Лекция 20. Дуализм: промежуточные частицы – калибровочное поле

А. А. Кецарис
(9 сентября 2006 г.)

В этой Лекции мы рассматриваем взаимосвязь двух способов описания взаимодействия зарядов: с помощью промежуточных частиц, с одной стороны, и калибровочного поля, с другой.

I. ВВЕДЕНИЕ

В Лекции 19 мы показали, что абсолютный дифференциал линейного преобразования вектора действия фундаментальной частицы содержит два слагаемых

$$D\mathsf{S} = d\mathsf{S} + \delta\mathsf{S}\,.$$

Дифференциал $d\mathsf{S}$ мы связываем с представлением о промежуточной частице, а дифференциал $\delta\mathsf{S}$ мы связываем с представлением о калибровочном поле. Вместе с тем оба дифференциала равноправно участвуют в формировании дифференциала $D\mathsf{S}$. Поэтому до тех пор, пока мы не акцентируем внимание на особенностях или различиях дифференциалов d и δ, понятия и явления, связанные с дифференциалами $d\mathsf{S}$ и $\delta\mathsf{S}$, могут быть изложены одинаковым образом. На этом основании у нас появляется возможность корректировать представление о промежуточной частице, опираясь на представление о калибровочном поле, и наоборот. Кроме того, у нас появляется возможность вывести волновое уравнение для фундаментальных и промежуточных частиц в калибровочном поле. Необходимые для этого уравнения структуры естественным образом объединяют уравнения структуры, рассмотренные в Лекциях 17 и 19, соответственно для фундаментальных и промежуточных частиц и для фундаментальных частиц и калибровочного поля.

II. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЧАСТИЦЫ В КАЛИБРОВОЧНОМ ПОЛЕ

В Лекции 17 мы отметили, что задача, с которой начиналась квантовая теория – описание перехода электрона с одной орбиты на другую, сопровождаемого излучением фотона – остается нерешенной. Для решения этой задачи необходимо записать систему волновых уравнений относительно волновой функции фундаментальной частицы (электрона) и волновой функции промежуточной частицы (фотона). Мы сформулировали требования, которым должна удовлетворять такая система.

1. Должны иметь место две системы дифференциальных уравнений.

   Первая относится к электрону и формулируется по отношению к его волновой функции.

   Вторая относится к фотону и формулируется по отношению к его волновой функции.

2. Системы уравнений должны быть взаимосвязаны. То есть, в первую систему уравнений должны входить параметры фотона, а во вторую систему уравнений должны входить параметры электрона.

3. Системы уравнений должны зависеть от внешнего поля. Динамическое изменение внешнего поля должно выводить систему уравнений из одного устойчивого состояния и через переходной процесс приводить к другому устойчивому состоянию.

4. В переходном процессе изменяются параметры электрона и фотона. В частности, переходной процесс должен описывать возникновение фотона, то есть, переход от состояния, в котором его волновая функция связана с электроном, к состоянию, когда волновая функция описывает свободный фотон, движущийся со скоростью света.

5. В частном случае первая система уравнений, относящаяся к электрону, должна сводиться к системе уравнений квантовой механики.

В этой же Лекции мы отметили, что алгебраический подход к действию элементарных частиц позволяет найти такую систему волновых уравнений. В Разделе IV.3 указанной Лекции мы вывели искомую систему уравнений. Однако, в ней отсутствует калибровочное поле (в вышеуказанной задаче – электрическое поле ядра атома).

В настоящем Разделе мы развиваем указанную концепцию квантовой теории с целью описать взаимодействие фундаментальной частицы, промежуточной частицы и калибровочного поля.

1. Алгебра действия фундаментальной и промежуточной частиц и калибровочного поля

Обобщая Раздел IV.1 Лекции 19, будем считать, что пространство действия $\mathbb{S}$ фундаментальной частицы, с одной стороны, и промежуточной частицы и калибровочного поля, с другой стороны, представляет собой сумму двух векторных пространств: действия фундаментальной частицы $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ и действия промежуточной частицы и калибровочного поля $\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$. Иначе говоря, вектор действия в этом случае представлен суммой двух составляющих

$$\boldsymbol{S} + \mathsf{S}\,.$$

Здесь вектор $\boldsymbol{S} \in \mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$, а вектор $\mathsf{S} \in \mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$.

Дифференциал этого вектора складывается из дифференциала $d\boldsymbol{S}$ и абсолютного дифференциала $D\mathsf{S}$:

$$d\boldsymbol{S} + D\mathsf{S} = d\boldsymbol{S} + d\mathsf{S} + \delta\mathsf{S}\,.$$

Приведенные дифференциалы выражаются через координаты следующим образом

$$\begin{gathered} d\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_K \cdot dS^K\,, \\ d\mathsf{S} = \mathfrak{I}^L{}_K \cdot d\mathsf{S}^K{}_L\,, \\ \delta\mathsf{S} = \mathfrak{I}^L{}_K \cdot \delta\mathsf{S}^K{}_L = \mathfrak{I}^L{}_K \cdot K^K{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_I \cdot dx^I\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь A – потенциал калибровочного поля, g_α – коэффициент связи (или калибровочный заряд). (Относительно последнего соотношения смотрите формулу 14 Лекции 19.)

Мы запишем дифференциал $\delta\mathsf{S}$ в инвариантном векторном виде

$$\delta\mathsf{S} = dx \circ A \cdot g\,. \tag{2}$$

Закон умножения векторов действия в $\mathbb{S}$ мы запишем так:

$$\boldsymbol{S} + \mathsf{S} = \frac{1}{S_0}\,(\boldsymbol{S}_1 + \mathsf{S}_1) \circ (\boldsymbol{S}_2 + \mathsf{S}_2)\,. \tag{3}$$

Здесь S_0 – постоянная, имеющая размерность действия.

Это умножение определено, если определено умножение пар векторов каждого вида. А эти произведения, в свою очередь, определены, если определены произведения соответствующих базисных векторов. В Лекции 17 мы записали законы умножения базисных векторов $\mathfrak{e}$ и $\mathfrak{I}$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI}\,, \\ \mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{I}^L{}_M\,, \\ \mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_M\,, \\ \mathfrak{I}^I{}_M \circ \mathfrak{e}_K = 0\,. \end{gathered} \tag{4}$$

В результате множество векторов действия $\mathbb{S}$ представляет собой алгебру.

2. Уравнения структуры алгебры действия фундаментальной, промежуточной частиц и калибровочного поля

Как и для всякой алгебры, для алгебры действия $\mathbb{S}$ имеет место уравнение структуры

$$d_2 d_1(\boldsymbol{S} + \mathsf{S}) = \frac{1}{S_0} \cdot d_1(\boldsymbol{S} + \mathsf{S}) \circ d_2(\boldsymbol{S} + \mathsf{S})\,. \tag{5}$$

Для того, чтобы получить из этого уравнения уравнение структуры алгебры действия фундаментальной и промежуточной частиц в калибровочном поле, необходимо рассмотреть проекцию этого уравнения на пространство действия фундаментальной частицы $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ и пространство действия промежуточной частицы и калибровочного поля $\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$. В результате получим

$$\begin{gathered} d_2 d_1 \boldsymbol{S} = \tfrac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ d_2(\boldsymbol{S} + \mathsf{S})\,, \\ d_2 d_1 \mathsf{S} = \tfrac{1}{S_0} \cdot d_1 \mathsf{S} \circ d_2 \mathsf{S}\,. \end{gathered} \tag{6}$$

И далее необходимо учесть, что дифференциал действия промежуточной частицы и калибровочного поля является абсолютным, поэтому уравнение (6) нужно переписать так

$$\begin{gathered} d_2 d_1 \boldsymbol{S} = \tfrac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ (d_2 \boldsymbol{S} + D_2 \mathsf{S})\,, \\ d_2 D_1 \mathsf{S} = \tfrac{1}{S_0} \cdot D_1 \mathsf{S} \circ D_2 \mathsf{S}\,. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь

$$D_1 \mathsf{S} = d_1 \mathsf{S} + \delta_1 \mathsf{S}\,, \quad D_2 \mathsf{S} = d_2 \mathsf{S} + \delta_2 \mathsf{S}\,.$$

Подставим эти выражения в (7), получим

$$\begin{gathered} d_2 d_1 \boldsymbol{S} = \tfrac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ (d_2 \boldsymbol{S} + d_2 \mathsf{S} + \delta_2 \mathsf{S})\,, \\ d_2(d_1 \mathsf{S} + \delta_1 \mathsf{S}) = \tfrac{1}{S_0} \cdot (d_1 \mathsf{S} + \delta_1 \mathsf{S}) \circ (d_2 \mathsf{S} + \delta_2 \mathsf{S})\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Переход от уравнений (6) к уравненям (8) удобно представлять как выполнение замены

$$d\mathsf{S} \to d\mathsf{S} + dx \circ A \cdot g\,,$$

или для координат

$$d\mathsf{S}^K{}_L \to d\mathsf{S}^K{}_L + K^K{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_I \cdot dx^I\,.$$

Преобразуем уравнения (8), учитывая выражение (2) для дифференциала $\delta\mathsf{S}$

$$\begin{aligned} &d_2 d_1 \boldsymbol{S} = \tfrac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ \left(d_2 \boldsymbol{S} + d_2 \mathsf{S} + (d_2 x \circ A \cdot g)\right), \\ &d_2 (d_1 \mathsf{S} + d_1 x \circ A \cdot g) = \tfrac{1}{S_0} \cdot (d_1 \mathsf{S} + d_1 x \circ A \cdot g) \circ (d_2 \mathsf{S} + d_2 x \circ A \cdot g) \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Или

$$\begin{aligned} &d_2 d_1 \boldsymbol{S} = \tfrac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ d_2 \boldsymbol{S} + \tfrac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ d_2 \mathsf{S} + \tfrac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ (d_2 x \circ A \cdot g) \,, \\ &d_2 d_1 \mathsf{S} + d_2 d_1 x \circ A \cdot g + d_1 x \circ d_2 A \cdot g = \\ &\qquad \tfrac{1}{S_0} \cdot \big(d_1 \mathsf{S} \circ d_2 \mathsf{S} + (d_1 x \circ A \cdot g) \circ d_2 \mathsf{S}\big) + \tfrac{1}{S_0} \cdot \big(d_1 \mathsf{S} \circ (d_2 x \circ A \cdot g) + (d_1 x \circ A \cdot g) \circ (d_2 x \circ A \cdot g)\big) \,. \end{aligned} \tag{10}$$

Эти уравнения представляют собой уравнения структуры алгебры действия фундаментальной, промежуточной частиц и калибровочного поля в инвариантном векторном виде. Присутствие множителя $d_2 d_1 x$ во втором слагаемом в левой части второго уравнения говорит о том, что полученные уравнения структуры должны быть дополнены уравнениями структуры пространства–времени и только с ними составят замкнутую систему уравнений.

Приведем уравнения структуры пространства–времени $\mathbb{X}$, которые мы получили в Разделе 8 Лекции VIII в инвариантной векторной форме

$$d_2 d_1 x = \frac{1}{R} \cdot d_1 x \circ d_2 x \,. \tag{11}$$

и для координат векторов

$$d_2 d_1 x^M = \frac{1}{R} \cdot {}^{+}C^M{}_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K \,.$$

Здесь R – постоянная, имеющая размерность длины, а ${}^{+}C^M{}_{KI}$ – постоянная структуры алгебры $\mathbb{X}$. После подстановки $d_2 d_1 x$ из из уравнений структуры (11) и добавления к рассматриваемой системе самих уравнений структуры пространства–времени, окончательно получим

$$\begin{aligned} &d_2 d_1 \boldsymbol{S} = \tfrac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ d_2 \boldsymbol{S} + \tfrac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ d_2 \mathsf{S} + \tfrac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ (d_2 x \circ A \cdot g) \,, \\ &d_2 d_1 \mathsf{S} + \tfrac{1}{R} \cdot (d_1 x \circ d_2 x) \circ A \cdot g + d_1 x \circ d_2 A \cdot g = \\ &\qquad \tfrac{1}{S_0} \cdot \big(d_1 \mathsf{S} \circ d_2 \mathsf{S} + (d_1 x \circ A \cdot g) \circ d_2 \mathsf{S}\big) + \tfrac{1}{S_0} \cdot \big(d_1 \mathsf{S} \circ (d_2 x \circ A \cdot g) + (d_1 x \circ A \cdot g) \circ (d_2 x \circ A \cdot g)\big) \,, \\ &d_2 d_1 x = \tfrac{1}{R} \cdot d_1 x \circ d_2 x \,. \end{aligned} \tag{12}$$

Запишем уравнения структуры через координаты векторов. Для этого подставим в (12) выражения векторов через базисные векторы и координаты (1)

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}_L \cdot d_2 d_1 S^L = \tfrac{1}{S_0} \cdot (\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I)\, d_1 S^K\, d_2 S^I + \tfrac{1}{S_0} \cdot (\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_L)\, d_1 S^K\, d_2 S^L{}_I + \tfrac{1}{S_0} \cdot (\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_L)\, d_1 S^K \cdot (K^L{}_{I\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_2 x^M) \,, \\ &\mathfrak{I}^K{}_I \cdot \big(d_2 d_1 S^I{}_K + K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_2 d_1 x^M + K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot d_2 A^\alpha{}_M \cdot d_1 x^M\big) = \\ &\quad \tfrac{1}{S_0} \cdot (\mathfrak{I}^K{}_N \circ \mathfrak{I}^L{}_I) \cdot \big(d_1 S^N{}_K \cdot d_2 S^I{}_L + (K^N{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_1 x^M) \cdot d_2 S^I{}_L\big) + \\ &\quad \tfrac{1}{S_0} \cdot (\mathfrak{I}^K{}_N \circ \mathfrak{I}^L{}_I) \cdot \big(d_1 S^N{}_K \cdot (K^I{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_2 x^M) + (K^N{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_1 x^M) \cdot (K^I{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_N \cdot d_2 x^N)\big) \\ &d_2 d_1 x^M = \tfrac{1}{R} \cdot {}^{+}C^M{}_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K \,. \end{aligned} \tag{13}$$

Далее воспользуемся законом умножения базисных векторов (4)

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}_L \cdot d_2 d_1 S^L = \tfrac{1}{S_0} \cdot (\mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI})\, d_1 S^K\, d_2 S^I + \tfrac{1}{S_0} \cdot (\delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_L)\, d_1 S^K\, d_2 S^L{}_I + \tfrac{1}{S_0} \cdot (\delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_L)\, d_1 S^K \cdot (K^L{}_{I\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot dx^M) \,, \\ &\mathfrak{I}^K{}_I \cdot \big(d_2 d_1 S^I{}_K + K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_2 d_1 x^M + K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot d_2 A^\alpha{}_M \cdot d_1 x^M\big) = \\ &\quad \tfrac{1}{S_0} \cdot (\delta^L{}_N \cdot \mathfrak{I}^K{}_I) \cdot \big(d_1 S^N{}_K \cdot d_2 S^I{}_L + (K^N{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_1 x^M) \cdot d_2 S^I{}_L\big) + \\ &\quad \tfrac{1}{S_0} \cdot (\delta^L{}_N \cdot \mathfrak{I}^K{}_I) \cdot \big(d_1 S^N{}_K \cdot (K^I{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_2 x^M) + (K^N{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_1 x^M) \cdot (K^I{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_N \cdot d_2 x^N)\big) \\ &d_2 d_1 x^M = \tfrac{1}{R} \cdot {}^{+}C^M{}_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} &d_2 d_1 S^L = \tfrac{1}{S_0} \cdot C^L{}_{KI}\, d_1 S^K\, d_2 S^I + \tfrac{1}{S_0} \cdot d_2 S^L{}_K \cdot d_1 S^K + \tfrac{1}{S_0} \cdot (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot dx^M) \cdot d_1 S^K \,, \\ &d_2 d_1 S^I{}_K + K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_2 d_1 x^M + K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot d_2 A^\alpha{}_M \cdot d_1 x^M = \\ &\qquad \tfrac{1}{S_0} \cdot \big(d_2 S^I{}_L \cdot d_1 S^L{}_K + d_2 S^I{}_L \cdot (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_1 x^M)\big) + \\ &\qquad \tfrac{1}{S_0} \cdot \big((K^I{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_2 x^M) \cdot d_1 S^L{}_K + (K^I{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_N \cdot d_2 x^N) \cdot (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_1 x^M)\big) \\ &d_2 d_1 x^M = \tfrac{1}{R} \cdot {}^{+}C^M{}_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K \,. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставим в это выражение $d_2 d_1 x^M$ из уравнения структуры пространства–времени

$$\begin{aligned}
&d_2 d_1 S^L = \tfrac{1}{S_0} \cdot C^L{}_{KI}\, d_2 S^I\, d_1 S^K + \tfrac{1}{S_0} \cdot d_2 S^L{}_K \cdot d_1 S^K + \tfrac{1}{S_0} \cdot (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot dx^M) \cdot d_1 S^K\,,\\
&d_2 d_1 S^I{}_K + \tfrac{1}{R} \cdot K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_L \cdot {}^+C^L{}_{NM} \cdot d_2 x^M \cdot d_1 x^N + K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot d_2 A^\alpha{}_M \cdot d_1 x^M =\\
&\qquad \tfrac{1}{S_0} \cdot \big(d_2 S^I{}_L \cdot d_1 S^L{}_K + d_2 S^I{}_L \cdot (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_1 x^M)\big) +\\
&\qquad \tfrac{1}{S_0} \cdot \big((K^I{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot d_2 x^M) \cdot d_1 S^L{}_K + (K^I{}_{L\beta} \cdot g_\beta \cdot A^\beta{}_M \cdot d_2 x^M) \cdot (K^L{}_{K\gamma} \cdot g_\gamma \cdot A^\gamma{}_N \cdot d_1 x^N)\big)\,,\\
&d_2 d_1 x^M = \tfrac{1}{R} \cdot {}^+C^M{}_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

Эти уравнения представляют собой уравнения структуры алгебры действия фундаментальной, промежуточной частиц и калибровочного поля в координатной форме.

3. Квантовые постулаты механики фундаментальной и промежуточной частиц в калибровочном поле

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые постулаты, на которых строится квантовая механика фундаментальной и промежуточной частиц в калибровочном поле. Мы перейдем к более привычной записи квантовых постулатов, если введем переобозначения

$$d_1 \boldsymbol{S} = \psi\,, \quad d_1 \mathsf{S} = \Psi\,, \quad d_1 x = \chi\,, \quad d_2 = d\,.$$

Тогда вместо (12) получим квантовые постулаты механики фундаментальной и промежуточной частиц в калибровочном поле

$$\begin{aligned}
&d\psi = \tfrac{1}{S_0} \cdot \psi \circ d\boldsymbol{S} + \tfrac{1}{S_0} \cdot \psi \circ d\mathsf{S} + \tfrac{1}{S_0} \cdot \psi \circ (dx \circ A \cdot g)\,,\\
&d\Psi + \tfrac{1}{R} \cdot (\chi \circ dx) \circ A \cdot g + \chi \circ dA \cdot g =\\
&\qquad \tfrac{1}{S_0} \cdot \big(\Psi \circ d\mathsf{S} + (\chi \circ A \cdot g) \circ d\mathsf{S}\big) + \tfrac{1}{S_0} \cdot \big(\Psi \circ (dx \circ A \cdot g) + (\chi \circ A \cdot g) \circ (dx \circ A \cdot g)\big)\,,\\
&d\chi = \tfrac{1}{R} \cdot \chi \circ dx\,.
\end{aligned} \tag{17}$$

Квантовые постулаты в координатной форме получим из (16), если учтем, что

$$d_1 S^I = \psi^I\,, \quad d_1 S^I{}_K = \psi^I{}_K\,, \quad d_1 x^I = \chi^I\,, \quad d_2 = d\,.$$

$$\begin{aligned}
&d\psi^L = \tfrac{1}{S_0} \cdot C^L{}_{KI}\, dS^I\, \psi^K + \tfrac{1}{S_0} \cdot dS^L{}_K \cdot \psi^K + \tfrac{1}{S_0} \cdot (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot dx^M) \cdot \psi^K\,,\\
&d\psi^I{}_K + \tfrac{1}{R} \cdot K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_L \cdot {}^+C^L{}_{NM} \cdot dx^M \cdot \chi^N + K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot dA^\alpha{}_N \cdot \chi^N =\\
&\qquad \tfrac{1}{S_0} \cdot \big(dS^I{}_L \cdot \psi^L{}_K + dS^I{}_L \cdot (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_N \cdot \chi^N)\big) +\\
&\qquad \tfrac{1}{S_0} \cdot \big((K^I{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot dx^M) \cdot \psi^L{}_K + (K^I{}_{L\beta} \cdot g_\beta \cdot A^\beta{}_M \cdot dx^M) \cdot (K^L{}_{K\gamma} \cdot g_\gamma \cdot A^\gamma{}_N \cdot \chi^N)\big)\,,\\
&d\chi^M = \tfrac{1}{R} \cdot {}^+C^M{}_{KI} \cdot dx^I \cdot \chi^K\,.
\end{aligned} \tag{18}$$

Далее выполним следующие преобразования: учтем, что $dA^\alpha{}_N = \partial_M (A^\alpha{}_N) \cdot dx^M$, сгруппируем слагаемые так, как это делается при записи уравнения Дирака и слагаемые, содержащие волновую функцию пространства–времени χ, соберем в правой части уравнения

$$\begin{aligned}
&d\psi^L - \tfrac{1}{S_0} \cdot (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot dx^M) \cdot \psi^K = \tfrac{1}{S_0} \cdot C^L{}_{KI}\, dS^I\, \psi^K + \tfrac{1}{S_0} \cdot dS^L{}_K \cdot \psi^K\,,\\
&d\psi^I{}_K - \tfrac{1}{S_0} \cdot (K^I{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot dx^M) \cdot \psi^L{}_K = \tfrac{1}{S_0} \cdot dS^I{}_L \cdot \psi^L{}_K + \tfrac{1}{S_0} \cdot dS^I{}_L \cdot (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_N \cdot \chi^N) -\\
&\qquad \big[K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot \partial_M (A^\alpha{}_N) - \tfrac{1}{S_0} \cdot (K^I{}_{L\beta} \cdot g_\beta \cdot A^\beta{}_M) \cdot (K^L{}_{K\gamma} \cdot g_\gamma \cdot A^\gamma{}_N) + \tfrac{1}{R} \cdot K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_L \cdot {}^+C^L{}_{NM}\big] \cdot dx^M \cdot \chi^N\,,\\
&d\chi^M = \tfrac{1}{R} \cdot {}^+C^M{}_{KI} \cdot dx^I \cdot \chi^K\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

4. Тензор Янга–Миллса

Рассмотрим выражение в квадратных скобках в (19)

$$K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot \partial_M A^\alpha{}_N - \frac{1}{S_0} \cdot (K^I{}_{L\beta} \cdot g_\beta \cdot A^\beta{}_M) \cdot (K^L{}_{K\gamma} \cdot g_\gamma \cdot A^\gamma{}_N) + \frac{1}{R} \cdot K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_L \cdot {}^+C^L{}_{NM}$$

Далее воспользуемся соотношением, которое мы привели в Разделе II.3 Лекции 19

$$K^I{}_{L\beta} \cdot K^L{}_{K\gamma} = K^I{}_{K\alpha} \cdot C^\alpha{}_{\gamma\beta}$$

и запишем указанное выражение, предполагая, что калибровочные заряды одинаковы, то есть $g_\alpha = g_\beta = g_\gamma = g$

$$K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot \left(\partial_M A^\alpha{}_N - \frac{g}{S_0} \cdot C^\alpha{}_{\gamma\beta} \cdot A^\beta{}_M \cdot A^\gamma{}_N + \frac{1}{R} \cdot A^\alpha{}_L \cdot {}^+C^L{}_{NM}\right).$$

Выражение в скобках обозначим $A^\alpha{}_{NM}$:

$$A^\alpha{}_{MN} = \partial_M A^\alpha{}_N - \frac{g}{S_0} \cdot C^\alpha{}_{\gamma\beta} \cdot A^\beta{}_M \cdot A^\gamma{}_N + \frac{1}{R} \cdot A^\alpha{}_L \cdot {}^+C^L{}_{NM}.$$

И далее запишем величину $A^\alpha{}_{MN}$ в виде двух слагаемых, одно из которых симметрично, а другое антисимметрично по индексам M и N:

$$A^\alpha{}_{MN} = A^\alpha{}_{\langle MN\rangle} + A^\alpha{}_{[MN]},$$

затем положим $A^\alpha{}_{\langle MN\rangle} = 0$, а величину $A^\alpha{}_{[MN]}$ переобозначим $F^\alpha{}_{MN} = A^\alpha{}_{[MN]}$. Тензор

$$F^\alpha{}_{MN} = \partial_{[M} A^\alpha{}_{N]} - \frac{g}{S_0} \cdot C^\alpha{}_{\gamma\beta} \cdot A^\beta{}_{[M} \cdot A^\gamma{}_{N]} + \frac{1}{R} \cdot A^\alpha{}_L \cdot {}^+C^L{}_{[NM]}$$

назовем обобщенным тензором Янга–Миллса. Обобщение заключается в том, что этот тензор распространен на пространство–время $\mathbb{X}$. В том случае, когда пространство–время $\mathbb{X}$ сводится к пространству–времени СТО X, имеем ${}^+C^L{}_{[NM]} = 0$ и обобщенный тензор Янга–Миллса сводится к общеизвестному

$$F^\alpha{}_{mn} = \partial_{[m} A^\alpha{}_{n]} - \frac{g}{S_0} \cdot C^\alpha{}_{\gamma\beta} \cdot A^\beta{}_{[m} \cdot A^\gamma{}_{n]}.$$

Здесь индексы m и n нумеруют векторы в пространстве–времени СТО X.

Перепишем квантовые постулаты, используя тензор Янга–Миллса,

$$\begin{aligned}
&d\psi^L - \tfrac{1}{S_0} \cdot (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot dx^M) \cdot \psi^K = \tfrac{1}{S_0} \cdot C^L{}_{KI}\, dS^I\, \psi^K + \tfrac{1}{S_0} \cdot dS^L{}_K \cdot \psi^K, \\
&d\psi^I{}_K - \tfrac{1}{S_0} \cdot (K^I{}_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M \cdot dx^M) \cdot \psi^L{}_K = \\
&\qquad \tfrac{1}{S_0} \cdot dS^I{}_L \cdot \left(\psi^L{}_K + (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_N \cdot \chi^N)\right) - K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot F^\alpha{}_{MN} \cdot dx^M \cdot \chi^N, \\
&d\chi^M = \tfrac{1}{R} \cdot {}^+C^M{}_{KI} \cdot dx^I \cdot \chi^K.
\end{aligned} \tag{20}$$

Приведенные уравнения есть квантовые постулаты в дифференциалах. Перейдем от этих уравнений к квантовым постулатам в частных производных. При этом нужно учесть, что

$$dS^I = p^I{}_M \cdot dx^M, \quad dS^L{}_K = p^I{}_{LM} \cdot dx^M,$$

где

$p^I{}_M = \partial_M S^I$ – координаты импульса фундаментальной частицы,
$p^I{}_{LM} = \partial_M S^I{}_L$ – координаты импульса промежуточной частицы.

Получим

$$\begin{aligned}
&\partial_M \psi^L - \tfrac{1}{S_0} \cdot (K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M) \cdot \psi^K = \tfrac{1}{S_0} \cdot C^L{}_{KI}\, p^I{}_M\, \psi^K + \tfrac{1}{S_0} \cdot p^L{}_{KM} \cdot \psi^K, \\
&\partial_M \psi^L{}_K - \tfrac{1}{S_0} \cdot (K^L{}_{I\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_M) \cdot \psi^I{}_K = \\
&\qquad \tfrac{1}{S_0} \cdot p^L{}_{IM} \cdot \left(\psi^I{}_K + (K^I{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha{}_N \cdot \chi^N)\right) - K^L{}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot F^\alpha{}_{MN} \cdot \chi^N, \\
&\partial_M \chi^L = \tfrac{1}{R} \cdot {}^+C^L{}_{KM} \cdot \chi^K.
\end{aligned} \tag{21}$$

5. Волновое уравнение для фундаментальной и промежуточной частиц в калибровочном поле

Для вывода волнового уравнения для фундаментальной и промежуточной частиц в калибровочном поле воспользуемся квантовыми постулатами (21). Умножим первое уравнение на структурные константы ${C^{MP}}_L$, а второе уравнение на структурные константы ${C^{MK}}_P$, выполнив соответствующие суммирования.* Получим

$$\begin{aligned}
&{C^{MP}}_L\cdot\left(\partial_M\psi^L-\tfrac{1}{S_0}\cdot({K^L}_{K\alpha}\cdot g_\alpha\cdot {A^\alpha}_M)\cdot\psi^K\right)=\tfrac{1}{S_0}\cdot{C^{MP}}_L\cdot\left({C^L}_{KI}\cdot {p^I}_M+{p^L}_{KM}\right)\cdot\psi^K\,,\\
&{C^{MK}}_P\cdot\left(\partial_M{\psi^L}_K-\tfrac{1}{S_0}\cdot({K^L}_{I\alpha}\cdot g_\alpha\cdot {A^\alpha}_M)\cdot{\psi^I}_K\right)=\\
&\qquad\tfrac{1}{S_0}\cdot{C^{MP}}_L\cdot{p^L}_{IM}\cdot\left({\psi^I}_K+({K^I}_{K\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{A^\alpha}_N\cdot\chi^N)\right)-{C^{MK}}_P\cdot{K^L}_{K\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{F^\alpha}_{MN}\cdot\chi^N\,,\\
&\partial_M\chi^L=\tfrac{1}{R}\cdot{}^+{C^L}_{KM}\cdot\chi^K\,.
\end{aligned}\tag{22}$$

Эта система уравнений и есть *волновое уравнение для фундаментальной и промежуточной частиц в калибровочном поле.*

Нам представляется интересным ввести следующие величины

$$\begin{aligned}
{A^L}_{KM}&={K^L}_{K\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{A^\alpha}_M \quad &&\text{– импульс калибровочного поля,}\\
{F^L}_{KMN}&={K^L}_{K\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{F^\alpha}_{MN} \quad &&\text{– сила калибровочного поля.}
\end{aligned}$$

Для указанных определений $\quad {F^L}_{K[NM]}=\partial_{[M}{A^L}_{|K|N]}-\frac{1}{S_0}\cdot{A^L}_{P[M}\cdot{A^P}_{|K|N]}+\frac{1}{R}\cdot{A^L}_{KP}\cdot{}^+{C^P}_{[NM]}$.

Тогда запись волнового уравнения становится компактной и прозрачной

$$\begin{aligned}
&{C^{MP}}_L\cdot\left(\partial_M\psi^L-\tfrac{1}{S_0}\cdot{A^L}_{KM}\cdot\psi^K\right)=\tfrac{1}{S_0}\cdot{C^{MP}}_L\cdot\left({C^L}_{KI}\cdot{p^I}_M+{p^L}_{KM}\right)\cdot\psi^K\,,\\
&{C^{MK}}_P\cdot\left(\partial_M{\psi^L}_K-\tfrac{1}{S_0}\cdot{A^L}_{IM}\cdot{\psi^I}_K\right)=\tfrac{1}{S_0}\cdot{C^{MK}}_P\cdot{p^L}_{IM}\cdot\left({\psi^I}_K+{A^I}_{KN}\cdot\chi^N\right)-{C^{MK}}_P\cdot{F^L}_{KMN}\cdot\chi^N\,,\\
&\partial_M\chi^L=\tfrac{1}{R}\cdot{}^+{C^L}_{KM}\cdot\chi^K\,.
\end{aligned}\tag{23}$$

1. Волновое уравнение для лептонов и промежуточных частиц в калибровочном поле

Обратимся к волновому уравнению для лептонов и промежуточных частиц в калибровочном поле. Для этого в волновом уравнении (23) перейдем от пространства действия $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ к пространству действия лептонов $\mathbb{C}_4$ и к группе поворотов в этом пространстве (см. Раздел 4.3 Лекции 19), положим $S_0=\hbar$, а матрицы ${K^I}_{L\alpha}$ отождествим со структурными матрицами алгебры Клиффорда. Получим

$$\begin{aligned}
&{C^{MP}}_L\cdot\left(\partial_M\psi^L-\tfrac{1}{\hbar}\cdot({C^L}_{K\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{A^\alpha}_M)\cdot\psi^K\right)=\tfrac{1}{\hbar}\cdot{C^{MP}}_L\cdot\left({C^L}_{KI}\cdot{p^I}_M+{p^L}_{KM}\right)\cdot\psi^K\,,\\
&{C^{MK}}_P\cdot\left(\partial_M{\psi^L}_K-\tfrac{1}{\hbar}\cdot({C^L}_{I\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{A^\alpha}_M)\cdot{\psi^I}_K\right)=\\
&\tfrac{1}{\hbar}\cdot{C^{MP}}_L\cdot{p^L}_{IM}\cdot\left({\psi^I}_K+({C^I}_{K\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{A^\alpha}_N\cdot\chi^N)\right)-{C^{MK}}_P\cdot{C^L}_{K\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{F^\alpha}_{MN}\cdot\chi^N\,,\\
&\partial_M\chi^L=\tfrac{1}{R}\cdot{}^+{C^L}_{KM}\cdot\chi^K\,,
\end{aligned}\tag{24}$$

где

$${F^\alpha}_{MN}=\partial_{[M}({A^\alpha}_{N]})-\frac{g}{\hbar}\cdot{C^\alpha}_{\gamma\beta}\cdot{A^\beta}_{[M}\cdot{A^\gamma}_{N]}+\frac{1}{R}\cdot{A^\alpha}_L\cdot{}^+{C^L}_{[NM]}$$

обобщенный тензор Янга–Миллса.

Далее в соответствии с Разделом II Лекции 9 положим, что обобщенный импульс ${p^I}_M$ имеет только две компоненты

$${p^0}_0=\partial_0S^0=-\frac{\mathrm{m}\,c}{2}\,,\qquad\qquad {p^{34}}_0=\partial_0S^{34}=-\frac{\mathrm{m}\,c}{2}\,.$$

Если мы подставим введенные величины в уравнение (24), то получим волновое уравнение для лептонов в калибровочном поле в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
&{C^{MP}}_L\cdot\left(\partial_M\psi^L-\tfrac{1}{\hbar}\cdot({C^L}_{K\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{A^\alpha}_M)\cdot\psi^K\right)=-\tfrac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\cdot({C^P}_{K0}+{C^P}_{K34})\cdot\psi^K+\tfrac{1}{\hbar}\cdot{C^{MP}}_L\cdot{p^L}_{KM}\cdot\psi^K\,,\\
&{C^{MK}}_P\cdot\left(\partial_M{\psi^L}_K-\tfrac{1}{\hbar}\cdot({C^L}_{I\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{A^\alpha}_M)\cdot{\psi^I}_K\right)=\\
&\qquad\tfrac{1}{\hbar}\cdot{C^{MP}}_L\cdot{p^L}_{IM}\cdot\left({\psi^I}_K+({C^I}_{K\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{A^\alpha}_N\cdot\chi^N)\right)-{C^{MK}}_P\cdot{C^L}_{K\alpha}\cdot g_\alpha\cdot{F^\alpha}_{MN}\cdot\chi^N\,,\\
&\partial_M\chi^L=\tfrac{1}{R}\cdot{}^+{C^L}_{KM}\cdot\chi^K\,.
\end{aligned}\tag{25}$$

---

*Обоснование умножений такого рода приведем в Разделе III.2

1. Фундаментальная частица в калибровочном поле.

В этом случае надо положить волновую функцию и импульс промежуточной частицы равными нулю ${\psi^I}_K = 0$, ${p^I}_{LM} = 0$. Тогда система уравнений сводится к уравнению для фундаментальной частицы и алгебраическому соотношению

$$\begin{aligned}&{C^{MP}}_I \cdot \left(\partial_M \psi^I + \tfrac{g}{\hbar} \cdot {A^I}_{LM} \cdot \psi^L\right) = \tfrac{1}{\hbar} \cdot {C^{MP}}_I \cdot \left({C^I}_{LR} \cdot {p^R}_M\right) \cdot \psi^L \,.\\&{C^L}_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot {F^\alpha}_{MN} \cdot \chi^N = 0\,,\end{aligned} \tag{26}$$

2. Промежуточная частица в калибровочном поле.

В этом случае надо положить волновую функцию и импульс фундаментальной частицы равными нулю $\psi^I = 0$, ${p^I}_L = 0$. Тогда система уравнений сводится к уравнению для промежуточной частицы

$${C^{MP}}_I \cdot \left(\partial_M {\psi^I}_K + \tfrac{g}{\hbar} \cdot {A^I}_{LM} \cdot {\psi^L}_K\right) = \tfrac{1}{\hbar} \cdot {C^{MP}}_I \cdot {p^I}_{LM} \cdot {\psi^L}_K \,. \tag{27}$$

3. Условие квантования калибровочного заряда.

Из квантовых постулатов (20), в частности, следует

$$\frac{\partial {\psi^I}_K}{\partial \varphi^\alpha} = \frac{g}{\hbar} \cdot {K^I}_{L\alpha} \cdot {\psi^L}_K \,.$$

В частности, для электрической калибровочной группы имеем $g = -e$, ${K^I}_{L\alpha} = i \cdot {\delta^I}_L$ и условие квантования электрического заряда выглядит так

$$\frac{\partial {\psi^I}_K}{\partial \varphi} = -i \cdot \frac{e}{\hbar} \cdot {\psi^I}_K \,.$$

3. Свободная промежуточная частица.

В этом случае надо положить потенциал калибровочного поля ${A^I}_{LM} = 0$. Тогда получим уравнения для свободной промежуточной частицы

$${C^{MP}}_I \cdot \partial_M {\psi^I}_K = \tfrac{1}{\hbar} \cdot {C^{MP}}_I \cdot {p^I}_{LM} \cdot {\psi^L}_K \,. \tag{28}$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial^2 {\psi^I}_K}{\partial x_M \partial x^M} = \frac{1}{\hbar^2} \cdot ({p^I}_{LM} \cdot {{p^L}_P}^M) \cdot {\psi^P}_K \,.$$

Учитывая, что

$${p^I}_{LM} \cdot {{p^L}_P}^M = \mathrm{m}^2 \cdot c^2 \cdot {\delta^I}_P \,,$$

получим обобщенное уравнение Клейна–Гордона для свободных промежуточных частиц

$$\frac{\partial^2 {\psi^I}_K}{\partial x_M \partial x^M} = \frac{\mathrm{m}^2 \cdot c^2}{\hbar^2} \cdot {\psi^I}_K \,.$$

6. Инвариантная форма волновых уравнений

Начнем с того, что приведем уравнение Дирака. В принятых нами обозначениях (смотрите Раздел I Лекции 9) оно имеет вид

$$\left(C^{iA_1}{}_{B_1}\,\partial_i + \frac{\mathrm{m}_e\,c}{\hbar}\,C^{0A_1}{}_{B_1}\right)\cdot\psi^{B_1} = 0\,.$$

Здесь по индексам i и B_1 выполняется суммирование. Это уравнение было нами обобщено и записано в следующем виде

$$C^{MN}{}_L\cdot\partial_M\psi^L(x) = \frac{1}{\hbar}\,C^{MN}{}_L\cdot C^L{}_{KI}\cdot p^I{}_M\cdot\psi^K\,. \tag{29}$$

(По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.)

Сложная и необъяснимая комбинация индексов содержится в первом слагаемом

$$C^{MP}{}_I\cdot\partial_M\psi^I\,.$$

Ситуация немного проясняется, если учесть, что матрицы $C^{MP}{}_I$ представляют не что иное, как ковариантные базисные векторы пространства-времени (смотрите Лекцию 3 Раздел III). Таким образом оператор дифференцирования

$$C^{MP}{}_I\cdot\partial_M$$

есть представление оператора дифференцирования *набла*

$$\nabla = \mathfrak{E}^M\cdot\partial_M\,.$$

Однако свертка по индексу I остается непонятной. Попытаемся разобраться в этом вопросе.

Ранее (смотрите Лекцию 16 Разделы IV и V) мы ввели базисные векторы $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{e}$, которые отличаются только тем, что участвуют в произведениях разного направления – правого и левого, а по сути это одни и те же векторы. Исходный вектор мы снабжали индексом I, а тот вектор, который на него умножали, снабжали индексом K. И, таким образом, мы различали умножение справа и умножение слева. Для того, чтобы ярче подчеркнуть разницу в этих произведениях, мы использовали разные обозначения базисных векторов для этих двух случаев. Здесь мы будем пользоваться одним обозначением базисных векторов и запишем эти умножения следующим образом: умножение справа

$$\mathfrak{e}_I\circ\mathfrak{e}_K = \mathfrak{e}_L\cdot C^L{}_{KI} \tag{30}$$

и умножение слева

$$\mathfrak{e}_K\circ\mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L\cdot{}^+C^L{}_{KI}\,. \tag{31}$$

Но если в (31) поменять обозначения индексов, то мы переходим от умножения слева к умножению справа

$$\mathfrak{e}_I\circ\mathfrak{e}_K = \mathfrak{e}_L\cdot{}^+C^L{}_{IK}\,.$$

Так как это соотношение и (30) это одно и тоже соотношение, то отсюда следует

$${}^+C^L{}_{IK} = C^L{}_{KI}\,.$$

Также для ковариантных векторов мы различали умножение справа

$$\mathfrak{E}^I\circ\mathfrak{E}^K = C^{IK}{}_L\cdot\mathfrak{E}^L \tag{32}$$

и умножение слева

$$\mathfrak{E}^K\circ\mathfrak{E}^I = {}^+C^{IK}{}_L\cdot\mathfrak{E}^L\,. \tag{33}$$

Но если здесь поменять обозначения индексов, то мы переходим от умножения слева к умножению справа

$$\mathfrak{E}^I\circ\mathfrak{E}^K = {}^+C^{KI}{}_L\cdot\mathfrak{E}^L\,.$$

Из сравнения с (32), следует

$${}^+C^{KI}{}_L = C^{IK}{}_L\,. \tag{34}$$

Теперь поднимем индекс K в (31), получим

$$\mathfrak{E}^K\circ\mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L\cdot{}^+C^{LK}{}_I$$

и с использованием (34)

$$\mathfrak{E}^K\circ\mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L\cdot C^{KL}{}_I\,. \tag{35}$$

После того, как мы привели вышеуказанные выкладки, рассмотрим произведение

$$\nabla\circ\psi\,,$$

где $\psi = \mathfrak{e}_I\cdot\psi^I$ – вектор волновой функции. Имеем с учетом (35)

$$\nabla\circ\psi = (\mathfrak{E}^K\circ\mathfrak{e}_I)\cdot\partial_K\psi^I = \mathfrak{e}_L\cdot C^{KL}{}_I\cdot\partial_K\psi^I\,.$$

Таким образом, выражения $C^{KL}{}_I\cdot\partial_K\psi^I$ есть проекции (координаты) вектора $\nabla\circ\psi$ на базисные векторы $\mathfrak{e}_L$.

Теперь попытаемся раскрыть смысл выражения

$$C^{KP}{}_L\cdot\partial_K\psi^I{}_P\,,$$

которое мы получили, переходя от квантовых постулатов к волновому уравнению для промежуточной частицы. Рассмотрим произведение

$$\nabla\circ\Psi\,,$$

где $\Psi = \mathfrak{I}^P{}_I\cdot\psi^I{}_P$ – вектор волновой функции промежуточной частицы. Имеем

$$\begin{aligned}\nabla\circ\Psi &= (\mathfrak{E}^K\circ\mathfrak{I}^P{}_I)\cdot\partial_K\psi^I{}_P = (\mathfrak{E}^K\circ\mathfrak{E}^P)\circ\mathfrak{e}_I\cdot\partial_K\psi^I{}_P\\ &= C^{KP}{}_L\cdot(\mathfrak{E}^L\circ\mathfrak{e}_I)\cdot\partial_K\psi^I{}_P = \mathfrak{I}^L{}_I\cdot C^{KP}{}_L\cdot\partial_K\psi^I{}_P\,.\end{aligned}$$

Таким образом, выражения $C^{KP}{}_L\cdot\partial_K\psi^I{}_P$ есть проекции (координаты) вектора $\nabla\circ\Psi$ на базисные векторы $\mathfrak{I}^L{}_I$.

III. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯДОВ С УЧАСТИЕМ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЧАСТИЦ

Итак, мы имеем две модели взаимодействия заряда 1 с зарядом 2: полевую и корпускулярную.* В первом случае заряд 1 окружает себя полем, которое непосредственно действует на заряд 2. В случае корпускулярной модели заряд 1 испускает промежуточную частицу, которая непосредственно действует на заряд 2.† Если полевая модель не сталкивается с затруднениями, то корпускулярная, напротив, вызывает вопросы, на которые пока нет удовлетворительного ответа.

Некоторые из этих вопросов таковы:

1. Испускает ли статический заряд 1 промежуточную частицу в отсутствии заряда 2? Если да, то какова ее судьба? Этот вопрос особенно актуален для безмассовой промежуточной частицы, которая обязана двигаться со скоростью света. Если да, то теряет ли при этом заряд 1 энергию? Для полевой модели такой вопрос не возникает, так как для нее статичны как заряд 1, так и инициируемое им поле.

2. Каким образом промежуточная частица, выделенная зарядом 1, чувствует заряд 2, если учесть, что калибровочный заряд промежуточной частицы равен нулю. (Например, фотон электрически нейтрален.) Для полевой модели такой вопрос не возникает, так как калибровочный потенциал обладает зарядовым индексом.

3. Обладает ли выделенная зарядом 1 промежуточная частица собственным моментом импульса и передает ли она заряду 2 помимо импульса еще и момент импульса? Если да, то сопровождается ли этот процесс раскручиванием зарядов 1 и 2 в разные стороны? Для полевой модели такой вопрос не возникает, так как калибровочное поле не наделяется собственным моментом импульса.

Попытка ответить на поставленные вопросы и привести в соответствие корпускулярную и полевую модели взаимодействия заставляет сформулировать следующую точку зрения.

1. Промежуточная частица представляет собой диполь. Выделенная зарядом 1 промежуточная частица ориентирована относительно него. Внешний заряд промежуточной частицы имеет тот же знак, что и заряд 1. Именно этот заряд чувствует заряд 2, отличает его от нейтральной частицы и взаимодействует с ним. В макро отношении промежуточная частица нейтральна.

2. Промежуточная частица, выделяемая статическим зарядом, макро неподвижна. Этот тезис входит в кажущееся противоречие с концепцией безмассовой промежуточной частицы. Однако, в Разделе II.1 Лекции 10 мы показали, что возможны два вида движения безмассовой частицы: прямолинейное движение со скоростью света и колебательное движение с частотой

$$\Omega = \frac{1}{T}\,, \quad \text{где} \quad T = \frac{c}{A}\,,$$

c – скорость света, A – максимальное ускорение. Именно такое движение необходимо приписать промежуточной частице, выделяемой статическим зарядом.

На основании приведенных тезисов модель взаимодействия зарядов с участием промежуточных частиц выглядит следующим образом. Заряд 1 выделяет промежуточные частицы, которые макро неподвижны и ориентированы по отношению к заряду 1 и друг другу. Эти промежуточные частицы выстраиваются вдоль силовых линий калибровочного поля и образуют своего рода щупальцы. Щупальцы заряда 1 входят в непосредственное взаимодействие с аналогичными щупальцами заряда 2. В макро отношении поле промежуточных частиц, окружающих статический заряд, статично.

3. Необходимо допустить существование промежуточных частиц (в частности, фотонов) с нулевым спином и предположить, что именно они участвуют во взаимодействии статических зарядов. В этом случае вопрос о передаче момента импульса при взаимодействии статических зарядов снимается.

Благодаря постулированным свойствам промежуточных частиц, картина взаимодействия зарядов с участием промежуточных частиц предельно адекватна полевой модели.

IV. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯДОВ С УЧАСТИЕМ КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ

В предыдущем Разделе мы столкнулись с необходимостью корректировки корпускулярной модели взаимодействия зарядов на основании полевой модели. Но имеет место и обратная тенденция, вызванная необходимостью уточнения полевой модели по корпускулярной.

1. Начала обобщенной электродинамики

Мы исходим из того, что фотон обладает спином, но в представлении об электромагнитном поле эта характеристика отсутствует. Вместе с тем, согласно нашим общим представлениям, взаимодействие зарядов может быть описано двумя эквивалентными способами – как с помощью промежуточной частицы (фотона),

*Рассматривая указанные модели мы будем обращаться к простому примеру статического взаимодействия электрических зарядов.

†Так как речь идет о *взаимодействии*, то заряд 2 ведет себя аналогичным образом по отношению к заряду 1.

так и с помощью электромагнитного поля. Так мы приходим к необходимости обобщения электромагнитного поля с целью включения в его характеристики спина.

Сначала напомним, что теория электромагнитного поля строится на понятии потенциала с компонентами

$$\mathcal{A}^4 \,, \quad \mathcal{A}^a \,,$$

где $a = 1\,,2\,,3$. Или в других обозначениях

$$\varphi\,, \quad c \cdot A^1\,, \quad c \cdot A^2\,, \quad c \cdot A^3\,.$$

Здесь φ – электрический потенциал, A^a – компоненты векторного потенциала.

Эти компоненты подобны (преобразуются как) координатам пространства-времени СТО

$$(dx^4,\, dx^a) \quad \sim \quad (c \cdot dt,\, dx^1,\, dx^2,\, dx^3)\,.$$

Потенциалы φ и A^a связаны между собой уравнением, называемым калибровкой Лоренца

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial A^a}{\partial x^a} = 0$$

или

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (c \cdot A^a)}{\partial x^a} = 0$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{A}^i}{\partial x^i} = 0\,, \tag{36}$$

где $i = 1\,,2\,,3\,,4$.

Источником электромагнитного поля является четырехмерная плотность тока, компоненты которой также подобны координатам пространства-времени СТО,

$$(j^4,\, j^a) \quad \sim \quad (c \cdot \rho,\;\; j^1,\;\; j^2,\;\; j^3)\,.$$

По определению j^a и ρ связаны условием непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^a}{\partial x^a} = 0\,.$$

Или

$$\frac{\partial (c \cdot \rho)}{\partial (c \cdot t)} + \frac{\partial j^a}{\partial x^a} = 0\,.$$

Или

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0\,.$$

Далее вводится тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \frac{\partial \mathcal{A}_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x^k}\,.$$

Здесь этот тензор записан в ковариантных компонентах. Аналогично записывается тензор электромагнитного поля в контравариантных компонентах

$$F^{ik} = \frac{\partial \mathcal{A}^k}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathcal{A}^i}{\partial x_k}\,. \tag{37}$$

Нужно помнить, что операторы дифференцирования в ковариантных компонентах имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\;\; \frac{\partial}{\partial x^a}\right),$$

а операторы дифференцирования в контравариантных компонентах имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\;\; \frac{\partial}{\partial x^a}\right).$$

Уравнения электромагнитного поля формулируются по отношению к тензору электромагнитного поля и записываются следующим образом

$$F^{ik}{}_{,k} \equiv \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = \frac{j^i}{c \cdot \varepsilon_0}\,, \tag{38}$$

Здесь ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Из соотношений (37) и (38) следуют уравнения по отношению к компонентам потенциала

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{A}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 \mathcal{A}^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{j^i}{c \cdot \varepsilon_0}\,.$$

Если учесть калибровку Лоренца (36), то получим волновые уравнения по отношению к компонентам потенциала

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_b \partial x^b} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,,$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A^a}{\partial x_b \partial x^b} = \mu_0 \cdot j^a\,.$$

Здесь

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2 \cdot \varepsilon_0}$$

– магнитная проницаемость вакуума.

Обобщение электродинамики, которое мы ищем, связано с переходом от пространства-времени СТО к пространству алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$. В этом пространстве дифференциалы координат записываются так (смотрите Раздел IV Лекции 8)

$$\begin{gathered} dx^0,\, dx^4,\, dx^1,\, dx^2,\, dx^3, \\ dx^{32},\, dx^{13},\, dx^{21},\, dx^{14},\, dx^{24},\, dx^{34}, \\ dx^{123},\, dx^{124},\, dx^{134},\, dx^{234},\, dx^{1324}\,. \end{gathered}$$

Среди этих координат координаты $dx^{32}, dx^{13}, dx^{21}$ пропорциональны углам собственного поворота. Им соответствует собственный момент вращения – спин.

Отсюда следует, что обобщение электродинамики должно быть связано с введением пространственно подобных компонент потенциала

$$\begin{gathered}\mathcal{A}^0,\, \mathcal{A}^4,\, \mathcal{A}^1,\, \mathcal{A}^2,\, \mathcal{A}^3,\\ \mathcal{A}^{32},\, \mathcal{A}^{13},\, \mathcal{A}^{21},\, \mathcal{A}^{14},\, \mathcal{A}^{24},\, \mathcal{A}^{34},\\ \mathcal{A}^{123},\, \mathcal{A}^{124},\, \mathcal{A}^{134},\, \mathcal{A}^{234},\, \mathcal{A}^{1324}\,.\end{gathered}$$

Здесь компоненты $\mathcal{A}^4, \mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3$ соответствуют классической теории электромагнитного поля, а компоненты $\mathcal{A}^{32}, \mathcal{A}^{13}, \mathcal{A}^{21}$ следует считать ответственными за спин электромагнитного поля.

Далее для простоты мы ограничимся частью приведенных компонент

$$\begin{gathered}\mathcal{A}^4,\, \mathcal{A}^1,\, \mathcal{A}^2,\, \mathcal{A}^3,\\ \mathcal{A}^{32},\, \mathcal{A}^{13},\, \mathcal{A}^{21},\, \mathcal{A}^{14},\, \mathcal{A}^{24},\, \mathcal{A}^{34}\,.\end{gathered}$$

То есть, к компонентам потенциала классической теории электромагнитного поля мы добавим спиновые компоненты и компоненты $\mathcal{A}^{14}, \mathcal{A}^{24}, \mathcal{A}^{34}$, которые необходимы для сохранения принципа релятивистской инвариантности теории.

Логику построения теории мы оставим прежней.

Таким образом, имеем дифференциалы координат dx^I:

$$\begin{gathered}dx^4,\, dx^1,\, dx^2,\, dx^3,\\ dx^{32},\, dx^{13},\, dx^{21},\, dx^{14},\, dx^{24},\, dx^{34}\,.\end{gathered}$$

Или

$$dx^4,\, dx^a,\, dx^{ab},\, dx^{a4}\,.$$

Или в других обозначениях

$$\begin{gathered}c\cdot dt,\;\; dx^1,\;\; dx^2,\;\; dx^3,\\ R\cdot d\varphi^1,\;\; R\cdot d\varphi^2,\;\; R\cdot d\varphi^3,\\ T\cdot dv^1,\;\; T\cdot dv^2,\;\; T\cdot dv^3\,.\end{gathered}$$

Компоненты потенциала обобщенного электромагнитного поля $\mathcal{A}^I$ будем записывать также в виде

$$\mathcal{A}^4\,,\quad \mathcal{A}^a\,,\quad \mathcal{A}^{ab}\,,\quad \mathcal{A}^{a4}\,.$$

Или в других обозначениях

$$\varphi\,,\quad c\cdot {A_x}^a\,,\quad \Omega\cdot {A_\varphi}^a\,,\quad A\cdot {A_v}^a\,.$$

Здесь φ – электрический потенциал, ${A_x}^a$ – компоненты векторного потенциала. Напомним, что Ω и A – физические постоянные, соответственно предельная угловая скорость и максимальное ускорение.

Компоненты потенциала свяжем между собой уравнением, которое также будем называть *калибровкой Лоренца*

$$\frac{\partial \mathcal{A}^I}{\partial x^I} = 0\,. \tag{39}$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{A}^4}{\partial x^4} + \frac{\partial \mathcal{A}^a}{\partial x^a} + \frac{\partial \mathcal{A}^{ab}}{\partial x^{ab}} + \frac{\partial \mathcal{A}^{a4}}{\partial x^{a4}} = 0\,.$$

или

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial(c\cdot {A_x}^a)}{\partial x^a} + \frac{1}{R}\frac{(\Omega\cdot {A_\varphi}^a)}{\partial\varphi^a} + \frac{1}{T}\frac{(A\cdot {A_v}^a)}{\partial v^a} = 0\,.$$

или

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial {A_x}^a}{\partial x^a} + \frac{1}{R^2}\frac{{A_\varphi}^a}{\partial\varphi^a} + \frac{1}{T^2}\frac{{A_v}^a}{\partial v^a} = 0\,.$$

Источником электромагнитного поля является плотность тока j^I, компоненты которой также подобны координатам обобщенного пространства-времени,

$$j^4,\, j^a,\, j^{ab},\, j^{a4}\,.$$

Или

$$c\cdot\rho,\;\; {j_x}^a,\;\; R\cdot {j_\varphi}^a,\;\; T\cdot {j_v}^a\,.$$

Здесь

ρ – плотность неподвижного заряда,
${j_x}^a$ – плотность равномерно движущегося заряда,
${j_\varphi}^a$ – плотность вращающегося заряда,
${j_v}^a$ – плотность ускоренного заряда.

По определению компоненты плотности тока свяжем условием непрерывности

$$\frac{\partial j^I}{\partial x^I} = 0\,.$$

Или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial {j_x}^a}{\partial x^a} + \frac{\partial {j_\varphi}^a}{\partial\varphi^a} + \frac{\partial {j_v}^a}{\partial v^a} = 0\,.$$

Далее введем тензор электромагнитного поля

$$F_{IK} = \frac{\partial\mathcal{A}_K}{\partial x^I} - \frac{\partial\mathcal{A}_I}{\partial x^K}\,.$$

Здесь этот тензор записан в ковариантных компонентах. Аналогично записывается тензор электромагнитного поля в контравариантных компонентах

$$F^{IK} = \frac{\partial\mathcal{A}^K}{\partial x_I} - \frac{\partial\mathcal{A}^I}{\partial x_K}\,. \tag{40}$$

Нужно иметь в виду, что операторы дифференцирования в ковариантных компонентах имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x^I} \sim \Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,,\;\; \frac{\partial}{\partial x^a}\,,\;\; \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi^a}\,,\;\; \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial v^a}\Big)\,,$$

а операторы дифференцирования в контравариантных компонентах имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_I} \sim \Big(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,,\;\; \frac{\partial}{\partial x_a}\,,\;\; -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi_a}\,,\;\; \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial v_a}\Big)\,,$$

Уравнения электромагнитного поля формулируются по отношению к тензору электромагнитного поля и имеют вид

$$F^{IK}{}_{,K} = \frac{j^I}{c \cdot \varepsilon_0}\,, \tag{41}$$

Здесь ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Из соотношений (40) и (41) следуют уравнения по отношению к компонентам потенциала

$$\frac{\partial}{\partial x_I}\frac{\partial \mathcal{A}^K}{\partial x^K} - \frac{\partial^2 \mathcal{A}^I}{\partial x_K \partial x^K} = \frac{j^I}{c \cdot \varepsilon_0}\,.$$

Если учесть калибровку Лоренца (39), то получим волновые уравнения по отношению к компонентам потенциала

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_b \partial x^b} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi_b \partial \varphi^b} - \frac{1}{T^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_b \partial v^b} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,,$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x{}^a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_x{}^a}{\partial x_b \partial x^b} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 A_x{}^a}{\partial \varphi_b \partial \varphi^b} - \frac{1}{T^2}\frac{\partial^2 A_x{}^a}{\partial v_b \partial v^b} = \mu_0 \cdot j_x{}^a\,,$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_\varphi{}^a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_\varphi{}^a}{\partial x_b \partial x^b} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 A_\varphi{}^a}{\partial \varphi_b \partial \varphi^b} - \frac{1}{T^2}\frac{\partial^2 A_\varphi{}^a}{\partial v_b \partial v^b} = \nu_0 \cdot j_\varphi{}^a\,,$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_v{}^a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_v{}^a}{\partial x_b \partial x^b} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 A_v{}^a}{\partial \varphi_b \partial \varphi^b} - \frac{1}{T^2}\frac{\partial^2 A_v{}^a}{\partial v_b \partial v^b} = \lambda_0 \cdot j_v{}^a\,,$$

Здесь

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2 \cdot \varepsilon_0}$$

– магнитная проницаемость вакуума;

$$\nu_0 = \frac{1}{\Omega^2 \cdot \varepsilon_0}$$

– проницаемость вакуума для вращающихся зарядов;

$$\lambda_0 = \frac{1}{A^2 \cdot \varepsilon_0}$$

– проницаемость вакуума для ускоренных зарядов.

На этом мы закончим изложение обобщенной электродинамики. Для нас важно, что такое обобщение позволяет описать взаимодействие зарядов с помощью полевой модели предельно адекватно корпускулярной модели.

2. Преобразования потенциала и тензора электромагнитного поля при переходе к ускоренной системе отсчета

Так как компоненты потенциала электромагнитного поля подобны координатам пространства-времени, то на основании преобразований координат при переходе от одной системы отсчета к другой устанавливаются преобразования компонент потенциала при этом же преобразовании систем отсчета. Но не только компонент потенциалов, но и тензорных комбинаций, в которых участвуют компоненты потенциала и, в частности, тензора электромагнитного поля. В классической теории электромагнитного поля такими преобразованиями являются преобразования Лоренца.

В предыдущем разделе мы расширили число координат пространства-времени и число компонент потенциала электромагнитного поля. И, следовательно, имеем возможность обобщить преобразования Лоренца на более сложные случаи преобразования систем отсчета.

Мы рассмотрим следующий наиболее простой случай. Пусть потенциал электромагнитного поля представлен классическими четырьмя компоненты

$$\mathcal{A}^i = \left\{\mathcal{A}^4\,,\ \mathcal{A}^a\right\} =$$

Здесь индекс $i = 1,2,3,4$; индекс $a = 1,2,3$; $\mathcal{A}^4 = \varphi$ есть скалярный потенциал. $\mathcal{A}^a$ - компоненты векторного потенциала. Соответственно имеем классический тензор электромагнитного поля

$$\begin{aligned} F^i_k &= \left\{F^1_4\,,\ F^2_4\,,\ F^3_4\,,\ F^1_2\,,\ F^3_1\,,\ F^2_3\right\} \\ &= \left\{E^1\,,\ E^2\,,\ E^3\,,\ B^3\,,\ B^2\,,\ B^1\right\}\,. \end{aligned}$$

Здесь E^a есть компоненты вектора напряженности электромагнитного поля, B^a есть компоненты вектора индукции электромагнитного поля. Но при этом в качестве дифференциалов координат пространства-времени примем

$$dx^4,\ dx^1,\ dx^2,\ dx^3,\ dx^{14},\ dx^{24},\ dx^{34}\,.$$

И, более того, мы будем рассматривать одномерный случай этих координат

$$dx^4,\ dx^1,\ dx^{14}\,.$$

Преобразования координат в этом случае соответствуют ускоренному движению системы отсчета в одном направлении. В качестве примера рассмотрим случай **AV** движения системы отсчета. (Смотрите Раздел II.5 Лекции 10)

Формулы преобразования компонент потенциала и тензора электромагнитного поля следуют из формул (36) Раздела II.5.3 Лекции 10, если учесть, что потенциал $\mathcal{A}^i$ преобразуется также, как преобразуется вектор dx^i, а тензор электромагнитного поля F^i_k преобразуется также, как преобразуется антисимметричное произведение векторов dx^i и dx_k. Последнее должно быть согласовано с тем, что компоненты F^i_4 преобразуется также, как преобразуется вектор скорости $dx^i_4 = \boldsymbol{v}$. Ситуация упрощается вследствие того, что указанные преобразования не затрагивают компонент вектора dx^2 и dx^3. Поэтому компоненты потенциала $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{A}^3$ и тензора электромагнитного поля $F^2_3 = B^1$ сохраняются при указанных преобразованиях. Кроме того, компоненты

$$\left\{F_2^4\,,\ F_2^1\right\} = \left\{-E^2\,,\ B^3\right\}\,,$$
$$\left\{F_3^4\,,\ F_3^1\right\} = \left\{-E^3\,,\ -B^2\right\}$$

преобразуются подобно компонентам вектора $\{dx^4\,,\ dx^1\}$. Таким образом имеем для случая **AV** преобразования:

$$\begin{aligned}
\varphi\ &= \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(\mathcal{A}^1)' \\
&\quad + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(\varphi)' + \tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(F_4^1)' \\
\mathcal{A}^1 &= \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(\mathcal{A}^1)' + \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(\varphi)' \\
F_2^1 &= \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(F_2^1)' + \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(F_2^4)' \\
F_2^4 &= \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(F_2^1)' \\
&\quad + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(F_2^4)' \\
F_4^1 &= \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(\mathcal{A}^1)' \\
&\quad + \tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(\varphi)' + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(F_4^1)' \\
F_3^1 &= \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(F_3^1)' + \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(F_3^4)' \\
F_3^4 &= \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(F_3^1)' \\
&\quad + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(F_3^4)'\,.
\end{aligned} \tag{42}$$

Или в других обозначениях

$$\begin{aligned}
\varphi\ &= \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(\mathcal{A}^1)' \\
&\quad + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(\varphi)' - \tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(E^1)'\,, \\
\mathcal{A}^1 &= \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(\mathcal{A}^1)' + \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(\varphi)'\,, \\
B^3 &= \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(B^3)' - \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(E^2)'\,, \\
E^2 &= -\tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(B^3)' \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(E^2)'\,, \\
E^1 &= \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(\mathcal{A}^1)' \\
&\quad + \tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(\varphi)' + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(E^1)'\,, \\
B^2 &= \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(B^2)' + \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(E^3)'\,, \\
E^3 &= \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(B^2)' \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,(E^3)'\,,
\end{aligned}$$

Заметим, что в этих соотношениях опущены слагаемые, пропорциональные производным от тензора электромагнитного поля. Кроме того, нужно иметь в виду, что преобразования формул (36) Раздела II.5.3 Лекции 10 относятся к компонентам вектора и тензора в безразмерной форме, поэтому в соотношениях (42) используются компоненты потенциала и тензора электромагнитного поля в безразмерной форме.

В частном случае, когда скорость v равна нулю, имеем

$$\begin{aligned}
\varphi\ &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(\varphi)' - \tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(E^1)'\,, \\
\mathcal{A}^1 &= (\mathcal{A}^1)'\,, \qquad B^2 = (B^2)'\,, \qquad B^3 = (B^3)'\,, \\
E^1 &= \tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(\varphi)' + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(E^1)'\,, \\
E^2 &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(E^2)'\,, \qquad E^3 = \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(E^3)'\,.
\end{aligned}$$

Рассмотрим точечный заряд e, покоящийся относительно сисмемы отсчета K_1. Пусть также система отсчета K_1 движется ускоренно относительно системы отсчета K_0. Тогда в системе отсчета K_1 потенциал поля заряда

$$(\varphi)' = \frac{e}{r}\,, \qquad (\mathcal{A}^1)' = 0\,,$$

а напряженность электрического поля в этой системе равна

$$(E)' = \frac{e}{r^2}\,.$$

Здесь r есть расстояние до заряда.

Напряженность электрического поля в системе отсчета K_0 в направлении ускорения определяется выражением

$$E^1 = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(\varphi)' + \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,(E^1)'\,.$$

Таким образом, для $a \ll A$ напряженность электрического поля содержит два слагаемых, одно из которых пропорционально ускорению и обратно пропорционально расстоянию от заряда, а другое не зависит от ускорения и обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда. Это известный результат, который может быть получен с использованием потенциалов Линеара-Вихерта.

V. ВЫВОДЫ

- Волновое уравнение для фундаментальной и промежуточной частиц в калибровочном поле дается системой уравнений (22).

- Корпускулярная модель взаимодействия становится адекватной полевой модели, если допустить, что промежуточная частица является диполем. Кроме того, необходимо допустить, что безмассовая промежуточная частица может не только двигаться со скоростью света, но и совершать колебательное движение с фундаментальной частотой Ω.

- Полевая модель взаимодействия становится адекватной корпускулярной модели, если обобщить представление о потенциале калибровочного поля и, в частности, включить в число компонент потенциала компоненты, наделяющие колибровочное поле спином.