выполнив соответствующие суммирования.* Получим

$$\begin{aligned} C^{MP}{}_L \cdot \partial_M\psi^L &= C^{MP}{}_L \cdot C^L{}_{KI} \cdot p^I{}_M \cdot \psi^K + C^{MP}{}_L \cdot p^L{}_{KM} \cdot \psi^K + C^{MP}{}_L \cdot p^L{}_{MKM} \cdot \psi^N{}_L \cdot g^{IK}\,, \\ C^{MK}{}_P \cdot \partial_M\psi^L{}_K &= C^{MK}{}_P \cdot C^L{}_{KQN} \cdot p^N{}_M \cdot \psi^Q + C^{MK}{}_P \cdot p^L{}_{IM} \cdot \psi^I{}_K + C^{MK}{}_P \cdot p^L{}_{KIM} \cdot \psi^I + \\ &\qquad + C^{MK}{}_P \cdot P^L{}_{QNM} \cdot \psi^N{}_{PL} \cdot g^{PQ}\,, \\ C^{MK}{}_P \cdot \partial_M\psi^L{}_{KI} &= C^{MK}{}_P \cdot p^L{}_{KNM} \cdot \psi^N{}_L + C^{MK}{}_P \cdot p^L{}_{NM} \cdot \psi^N{}_{KI}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

## III. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ, ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЧАСТИЦ И КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ

Рассматривая промежуточные частицы первого рода, мы отметили, что вектор действия этих частиц S зависит от координат пространства-времени $\mathbb{X}$ и от группового закона композиции калибровочной группы, который

---

*Обоснование умножений такого рода приведены в Разделе III.2 Лекции 20 в свою очередь зависит от координат пространства-времени $\mathbb{X}$. Поэтому дифференциал вектора действия $\mathsf{S}$, который мы обозначили $D\mathsf{S}$ и назвали абсолютным, состоит из двух слагаемых

$$D\mathsf{S} = d\mathsf{S} + \delta\mathsf{S}\,,$$

где $d\mathsf{S}$ – обычный дифференциал вектора, а $\delta\mathsf{S}$ – инфинитезимальное приращение вектора, учитывающее изменение группового закона композиции с изменением координат пространства-времени. Это приращение мы назвали *композиционным дифференциалом*. Через координаты вектор $d\mathsf{S}$ записывается следующим образом

$$d\mathsf{S} = \mathfrak{I}^K{}_M \cdot S^M{}_K\,,$$

а вектор $\delta\mathsf{S}$ следующим образом

$$\delta\mathsf{S} = \mathfrak{I}^K{}_M \cdot A^M{}_{KL} \cdot dx^L = \mathfrak{I}^K{}_M \cdot C^M{}_{K\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_L \cdot dx^L\,,$$

где $C^M{}_{K\alpha}$ – структурные постоянные калибровочной группы, $g$ – коэффициент связи или калибровочный заряд, $A^\alpha{}_L$ – потенциал калибровочного поля,

$$A^M{}_{KL} = C^M{}_{K\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_L\,. \tag{9}$$

По этой же схеме мы строим дифференциал вектора действия промежуточной частицы второго рода.

### 1. Промежуточные частицы второго рода и калибровочное поле

Мы полагаем, что вектор действия промежуточных частиц второго рода $\mathfrak{S}$ также зависит от координат пространства-времени $\mathbb{X}$. Поэтому дифференциал вектора действия $\mathfrak{S}$ мы обозначим $D\mathfrak{S}$ и назовем абсолютным. Он состоит из двух слагаемых

$$D\mathfrak{S} = d\mathfrak{S} + \delta\mathfrak{S}\,,$$

где $d\mathfrak{S}$ – обычный дифференциал вектора, а $\delta\mathfrak{S}$ – инфинитезимальное приращение вектора, учитывающее изменение группового закона композиции с изменением координат пространства-времени. Это приращение мы назвали *композиционным дифференциалом*. Через координаты вектор $d\mathfrak{S}$ записывается следующим образом

$$d\mathfrak{S} = \mathfrak{I}^{IK}{}_M \cdot S^M{}_{KI}\,,$$

а вектор $\delta\mathfrak{S}$ запишем следующим образом

$$\delta\mathfrak{S} = \mathfrak{I}^{IK}{}_M \cdot F^M{}_{KIL} \cdot dx^L = \mathfrak{I}^{IK}{}_M \cdot C^M{}_{K\alpha} \cdot g \cdot F^\alpha{}_{IL} \cdot dx^L\,,$$

где $F^\alpha{}_{IL}$ – тензор калибровочного поля или тензор Янга-Миллса:

$$F^\alpha{}_{IL} = \partial_{[I}A^\alpha{}_{L]} - \frac{g}{S_0} \cdot C^\alpha{}_{\gamma\beta} \cdot A^\beta{}_{[I} \cdot A^\gamma{}_{L]} + \frac{1}{R} \cdot A^\alpha{}_N \cdot {}^+C^N{}_{[LI]}\,,$$

$$F^M{}_{KIL} = C^M{}_{K\alpha} \cdot g \cdot F^\alpha{}_{IL}\,.$$

[*] С учетом (9) имеем

$$F^M{}_{KIL} = F^M{}_{K[IL]} = \partial_{[L}A^M{}_{|K|I]} - \frac{1}{S_0} \cdot A^M{}_{P[L} \cdot A^P{}_{|K|I]} + \frac{1}{R} \cdot A^M{}_{KP} \cdot {}^+C^P{}_{[IL]}\,.$$

Или в безразмерном виде

$$F^M{}_{KIL} = F^M{}_{K[IL]} = \partial_{[L}A^M{}_{|K|I]} - A^M{}_{P[L} \cdot A^P{}_{|K|I]} + A^M{}_{KP} \cdot {}^+C^P{}_{[IL]}\,. \tag{10}$$

[*] В Лекции 20 Раздел II.5 мы назвали эту величину силой калибровочного поля, а $A^M{}_{KL}$ мы назвали импульсом калибровочного поля.

## 2. Уравнения структуры алгебры действия фундаментальных, промежуточных частиц и калибровочного поля

Для того, чтобы перейти к уравнениям структуры для алгебры действия в калибровочном поле, необходимо в уравнениях (3) выполнить замену

$$d\boldsymbol{S} \to d\boldsymbol{S}\,, \quad d\mathsf{S} \to D\mathsf{S} = d\mathsf{S} + dx \circ A\,, \quad d\mathfrak{S} \to D\mathfrak{S} = d\mathfrak{S} + dx \circ F\,.$$

Тогда уравнения структуры приобретут вид

$$d_2(d_1\boldsymbol{S} + D_1\mathsf{S} + D_1\mathfrak{S}) = (d_1\boldsymbol{S} + D_1\mathsf{S} + D_1\mathfrak{S}) \circ (d_2\boldsymbol{S} + D_2\mathsf{S} + D_2\mathfrak{S})\,.$$

Перейдем к координатной записи уравнений структуры. Для этого подставим в него выражения дифференциалов векторов через дифференциалы координат

$$d\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_I \cdot dS^I\,, \quad D\mathsf{S} = \mathfrak{I}^K{}_L \cdot (dS^L{}_K + A^L{}_{KN} \cdot dx^N)\,, \quad D\mathfrak{S} = \mathfrak{J}^{LK}{}_I \cdot (dS^I{}_{KL} + F^I{}_{KLN} \cdot dx^N)\,.$$

Подставим в уравнения структуры выражения дифференциалов через базисные векторы. В левой части уравнений получим

$$d_2d_1\boldsymbol{S} + d_2D_1\mathsf{S} + d_2D_1\mathfrak{S} = \mathfrak{e}_I \cdot d_2d_1S^I + \mathfrak{I}^K{}_L \cdot d_2(d_1S^L{}_K + A^L{}_{KN} \cdot d_1x^N) + \mathfrak{J}^{LK}{}_I \cdot d_2(d_1S^I{}_{KL} + F^I{}_{KLN} \cdot d_1x^N)\,.$$

В левой части уравнения структуры получим

$$\begin{aligned}
&d_1\boldsymbol{S} \circ d_2\boldsymbol{S} = (d_1S^I \cdot d_2S^K) \cdot (\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{e}_K) = (d_2S^K \cdot d_1S^I) \cdot (\mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{IK} + \mathfrak{I}^M{}_L \cdot C^L{}_{MIK} + \mathfrak{J}^{NM}{}_L \cdot C^L{}_{MNIK})\,,\\
&d_1\boldsymbol{S} \circ D_2\mathsf{S} = (d_1S^K \cdot (d_2S^M{}_I + A^M{}_{IN} \cdot d_2x^N)) \cdot (\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M) = (d_2S^M{}_K + A^M{}_{KN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1S^K \cdot \mathfrak{e}_M\,,\\
&d_1\boldsymbol{S} \circ D_2\mathfrak{S} = (d_1S^K \cdot (d_2S^M{}_{IK} + F^M{}_{IKN} \cdot d_2x^N)) \cdot \mathfrak{I}^I{}_M)\,,\\
&D_1\mathsf{S} \circ d_2\boldsymbol{S} = 0\,, \quad \text{так как} \quad \mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{e}_M = 0\,,\\
&D_1\mathsf{S} \circ D_2\mathsf{S} = (d_1S^K{}_L + A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P) \cdot (d_2S^M{}_I + A^M{}_{IQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M) =\\
&\quad (d_1S^K{}_L \cdot d_2S^M{}_K + A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P \cdot d_2S^M{}_K + d_1S^K{}_L \cdot A^M{}_{KQ} \cdot d_2x^Q + A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P \cdot A^M{}_{KQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (\mathfrak{I}^L{}_M + \delta^L{}_M)\,,\\
&D_1\mathsf{S} \circ D_2\mathfrak{S} = ((d_1S^K{}_L + A^K{}_{LQ} \cdot d_1x^Q) \cdot (d_2S^M{}_{IK} + F^M{}_{IKN} \cdot d_2x^N)) \cdot (\mathfrak{J}^{LI}{}_M + \mathfrak{e}_M \cdot g^{LI})\,,\\
&D_1\mathfrak{S} \circ d_2\boldsymbol{S} = 0\,, \quad \text{так как} \quad \mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{e}_M = 0\,,\\
&D_1\mathfrak{S} \circ D_2\mathsf{S} = (d_1S^K{}_{LN} + F^K{}_{LNP} \cdot d_1x^P) \cdot (d_2S^M{}_K + A^M{}_{KN} \cdot d_2x^N) \cdot \mathfrak{J}^{NL}{}_M\,,\\
&D_1\mathfrak{S} \circ D_2\mathfrak{S} = ((d_1S^K{}_{LN} + F^K{}_{LNP} \cdot d_1x^P) \cdot (d_2S^M{}_{IK} + F^M{}_{IKS} \cdot d_2x^S)) \cdot (\mathfrak{I}^N{}_M \cdot g^{LI} + \delta^N{}_M \cdot g^{LI})\,.
\end{aligned}$$

Каждое слагаемое правой части вычислено с использованием таблицы умножения базисных векторов (2). После разделения уравнений по базисным векторам, получим: Для фундаментальной частицы

$$\begin{aligned}
d_2d_1S^L = C^L{}_{KI} \cdot d_2S^I \cdot d_1S^K + (d_2S^L{}_K + A^L{}_{KN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1S^K +&\\
(d_2S^L{}_{KN} + F^L{}_{KNP} \cdot d_2x^P) \cdot (d_1S^N{}_I + A^N{}_{IQ} \cdot d_1x^Q) \cdot g^{IK}\,.&
\end{aligned} \tag{11}$$

Для промежуточной частицы первого рода

$$\begin{aligned}
&d_2(d_1S^L{}_K + A^L{}_{KN} \cdot d_1x^N) =\\
&\qquad C^L{}_{KIM} \cdot d_2S^M \cdot d_1S^I + (d_2S^L{}_I + A^L{}_{IQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (d_1S^I{}_K + A^I{}_{KP} \cdot d_1x^P) +\\
&\qquad (d_2S^L{}_{KI} + F^L{}_{KIN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1S^I + (d_2S^L{}_{QN} + F^L{}_{QNS} \cdot d_2x^S) \cdot (d_1S^N{}_{PK} + F^N{}_{PKI} \cdot d_1x^I) \cdot g^{PQ}\,,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&d_2d_1S^L{}_K + d_2A^L{}_{KN} \cdot d_1x^N + A^I{}_{KN} \cdot d_2d_1x^N =\\
&\qquad C^L{}_{KIM} \cdot d_2S^M \cdot d_1S^I + d_2S^L{}_I \cdot d_1S^I{}_K + d_2S^L{}_I \cdot A^I{}_{KP} \cdot d_1x^P +\\
&\qquad A^L{}_{IQ} \cdot d_2x^Q \cdot d_1S^I{}_K + A^L{}_{IQ} \cdot d_2x^Q \cdot A^I{}_{KP} \cdot d_1x^P +\\
&\qquad (d_2S^L{}_{KI} + F^L{}_{KIN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1S^I + (d_2S^L{}_{QN} + F^L{}_{QNS} \cdot d_2x^S) \cdot (d_1S^N{}_{PK} + F^N{}_{PKI} \cdot d_1x^I) \cdot g^{PQ}
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&d_2d_1S^L{}_K = C^L{}_{KIM} \cdot d_2S^M \cdot d_1S^I + d_2S^L{}_I \cdot d_1S^I{}_K + d_2S^L{}_I \cdot A^I{}_{KP} \cdot d_1x^P + A^L{}_{IQ} \cdot d_2x^Q \cdot d_1S^I{}_K -\\
&\qquad \left[\partial_M A^L{}_{KN} - A^L{}_{PM} \cdot A^P{}_{KN} + A^L{}_{KP} \cdot {}^+C^P{}_{NM}\right] \cdot d_2x^M \cdot d_1x^N +\\
&\qquad (d_2S^L{}_{KI} + F^L{}_{KIN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1S^I + (d_2S^L{}_{QN} + F^L{}_{QNS} \cdot d_2x^S) \cdot (d_1S^N{}_{PK} + F^N{}_{PKI} \cdot d_1x^I) \cdot g^{PQ}\,.
\end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках мы полагаем антисимметричным по индексам $N$ и $M$ (смотрите Лекцию 20 Раздел). Поэтому в соответствии с (10) оно представляет собой тензор Янга-Миллса. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} d_2 d_1 S^L{}_K = C^L{}_{KIM} \cdot d_2 S^M \cdot d_1 S^I + d_2 S^L{}_I \cdot d_1 S^I{}_K + \\ d_2 S^L{}_I \cdot A^I{}_{KP} \cdot d_1 x^P + A^L{}_{IQ} \cdot d_2 x^Q \cdot d_1 S^I{}_K - F^L{}_{KNM} \cdot d_2 x^M \cdot d_1 x^N + \\ (d_2 S^L{}_{KI} + F^L{}_{KIN} \cdot d_2 x^N) \cdot d_1 S^I + (d_2 S^L{}_{QN} + F^L{}_{QNS} \cdot d_2 x^S) \cdot (d_1 S^N{}_{PK} + F^N{}_{PKI} \cdot d_1 x^I) \cdot g^{PQ} \,. \end{aligned} \tag{12}$$

Для промежуточной частицы второго рода

$$\begin{aligned} d_2 (d_1 S^L{}_{KI} + F^L{}_{KIN} \cdot d_1 x^N) = \\ (d_2 S^L{}_{KN} + F^L{}_{KNP} \cdot d_2 x^P) \cdot (d_1 S^N{}_I + A^N{}_{IQ} \cdot d_1 x^Q) + (d_2 S^L{}_N + A^L{}_{NQ} \cdot d_2 x^Q) \cdot (d_1 S^N{}_{KI} + F^N{}_{KIP} \cdot d_1 x^P) \,, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} d_2 d_1 S^L{}_{KI} = d_2 S^L{}_{KN} \cdot d_1 S^N{}_I + d_2 S^L{}_N \cdot d_1 S^N{}_{KI} + d_2 S^L{}_{KN} \cdot A^N{}_{IQ} \cdot d_1 x^Q + A^L{}_{NQ} \cdot d_2 x^Q \cdot d_1 S^N{}_{KI} + \\ F^L{}_{KNP} \cdot d_2 x^P \cdot d_1 S^N{}_I + d_2 S^L{}_N \cdot F^N{}_{KIP} \cdot d_1 x^P - \\ \left[\partial_M F^L{}_{KIN} - F^L{}_{KPM} \cdot A^P{}_{IN} - A^L{}_{PM} \cdot F^P{}_{KIN} + F^L{}_{KIP} \cdot {}^+C^P{}_{NM}\right] \cdot d_2 x^M \cdot d_1 x^N \,. \end{aligned}$$

Для выражения в квадратных скобках ведем обозначение

$$F^L{}_{KINM} = \partial_M - F^L{}_{KPM} \cdot A^P{}_{IN} - A^L{}_{PM} \cdot F^P{}_{KIN} + F^L{}_{KIP} \cdot {}^+C^P{}_{NM} \,,$$

с учетом которого получим

$$\begin{aligned} d_2 d_1 S^L{}_{KI} = d_2 S^L{}_{KN} \cdot d_1 S^N{}_I + d_2 S^L{}_N \cdot d_1 S^N{}_{KI} + d_2 S^L{}_{KN} \cdot A^N{}_{IQ} \cdot d_1 x^Q + A^L{}_{NQ} \cdot d_2 x^Q \cdot d_1 S^N{}_{KI} + \\ F^L{}_{KNP} \cdot d_2 x^P \cdot d_1 S^N{}_I + d_2 S^L{}_N \cdot F^N{}_{KIP} \cdot d_1 x^P - F^L{}_{KINM} \cdot d_2 x^M \cdot d_1 x^N \,. \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения (11), (12), (13) обобщают уравнения (11) Лекции 20 и уравнение (5) настоящей Лекции.

Скалярное алгебраическое соотношение приобретает вид

$$(d_2 S^L{}_K + A^L{}_{KQ} \cdot d_2 x^Q)\,(d_1 S^K{}_L + A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P) + (d_2 S^M{}_{IK} + F^M{}_{IKS} \cdot d_2 x^S)\,(d_1 S^K{}_{LM} + F^K{}_{LMP} \cdot d_1 x^P)\, g^{LI} = 0 \,.$$

### 3. Квантовые постулаты механики фундаментальных, промежуточных частиц и калибровочного поля

Как обычно, мы переходим от уравнений структуры к квантовым постулатам, используя переобозначения

$$d_1 S = \psi \,, \quad d_1 x = \chi \,, \quad d_2 = d \,.$$

Тогда вместо (11), (12), (13) получим:

Для фундаментальной частицы

$$d\psi^L = C^L{}_{KI} \cdot dS^I \cdot \psi^K + (dS^L{}_K + A^L{}_{KN} \cdot dx^N) \cdot \psi^K + (dS^L{}_{KN} + F^L{}_{KNP} \cdot dx^P) \cdot (\psi^N{}_I + A^N{}_{IQ} \cdot \chi^Q) \cdot g^{IK} \,. \tag{14}$$

Для промежуточной частицы первого рода

$$\begin{aligned} d\psi^L{}_K = C^L{}_{KIM} \cdot dS^M \cdot \psi^I + dS^L{}_I \cdot \psi^I{}_K + \\ dS^L{}_I \cdot A^I{}_{KP} \cdot \chi^P + A^L{}_{IQ} \cdot dx^Q \cdot \psi^I{}_K - F^L{}_{KNM} \cdot dx^M \cdot \chi^N + \\ (d\psi^L{}_{KI} + F^L{}_{KIN} \cdot dx^N) \cdot \psi^I + (dS^L{}_{QN} + F^L{}_{QNS} \cdot dx^S) \cdot (\psi^N{}_{PK} + F^N{}_{PKI} \cdot \chi^I) \cdot g^{PQ} \,. \end{aligned} \tag{15}$$

Для промежуточной частицы второго рода

$$\begin{aligned} d\psi^L{}_{KI} = dS^L{}_{KN} \cdot \psi^N{}_I + dS^L{}_N \cdot \psi^N{}_{KI} + dS^L{}_{KN} \cdot A^N{}_{IQ} \cdot \chi^Q + A^L{}_{NQ} \cdot dx^Q \cdot \psi^N{}_{KI} + \\ F^L{}_{KNP} \cdot dx^P \cdot \psi^N{}_I + dS^L{}_N \cdot F^N{}_{KIP} \cdot \chi^P - F^L{}_{KINM} \cdot dx^M \cdot \chi^N \,. \end{aligned} \tag{16}$$

### 4. Волновые уравнения фундаментальной, промежуточных частиц и калибровочного поля

Для вывода волнового уравнения для фундаментальной и промежуточных частиц в калибровочном поле воспользуемся квантовыми постулатами (14), (15), (16). Сначала запишем квантовые постулаты через частные производные, а затем умножим первое уравнение на структурные константы ${C^{MP}}_L$, а второе и третье уравнения на структурные константы ${C^{MK}}_P$, выполнив соответствующие суммирования. Получим

для фундаментальной частицы

$$\begin{aligned} {C^{MP}}_L \cdot \partial_M \psi^L = {C^{MP}}_L \cdot \Big( &{C^L}_{KI} \cdot {p^I}_M \cdot \psi^K + ({p^L}_{KM} + {A^L}_{KM}) \cdot \psi^K + \\ &({p^L}_{KNM} + {F^L}_{KNM}) \cdot ({\psi^N}_I + {A^N}_{IQ} \cdot \chi^Q) \cdot g^{IK} \Big)\,, \end{aligned} \tag{17}$$

для промежуточной частицы первого рода

$$\begin{aligned} {C^{MK}}_P \cdot \partial_M {\psi^L}_K = {C^{MK}}_P \cdot \Big( &{C^L}_{KIN} \cdot {p^N}_M \cdot \psi^I + {p^L}_{IM} \cdot {\psi^I}_K + \\ &{p^L}_{IM} \cdot {A^I}_{KP} \cdot \chi^P + {A^L}_{IM} \cdot {\psi^I}_K - {F^L}_{KNM} \cdot \chi^N + \\ &({p^L}_{KIM} + {F^L}_{KIM}) \cdot \psi^I + ({p^L}_{QNM} + {F^L}_{QNM}) \cdot ({\psi^N}_{PK} + {F^N}_{PKI} \cdot \chi^I) \cdot g^{PQ} \Big)\,, \end{aligned} \tag{18}$$

для промежуточной частицы второго рода

$$\begin{aligned} {C^{MK}}_P \cdot \partial_M {\psi^L}_{KI} = {C^{MK}}_P \cdot \Big( &{p^L}_{KNM} \cdot {\psi^N}_I + {p^L}_{NM} \cdot {\psi^N}_{KI} + {p^L}_{KNM} \cdot {A^N}_{IQ} \cdot \chi^Q + {A^L}_{NM} \cdot {\psi^N}_{KI} + \\ &{F^L}_{KNM} \cdot {\psi^N}_I + {p^L}_{NM} \cdot {F^N}_{KIP} \cdot \chi^P - {F^L}_{KINM} \cdot \chi^N \Big)\,. \end{aligned} \tag{19}$$

## IV. ЧАСТИЦЫ И АНТИЧАСТИЦЫ

Мы полагаем, что пространство действия частиц и античастиц представляет собой сумму шести векторных пространств:

$$\mathbb{S}_e + \mathbb{S}_I + \mathbb{S}_J + {}^+\mathbb{S}_e + {}^+\mathbb{S}_I + {}^+\mathbb{S}_J\,.$$

Иначе говоря, вектор действия частиц и античастиц представлен суммой шести составляющих

$$r = \boldsymbol{S} + \mathsf{S} + \mathfrak{S} + {}^+\boldsymbol{S} + {}^+\mathsf{S} + {}^+\mathfrak{S}\,.$$

Вектор действия $r$ может быть разложен по базисным векторам следующим образом

$$r = \mathfrak{e}_K \cdot S^K + {\mathfrak{I}^L}_K \cdot {S^K}_L + {\mathfrak{I}^{ML}}_K \cdot {S^K}_{LM} + S_K \cdot \mathfrak{E}^K + {}^+{S^K}_L \cdot {\mathfrak{K}^L}_K + {S^{ML}}_K \cdot {\mathfrak{L}^K}_{LM}\,.$$

Свертку

$$\langle {}^+r, r\rangle = S_I \cdot S^I + {}^+{S^L}_K \cdot {S^K}_L + {S^{ML}}_K \cdot {S^K}_{LM}$$

будем называть *инвариантом действия*.

### 1. Алгебра действия частиц и античастиц

Эта алгебра далее положена в основу рассмотрения фундаментальных, промежуточных и гипотетических *вторых промежуточных* частиц и античастиц.

Алгебра будет определена, если к ранее приведенной таблице умножения базисных векторов (2) добавить произведения базисных векторов ${\mathfrak{I}^{IK}}_L$ с сопряженными векторами $\mathfrak{E}^I$ и ${\mathfrak{K}^L}_K$, а также произведения, в которых участвуют базисные векторы $\mathfrak{L}^{L}{}_{KI}$. Эти произведения вычисляются на основании правил тензорной алгебры:

$$\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M = \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M = \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M + \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^P \rangle \cdot \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M = g^{LP} \cdot \mathfrak{I}^I{}_M \,,$$

$$\mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{E}^I = \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{E}^I = \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^I + \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^I \rangle = 0 \,,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}^L{}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M = \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M + \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^P \rangle + \\ &\quad \mathfrak{e}_M \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^I \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^P \rangle = \mathfrak{e}_M \cdot \delta^I{}_K \cdot g^{LP} \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{K}^I{}_M &= \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I = \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I + \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}^I \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_M \rangle + \\ &\quad \mathfrak{E}^N \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^I \rangle \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_M \rangle = \mathfrak{E}^N \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} &= \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I = \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I + \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_R \rangle + \\ &\quad \mathfrak{E}^N \otimes \mathfrak{E}^I \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_M \rangle \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_R \rangle + \langle \mathfrak{E}^N, \mathfrak{E}^I \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_M \rangle \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_R \rangle = g^{NI} \cdot \delta^L{}_M \cdot g_{KR} \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^L{}_{KQ} \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M = \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}^P \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M + \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^P \rangle + \\ &\quad \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_M \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^I \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^P \rangle + \langle \mathfrak{e}_Q, \mathfrak{e}_M \rangle \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^I \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^P \rangle = g_{QM} \cdot \delta^I{}_K \cdot g^{LP} \,, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} = \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I = \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I + \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_R \rangle \cdot \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I = g_{KR} \cdot \mathfrak{K}^I{}_M \,,$$

$$\mathfrak{L}^L{}_{KQ} \circ \mathfrak{e}_M = \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{e}_M = \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{e}_M + \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_M \rangle = 0 \,,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} &= \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I = \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I + \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_R \rangle + \\ &\quad \mathfrak{E}^I \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_M \rangle \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_R \rangle = \mathfrak{E}^I \cdot \delta^L{}_M \cdot g_{KR} \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^L{}_{KQ} \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M = \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{e}_M + \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{e}_M \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^I \rangle + \\ &\quad \mathfrak{e}_Q \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_M \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^I \rangle = \mathfrak{e}_Q \cdot g_{KM} \cdot g^{LI} \,, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{L}^L{}_{KQ} \circ \mathfrak{E}^I = \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}^I = \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}^I + \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^I \rangle = 0 \,,$$

$$\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} = \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I = \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I + \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_R \rangle = \mathfrak{K}^I{}_M \cdot \delta^L{}_R \,,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^L{}_{KQ} \circ \mathfrak{K}^I{}_M &= \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I = \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I + \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^I \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_M \rangle + \\ &\quad \mathfrak{e}_Q \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{E}^I \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_M \rangle = \mathfrak{L}^I{}_{KQ} \cdot \delta^L{}_M + \mathfrak{e}_Q \cdot \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}^L{}_K \circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} &= \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I = \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I + \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_R \rangle + \\ &\quad \mathfrak{E}^I \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_M \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_R \rangle = \mathfrak{L}^I{}_{MK} \cdot \delta^L{}_R + \mathfrak{E}^I \cdot g_{KM} \cdot \delta^L{}_R \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^L{}_{KQ} \circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} &= \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I = \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{e}_R \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I + \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{e}_M \otimes \mathfrak{E}^I \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_R \rangle + \\ &\quad \mathfrak{e}_Q \otimes \mathfrak{E}^I \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_M \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_R \rangle + \langle \mathfrak{e}_Q, \mathfrak{E}^I \rangle \cdot \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_M \rangle \cdot \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{e}_R \rangle = \mathfrak{K}^I{}_Q \cdot g_{KM} \cdot \delta^L{}_R + \delta^I{}_Q \cdot g_{KM} \cdot \delta^L{}_R \,. \end{aligned}$$

Здесь из конечных выражений исключены базисные векторы, выходящие за рамки рассматриваемой алгебры. В результате алгебра действия частиц и античастиц определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{E}^I = \mathfrak{K}^I{}_K + \delta^I{}_K$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I &= \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI} + \mathfrak{I}^M{}_L \cdot C^L{}_{MKI} \\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{e}_M &= \mathfrak{E}^L \cdot g_{KM} \\
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_M \\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{I}^L{}_M \\
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \delta^P{}_K \cdot \mathfrak{I}^I{}_M \\
\mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{e}_M &= 0 \\
\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \mathfrak{J}^{LI}{}_M \cdot \delta^P{}_K + \mathfrak{e}_M \cdot \delta^P{}_K \cdot g^{LI} \\
\mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M &= \mathfrak{J}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M \cdot \mathfrak{E}^N \\
\mathfrak{J}^{NL}{}_K \circ \mathfrak{J}^{PI}{}_M &= \mathfrak{I}^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K + \delta^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{e}_M = \delta^L{}_M + \mathfrak{I}^L{}_M \,.$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K &= C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{E}^L + C^{IKM}{}_L \cdot \mathfrak{K}^L{}_M \\
\mathfrak{K}^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I &= \mathfrak{e}_K \cdot g^{LI} \\
\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \mathfrak{E}^I \\
\mathfrak{K}^L{}_K \circ \mathfrak{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot \mathfrak{K}^I{}_K \\
\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} &= \mathfrak{K}^I{}_M \cdot \delta^L{}_R \\
\mathfrak{L}^L{}_{KQ} \circ \mathfrak{E}^I &= 0 \\
\mathfrak{K}^L{}_K \circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} &= \mathfrak{L}^I{}_{MK} \cdot \delta^L{}_R + \mathfrak{E}^I \cdot g_{KM} \cdot \delta^L{}_R \\
\mathfrak{L}^L{}_{KQ} \circ \mathfrak{K}^I{}_M &= \mathfrak{L}^I{}_{KQ} \cdot \delta^L{}_M + \mathfrak{e}_Q \cdot \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M \\
\mathfrak{L}^L{}_{KQ} \circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} &= \mathfrak{K}^I{}_Q \cdot g_{KM} \cdot \delta^L{}_R + \delta^I{}_Q \cdot g_{KM} \cdot \delta^L{}_R
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{e}_K \quad &\circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} = g_{KR} \cdot \mathfrak{K}^I{}_M \\
\mathfrak{L}^L{}_{KQ} &\circ \mathfrak{e}_M \quad = 0 \\
\mathfrak{e}_K \quad &\circ \mathfrak{K}^I{}_M \quad = \mathfrak{L}^I{}_{MK} + g_{KM} \cdot \mathfrak{E}^I \\
\mathfrak{K}^L{}_K \quad &\circ \mathfrak{e}_M \quad = \mathfrak{e}_K \cdot \delta^L{}_M
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{E}^L \quad &\circ \mathfrak{I}^{PI}{}_M = g^{LP} \cdot \mathfrak{I}^I{}_M \\
\mathfrak{I}^{NL}{}_K &\circ \mathfrak{E}^I \quad = 0 \\
\mathfrak{E}^L \quad &\circ \mathfrak{I}^I{}_M \quad = \mathfrak{I}^{LI}{}_M + g^{LI} \cdot \mathfrak{e}_M \\
\mathfrak{I}^L{}_K \quad &\circ \mathfrak{E}^I \quad = \mathfrak{E}^L \cdot \delta^I{}_K
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}^L{}_K \quad &\circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} = \mathfrak{E}^I \cdot \delta^L{}_M \cdot g_{KR} \\
\mathfrak{L}^L{}_{KQ} &\circ \mathfrak{I}^I{}_M \quad = \mathfrak{e}_Q \cdot g_{KM} \cdot g^{LI}\,. \\
\mathfrak{I}^L{}_K \quad &\circ \mathfrak{K}^I{}_M \quad = g_{KM} \cdot g^{LI} \\
\mathfrak{I}^{NL}{}_K &\circ \mathfrak{L}^I{}_{MR} = g^{NI} \cdot \delta^L{}_M \cdot g_{KR}\,.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{K}^L{}_K \quad &\circ \mathfrak{I}^{PI}{}_M = \mathfrak{e}_M \cdot \delta^I{}_K \cdot g^{LP} \\
\mathfrak{I}^{NL}{}_K &\circ \mathfrak{K}^I{}_M \quad = \mathfrak{E}^N \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} \\
\mathfrak{K}^L{}_K \quad &\circ \mathfrak{I}^I{}_M \quad = g^{LI} \cdot g_{KM} \\
\mathfrak{L}^L{}_{KQ} &\circ \mathfrak{I}^{PI}{}_M = g_{QM} \cdot \delta^I{}_K \cdot g^{LP}
\end{aligned}
$$

Далее рассмотрим произведения базисных векторов алгебры действия $\mathbb{S}$ в общем случае и сопоставим им элементарные акты взаимодействий. Фундаментальные частицы обозначим $F$, первые промежуточные частицы обозначим $B$, вторые промежуточные частицы $F'$, скалярные частицы обозначим $\phi$. Античастицы обозначим соответственно ${}^+F$, ${}^+B$, ${}^+F'$, ${}^+\phi$.

В результате имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI} + \mathfrak{I}^M{}_L \cdot C^L{}_{MKI}\,, &&\sim &&F_1 \circ F_2 \to F_3 \cdot \phi_1 + B \cdot \phi_2\,, \\
&\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{I}^K{}_L = \delta^K_I \cdot \mathfrak{e}_L\,, &&\sim &&F_1 \circ B \to \phi \cdot F_2\,, \\
&\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{I}^{KM}{}_L = \delta^K{}_I \cdot \mathfrak{I}^M{}_L\,, &&\sim &&F \circ F'_1 \to \phi \cdot B\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K = C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{E}^L + C^{IKM}{}_L \cdot \mathfrak{K}^L{}_M\,, &&\sim &&{}^+F_1 \circ {}^+F_2 \to \phi_1 \cdot {}^+F_3 + {}^+B \cdot \phi_2\,, \\
&\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{K}^K{}_L = \delta^I_L \cdot \mathfrak{E}^K\,, &&\sim &&{}^+F_1 \circ {}^+B \to \phi \cdot {}^+F_2\,, \\
&\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{L}^K{}_{ML} = \delta^I_L \cdot \mathfrak{K}^K{}_M\,, &&\sim &&{}^+F_1 \circ {}^+F' \to \phi \cdot {}^+B\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{E}^K = \mathfrak{K}^K{}_I + \delta^K{}_I\,, &&\sim &&F \circ {}^+F \to {}^+B + \phi\,, \\
&\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{K}^K{}_L = \mathfrak{L}^K{}_{LI} + g_{IL} \cdot \mathfrak{E}^K\,, &&\sim &&F \circ {}^+B \to {}^+F' + \phi \cdot {}^+F\,, \\
&\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{L}^K{}_{ML} = g_{IL} \cdot \mathfrak{K}^K{}_M\,, &&\sim &&F \circ {}^+F' \to \phi \cdot {}^+B\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{e}_K = \mathfrak{I}^I{}_K + \delta^I{}_K\,, &&\sim &&{}^+F \circ F \to B + \phi\,, \\
&\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{I}^K{}_L = \mathfrak{I}^{IK}{}_L + g^{IK} \cdot \mathfrak{e}_L\,, &&\sim &&{}^+F \circ B \to F' + \phi \cdot F\,, \\
&\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{I}^{KM}{}_L = g^{IK} \cdot \mathfrak{I}^M{}_L\,, &&\sim &&{}^+F \circ F' \to \phi \cdot B\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{E}^K \cdot g_{LI}\,, &&\sim &&B \circ F \to {}^+F \cdot \phi\,, \\
&\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{I}^M{}_N = \delta^M_L \cdot \mathfrak{I}^K{}_N + \delta^M_L \cdot \delta^K_N\,, &&\sim &&B_1 \circ B_2 \to \phi_1 \cdot B_3 + \phi_2 \cdot \phi_3\,, \\
&\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{I}^{IM}{}_N = \delta^I_L \cdot \mathfrak{I}^{KM}{}_N + \delta^I_L \cdot g^{KM} \cdot \mathfrak{e}_N\,, &&\sim &&B \circ F'_1 \to \phi_1 \cdot F'_2 + \phi_2 \cdot \phi_3 \cdot F\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{E}^I = g^{KI} \cdot \mathfrak{e}_L\,, &&\sim &&{}^+B \circ {}^+F \to \phi \cdot F\,, \\
&\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{K}^M{}_N = \delta^K_N \cdot \mathfrak{K}^M{}_L + \delta^K_N \cdot \delta^M_L\,, &&\sim &&{}^+B_1 \circ {}^+B_2 \to \phi_1 \cdot {}^+B_3 + \phi_2 \cdot \phi_3\,, \\
&\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{L}^M{}_{NI} = \delta^K_I \cdot \mathfrak{L}^M{}_{NL} + \delta^K_I \cdot g_{LN} \cdot \mathfrak{E}^M\,, &&\sim &&{}^+B \circ {}^+F'_1 \to \phi_1 \cdot {}^+F'_2 + \phi_2 \cdot \phi_3 \cdot {}^+F\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{E}^I = \mathfrak{E}^K \cdot \delta^I_L\,, &&\sim &&B \circ {}^+F_1 \to {}^+F_2 \cdot \phi\,, \\
&\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{K}^M{}_N = g_{LN} \cdot g^{KM}\,, &&\sim &&B \circ {}^+B \to \phi_1 \cdot \phi_2\,, \\
&\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{L}^M{}_{NI} = g_{LI} \cdot \delta^K_N \cdot \mathfrak{E}^M\,, &&\sim &&B \circ {}^+F' \to \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot {}^+F\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{e}_I = \delta^K_I \cdot \mathfrak{e}_L\,, &&\sim &&{}^+B \circ F_1 \to \phi \cdot F_2\,, \\
&\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{I}^M{}_N = g^{KM} \cdot g_{LN}\,, &&\sim &&{}^+B \circ B \to \phi_1 \cdot \phi_2\,, \\
&\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{I}^{IM}{}_N = g^{KI} \cdot \delta^M_L \cdot \mathfrak{e}_N\,, &&\sim &&{}^+B \circ F' \to \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot F\,,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{J}^{KM}{}_L \circ \mathfrak{e}_I = 0\,, && \sim && F' \circ F \to 0\,,\\
&\mathfrak{J}^{KM}{}_L \circ \mathfrak{J}^I{}_N = \delta^I_L \cdot \mathfrak{J}^{KM}{}_N + \delta^I_L \cdot \delta^M_N \cdot \mathfrak{E}^K\,, && \sim && F' \circ B \to \phi_1 \cdot F' + \phi_2 \cdot \phi_3 \cdot {}^+F\,,\\
&\mathfrak{J}^{KM}{}_L \circ \mathfrak{J}^{IN}{}_P = \delta^I_L \cdot g^{MN} \cdot \mathfrak{J}^K{}_P\,, && \sim && F'_1 \circ F'_2 \to \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot B\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}^K{}_{ML} \circ \mathfrak{E}^I = 0\,, && \sim && {}^+F' \circ {}^+F \to 0\,,\\
&\mathfrak{L}^K{}_{ML} \circ \mathfrak{K}^I{}_N = \delta^K_N \cdot \mathfrak{L}^I{}_{ML} + \delta^K_N \cdot \delta^I_M \cdot \mathfrak{e}_L\,, && \sim && {}^+F'_1 \circ {}^+B \to \phi_1 \cdot {}^+F'_2 + \phi_2 \cdot \phi_3 \cdot F\,,\\
&\mathfrak{L}^K{}_{ML} \circ \mathfrak{L}^I{}_{NP} = \delta^K_P \cdot g_{MN} \cdot \mathfrak{K}^I{}_L\,, && \sim && {}^+F'_1 \circ {}^+F'_2 \to \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot {}^+B\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{J}^{KM}{}_L \circ \mathfrak{E}^I = 0\,, && \sim && F' \circ {}^+F \to 0\,,\\
&\mathfrak{J}^{KM}{}_L \circ \mathfrak{K}^I{}_N = g_{LN} \cdot g^{MI} \cdot \mathfrak{E}^K\,, && \sim && F' \circ {}^+B \to \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot {}^+F\,,\\
&\mathfrak{J}^{KM}{}_L \circ \mathfrak{L}^I{}_{NP} = g_{LP} \cdot \delta^M_N \cdot g^{KI}\,, && \sim && F' \circ {}^+F' \to \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \phi_3\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}^K{}_{ML} \circ \mathfrak{e}_I = 0\,, && \sim && {}^+F' \circ F \to 0\,,\\
&\mathfrak{L}^K{}_{ML} \circ \mathfrak{J}^I{}_N = g^{KI} \cdot g_{MN} \cdot \mathfrak{e}_L\,, && \sim && {}^+F' \circ B \to \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot F\,,\\
&\mathfrak{L}^K{}_{ML} \circ \mathfrak{J}^{IN}{}_P = g^{KI} \cdot \delta^N_M \cdot g_{LP}\,, && \sim && {}^+F' \circ F' \to \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \phi_3\,,
\end{aligned}$$

## V. ИНВАРИАНТ ДЕЙСТВИЯ, ЛАГРАНЖИАН И ПОЛЕВОЕ СЛАГАЕМОЕ

В Лекции 1 мы ввели *вектор* действия и указали, что в число компонент этого вектора входит скалярная составляющая, проецируемая на базисный вектор $\mathfrak{e}_0$, изоморфный действительной единице. Мы указали, что используемое в физике скалярное действие связано с указанной скалярной составляющей. Пришло время разобраться в этом вопросе.

### 1. Инвариант действия

Вектор действия фундаментальных частиц, промежуточных частиц первого рода и промежуточных частиц второго рода имеет вид

$$S = \boldsymbol{S} + \mathsf{S} + \mathfrak{S}\,.$$

Вектор действия фундаментальных античастиц, промежуточных античастиц первого рода и промежуточных античастиц второго рода имеет вид

$$^+S = {}^+\boldsymbol{S} + {}^+\mathsf{S} + {}^+\mathfrak{S}\,.$$

С помощью этих векторов, используя операцию свертки, можно образовать скалярную величину

$$\begin{gathered}\langle {}^+S,\, S\rangle = \langle {}^+\boldsymbol{S},\, \boldsymbol{S}\rangle + \langle {}^+\mathsf{S},\, \mathsf{S}\rangle + \langle {}^+\mathfrak{S},\, \mathfrak{S}\rangle = \\ S_I\cdot S^I + {}^+S^L{}_K\cdot S^K{}_L + S^{ML}{}_K\cdot S^K{}_{LM}\,.\end{gathered}$$

Мы назвали эту величину *инвариантом действия.*

Аналогично построим *локальный инвариант действия.* Для этого введем дифференциал

$$dS = d\boldsymbol{S} + d\mathsf{S} + d\mathfrak{S}\,,$$

а также сопряженный дифференциал

$$d^+S = d^+\boldsymbol{S} + d^+\mathsf{S} + d^+\mathfrak{S}\,.$$

С помощью этих векторов, используя операцию свертки, образуем скалярную величину - локальный инвариант действия -

$$\begin{gathered}\langle d^+S,\, dS\rangle = \langle d^+\boldsymbol{S},\, d\boldsymbol{S}\rangle + \langle d^+\mathsf{S},\, d\mathsf{S}\rangle + \langle d^+\mathfrak{S},\, d\mathfrak{S}\rangle = \\ dS_I\cdot dS^I + d^+S^L{}_K\cdot dS^K{}_L + dS^{ML}{}_K\cdot dS^K{}_{LM}\,.\end{gathered} \tag{20}$$

Далее напомним, что при дифференцировании векторов алгебры необходимо вводить несколько видов дифференциалов (два и более), определяемых положением вектора в законе умножения. Пусть дифференциал $d$ в выражении (20) есть дифференциал $d_1$, тогда локальный инвариант действия принимает вид

$$\begin{gathered}\langle d_1{}^+S,\, d_1S\rangle = \langle d_1{}^+\boldsymbol{S},\, d_1\boldsymbol{S}\rangle + \langle d_1{}^+\mathsf{S},\, d_1\mathsf{S}\rangle + \langle d_1{}^+\mathfrak{S},\, d_1\mathfrak{S}\rangle \\ = d_1S_I\cdot d_1S^I + d_1{}^+S^L{}_K\cdot d_1S^K{}_L + d_1S^{ML}{}_K\cdot d_1S^K{}_{LM}\,.\end{gathered}$$

Отсюда, полагая

$$\begin{aligned} d_1S &= \psi\,, & d_1{}^+S &= {}^+\psi\,,\\ d_1\boldsymbol{S} &= \psi_1\,, & d_1{}^+\boldsymbol{S} &= {}^+\psi_1\,,\\ d_1\mathsf{S} &= \psi_2\,, & d_1{}^+\mathsf{S} &= {}^+\psi_2\,,\\ d_1\mathfrak{S} &= \psi_3\,, & d_1{}^+\mathfrak{S} &= {}^+\psi_3\,,\end{aligned}$$

получим

$$\begin{gathered}\langle {}^+\psi,\, \psi\rangle = \langle {}^+\psi_1,\, \psi_1\rangle + \langle {}^+\psi_2,\, \psi_2\rangle + \langle {}^+\psi_3,\, \psi_3\rangle = \\ \psi_I\cdot\psi^I + {}^+\psi^L{}_K\cdot\psi^K{}_L + \psi^{ML}{}_K\cdot\psi^K{}_{LM}\,.\end{gathered}$$

Эту свертку будем называть *квантовым инвариантом действия.*

Для того, чтобы двигаться дальше, нам необходимо ввести упрощающие обозначения, позволяющие сделать выкладки более простыми и прозрачными.

### 2. Упрощающие обозначения

Сначала рассмотрим частицы вне калибровочного поля. Помимо

$$\psi_1 = d_1\boldsymbol{S}\,,\quad \psi_2 = d_1\mathsf{S}\,,\quad \psi_3 = d_1\mathfrak{S}\,,$$

будем использовать собирательное обозначение

$$\psi \equiv (\psi_1\,,\quad \psi_2\,,\quad \psi_3)\,.$$

Эти же обозначения будем использовать для координат волновых функций

$$\psi_1 = \psi^I\,,\quad \psi_2 = \psi^K{}_L\,,\quad \psi_3 = \psi^K{}_{LM}$$

и собирательное обозначение

$$\psi \equiv (\psi^I\,,\quad \psi^K{}_L\,,\quad \psi^K{}_{LM})\,.$$

Далее введем операторы

$$\Box^P\,,\quad \Box^L{}_P\,,\quad \Box^L{}_{PI}$$

и операторы

$$\nabla^P\,,\quad \nabla^L{}_P\,,\quad \nabla^L{}_{PI}\,.$$

Эти операторы мы определим тем условием, что волновые уравнения (8) записываются в следующем виде *

$$\begin{aligned}\Box^P(\psi) &\equiv \nabla^P(\psi) - p_1\cdot\psi^P = 0\,,\\ \Box^L{}_P(\psi) &\equiv \nabla^L{}_P(\psi) - p_2\cdot\psi^L{}_P = 0\,,\\ \Box^L{}_{PI}(\psi) &\equiv \nabla^L{}_{PI}(\psi) - p_3\cdot\psi^L{}_{PI} = 0\,.\end{aligned} \tag{21}$$

---

*Здесь не следует отождествлять оператор $\Box$ с оператором Даламбера, а оператор $\nabla$ с оператором набла.

Здесь $p_1$ , $p_2$ , $p_3$ импульсы покоя соответственно фундаментальной частицы, промежуточной частицы первого рода, промежуточной частицы второго рода.

Далее выполним дополнительные упрощения, введя обозначения

$$\Box_1 = \Box^P\,, \quad \Box_2 = \Box^L{}_P\,, \quad \Box_3 = \Box^L{}_{PI}$$

и операторы

$$\nabla_1 = \nabla^P\,, \quad \nabla_2 = \nabla^L{}_P\,, \quad \nabla_3 = \nabla^L{}_{PI}\,.$$

В этих обозначениях волновые уравнения для фундаментальной частицы, промежуточной частицы первого рода, промежуточной частицы второго рода (21) записываются следующим образом

$$\begin{array}{c} \Box_1(\psi) \equiv \nabla_1(\psi) - p_1 \cdot \psi_1 = 0\,, \\ \Box_2(\psi) \equiv \nabla_2(\psi) - p_2 \cdot \psi_2 = 0\,, \\ \Box_3(\psi) \equiv \nabla_3(\psi) - p_3 \cdot \psi_3 = 0\,, \end{array} \tag{22}$$

а в собирательном виде все три уравнения запишутся так

$$\Box(\psi) \equiv \nabla(\psi) - p \cdot \psi = 0\,.$$

Здесь

$$\Box \equiv (\Box_1\,, \Box_2\,, \Box_3)\,, \ \nabla \equiv (\nabla_1\,, \nabla_2\,, \nabla_3)\,, \ p \equiv (p_1\,, p_2\,, p_3)\,.$$

Для частиц в калибровочном поле волновые уравнения получаются из предыдущих путем замены

$$\begin{array}{c} \psi_1 \to \psi_1\,, \quad \psi_2 \to \psi_2 + \chi \circ A\,, \quad \psi_3 \to \psi_3 + \chi \circ F\,, \\ p_1 \to p_1\,, \quad p_2 \to p_2 + A\,, \quad p_3 \to p_3 + F\,. \end{array}$$

Эти соответствия в собирательном виде запишем так

$$\psi \to \psi + \mathcal{A} \cdot \chi\,, \quad p \to p + \mathcal{A}\,,$$

где

$$\mathcal{A} \equiv (0\,, A\,, F)\,.$$

После подстановки этих соотношений в (22) мы получим волновые уравнения для фундаментальной частицы, промежуточной частицы первого рода, промежуточной частицы второго рода (17), (18), (19) но в новых обозначениях

$$\begin{array}{c} \Box_1(\psi\,, \mathcal{A}) \equiv \nabla_1(\psi\,, \mathcal{A}) - p_1 \cdot \psi_1 = 0\,, \\ \Box_2(\psi\,, \mathcal{A}) \equiv \nabla_2(\psi\,, \mathcal{A}) - p_2 \cdot (\psi_2 + \chi \circ A) = 0\,, \\ \Box_3(\psi\,, \mathcal{A}) \equiv \nabla_3(\psi\,, \mathcal{A}) - p_3 \cdot (\psi_3 + \chi \circ F) = 0\,. \end{array}$$

Смысл операторов $\Box(\psi\,, \mathcal{A})$ и $\nabla(\psi\,, \mathcal{A})$ ясен из приведенной записи волновых уравнений. В собирательном виде волновые уравнения запишутся так

$$\Box(\psi\,, \mathcal{A}) \equiv \nabla(\psi\,, \mathcal{A}) - p \cdot \psi = 0\,. \tag{23}$$

Кроме того, нам понадобится преобразование сопряженных волновых функций в калибровочном поле

$$^+\psi_1 \to {}^+\psi_1\,, \ {}^+\psi_2 \to {}^+\psi_2 + {}^+A \circ {}^+\chi\,, \ {}^+\psi_3 \to {}^+\psi_3 + {}^+F \circ {}^+\chi\,.$$

Эти соответствия в собирательном виде запишем так

$$^+\psi \to {}^+\psi + {}^+\mathcal{A} \circ {}^+\chi\,, \tag{24}$$

где

$$^+\mathcal{A} \equiv (0\,, {}^+A\,, {}^+F)\,.$$

**3. Лагранжиан и полевое слагаемое**

Перейдем к конструированию лагранжиана. Сначала рассмотрим случай частиц вне калибровочного поля. Лагранжиан, точнее квантовый лагранжиан, определим исходя из квантового инварианта действия

$$\langle {}^+\psi,\, \psi \rangle\,,$$

следующим образом

$$\mathcal{L} = \Box \langle {}^+\psi,\, \psi \rangle = \langle {}^+\psi,\, \Box\psi \rangle + \langle \Box {}^+\psi,\, \psi \rangle\,.$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой лагранжиан для частиц. Он принимает нулевое значение, если волновая функция $\psi$ удовлетворяет волновому уравнению для частиц

$$\Box\psi = 0\,.$$

Второе слагаемое представляет собой лагранжиан для античастиц. Он принимает нулевое значение, если волновая функция $^+\psi$ удовлетворяет волновому уравнению для античастиц

$$\Box {}^+\psi = 0\,.$$

Далее для простоты будем рассматривать только лагранжиан для частиц

$$\mathcal{L} = \langle {}^+\psi,\, \Box\psi \rangle = \langle {}^+\psi,\, (\nabla(\psi) - p \cdot \psi) \rangle\,.$$

Перейдем к лагранжиану для фундаментальной частицы, промежуточной частицы первого рода и промежуточной частицы второго рода в калибровочном поле. Для этого воспользуемся подстановками (23) и (24). Получим

$$\mathcal{L} = \langle ({}^+\psi + {}^+\mathcal{A} \circ {}^+\chi),\, (\nabla(\psi\,, \mathcal{A}) - p \cdot (\psi + \chi \circ \mathcal{A})) \rangle\,.$$

Выполним соответствующие умножения, раскрыв скобки, и сгруппируем слагаемые так, чтобы выделить слагаемое, указанное ниже стрелками

$$\mathcal{L} = \langle ({}^+\psi + {}^+\overline{\overset{\downarrow}{\mathcal{A}} \circ {}^+\chi),\, (\nabla(\psi\,, \mathcal{A}) - p \cdot (\psi + \chi \circ \overset{\downarrow}{\mathcal{A}}}))\rangle\,.$$

Остальные слагаемые объединим вместе и обозначим $\mathcal{L}'$. В результате лагранжиан запишется в следующем виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \langle {}^+\mathcal{A} \circ {}^+\chi,\, p \cdot \chi \circ \mathcal{A} \rangle\,.$$

Или, раскрывая собирательный смысл второго слагаемого

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \langle {}^+A \circ {}^+\chi,\, p_2 \cdot \chi \circ A \rangle - \langle {}^+F \circ {}^+\chi,\, p_3 \cdot \chi \circ F \rangle\,.$$

Или по отношению к координатам потенциала и тензора поля

$$\begin{array}{l} \mathcal{L} = \mathcal{L}' - \chi_I \cdot A^{IK}{}_L \cdot p_2 \cdot A^L{}_{KM} \cdot \chi^M - \\ \qquad\qquad \chi_I \cdot F^{IKL}{}_M \cdot p_3 \cdot F^M{}_{LKN} \cdot \chi^N\,. \end{array}$$

Или

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - g^2 \cdot \chi_I \cdot A^I{}_\alpha \cdot p_2 \cdot A^\alpha{}_M \cdot \chi^M - \\ g^2 \cdot \chi_I \cdot F^{IK}{}_\alpha \cdot p_3 \cdot F^\alpha{}_{KN} \cdot \chi^N .$$

Далее потребуем, чтобы выполнялись следующие соотношения

$$\chi_I \cdot A^I{}_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot \chi^M = (\chi_I \cdot \chi^I) \cdot (A^M{}_\alpha \cdot A^\alpha{}_M) , \\ \chi_I \cdot F^{IK}{}_\alpha \cdot F^\alpha{}_{KN} \cdot \chi^N = (\chi_I \cdot \chi^I) \cdot (F^{NK}{}_\alpha \cdot F^\alpha{}_{KN}) ,$$

а также

$$g^2 \cdot (\chi_I \cdot \chi^I) \cdot p_2 = \frac{\mathrm{m}_2}{2} , \quad g^2 \cdot (\chi_I \cdot \chi^I) \cdot p_3 = \frac{1}{4} .$$

В этом случае квантовый лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathrm{m}_2 \cdot \frac{A^I{}_\alpha \cdot A^\alpha{}_I}{2} - \frac{F^{IK}{}_\alpha \cdot F^\alpha{}_{KI}}{4} ,$$

Последние два слагаемых есть лагранжиан Прока для поля Янга-Миллса. Для электромагнитного поля необходимо положить

$$\mathrm{m}_2 = 0 , \quad F^\alpha{}_{KI} = F_{ki} ,$$

после чего получим лагранжиан для частиц в электромагнитном поле

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \frac{F^{ik} \cdot F_{ki}}{4} .$$

Таким образом, мы выполнили задачу, поставленную в Разделе I. Мы получили лагранжиан частиц и поля, включающий лагранжиан свободного поля, но ценой постулата о существовании промежуточных частиц второго рода. При этом мы подчинили появление лагранжиана свободного поля в лагранжиане промежуточной частицы и поля теоретической процедуре ковариантного дифференцирования, которая включается в общий контекст единой теории взаимодействия.

## VI. ВЫВОДЫ

- Из условия присутствия в лагранжиане частиц и поля лагранжиана свободного поля следует существование промежуточных частиц второго рода. Лагранжиан свободного поля появляется в результате процедуры ковариантного дифференцирования волновой функции этой частицы.

- Взаимодействие фундаментальных частиц и промежуточных частиц второго рода приводит к рождению промежуточных частиц первого рода.

- В отличие от фундаментальных частиц и промежуточных частиц первого рода промежуточные частицы второго рода не существуют в свободном состоянии.