Лекция 17. Промежуточные частицы

А. А. Кецарис
(5 февраля 2006 г.)

Действие для промежуточных частиц есть линейное преобразование вектора действия фундаментальной частицы. Эти линейные преобразования составляют алгебру. Ее уравнения структуры есть квантовые уравнения движения свободных промежуточных частиц. Совместное рассмотрение алгебры промежуточных частиц и алгебры фундаментальных частиц позволяет получить систему уравнений, описывающих взаимодействие этих частиц.

I. ВВЕДЕНИЕ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

В предыдущих Лекциях мы рассматривали свободные фундаментальные частицы. Далее будем рассматривать их взаимодействие между собой.

Взаимодействие частиц (и в общем случае тел) между собой есть действие[*] частиц (тел) друг на друга, приводящее к изменению параметров их движения.

Пусть A – множество тел. Каждую пару тел $a, b \in A$ можно характеризовать наличием или отсутствием взаимодействия между ними. Таким образом на подмножестве B множества пар тел $A \times A$ вводится бинарное отношение $\mathfrak{F}$. Иначе говоря, попарное взаимодействие есть бинарное отношение $\mathfrak{F}$ между телами, определяющее подмножество[†] взаимодействующих тел B. Заметим, что введение качества $\mathfrak{F}$ или понятия взаимодействия как бинарного отношения становится возможным после того, как изобретен способ регистрации взаимодействия. Заметим также, что таких способов может быть несколько, они могут быть более или менее совершенны и совершенствоваться. Для нас важно, что все они имеют инвариантное содержание как бинарные отношения. Бинарное отношение $\mathfrak{F}$ между телами a и b будем записывать $a\,\mathfrak{F}\,b$ и говорить, что тело a взаимодействует с телом b. Так как взаимодействие $\mathfrak{F}$ есть качество, определяющее подмножество B на множестве пар $A \times A$, то можно ввести понятия пересечения, дополнения, объединения бинарных отношений. Дополнением к бинарному отношению (взаимодействию) $\mathfrak{F}$ является бинарное отношение $\overline{\mathfrak{F}}$, определяемое посредством подмножества невзаимодействующих тел $\overline{B}$. То есть $a\,\overline{\mathfrak{F}}\,b$ имеет место тогда, когда a не взаимодействует с b. Пусть тело a взаимодействует с телом b. Тогда обратное отношение $a\,\mathfrak{F}^{-1}\,b$, равнозначное тому, что $b\,\mathfrak{F}\,a$, означает, что b взаимодействует с a. Таким образом, взаимодействие как бинарное отношение обладает свойством *симметричности*: если $a\,\mathfrak{F}\,b$, то $b\,\mathfrak{F}\,a$. То есть, если a взаимодействует с b, то b взаимодействует с a. Введем также единичное отношение $\mathfrak{E}$, определяемое тем, что два тела a и b вступают в это отношение ($a\,\mathfrak{E}\,b$), если $a = b$. Очевидно, что $\mathfrak{E}^{-1} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{E} = \mathfrak{E} \circ \mathfrak{F}$. Рассмотрим теперь отношение $\mathfrak{R} = \mathfrak{F} \cup \mathfrak{E}$. Это отношение 1) *симметрично*, 2) *рефлексивно*, то есть $\mathfrak{E} \in \mathfrak{R}$, и 3) *транзитивно*, то есть, если a взаимодействует с b ($a\,\mathfrak{R}\,b$), а b взаимодействует с c ($b\,\mathfrak{R}\,c$), то a взаимодействует и с c ($a\,\mathfrak{R}\,c$). Условие транзитивности означает, что смешанные взаимодействия не рассматриваются. Бинарное отношение, обладающее тремя вышеуказанными свойствами, является отношением *эквивалентности*. Таким образом, взаимодействие как бинарное отношение есть отношение эквивалентности.

Рассмотрим множество наборов из n взаимодействующих тел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Они составляют подмножество в A^n. Таким образом, взаимодействие n тел определяет на множестве тел A n-арное отношение.

Назовем *классом взаимодействия*[‡] в A по отношению к взаимодействию $\mathfrak{F}$ множество всех тел из A, взаимодействующих с заданным телом a. Обозначим класс взаимодействия – $\mathrm{cl}(a)$. Класс $\mathrm{cl}(a)$ есть подмножество множества тел A ($\mathrm{cl}(a) \subset A$), в то время как B есть подмножество множества пар тел $A \times A$. Качество, присущее телам, объединенным в один класс, назовем *типом* взаимодействия. Класс взаимодействия может быть определен с помощью любого тела, входящего в этот класс. Действительно, если $b \in \mathrm{cl}(a)$, то в силу транзитивности взаимодействия из $c\,\mathfrak{F}\,a$ следует $c\,\mathfrak{F}\,b$. Из транзитивности взаимодействия также

[*] Нужно иметь в виду, что слово *действие* используется в нескольких смыслах: *действие* как *явление*, например, действие одного тела на другое; *действие* как *физическая величина*, например, вектор действия, *действие* в смысле *применение оператора*, например, действие оператора на функцию. Мы будем использовать слово *действие*, полагая, что читатель легко определит в каком из упомянутых трех значений это слово используется.

[†] Задание взаимодействия $\mathfrak{F}$ для пар тел из $A \times A$ не означает, что это взаимодействие имеет место для любой пары.

[‡] Здесь мы перефразируем определение *класса эквивалентности.*

следует, что два класса взаимодействия либо совпадают, либо не пересекаются. Действительно, пусть даны два класса взаимодействия $\mathrm{cl}(a)$, $\mathrm{cl}(b) \subset A$, тогда если существует c, такое, что $a\,\mathfrak{F}\,c$ и $b\,\mathfrak{F}\,c$, то $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(b)$. Количество типов взаимодействия равно количеству классов взаимодействия.

В настоящее время установлены четыре типа взаимодействия: электромагнитное, слабое, сильное и гравитационное. В своих рассуждениях для определенности мы будем апеллировать к взаимодействию электрических зарядов (электрически заряженных тел), хотя наши рассуждения будут иметь общий характер и относиться к взаимодействиям других типов.

У тел, вступающих во взаимодействие определенного типа, устанавливается наличие некоторого количества q – *заряда* соответствующего типа. Введение понятия заряда q как физической величины становится возможным после того, как изобретен способ сравнения зарядов и способ сложения зарядов. Заметим также, что таких способов может быть несколько, они могут быть более или менее совершенны и совершенствоваться.* Для нас важно, что все они имеют инвариантное содержание как законы композиции, определяющие заряд как векторную или скалярную величину над полем действительных чисел. То есть, на множестве значений зарядов имеют место законы

- сложения зарядов

$$q = q_1 + q_2\,,$$

- умножения заряда на число

$$q = \alpha \cdot q_1\,, \quad \text{где } \alpha \text{ действительное число}\,,$$

которые связаны между собой законом дистрибутивности.

Для электромагнитного взаимодействия заряд есть скалярная величина над полем действительных чисел. Для гравитационного взаимодействия заряд есть скалярная величина над полем положительных действительных чисел. Для сильного взаимодействия заряд есть векторная величина над полем действительных чисел.

Особенность взаимодействия зарядов состоит в том, что это взаимодействие осуществляется на расстоянии, без непосредственного контакта зарядов друг с другом. Этот факт находится в противоречии с повседневным опытом и здравым смыслом, поэтому вызвал к жизни точку зрения, согласно которой между взаимодействующими зарядами находится промежуточный "агент", причем он сначала взаимодействует с одним зарядом путем непосредственного контакта, затем с другим, также непосредственно контактируя с ним. Таким образом, "агент" осуществляет перенос взаимодействия от одного заряда к другому. Инициатором этой точки зрения был Ньютон. В дальнейшем эта концепция получила развитие в двух разновидностях:

- переносчиком взаимодействия между зарядами является *промежуточная частица*;
- переносчиком взаимодействия между зарядами является *поле*[†].

Так как обе разновидности "агента" относятся к одному явлению – взаимодействию зарядов, то они должны быть эквивалентны. Вместе с тем в настоящее время обе концепции не адекватны друг другу, что свидетельствует об их взаимном несовершенстве и служит импульсом для их развития.[‡] В этой Лекции мы сформулируем подход к описанию промежуточных частиц.[§] К промежуточным частицам мы отнесем фотон, W и Z-бозоны, глюоны и мезоны, а также гипотетические (им суперсимметричные) частицы.

Согласно нашей общей позиции, элементарные частицы (в том числе и промежуточные) характеризуются вектором действия. Далее нужно учесть, что промежуточная частица, взаимодействуя с фундаментальной частицей, меняет характеристики движения фундаментальной частицы. Для этого мы рассматриваем действие промежуточной частицы как оператор, действующий на вектор действия фундаментальной частицы. Если нам удастся показать, что операторы действия промежуточной частицы образуют алгебру, то тогда вступят в силу общие соображения, изложенные в Лекции 1, согласно которым уравнения структуры алгебры действия преобразуются в волновое уравнение для частицы (в нашем случае промежуточной). Совместное рассмотрение алгебр действия фундаментальной и промежуточной частиц должно привести к системе волновых уравнений, описывающих взаимодействие указанных частиц. Такова канва рассуждений, которой мы будем следовать далее.

[*] В основе указанных способов может лежать, например, сравнение и сложение сил, поставленных в соответствие зарядам.

[†] Поле как часть пространства, в которой на вносимый заряда действует сила.

[‡] В Лекциях 19 и 20 мы вернемся к этому вопросу.

[§] Обычно термин "промежуточные" используется по отношению к частицам, переносящим слабое взаимодействие. Мы этот термин распространим на все частицы переносчики взаимодействия.

II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА ДЕЙСТВИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ

Предварительно переобозначим пространство действия фундаментальной частицы. Для него будем использовать обозначение $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ вместо ранее использованного $\mathbb{S}$.**

Далее будем рассматривать линейные преобразования пространства действия фундаментальной частицы $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$. Введем оператор, который ставит в соответствие вектору $\boldsymbol{S} \in \mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ вектор $\boldsymbol{S}' \in \mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$. Обозначим такой оператор $\mathsf{S}(\ )$ и назовем его *преобразованием.* Указанное соответствие будем записывать так

$$\boldsymbol{S}' = \mathsf{S}(\boldsymbol{S})\,. \tag{1}$$

Потребуем, чтобы преобразование $\mathsf{S}(\ )\colon \mathbb{S}_{\mathfrak{e}} \to \mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ было *линейным.* То есть, выполнялось соотношение

$$\mathsf{S}(\alpha_1 \cdot \boldsymbol{S}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{S}_2) = \alpha_1 \cdot \mathsf{S}(\boldsymbol{S}_1) + \alpha_2 \cdot \mathsf{S}(\boldsymbol{S}_2).$$

Вектор действия фундаментальной частицы $\boldsymbol{S}$ может быть разложен по базисным векторам $\mathfrak{e}_I$:

$$\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_0\, S^0 + \mathfrak{e}_{i_1}\, S^{i_1} + \ldots + \mathfrak{e}_{1324}\, S^{1324} = \mathfrak{e}_I \cdot S^I\,.$$

Поэтому вектор $\boldsymbol{S}' = \mathsf{S}(\boldsymbol{S})$ в силу линейности преобразования может быть записан в виде:

$$\boldsymbol{S}' = \mathsf{S}(\mathfrak{e}_I) \cdot S^I\,.$$

Введем разложение векторов $\mathsf{S}(\mathfrak{e}_I)$ по базисным векторам $\mathfrak{e}_M$

$$\mathsf{S}(\mathfrak{e}_I) = \mathfrak{e}_M \cdot S^M{}_I\,.$$

Здесь $S^M{}_I$ – коэффициенты разложения. Используя это соотношение, получим

$$\boldsymbol{S}' = \mathfrak{e}_M \cdot S^M{}_I \cdot S^I\,. \tag{2}$$

1. Векторное пространство линейных преобразований

Обозначим множество *линейных преобразований* $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$. На нем определим операции сложения $\oplus$

$$\mathsf{S}_1(\ ) \oplus \mathsf{S}_2(\ ) \in \mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$$

и умножения на число $\odot$

$$\alpha \odot \mathsf{S}(\ ) \in \mathbb{S}_{\mathfrak{J}}\,.$$

Пусть эти операции удовлетворяют закону дистрибутивности:

$$\alpha \odot [\mathsf{S}_1(\ ) \oplus \mathsf{S}_2(\ )] = \alpha \odot \mathsf{S}_1(\ ) \oplus \alpha \odot \mathsf{S}_2(\ )\,. \tag{3}$$

В результате множество линейных преобразований $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ становится векторным пространством. Соответствие закона дистрибутивности в $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ закону дистрибутивности в $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$:

$$\alpha \cdot (\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2) = \alpha \cdot \boldsymbol{S}_1 + \alpha \cdot \boldsymbol{S}_2$$

можно рассматривать как условия согласования сложений "$\oplus$" и "$+$" и умножений "$\odot$" и "$\cdot$". Эти условия сводятся к тому, что $\oplus$-сложение становится $+$-сложением, а $\odot$-умножение становится $\cdot$-умножением после действия оператора (3) на вектор $\boldsymbol{S}$.

На векторном пространстве $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ введем *базисные преобразования* $\mathfrak{J}^I{}_K(\ )$, чтобы

$$\mathsf{S}(\ ) = \mathfrak{J}^I{}_M(\ ) \cdot S^M{}_I\,,$$

где $S^M{}_I$ – *координаты* преобразования $\mathsf{S}(\ )$, представляющие собой ранее введенные коэффициенты разложения векторов $\mathsf{S}(\mathfrak{e}_I)$ по базисным векторам $\mathfrak{e}_M$. Линейное преобразование вектора $\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_K \cdot S^K$ должно иметь вид (2). Таким образом, должно выполняться

$$\mathfrak{J}^I{}_M(\mathfrak{e}_K) \cdot S^M{}_I \cdot S^K = \mathfrak{e}_M \cdot S^M{}_I \cdot S^I\,.$$

Из этого условия найдем правило преобразования базисных векторов $\mathfrak{e}_K$ пространства $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ с помощью базисных преобразований $\mathfrak{J}^I{}_M(\ )$:

$$\mathfrak{J}^I{}_M(\mathfrak{e}_K) = \mathfrak{e}_M \cdot \delta^I{}_K\,, \tag{4}$$

где $\delta^I{}_K$ – символ Кронекера.

2. Группа линейных преобразований. Алгебра линейных преобразований

На множестве линейных преобразований $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ введем *закон композиции.* То есть двум преобразованиям $\mathsf{S}_1(\ )$ и $\mathsf{S}_2(\ )$ ставится в соответствие преобразование $\mathsf{S}(\ )$, называемое композицией или произведением преобразований $\mathsf{S}_1(\ )$ и $\mathsf{S}_2(\ )$:

$$\mathsf{S}(\ ) = \mathsf{S}_2(\mathsf{S}_1(\ ))\,, \tag{5}$$

где $\mathsf{S}(\ ),\quad \mathsf{S}_1(\ ),\quad \mathsf{S}_2(\ ) \in \mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$.

Потребуем, чтобы композиция преобразований была *групповым* законом. То есть, чтобы на множестве линейных преобразований $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ было определено:

1. *единичное* преобразование $\delta(\ )$, для которого выполняются соотношения:

$$\delta(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{S}\,,$$

$$\delta(\mathsf{S}(\boldsymbol{S})) = \mathsf{S}(\boldsymbol{S})\,, \qquad \mathsf{S}(\delta(\boldsymbol{S})) = \mathsf{S}(\boldsymbol{S})\,.$$

**Обозначение $\mathbb{S}$ зарезервируем для пространства действия фундаментальных и промежуточных частиц.

2. *обратное* преобразование $\mathsf{S}^{-1}(\ )$, для которого выполняются соотношения:

$$\mathsf{S}(\mathsf{S}^{-1}(\boldsymbol{S})) = \delta(\boldsymbol{S}), \qquad \mathsf{S}^{-1}(\mathsf{S}(\boldsymbol{S})) = \delta(\boldsymbol{S}).$$

Указанные определения делают множество линейных преобразований $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ *группой*.

Найдем связь между координатами преобразования-композиции и координатами преобразований, участвующих в композиции. Для этого рассмотрим уравнение (5), записав преобразования, участвующие в композиции, через базисные преобразования:

$$\mathsf{S}(\ ) = \mathfrak{J}^L{}_M(\ ) \cdot S^M{}_L, \quad \mathsf{S}_2(\ ) = \mathfrak{J}^I{}_M(\ ) \cdot (S_2)^M{}_I,$$
$$\mathsf{S}_1(\ ) = \mathfrak{J}^L{}_K(\ ) \cdot (S_1)^K{}_L,$$

а также вектор действия фундаментальной частицы – через базисные векторы

$$\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_L \cdot S^L.$$

Для правой части уравнения (5) получим

$$\begin{aligned}
&\mathsf{S}_2(\mathfrak{J}^I{}_K(\boldsymbol{S}) \cdot (S_1)^K{}_I) = \mathsf{S}_2(\mathfrak{J}^I{}_K(\mathfrak{e}_L \cdot S^L) \cdot (S_1)^K{}_I) \\
&= \mathsf{S}_2(\mathfrak{e}_K \cdot (S_1)^K{}_L \cdot S^L) = \mathfrak{J}^I{}_M(\mathfrak{e}_K \cdot (S_1)^K{}_L \cdot S^L) \cdot (S_2)^M{}_I \\
&= \mathfrak{J}^I{}_M(\mathfrak{e}_K) \cdot (S_2)^M{}_I \cdot (S_1)^K{}_L \cdot S^L \\
&= \mathfrak{e}_M \cdot (S_2)^M{}_I \cdot (S_1)^I{}_L \cdot S^L.
\end{aligned}$$

Для левой части уравнения (5) получим

$$\mathsf{S}(\mathfrak{e}_I \cdot S^I) = \mathfrak{J}^L{}_M(\mathfrak{e}_I \cdot S^I) \cdot S^M{}_L = \mathfrak{e}_M \cdot S^M{}_L \cdot S^L$$

Из сравнения этих выражений получим

$$S^M{}_L = (S_2)^M{}_I \cdot (S_1)^I{}_L. \tag{6}$$

Кроме того, из сравнения

$$\mathsf{S}_2(\mathsf{S}_1(\ )) = \mathfrak{J}^I{}_M(\mathfrak{J}^L{}_K(\ )) \cdot (S_2)^M{}_I \cdot (S_1)^K{}_L$$

и

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}(\ ) &= \mathfrak{J}^L{}_M(\ ) \cdot S^M{}_L = \mathfrak{J}^L{}_M(\ ) \cdot (S_2)^M{}_I \cdot (S_1)^I{}_L \\
&= \mathfrak{J}^L{}_M(\ ) \cdot (S_2)^M{}_I \cdot \delta^I{}_K \cdot (S_1)^K{}_L
\end{aligned}$$

получим закон композиции базисных преобразований

$$\mathfrak{J}^I{}_M(\mathfrak{J}^L{}_K(\ )) = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{J}^L{}_M(\ ). \tag{7}$$

Единичное преобразование группы имеет вид

$$\delta(\ ) = \mathfrak{J}^I{}_M(\ ) \cdot \delta^M{}_I.$$

Обратное преобразование к преобразованию

$$\mathsf{S}(\ ) = \mathfrak{J}^I{}_M(\ ) \cdot S^M{}_I$$

имеет вид

$$\mathsf{S}^{-1}(\ ) = \mathfrak{J}^I{}_M(\ ) \cdot (S^{-1})^M{}_I,$$

для координат которого выполняется

$$S^M{}_I \cdot (S^{-1})^I{}_K = \delta^M{}_K.$$

Будем полагать, что законы композиции и сложения линейных преобразований связаны законом дистрибутивности. Вследствие этого множество линейных преобразований $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ является кольцом. А так как оно вместе с тем является векторным пространством, то, следовательно, оно представляет собой *алгебру*.

III. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВОБОДНОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЧАСТИЦЫ

1. Алгебра действия промежуточной частицы

Итак, алгебра действия промежуточной частицы $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ есть множество векторов действия S. Закон композиции, действующий на векторах пространства $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$, можно рассматривать как вид умножения и записывать его в в алгебраической, а не в операторной форме*

$$\mathsf{S} = \mathsf{S}_1 \circ \mathsf{S}_2. \tag{8}$$

Закон композиции для базисных преобразований (7) приобретает вид $\circ$-умножения для базисных векторов $\mathfrak{J}^I{}_M$:

$$\mathfrak{J}^L{}_K \circ \mathfrak{J}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{J}^L{}_M. \tag{9}$$

И запись разложения линейного преобразования по базисным преобразованиям (5) будем рассматривать как разложение вектора действия S по базисным векторам $\mathfrak{J}^I{}_M$

$$\mathsf{S} = \mathfrak{J}^I{}_M \cdot S^M{}_I,$$

Связь между координатами вектора – произведения и координатами векторов – сомножителей дается соотношением (6)

---

*Линейное преобразование вектора (1)также может быть записано не в операторной, а в алгебраической форме

$$\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S} \circ \mathsf{S}.$$

При этом произведение базисных векторов (4) приобретает вид алгебраического умножения векторов

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{J}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_M.$$

Произведение векторов (8) соответствует векторам действия в безразмерной форме. Для перехода к размерному действию необходимо перейти от уравнения (8) к уравнению

$$\mathsf{S} = \frac{1}{S_0}\,\mathsf{S}_1 \circ \mathsf{S}_2\,, \tag{10}$$

где S_0 есть постоянная, имеющая размерность действия. В этом случае для координат векторов, участвующих в произведении, имеем

$$S^M{}_L = \frac{1}{S_0}\,(S_2)^M{}_I \cdot (S_1)^I{}_L\,.$$

Вектор действия промежуточной частицы является функцией координат обобщенного пространства-времени

$$\mathsf{S} = \mathsf{S}(x)\,.$$

Производная от вектора действия по координате пространства-времени есть вектор импульса промежуточной частицы

$$\mathrm{p}_M = \frac{\partial \mathsf{S}}{\partial x^M}\,,$$

который может быть записан через координаты импульса следующим образом

$$\mathrm{p}_M = \mathfrak{J}^L{}_I \cdot p^I{}_{LM}\,,$$

где

$$p^I{}_{LM} = \frac{\partial S^I{}_L}{\partial x^M}\,.$$

2. Уравнения структуры алгебры действия промежуточной частицы

Далее рассмотрим уравнения структуры алгебры действия промежуточной частицы $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$, определяемые дифференцированием закона умножения векторов (8). Рассмотрим дифференциал вектора действия S. Будем различать дифференциалы индексом, например, d_1, $d_2, \ldots$, если дифференцирование выполняется по векторам $\mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \ldots$ соответственно. Из (8) следует

$$d_1\mathsf{S} = d\mathsf{S}_1 \circ \mathsf{S}_2\,, \qquad d_2\mathsf{S} = \mathsf{S}_1 \circ d\mathsf{S}_2\,.$$

Из этих выражений получаем

$$d\mathsf{S}_2 = (\mathsf{S}_1)^{-1} \circ d_2\mathsf{S}\,, \qquad d\mathsf{S}_1 = d_1\mathsf{S} \circ (\mathsf{S}_2)^{-1}\,. \tag{11}$$

Введем второй дифференциал $d_2 d_1 \mathsf{S}$. Из (8) для него имеет место

$$d_2 d_1 \mathsf{S} = d\mathsf{S}_1 \circ d\mathsf{S}_2\,.$$

Используя (11), получим*

$$d_2 d_1 \mathsf{S} = d_1\mathsf{S} \circ (\mathsf{S})^{-1} \circ d_2\mathsf{S}\,.$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при

$$\mathsf{S} = (\mathsf{S})^{-1} = \mathfrak{J}^K{}_I \cdot \delta^I{}_K\,,$$

это уравнение принимает вид

$$d_2 d_1 \mathsf{S} = d_1\mathsf{S} \circ d_2\mathsf{S}\,. \tag{12}$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ в векторной форме.

Подставляя в (12) выражения дифференциалов через дифференциалы координат и пользуясь законом умножения базисных векторов (9), получим уравнения структуры в координатной форме

$$d_2 d_1 S^I{}_K = d_2 S^I{}_L \cdot d_1 S^L{}_K\,. \tag{13}$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того, чтобы перейти к размерному действию необходимо перейти от уравнения (8) к уравнению (10). Тогда уравнения (12) и (13) примут вид соответственно

$$d_2 d_1 \mathsf{S} = \frac{1}{S_0}\,d_1\mathsf{S} \circ d_2\mathsf{S}\,. \tag{14}$$

и

$$d_2 d_1 S^I{}_K = \frac{1}{S_0} \cdot d_2 S^I{}_L \cdot d_1 S^L{}_K\,. \tag{15}$$

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые постулаты, на которых строится квантовая механика промежуточных частиц. Мы перейдем к более привычной записи квантовых постулатов, если введем переобозначения

$$d_1\mathsf{S} = \Psi\,, \quad d_2 = d\,.$$

Тогда вместо (14) получим

$$d\Psi = \frac{1}{S_0}\,\Psi \circ d\mathsf{S}\,,$$

а вместо (15) получим

$$d\psi^I{}_K = \frac{1}{S_0} \cdot dS^I{}_L \cdot \psi^L{}_K\,.$$

Если ввести обобщенные импульсы промежуточной частицы в соответствии с соотношением

$$d\mathsf{S} = \mathrm{p}_M \cdot dx^M\,,$$

---

*Здесь учтено, что для (8)

$$\mathsf{S}^{-1} = (\mathsf{S}_2)^{-1} \circ (\mathsf{S}_1)^{-1}\,.$$

получим квантовые постулаты в векторном виде

$$d\Psi = \frac{1}{S_0} \cdot (\Psi \circ \mathrm{P}_M) \cdot dx^M$$

и в координатном виде

$$d\psi^I{}_K = \frac{1}{S_0} \cdot p^I{}_{LM} \cdot dx^M \cdot \psi^L{}_K \,. \tag{16}$$

Здесь Ψ есть волновая функция промежуточной частицы, которая приобретает новый физический смысл и представляет собой частный дифференциал вектора действия этой частицы.

3. Волновое уравнение для свободной промежуточной частицы

Для вывода волнового уравнения для свободной промежуточной частицы воспользуемся соотношением (16), записав его в следующем виде

$$\partial_M \psi^I{}_K = \frac{1}{S_0}\, p^I{}_{LM} \cdot \psi^L{}_K \,. \tag{17}$$

Далее придадим этому соотношению форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные константы $C^{MN}{}_I$, выполнив соответствующие суммирования. Получим

$$C^{MN}{}_I \cdot \partial_M \psi^I{}_K = \frac{1}{S_0}\, C^{MN}{}_I \cdot p^I{}_{LM} \cdot \psi^L{}_K \,. \tag{18}$$

(Как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.)

Это уравнение и есть волновое уравнение для свободной промежуточной частицы в самом общем виде.

IV. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЧАСТИЦ

Современная квантовая теория не в состоянии описать движение электрона внутри атома, сопровождаемое излучением фотона. Такое движение разделяется на два процесса. Первый состоит в движении электрона по стационарной орбите. Второй состоит в переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую, сопровождаемом испусканием фотона. Сегодня описание первого процесса выполняется квантовой механикой, а описание второго процесса выполняется квантовой электродинамикой. Указанные разделы квантовой физики строятся на разных принципах и разном математическом формализме. С нашей точки зрения эта разнородность является свидетельством несовершенства сегодняшних воззрений на квантовые явления.

Сформулируем условия, которым должна, по нашему мнению, удовлетворять квантовая физика, рассматривающая оба процесса в движении электрона внутри атома единым образом.

1. Должны иметь место две системы дифференциальных уравнений.

   Первая относится к электрону и формулируется по отношению к его волновой функции.

   Вторая относится к фотону и формулируется по отношению к его волновой функции.

2. Системы уравнений должны быть взаимосвязаны. То есть, в первую систему уравнений должны входить параметры фотона, а во вторую систему уравнений должны входить параметры электрона.

3. Системы уравнений должны зависеть от внешнего поля. Динамическое изменение внешнего поля должно выводить систему уравнений из одного устойчивого состояния и через переходной процесс приводить к другому устойчивому состоянию.

4. В переходном процессе изменяются параметры электрона и фотона. В частности, переходной процесс должен описывать возникновение фотона, то есть, переход от состояния, в котором его волновая функция связана с электроном, к состоянию, когда волновая функция описывает свободный фотон, движущийся со скоростью света.

5. В частном случае первая система уравнений, относящаяся к электрону, должна сводиться к системе уравнений квантовой механики.

Поставленная столь общим образом задача поиска новой квантовой теории становится достаточно определенной, если исходить из развиваемой нами концепции, что квантовые явления есть следствие алгебраической структуры пространств, рассматриваемых в физике. Основные особенности нашей концепции суть следующие. Мы ввели пространство всех контра и ковариантных тензоров над пространством-временем СТО в качестве *обобщенного пространства-времени* $\mathbb{X}$ фундаментальных частиц. Действие фундаментальных частиц рассматривалось как векторная величина. Множество векторов действия фундаментальных частиц образовывало алгебру $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$, подобную алгебре $\mathbb{X}$. Волновая функция фундаментальной частицы трактовалась как дифференциал вектора действия этой частицы. Уравнения релятивистской квантовой механики для свободных фундаментальных частиц выводились из уравнений структуры для алгебры $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$.

В настоящем разделе мы развиваем указанную концепцию квантовой теории с целью описать взаимодействие фундаментальной и промежуточной частиц.

Мы исходим из следующих положений:

1. На пространстве действия фундаментальных частиц $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ вводятся линейные преобразования. Они составляют векторное пространство действия $\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$ промежуточных частиц. Множество линейных преобразований $\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$ является алгеброй. Вводится пространство действия фундаментальной и промежуточной частиц $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{\mathfrak{e}} + \mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$, которое также наделяется алгебраическими свойствами.

2. Частное дифференцирование закона умножения в алгебре $\mathbb{S}$ приводит к специфическим дифференциальным соотношениям – уравнениями структуры. Уравнения структуры для алгебры $\mathbb{S}$ приводятся к системе волновых уравнений для фундаментальной и промежуточной частиц, взаимодействующих друг с другом.

1. Алгебра действия фундаментальной и промежуточной частиц

В настоящем разделе мы обобщим представление о векторе действия, принятом в предыдущем разделе. Будем считать, что пространство действия $\mathbb{S}$ представляет собой сумму двух векторных пространств действия $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ и $\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$ фундаментальной и промежуточной частиц. Иначе говоря, вектор действия представлен суммой двух составляющих

$$\boldsymbol{S} + \mathsf{S}\,.$$

Здесь вектор $\boldsymbol{S} \in \mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$, а вектор $\mathsf{S} \in \mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$.

Закон умножения векторов действия в $\mathbb{S}$ в том случае, когда действие считается безразмерным, мы запишем так:

$$\boldsymbol{S} + \mathsf{S} = (\boldsymbol{S}_1 + \mathsf{S}_1) \circ (\boldsymbol{S}_2 + \mathsf{S}_2)\,. \tag{19}$$

Это умножение определено, если определено умножение пары векторов каждого вида. Произведение векторов $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ определено умножением векторов в алгебре действия фундаментальных частиц

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 \circ \boldsymbol{S}_2\,.$$

Произведение векторов S_1 и S_2 определено умножением векторов в алгебре действия векторов в алгебре действия промежуточных частиц

$$\mathsf{S} = \mathsf{S}_1 \circ \mathsf{S}_2\,.$$

Произведение векторов $\boldsymbol{S}_1$ и S_2 представляет собой действие линейного преобразования на вектор действия фундаментальной частицы (1), выраженное не в операторной, а в алгебраической форме

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 \circ \mathsf{S}_2\,.$$

Произведение векторов S_1 и $\boldsymbol{S}_2$ мы будем полагать равным нулю

$$\mathsf{S}_1 \circ \boldsymbol{S}_2 = 0\,.$$

Векторы $\boldsymbol{S}$ и S допускают разложение по базисным векторам

$$\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_K \cdot S^K\,, \qquad \mathsf{S} = \mathfrak{I}^L{}_K \cdot S^K{}_L\,.$$

Таким образом, вектор действия в $\mathbb{S}$ может быть разложен по базисным векторам следующим образом

$$\mathfrak{e}_K \cdot S^K + \mathfrak{I}^L{}_K \cdot S^K{}_L\,.$$

При этом рассмотренные выше произведения должны быть представлены через произведения соответствующих базисных векторов. Для базисных векторов $\mathfrak{e}_I$ мы ранее записали

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI}\,. \tag{20}$$

Закон композиции для базисных преобразований (7) приобретает вид $\circ$-умножения для базисных векторов $\mathfrak{I}^L{}_K$:

$$\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{I}^L{}_M\,. \tag{21}$$

Закон композиции для базисных векторов (1) также приобретает вид $\circ$-умножения:

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_M\,. \tag{22}$$

И, наконец, будем полагать

$$\mathfrak{I}^I{}_M \circ \mathfrak{e}_K = 0\,. \tag{23}$$

В результате множество векторов становится алгеброй, которую будем называть *алгеброй фундаментальной и промежуточной частиц* а также *алгеброй взаимодействующих фундаментальной и промежуточной частиц*.

Для того, чтобы перейти к размерному действию необходимо уравнение (19) записать в виде

$$\boldsymbol{S} + \mathsf{S} = \frac{1}{S_0}\,(\boldsymbol{S}_1 + \mathsf{S}_1) \circ (\boldsymbol{S}_2 + \mathsf{S}_2)\,. \tag{24}$$

где S_0 есть постоянная, имеющая размерность действия.

2. Уравнения структуры алгебры действия фундаментальной и промежуточной частиц

Особенность дифференцирования векторов алгебр связана с дифференцированием закона умножения векторов. Оно приводит к специфическим дифференциальным соотношениям – *уравнениям структуры.*

Далее рассмотрим уравнения структуры для алгебры действия фундаментальной и промежуточной частиц $\mathbb{S}$. Рассмотрим дифференциал закона умножения (19). Как мы условились ранее, будем различать дифференциалы индексом – d_1, $d_2, \ldots$ в зависимости от того по какому вектору выполняется дифференцирование. Из (19) следует

$$\begin{aligned}
d_1(\boldsymbol{S}+\mathsf{S}) &= d(\boldsymbol{S}_1+\mathsf{S}_1)\circ(\boldsymbol{S}_2+\mathsf{S}_2)\,,\\
d_2(\boldsymbol{S}+\mathsf{S}) &= (\boldsymbol{S}_1+\mathsf{S}_1)\circ d(\boldsymbol{S}_2+\mathsf{S}_2)\,.
\end{aligned}$$

Из этих выражений вблизи единицы алгебры, то есть при $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{-1}=\mathfrak{e}_0$ и при $\mathsf{S}=(\mathsf{S})^{-1}=\mathfrak{I}^K{}_I\cdot\delta^I{}_K$, получаем

$$\begin{aligned}
d(\boldsymbol{S}_1+\mathsf{S}_1) &= d_1(\boldsymbol{S}+\mathsf{S})\,,\\
d(\boldsymbol{S}_2+\mathsf{S}_2) &= d_2(\boldsymbol{S}+\mathsf{S})\,.
\end{aligned} \tag{25}$$

Введем второй дифференциал

$$d_2d_1(\boldsymbol{S}+\mathsf{S})\,.$$

Из (19) для него имеет место

$$d_2d_1(\boldsymbol{S}+\mathsf{S}) = d(\boldsymbol{S}_1+\mathsf{S}_1)\circ d(\boldsymbol{S}_2+\mathsf{S}_2)\,.$$

С учетом (25), вблизи единицы алгебры это уравнение принимает вид

$$d_2d_1(\boldsymbol{S}+\mathsf{S}) = d_1(\boldsymbol{S}+\mathsf{S})\circ d_2(\boldsymbol{S}+\mathsf{S})\,. \tag{26}$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры $\mathbb{S}$ в векторной форме.

Подставим в (26) выражения дифференциалов через дифференциалы координат

$$\begin{aligned}
&d_2d_1(\mathfrak{e}_L\cdot S^L+\mathfrak{I}^L{}_M\cdot S^M{}_L) = \\
&\qquad d_1(\mathfrak{e}_K\cdot S^K+\mathfrak{I}^L{}_K\cdot S^K{}_L)\circ d_2(\mathfrak{e}_I\cdot S^I+\mathfrak{I}^I{}_M\cdot S^M{}_I)\,.
\end{aligned} \tag{27}$$

Или

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{e}_L\cdot d_2d_1S^L+\mathfrak{I}^L{}_M\cdot d_2d_1S^M{}_L = \\
&\qquad d_1(\mathfrak{e}_K\cdot S^K+\mathfrak{I}^L{}_K\cdot S^K{}_L)\circ d_2(\mathfrak{e}_I\cdot S^I+\mathfrak{I}^I{}_M\cdot S^M{}_I)\,.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{e}_L\cdot d_2d_1S^L+\mathfrak{I}^L{}_M\cdot d_2d_1S^M{}_L = \\
&\quad(\mathfrak{e}_K\circ\mathfrak{e}_I)\,d_1S^K\,d_2S^I+(\mathfrak{I}^L{}_K\circ\mathfrak{e}_I)\,d_1S^K{}_L\,d_2S^I+\\
&\quad(\mathfrak{e}_K\circ\mathfrak{I}^I{}_M)\,d_1S^K\,d_2S^M{}_I+d_1S^K{}_L\,d_2S^M{}_I\,(\mathfrak{I}^L{}_K\circ\mathfrak{I}^I{}_M)\,.
\end{aligned}$$

Пользуясь законом умножения базисных векторов (20), (21), (22), (23), получим следующее уравнение

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{e}_L\cdot d_2d_1S^L+\mathfrak{I}^L{}_M\cdot d_2d_1S^M{}_L = \\
&\quad(\mathfrak{e}_L\cdot C^L{}_{KI})\,d_1S^K\cdot d_2S^I+\\
&\quad(\delta^I{}_K\cdot\mathfrak{e}_M)\,d_1S^K\cdot d_2S^M{}_I+d_1S^K{}_L\cdot d_2S^M{}_I\,(\delta^I{}_K\cdot\mathfrak{I}^L{}_M)\,.
\end{aligned}$$

После разделения уравнения по компонентам базисных векторов, получим уравнения структуры в координатной форме

$$\begin{aligned}
d_2d_1S^L &= C^L{}_{KI}\cdot d_2S^I\cdot d_1S^K+d_2S^L{}_I\cdot d_1S^I\\
d_2d_1S^M{}_L &= d_2S^M{}_I\cdot d_1S^I{}_L\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того, чтобы перейти к размерному действию необходимо уравнение (19) записать в виде (24). Тогда уравнения (26) и (28) примут вид соответственно

$$d_2d_1(\boldsymbol{S}+\mathsf{S}) = \frac{1}{S_0}\cdot d_1(\boldsymbol{S}+\mathsf{S})\circ d_2(\boldsymbol{S}+\mathsf{S})\,. \tag{29}$$

и

$$\begin{aligned}
&d_2d_1S^L = \tfrac{1}{S_0}\cdot C^L{}_{KI}\cdot d_2S^I\cdot d_1S^K+\tfrac{1}{S_0}\cdot d_2S^L{}_I\cdot d_1S^I\,,\\
&d_2d_1S^M{}_L = \tfrac{1}{S_0}\cdot d_2S^M{}_I\cdot d_1S^I{}_L\,.
\end{aligned} \tag{30}$$

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые постулаты, на которых строится квантовая механика фундаментальных и промежуточных частиц. Мы перейдем к более привычной записи квантовых постулатов, если введем переобозначения

$$d_1\boldsymbol{S}=\psi\,,\quad d_1\mathsf{S}=\Psi\,,\quad d_2=d\,.$$

Тогда вместо (29) получим

$$d\psi+d\Psi = \frac{1}{S_0}\,(\psi+\Psi)\circ(dS+d\mathsf{S})\,,$$

а вместо (30) получим

$$\begin{aligned}
d\psi^L &= \tfrac{1}{S_0}\,C^L{}_{KI}\cdot dS^I\cdot\psi^K+\tfrac{1}{S_0}\,dS^L{}_I\cdot\psi^I\\
d\psi^L{}_K &= \tfrac{1}{S_0}\,dS^L{}_I\cdot\psi^I{}_K\,.
\end{aligned} \tag{31}$$

Если ввести обобщенные импульсы в соответствии с соотношениями

$$d\boldsymbol{S}=p_M\cdot dx^M\,,\qquad d\mathsf{S}=\mathsf{p}_M\cdot dx^M$$

и

$$dS^I=p^I{}_M\cdot dx^M\,,\qquad dS^L{}_I=p^L{}_{IM}\cdot dx^M$$

получим квантовые постулаты в векторном виде

$$d\psi+d\Psi = \frac{1}{S_0}\,(\psi+\Psi)\circ(p_M+\mathsf{p}_M)\,dx^M\,.$$

и в координатном виде

$$\begin{aligned}
&d\psi^L = \tfrac{1}{S_0}\,C^L{}_{KI}\cdot p^I{}_M\cdot dx^M\cdot\psi^K+\tfrac{1}{S_0}\,p^L{}_{IM}\cdot dx^M\cdot\psi^I\\
&d\psi^L{}_K = \tfrac{1}{S_0}\,p^L{}_{IM}\cdot dx^M\cdot\psi^I{}_K\,.
\end{aligned} \tag{32}$$

Здесь ψ есть волновая функция фундаментальной частицы, которая представляет собой частный дифференциал вектора действия фундаментальной частицы. Ψ есть волновая функция промежуточной частицы, которая представляет собой частный дифференциал вектора действия промежуточной частицы.

3. Система волновых уравнений для фундаментальной и промежуточной частиц

Для вывода системы волновых уравнений для фундаментальной и промежуточной частиц воспользуемся соотношениями (32), записав их в следующем виде

$$\begin{aligned} &\partial_M \psi^L = \tfrac{1}{S_0}\,({C^L}_{KI}\cdot {p^I}_M + {p^L}_{KM})\,\psi^K\,,\\ &\partial_M {\psi^L}_K = \tfrac{1}{S_0}\,{p^L}_{IM}\cdot {\psi^I}_K\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Далее придадим этим уравнениям форму уравнения Дирака. Для этого умножим обе части каждого из уравнений на структурные константы ${C^{MN}}_L$, выполнив соответствующие суммирования. Получим

$$\begin{aligned} &{C^{MN}}_L\cdot\partial_M \psi^L = \tfrac{1}{S_0}\,{C^{MN}}_L\cdot({C^L}_{KI}\cdot {p^I}_M + {p^L}_{KM})\,\psi^K\,,\\ &{C^{MN}}_L\cdot\partial_M {\psi^L}_K = \tfrac{1}{S_0}\,{C^{MN}}_L\cdot {p^L}_{IM}\cdot {\psi^I}_K\,. \end{aligned} \tag{34}$$

(Как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.)

Эта система уравнений и есть система волновых уравнений для фундаментальной и промежуточной частиц, взаимодействующих между собой.

4. Частные случаи

1. Фундаментальная частица.

В этом случае надо положить волновую функцию и импульс промежуточной частицы равными нулю ${\psi^I}_K = 0$, ${p^I}_{LM} = 0$. Тогда система уравнений (34) сводится к уравнению для фундаментальной частицы

$${C^{MN}}_L\cdot\partial_M \psi^L = \tfrac{1}{S_0}\,{C^{MN}}_L\cdot {C^L}_{KI}\cdot {p^I}_M\cdot\psi^K\,. \tag{35}$$

2. Промежуточная частица.

В этом случае надо положить волновую функцию и импульс фундаментальной частицы равными нулю $\psi^I = 0$, ${p^I}_L = 0$. Тогда система уравнений (34) сводится к уравнению для промежуточной частицы

$${C^{MN}}_I\cdot\partial_M {\psi^L}_K = \tfrac{1}{S_0}\,{C^{MN}}_L\cdot {p^L}_{IM}\cdot {\psi^I}_K\,. \tag{36}$$

3. Излучение промежуточной частицы.

В этом случае надо положить импульс промежуточной частицы равным постоянной величине

$${p^L}_{IM} = {K^L}_{IM}\,.$$

Тогда система волновых уравнений (34) разделяется на две. Одна относится к фундаментальной частице с новым значением обобщенного импульса

$${C^{MN}}_L\cdot\partial_M \psi^L = \tfrac{1}{S_0}\,{C^{MN}}_L\cdot({C^L}_{KI}\cdot {p^I}_M + {K^L}_{KM})\,\psi^K\,, \tag{37}$$

а другая к излученной промежуточной частице

$${C^{MN}}_I\cdot\partial_M {\psi^L}_K = \tfrac{1}{S_0}\,{C^{MN}}_L\cdot {K^L}_{IM}\cdot {\psi^I}_K\,. \tag{38}$$

V. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АНТИЧАСТИЦЫ

Далее будем рассматривать линейные преобразования пространства действия фундаментальной античастицы ${}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$. Введем оператор, который ставит в соответствие вектору ${}^+\boldsymbol{S}\in{}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ вектор ${}^+\boldsymbol{S}'\in{}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$. Обозначим такой оператор $(\ )^{+\mathsf{S}}$ и назовем его *сопряженным преобразованием.* Указанное соответствие будем записывать так

$${}^+\boldsymbol{S}' = ({}^+\boldsymbol{S})^{+\mathsf{S}}\,.$$

Потребуем, чтобы преобразование $(\ )^{+\mathsf{S}}$: ${}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}\to{}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ было *линейным.* То есть, выполнялось соотношение

$$(\alpha_1\cdot{}^+\boldsymbol{S}_1 + \alpha_2\cdot{}^+\boldsymbol{S}_2)^{+\mathsf{S}} = \alpha_1\cdot({}^+\boldsymbol{S}_1)^{+\mathsf{S}} + \alpha_2\cdot({}^+\boldsymbol{S}_2)^{+\mathsf{S}}.$$

Вектор действия фундаментальной античастицы ${}^+\boldsymbol{S}$ может быть разложен по базисным векторам $\mathfrak{e}^I$:

$${}^+\boldsymbol{S} = S_0\,\mathfrak{e}^0 + S_{i_1}\,\mathfrak{e}^{i_1} + \ldots + S_{1324}\,\mathfrak{e}^{1324} = S_I\cdot\mathfrak{e}^I\,.$$

Поэтому вектор ${}^+\boldsymbol{S}' = ({}^+\boldsymbol{S})^{+\mathsf{S}}$ в силу линейности преобразования может быть записан в виде:

$${}^+\boldsymbol{S}' = S_I\cdot(\mathfrak{e}^I)^{+\mathsf{S}}\,.$$

Введем разложение векторов $(\mathfrak{e}^I)^{+\mathsf{S}}$ по базисным векторам $\mathfrak{e}^M$

$$(\mathfrak{e}^I)^{+\mathsf{S}} = {}^+{S^I}_M\cdot\mathfrak{e}^M\,.$$

Здесь ${}^+{S^I}_M$ – коэффициенты разложения. Используя это соотношение, получим

$${}^+\boldsymbol{S}' = S_I\cdot{}^+{S^I}_M\cdot\mathfrak{e}^M\,. \tag{39}$$

1. Векторное пространство линейных сопряженных преобразований

Обозначим множество линейных сопряженных преобразований ${}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$. На нем определим операции сложения $\oplus$

$$(\ )^{+\mathsf{S}_1}\oplus(\ )^{+\mathsf{S}_2}\in{}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$$

и умножения на число $\odot$

$$\alpha\odot(\ )^{+\mathsf{S}}\in{}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}\,.$$

Пусть эти операции удовлетворяют закону дистрибутивности.

$$\alpha\odot[(\ )^{+\mathsf{S}_1}\oplus(\ )^{+\mathsf{S}_2}] = \alpha\odot(\ )^{+\mathsf{S}_1}\oplus\alpha\odot(\ )^{+\mathsf{S}_2}\,. \tag{40}$$

В результате множество линейных сопряженных преобразований ${}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ становится векторным пространством. Соответствие закона дистрибутивности в ${}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ закону дистрибутивности в ${}^+\mathbb{S}$:

$$\alpha\cdot({}^+S_1+{}^+S_2)=\alpha\cdot{}^+S_1+\alpha\cdot{}^+S_2$$

можно рассматривать как условия согласования сложений "$\oplus$" и "$+$" и умножений "$\odot$" и "$\cdot$". Эти условия сводятся к тому, что $\oplus$-сложение становится $+$-сложением, а $\odot$-умножение становится $\cdot$-умножением после действия оператора (40) на вектор ${}^+\boldsymbol{S}$.

На векторном пространстве ${}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$ введем *базисные преобразования* $(\ )\mathfrak{K}^M{}_I$, чтобы

$$^+(\ )\mathsf{S}={}^+S^I{}_M\cdot(\ )\mathfrak{K}^M{}_I\,. \tag{41}$$

Здесь ${}^+S^I{}_M$ *координаты* сопряженного преобразования $(\ )^+\mathsf{S}$, представляющие собой ранее введенные коэффициенты разложения векторов ${}^+(\mathfrak{e}^I)\mathsf{S}$ по базисным векторам $\mathfrak{e}^M$. Линейное преобразование вектора ${}^+\boldsymbol{S}=S_K\cdot\mathfrak{e}^K$ должно иметь вид (39). Таким образом, должно выполняться

$${}^+S^I{}_M\cdot(\mathfrak{e}^K)\mathfrak{K}^M{}_I\cdot S_K=S_I\cdot{}^+S^I{}_M\cdot\mathfrak{e}^M\,.$$

Из этого условия найдем правило преобразования базисных векторов $\mathfrak{e}^K$ пространства ${}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ с помощью базисных преобразований $(\ )\mathfrak{K}^M{}_I$:

$$(\mathfrak{e}^K)\mathfrak{K}^M{}_I=\mathfrak{e}^M\cdot\delta^K{}_I\,, \tag{42}$$

где $\delta^K{}_I$ символ Кронекера.

2. Группа линейных сопряженных преобразований. Алгебра линейных сопряженных преобразований

На множестве линейных сопряженных преобразований ${}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$ введем *закон композиции*. То есть, двум преобразованиям $(\ )^+\mathsf{S}_1$ и $(\ )^+\mathsf{S}_2$ ставится в соответствие преобразование $(\ )^+\mathsf{S}$, называемое композицией или произведением преобразований $(\ )^+\mathsf{S}_1$ и $(\ )^+\mathsf{S}_2$:

$$(\ )^+\mathsf{S}=((\ )^+\mathsf{S}_1)^+\mathsf{S}_2\,, \tag{43}$$

где $(\ )^+\mathsf{S},\quad(\ )^+\mathsf{S}_1,\quad(\ )^+\mathsf{S}_2\in{}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$.

Потребуем, чтобы композиция преобразований была *групповым* законом. То есть, чтобы на множестве линейных сопряженных преобразований ${}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$ было определено

1. *единичное* преобразование $(\ )\delta$, для которого выполняются соотношения:

$$({}^+\boldsymbol{S})\delta={}^+\boldsymbol{S}\,,$$

$$(({}^+\boldsymbol{S})^+\mathsf{S})\delta=({}^+\boldsymbol{S})^+\mathsf{S}\,,$$

$$(({}^+\boldsymbol{S})\delta)^+\mathsf{S}=({}^+\boldsymbol{S})^+\mathsf{S}\,.$$

2. *обратное* преобразование $(\ )^+\mathsf{S}^{-1}$, для которого выполняются соотношения:

$$(({}^+\boldsymbol{S})^+\mathsf{S}^{-1})^+\mathsf{S}=({}^+\boldsymbol{S})\delta={}^+\boldsymbol{S}\,,$$

$$(({}^+\boldsymbol{S})^+\mathsf{S})^+\mathsf{S}^{-1}=({}^+\boldsymbol{S})\delta={}^+\boldsymbol{S}\,.$$

Указанные определения делают множество линейных сопряженных преобразований ${}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$ *группой.*

Найдем связь между координатами преобразования-композиции и координатами преобразований, участвующих в композиции. Для этого рассмотрим уравнение (43), записав преобразования, участвующие в композиции, через базисные преобразования:

$$(\ )^+\mathsf{S}={}^+S^M{}_L\cdot(\ )\mathfrak{K}^L{}_M\,,\quad(\ )^+\mathsf{S}_2={}^+(S_2)^M{}_I\cdot(\ )\mathfrak{K}^I{}_M\,,$$
$$(\ )^+\mathsf{S}_1={}^+(S_1)^K{}_L\cdot(\ )\mathfrak{K}^L{}_K\,,$$

и вектор ${}^+\boldsymbol{S}$ через базисные векторы

$${}^+\boldsymbol{S}=S_L\cdot\mathfrak{e}^L\,.$$

Для правой части уравнения (43) получим

$$\begin{aligned}
&({}^+(S_1)^K{}_I\cdot({}^+\boldsymbol{S})\mathfrak{K}^I{}_K)^+\mathsf{S}_2=\\
&({}^+(S_1)^K{}_I\cdot(S_L\cdot\mathfrak{e}^L)\mathfrak{K}^I{}_K)^+\mathsf{S}_2=\\
&(S_L\cdot{}^+(S_1)^L{}_K\cdot\mathfrak{e}^K)^+\mathsf{S}_2=\\
&{}^+(S_2)^M{}_I\cdot(S_L\cdot{}^+(S_1)^L{}_K\cdot\mathfrak{e}^K)\mathfrak{K}^I{}_M=\\
&S_L\cdot{}^+(S_1)^L{}_K\cdot{}^+(S_2)^M{}_I\cdot(\mathfrak{e}^K)\mathfrak{K}^I{}_M=\\
&S_L\cdot{}^+(S_1)^L{}_K\cdot{}^+(S_2)^K{}_I\cdot\mathfrak{e}^I\,.
\end{aligned}$$

Для левой части уравнения (43) получим

$$(S_I\cdot\mathfrak{e}^I)^+\mathsf{S}={}^+S^M{}_L\cdot(S_I\cdot\mathfrak{e}^I)\mathfrak{K}^L{}_M=S_L\cdot{}^+S^L{}_I\cdot\mathfrak{e}^I$$

Из сравнения этих выражений получим

$${}^+S^L{}_I={}^+(S_1)^L{}_K\cdot{}^+(S_2)^K{}_I\,. \tag{44}$$

Кроме того, из сравнения

$$((\ )^+\mathsf{S}_1)^+\mathsf{S}_2={}^+(S_2)^M{}_I\cdot{}^+(S_1)^K{}_L\cdot((\ )\mathfrak{K}^L{}_K)\mathfrak{K}^I{}_M$$

и

$$\begin{aligned}
(\ )^+\mathsf{S}&={}^+S^M{}_L\cdot(\ )\mathfrak{K}^L{}_M={}^+(S_2)^M{}_I\cdot(S_1)^I{}_L\cdot(\ )\mathfrak{K}^L{}_M\\
&={}^+(S_2)^M{}_I\cdot\delta^I{}_K\cdot{}^+(S_1)^K{}_L\cdot(\ )\mathfrak{K}^L{}_M
\end{aligned}$$

получим закон композиции базисных преобразований

$$((\ )\mathfrak{K}^L{}_K)\mathfrak{K}^I{}_M=(\ )\mathfrak{K}^I{}_K\cdot\delta^L{}_M\,. \tag{45}$$

Будем полагать, что законы композиции и сложения линейных сопряженных преобразований связаны законом дистрибутивности. Вследствие этого множество линейных сопряженных преобразований ${}^{+}\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$ является кольцом. А так как оно вместе с тем является векторным пространством, то, следовательно, оно представляет собой *алгебру*.

Линейное преобразование ${}^{+}\mathsf{S}\colon {}^{+}\mathbb{S}_{\mathfrak{e}} \to {}^{+}\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ является сопряженным* линейному преобразованию $\mathsf{S}\colon \mathbb{S}_{\mathfrak{e}} \to \mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$. Связь между этими преобразованиями дается формулами:

$$
\begin{aligned}
&{}^{+}(\boldsymbol{S}') = {}^{+}(\mathfrak{e}_K \cdot S^K{}_I \cdot S^I) = \\
&\qquad {}^{+}(S^I) \cdot {}^{+}(S^K{}_I) \cdot {}^{+}(e_K) = S_I \cdot {}^{+}S^I{}_K \cdot \mathfrak{e}^K = {}^{+}\boldsymbol{S}' \\
&{}^{+}(S^K{}_I) = {}^{+}S^I{}_K \\
&{}^{+}(\mathfrak{I}^I{}_K(\,)) = (\,)\mathfrak{K}^K{}_I \\
&{}^{+}(\mathfrak{I}^I{}_K(\,) \cdot S^K{}_I) = {}^{+}(S^K{}_I) \cdot {}^{+}(\mathfrak{I}^I{}_K(\,)) = {}^{+}S^I{}_K \cdot (\,)\mathfrak{K}^K{}_I \\
&{}^{+}(\boldsymbol{S}(\,)) = (\,){}^{+}\boldsymbol{S} \\
&{}^{+}S^M{}_L = g^{IM} \cdot S^K{}_I \cdot g_{KL}
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&{}^{+}(({}^{+}\boldsymbol{S})') = {}^{+}(S_I \cdot {}^{+}S^I{}_K \cdot \mathfrak{e}^K) = \\
&\qquad {}^{+}(e^K) \cdot {}^{+}({}^{+}S^I{}_K) \cdot {}^{+}(S_I) = \mathfrak{e}_K \cdot S^K{}_I \cdot S^I = \boldsymbol{S} \\
&{}^{+}({}^{+}S^K{}_I) = S^I{}_K \\
&{}^{+}((\,)\mathfrak{K}^I{}_K) = \mathfrak{I}^K{}_I(\,) \\
&{}^{+}((\,)\mathfrak{K}^I{}_K \cdot {}^{+}S^K{}_I) = {}^{+}({}^{+}S^K{}_I) \cdot {}^{+}((\,)\mathfrak{K}^I{}_K) = S^I{}_K \cdot \mathfrak{I}^K{}_I(\,) \\
&{}^{+}((\,){}^{+}\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{S}(\,) \\
&S^M{}_L = g^{IM} \cdot {}^{+}S^K{}_I \cdot g_{KL}\,.
\end{aligned}
$$

Здесь g_{KL} и g^{IM} – компоненты метрического и обратного метрического тензоров.

3. Алгебра действия промежуточной античастицы

Алгебра действия промежуточной античастицы ${}^{+}\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$ есть множество векторов действия ${}^{+}\mathsf{S}$. Закон композиции, действующий на векторах пространства ${}^{+}\mathbb{S}_{\mathfrak{I}}$, можно рассматривать как вид умножения и записывать его в в алгебраической, а не в операторной форме

$$
{}^{+}\mathsf{S} = {}^{+}\mathsf{S}_1 \circ {}^{+}\mathsf{S}_2\,. \tag{46}
$$

Закон композиции для базисных преобразований (45) приобретает вид $\circ$-умножения для базисных векторов $\mathfrak{K}^I{}_M$: *

$$
\mathfrak{K}^L{}_K \circ \mathfrak{K}^I{}_M = \mathfrak{K}^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,. \tag{47}
$$

Запись разложения линейного сопряженного преобразования по базисным преобразованиям (41) будем рассматривать как разложение вектора действия ${}^{+}\mathsf{S}$ по базисным векторам $\mathfrak{K}^I{}_M$

$$
{}^{+}\mathsf{S} = {}^{+}S^M{}_I \cdot \mathfrak{K}^I{}_M\,.
$$

Связь между координатами вектора – произведения и координатами векторов – сомножителей задается (44)

Умножение векторов (46) соответствует векторам действия в безразмерной форме. Для перехода к размерному действию необходимо перейти от этого уравнения к уравнению

$$
{}^{+}\mathsf{S} = \frac{1}{S_0}\,{}^{+}\mathsf{S}_1 \circ {}^{+}\mathsf{S}_2\,, \tag{48}
$$

где S_0 постоянная, имеющая размерность действия. В этом случае для координат векторов, участвующих в произведении, имеем

$$
{}^{+}S^M{}_L = \frac{1}{S_0}\,({}^{+}S_1)^M{}_I \cdot ({}^{+}S_2)^I{}_L\,.
$$

Вектор действия промежуточной частицы является функцией координат обобщенного пространства-времени античастицы

$$
{}^{+}\mathsf{S} = {}^{+}\mathsf{S}({}^{+}x)\,.
$$

Производная от вектора действия по координате есть вектор импульса промежуточной античастицы

$$
{}^{+}\mathrm{P}^M = \frac{\partial\,{}^{+}\mathsf{S}}{\partial x_M}\,,
$$

который может быть записан через координаты импульса следующим образом

$$
{}^{+}\mathrm{P}^M = \mathfrak{K}^I{}_L \cdot p^{ML}{}_I\,,
$$

где

$$
p^{ML}{}_I = \frac{\partial\,{}^{+}S^L{}_I}{\partial x_M}\,.
$$

---

*то есть полученным в результате операции сопряжения;

*Действие сопряженного линейного отображения на сопряженный вектор можно также рассматривать как вид умножения:

$$
{}^{+}\boldsymbol{S}' = {}^{+}\boldsymbol{S} \circ {}^{+}\mathsf{S}\,.
$$

Закон композиции для базисных векторов (42) приобретает вид:

$$
\mathfrak{e}^K \circ \mathfrak{K}^M{}_I = \delta^K{}_I \cdot \mathfrak{e}^M\,.
$$

4. Уравнения структуры алгебры действия промежуточной античастицы

Далее рассмотрим уравнения структуры алгебры действия промежуточной античастицы ${}^{+}\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$, определяемые дифференцированием вышеуказанного закона умножения векторов (45). Рассматривая дифференциал вектора действия ${}^{+}\mathsf{S}$, будем различать дифференциалы индексом d_1, $d_2, \ldots$, если дифференцирование выполняется по векторам ${}^{+}\mathsf{S}_1, {}^{+}\mathsf{S}_2, \ldots$ соответственно. Из (46) следует

$$d_1{}^{+}\mathsf{S} = d^{+}\mathsf{S}_1 \circ {}^{+}\mathsf{S}_2\,, \qquad d_2{}^{+}\mathsf{S} = {}^{+}\mathsf{S}_1 \circ d^{+}\mathsf{S}_2\,.$$

Из этих выражений получаем

$$d^{+}\mathsf{S}_2 = ({}^{+}\mathsf{S}_1)^{-1} \circ d_2{}^{+}\mathsf{S}\,, \qquad d^{+}\mathsf{S}_1 = d_1{}^{+}\mathsf{S} \circ ({}^{+}\mathsf{S}_2)^{-1}\,. \tag{49}$$

Введем второй дифференциал $d_2 d_1{}^{+}\mathsf{S}$. Из (46) для него имеет место

$$d_2 d_1{}^{+}\mathsf{S} = d^{+}\mathsf{S}_1 \circ d^{+}\mathsf{S}_2\,.$$

Используя (49), получим*

$$d_2 d_1{}^{+}\mathsf{S} = d_1{}^{+}\mathsf{S} \circ ({}^{+}\mathsf{S})^{-1} \circ d_2{}^{+}\mathsf{S}\,.$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при

$${}^{+}\mathsf{S} = ({}^{+}\mathsf{S})^{-1} = \mathfrak{K}^{K}{}_{I} \cdot \delta^{I}{}_{K}\,,$$

это уравнение принимает вид

$$d_2 d_1{}^{+}\mathsf{S} = d_1{}^{+}\mathsf{S} \circ d_2{}^{+}\mathsf{S}\,. \tag{50}$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$ в векторной форме.

Подставляя в (50) выражения дифференциалов через дифференциалы координат и пользуясь законом умножения базисных векторов (47), получим уравнения структуры в координатной форме

$$d_2 d_1{}^{+}S^{I}{}_{K} = d_1{}^{+}S^{I}{}_{L} \cdot d_2{}^{+}S^{L}{}_{K}\,. \tag{51}$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того, чтобы перейти к размерному действию необходимо перейти от уравнения (46) к уравнению (48). Тогда уравнения (50) и (51) примут вид соответственно

$$d_2 d_1{}^{+}\mathsf{S} = \frac{1}{S_0}\, d_1{}^{+}\mathsf{S} \circ d_2{}^{+}\mathsf{S}\,. \tag{52}$$

и

$$d_2 d_1{}^{+}S^{I}{}_{K} = \frac{1}{S_0} \cdot d_1{}^{+}S^{I}{}_{L} \cdot d_2{}^{+}S^{L}{}_{K}\,. \tag{53}$$

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые постулаты, на которых строится квантовая механика промежуточных античастиц. Мы перейдем к более привычной записи квантовых постулатов, если введем переобозначения

$$d_1{}^{+}\mathsf{S} = {}^{+}\Psi\,, \quad d_2 = d\,.$$

Тогда вместо (52) получим

$$d^{+}\Psi = \frac{1}{S_0}\, {}^{+}\Psi \circ d^{+}\mathsf{S}\,,$$

а вместо (53) получим

$$d^{+}\psi^{I}{}_{K} = \frac{1}{S_0} \cdot {}^{+}\psi^{I}{}_{L} \cdot d^{+}S^{L}{}_{K}\,.$$

Если ввести обобщенные импульсы фундаментальной античастицы в соответствии с соотношением

$$d^{+}\mathsf{S} = {}^{+}\mathrm{P}^{M} \cdot dx_M\,,$$

получим квантовые постулаты в векторном виде

$$d^{+}\Psi = \frac{1}{S_0}\, {}^{+}\Psi \circ {}^{+}\mathrm{P}^{M} \cdot dx_M$$

и в координатном виде

$$d^{+}\psi^{I}{}_{K} = \frac{1}{S_0} \cdot {}^{+}\psi^{I}{}_{L} \cdot {}^{+}p^{ML}{}_{K} \cdot dx_M\,. \tag{54}$$

Здесь ${}^{+}\Psi$ есть волновая функция промежуточной античастицы, которая представляет собой частный дифференциал вектора действия этой частицы.

5. Волновое уравнение для свободной промежуточной античастицы

Для вывода волнового уравнения для свободной промежуточной античастицы воспользуемся соотношением (54), записав его в следующем виде

$$\partial^{M\,+}\psi^{I}{}_{K} = \frac{1}{S_0}\, {}^{+}\psi^{I}{}_{L} \cdot p^{ML}{}_{K}\,. \tag{55}$$

Далее придадим этому соотношению форму уравнения Дирака для античастиц. Для этого умножим его обе части на структурные константы $C^{K}{}_{NM}$, выполнив соответствующие суммирования. Получим

$$C^{K}{}_{NM} \cdot \partial^{M\,+}\psi^{I}{}_{K} = \frac{1}{S_0}\, C^{K}{}_{NM} \cdot {}^{+}\psi^{I}{}_{L} \cdot p^{ML}{}_{K}\,. \tag{56}$$

(Как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.)

Это уравнение и есть волновое уравнение для свободной промежуточной античастицы в самом общем виде.

---

*Здесь учтено, что для (46)

$${}^{+}\mathsf{S}^{-1} = ({}^{+}\mathsf{S}_2)^{-1} \circ ({}^{+}\mathsf{S}_1)^{-1}\,.$$

VI. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ. ОБОБЩАЮЩАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ

Сведения об элементарных частицах доставляются, в частности, из экспериментов по столкновению частиц. Процессы столкновения включают в себя три этапа. На первом этапе мы имеем группу свободных частиц, именуемую *начальной конфигурацией* частиц. На втором этапе эти частицы вступают в отношение, называемое *взаимодействием*, вследствие которого на третьем этапе имеет место преобразование начальной конфигурации частиц в новую группу (другими словами *конечную конфигурацию*) свободных частиц. В процессах столкновения можно выделить два элементарных преобразования начальной конфигурации частиц в конечную. Одно из них представляет *синтез* частицы, другое представляет *распад* частицы. При синтезе частицы несколько начальных частиц преобразуются в одну конечную частицу. При распаде частицы одна начальная частица преобразуется в несколько конечных частиц. Произвольный процесс столкновения частиц можно представить как последовательное осуществление нескольких синтезов и распадов частиц.

Имея в виду, что частицы представлены векторами алгебры действия $\mathbb{S}$, то есть на векторах действия имеет место не только операция сложения, но и умножения, мы хотим представить процессы синтеза и распада частиц через умножение соответствующих векторов алгебры действия $\mathbb{S}$. Так, например, процесс синтеза мы представим в виде произведения

$$\boldsymbol{S}_1 \circ \boldsymbol{S}_2 \circ ... \circ \boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{S}\,,$$

где $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, ..., \boldsymbol{S}_n$ – векторы действия частиц начальной конфигурации, участвующих в синтезе, $\boldsymbol{S}$ – вектор действия синтезируемой частицы. Прочтение этого соотношения справа налево представляет процесс распада частицы. Если возможна адекватная формулировка правил вычисления произведений векторов, то по таким правилам можно было бы определить конечную конфигурацию частиц по начальной конфигурации частиц, участвующих в столкновении.

Далее рассмотрим подалгебры алгебры действия частиц $\mathbb{S}$ по мере усложнения состава частиц, описываемых этими подалгебрами. Взаимодействие в указанной интерпретации может быть представлено через элементарные акты, которые представляются таблицей умножения базисных векторов. Поэтому далее рассмотрим таблицы умножения базисных векторов подалгебр алгебры действия частиц $\mathbb{S}$ и дадим им соответствующую интерпретацию.

1. Выделим частицы, состояние которых описывается вектором действия $\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_K \cdot S^K \in \mathbb{S}_\mathfrak{e}$. Мы определили их как *фундаментальные*. К фундаментальным частицам мы отнесли лептоны и кварки, а также гипотетические (суперсимметричные лептонам и кваркам) лептино и кваркино. Указанные частицы определены как фундаментальные, поскольку предполагается, что они не могут быть синтезированы из других частиц. Этим частицам соответствует правило умножения базисных векторов действия

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI}\,.$$

В соответствии с нашей концепцией это выражение при прочтении его слева направо нужно рассматривать как синтез фундаментальной частицы, что противоречит представлению о ее фундаментальности. Это противоречие снимается, если придерживаться следующей точки зрения. Фундаментальная частица содержит компоненты, которые, взаимодействуя друг с другом, синтезируют эту же фундаментальную частицу. Причем указанные компоненты не существуют как самостоятельные образования. Например, электрон включает в себя левую и правую компоненты, которые связаны между собой системой дифференциальных уравнений (то есть взаимодействуют между собой), но не существуют самостоятельно.

2. Выделим частицы, состояние которых описывается вектором действия ${}^+\boldsymbol{S} = S_K \cdot \mathfrak{e}^K \in {}^+\mathbb{S}_\mathfrak{e}$. Мы определили их как *фундаментальные античастицы*. К фундаментальным античастицам мы отнесли антилептоны и антикварки а также гипотетические (суперсимметричные антилептонам и антикваркам) антилептино и антикваркино. Указанные античастицы определены как фундаментальные поскольку также предполагается, что они не могут быть синтезированы из других частиц. Этим частицам соответствует правило умножения базисных векторов

$$\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}^K = {}^+C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{e}^L\,.$$

3. Выделим частицы, состояние которых описывается вектором действия $\mathsf{S} = \mathfrak{I}^L{}_K \cdot S^K{}_L \in \mathbb{S}_\mathfrak{I}$. Мы определили их как *промежуточные* частицы. Такое определение обусловлено тем, что эти частицы выступают как носители взаимодействия между фундаментальными частицами (и античастицами). К промежуточным частицам мы отнесли фотон, W и Z-бозоны, глюоны и мезоны, а также гипотетические (им суперсимметричные) частицы. Этим частицам соответствует правило умножения базисных векторов

$$\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{I}^M{}_N = \delta^M_L \cdot \mathfrak{I}^K{}_N\,. \tag{57}$$

Вышеуказанные правила произведений базисных векторов допускают естественное обобщение, базирующееся на правилах тензорной алгебры. В частности, все произведения, представляющие собой тензоры четных рангов, допускают отображение в числовое пространство K (множество действительных чисел). В результате произведение базисных векторов (57) приобретает вид

$$\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{I}^M{}_N = \mathfrak{I}^K{}_L{}^M{}_N + \delta^M{}_L \cdot \mathfrak{I}^K{}_N + \delta^M{}_L \cdot \delta^K{}_N\,.$$

Первое слагаемое в правой части должно быть опущено, так как выводит нас за рамки рассматриваемой алгебры:

$$\mathfrak{J}^K{}_L \circ \mathfrak{J}^M{}_N = \delta^M{}_L \cdot \mathfrak{J}^K{}_N + \delta^M{}_L \cdot \delta^K{}_N \,. \qquad (58)$$

Последнее слагаемое входит в алгебру и должно быть проинтерпретировано с точки зрения взаимодействия частиц. Этому слагаемому соответствует скалярная компонента вектора действия, которую мы свяжем со *скалярной* промежуточной частицей.

4. В предыдущем пункте мы показали, что обобщение правила умножения базисных векторов (57) до (58) на основании правил тензорной алгебры приводит к необходимости расширения алгебры действия промежуточных частиц и ведения скалярной промежуточной частицы. Обозначим действие скалярной промежуточной частицы символом C, а базисные единицы этого действия обозначим через $\delta^K{}_L$. Тогда

$$C = \delta^K{}_L \cdot C^K{}_L = C^K{}_K \,,$$

где $C^K{}_L \in K$ – координаты действия. Введение скаляров в алгебру действия требует определения умножения скаляров между собой и умножения скаляра на вектор. Априори, без дополнительных соображений формулировка таких законов умножения содержит существенную неопределенность, поэтому пока мы их рассматривать не будем.*

5. Выделим частицы, состояние которых описывается вектором действия ${}^+\mathsf{S} = {}^+S^K{}_L \cdot \mathfrak{K}^L{}_K \in {}^+\mathbb{S}_\mathfrak{J}$. Мы определили их как *промежуточные* античастицы. Эти частицы также выступают как носители взаимодействия между фундаментальными частицами (и античастицами). К промежуточным античастицам отнесем фотон, W^+ и Z-бозоны, антиглюоны и антимезоны, а также гипотетические (им суперсимметричные) античастицы. Этим частицам соответствует правило умножения базисных векторов

$$\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{K}^M{}_N = \delta^K{}_N \cdot \mathfrak{K}^M{}_L \,. \qquad (59)$$

Это правило также допускает естественное обобщение, базирующееся на правилах тензорной алгебры. В частности, все произведения, представляющие собой тензоры четных рангов, допускают отображение в числовое пространство K (множество действительных чисел). В результате произведение базисных векторов (59) приобретает вид

$$\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{K}^M{}_N = \delta^K{}_N \cdot \mathfrak{K}^M{}_L + \delta^K{}_N \cdot \delta^M{}_L \,. \qquad (60)$$

Здесь опущено слагаемое $(\mathfrak{K}^K{}_L{}^M{}_N)$ в правой части, так как оно выводит нас за рамки рассматриваемой алгебры. Слагаемому $(\delta^K{}_N \cdot \delta^M{}_L)$ соответствует скалярная компонента вектора действия, которую мы также свяжем со *скалярной* промежуточной античастицей.

6. Рассмотрим алгебру, которая представляет фундаментальные и промежуточные частицы совместно, $\mathbb{S} = \mathbb{S}_\mathfrak{e} + \mathbb{S}_\mathfrak{J}$. Векторы этой алгебры имеют вид

$$\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_K \cdot S^K + \mathfrak{J}^L{}_K \cdot S^K{}_L \,.$$

В Разделе IV.1 мы задали таблицу умножения базисных векторов в этой алгебре с помощью следующих соотношений

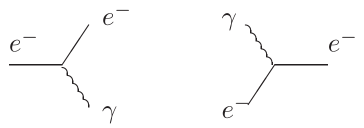
$$\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{e}_K = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{IK} \,, \qquad (61)$$

$$\mathfrak{J}^K{}_L \circ \mathfrak{J}^M{}_N = \delta^M{}_L \cdot \mathfrak{J}^K{}_N \,. \qquad (62)$$

$$\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{J}^K{}_L = \delta^K{}_I \cdot \mathfrak{e}_L \,. \qquad (63)$$

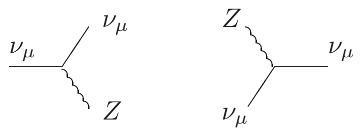
$$\mathfrak{J}^K{}_L \circ \mathfrak{e}_I = 0 \,. \qquad (64)$$

Соотношение (63) соответствует случаю поглощения промежуточной частицы фундаментальной частицей, а при прочтении его справа налево случаю испускания промежуточной частицы фундаментальной частицей. Именно в этом соотношении промежуточная частица проявляет себя как переносчик взаимодействия между фундаментальными частицами. На примерах взаимодействия фундаментальных и промежуточных частиц покажем соответствие между элементарными диаграммами Фейнмана и правилами произведения базисных векторов (63) в рассматриваемой алгебре.



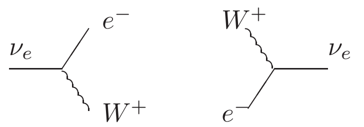
$e^- \to e^- \gamma$ $\qquad$ $e^- \gamma \to e^-$

$\mathfrak{e}_L \to \mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{J}^K{}_L$ $\qquad$ $\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{J}^K{}_L \to \mathfrak{e}_L$



$\nu_\mu \to \nu_\mu Z$ $\qquad$ $\nu_\mu Z \to \nu_\mu$

$\mathfrak{e}_L \to \mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{J}^K{}_L$ $\qquad$ $\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{J}^K{}_L \to \mathfrak{e}_L$



$\nu_e \to e^- W^+$ $\qquad$ $e^- W^+ \to \nu_e$

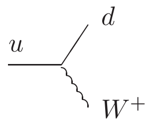
$\mathfrak{e}_L \to \mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{J}^K{}_L$ $\qquad$ $\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{J}^K{}_L \to \mathfrak{e}_L$

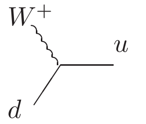
*Например, умножение скаляров можно подчинить следующему правилу

$$C_1 \circ C_2 = C$$

и правилу умножения базисных единиц

$$\delta^K{}_L \circ \delta^M{}_N = \delta^M{}_L \cdot \delta^K{}_N \,.$$





$u \to d\,W^+$ $\qquad$ $d\,W^+ \to u$

$\mathfrak{e}_L \to \mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{J}^K{}_L$ $\qquad$ $\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{J}^K{}_L \to \mathfrak{e}_L$

Приведенные правила умножения базисных векторов также допускают естественное обобщение, базирующееся на правилах тензорной алгебры. С эстетической точки зрения правило умножения (61) интересно обобщить до следующего соотношения

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI} + \mathfrak{J}^M{}_L \cdot C^L{}_{MKI}\,, \tag{65}$$

В этом случае в волновое уравнение промежуточной частицы входит волновая функция фундаментальной частицы, взаимодействующей с указанной промежуточной частицей. В рассматриваемой алгебре правило умножения (62) также необходимо обобщить до (58). С точки зрения тензорной алгебры соотношение (64) надо записать так

$$\mathfrak{J}^K{}_L \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}^K \cdot g_{LI}\,. \tag{66}$$

Однако оно выходит за рамки рассматриваемой алгебры и приобретает смысл только при совместном рассмотрении алгебр действия частиц и античастиц.

8. Выделим фундаментальные частицы и античастицы. Рассмотрим алгебру, которая представляет эти частицы совместно, $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{\mathfrak{e}} + {}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$. Векторы этой алгебры имеют вид

$$\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_K \cdot S^K + S_L \cdot \mathfrak{e}^L\,.$$

В Лекции 16 мы задали таблицу умножения базисных векторов в этой алгебре с помощью следующих соотношений

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI}\,, \tag{67}$$

$$\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}^K = {}^+C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{e}^L\,, \tag{68}$$

$$\langle \mathfrak{e}_I, \mathfrak{e}^K \rangle = \langle \mathfrak{e}^K, \mathfrak{e}_I \rangle = \delta^K{}_I\,, \tag{69}$$

В предыдущем пункте мы привели соотношение (65), обобщающее (67). Аналогично соотношение (68) интересно обобщить до

$$\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}^K = {}^+C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{e}^L + {}^+C^{IKM}{}_L \cdot \mathfrak{K}^L{}_M\,, \tag{70}$$

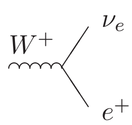
В этом случае в волновое уравнение промежуточной античастицы входит волновая функция фундаментальной античастицы, взаимодействующей с указанной промежуточной античастицей. Правило умножения (69) также должно быть обобщено в соответствии с правилами тензорной алгебры. С этой точки зрения произведение ${}^+\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{S}$ можно рассматривать как линейное преобразование вектора $\boldsymbol{S}$, а произведение $\boldsymbol{S} \circ {}^+\boldsymbol{S}$ можно рассматривать как линейное преобразование вектора ${}^+\boldsymbol{S}$. Поэтому можно положить

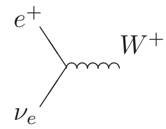
$$\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}_K = \mathfrak{J}^I{}_K \tag{71}$$

и

$$\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{e}^K = \mathfrak{K}^K{}_I\,. \tag{72}$$

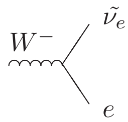
Этим соотношениям соответствуют случаи аннигиляции фундаментальных частицы и античастицы в промежуточную и обратному образованию фундаментальных частицы и античастицы из промежуточной частицы. На примере указанного взаимодействия фундаментальных частиц с промежуточными покажем соответствие между элементарными диаграммами Фейнмана и правилами произведения базисных векторов (71) и (72).

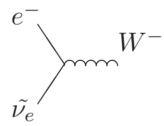




$W^+ \to \nu_e\, e^+$ $\qquad$ $e^+\,\nu_e \to W^+$

$\mathfrak{J}^K{}_L \to \mathfrak{e}^K \circ \mathfrak{e}_L$ $\qquad$ $\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}_K \to \mathfrak{J}^I{}_K$





$W^- \to e\,\tilde{\nu_e}$ $\qquad$ $e^-\,\tilde{\nu_e} \to W^-$

$\mathfrak{K}^K{}_I \to \mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{e}^K$ $\qquad$ $\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{e}^K \to \mathfrak{K}^K{}_I$

Соотношения (69), (71) и (72) могут быть объединены следующим образом

$$\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}_K = \mathfrak{J}^I{}_K + \delta^I{}_K \tag{73}$$

и

$$\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{e}^K = \mathfrak{K}^K{}_I + \delta^K{}_I\,. \tag{74}$$

Из них следует, что аннигиляция фундаментальных частицы и античастицы приводит к образованию векторной и скалярной промежуточных частиц.

Таким образом, векторы действия фундаментальных частиц и античастиц не образуют независимую алгебру и должны рассматриваться вместе с промежуточными частицами и античастицами.

9. Выделим промежуточные частицы и античастицы. Рассмотрим алгебру, которая представляет эти частицы совместно, $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{\mathfrak{J}} + {}^+\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$. Векторы этой алгебры имеют вид

$$\boldsymbol{S} = \mathfrak{J}^L{}_K \cdot S^K{}_L + {}^+S^L{}_K \cdot \mathfrak{K}^K{}_L\,.$$

Таблица умножения базисных векторов в этой алгебре помимо уже приведенных соотношений (58) и (60) должна включать произведения $\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{J}^M{}_N$ и $\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{J}^M{}_N$. На основании правил тензорной алгебры имеем

$$\mathfrak{J}^K{}_L \circ \mathfrak{K}^M{}_N = g_{LN} \cdot {}^+C^{KM}{}_P \cdot \mathfrak{e}^P + g_{LN} \cdot g^{KM} , \qquad (75)$$

и

$$\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{J}^M{}_N = \mathfrak{e}_P \cdot C^P{}_{NL} \cdot g^{KM} + g^{KM} \cdot g_{LN} , \qquad (76)$$

Таким образом, в общем случае векторы действия промежуточных частиц и античастиц не образуют независимую алгебру и должны рассматриваться вместе с фундаментальными частицами и античастицами.

10. Рассмотрим алгебру действия, которая представляет фундаментальные и промежуточные частицы и античастицы совместно $\mathbb{S} = \mathbb{S}_\mathfrak{e} + \mathbb{S}_\mathfrak{J} + {}^+\mathbb{S}_\mathfrak{e} + {}^+\mathbb{S}_\mathfrak{J}$. Векторы этой алгебры имеют вид

$$\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_K \cdot S^K + \mathfrak{J}^L{}_K \cdot S^K{}_L + S_K \cdot \mathfrak{e}^K + {}^+S^K{}_L \cdot \mathfrak{K}^L{}_K .$$

В соответствии с соображениями, приведенными в предыдущих пунктах Раздела, таблица умножения базисных векторов в этой алгебре имеет вид

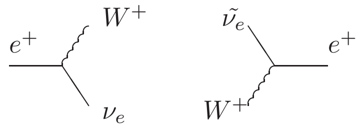
$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI} + \mathfrak{J}^M{}_L \cdot C^L{}_{MKI} , \\ &\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{J}^K{}_L = \delta^K_I \cdot \mathfrak{e}_L , \\ &\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{e}^K = \mathfrak{K}^K{}_I + \delta^K{}_I , \\ &\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{K}^K{}_L = g_{IL} \cdot \mathfrak{e}^K , \end{aligned} \qquad (77)$$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}^K = {}^+C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{e}^L + {}^+C^{IKM}{}_L \cdot \mathfrak{K}^L{}_M , \\ &\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{K}^K{}_L = \delta^I{}_L \cdot \mathfrak{e}^K , \\ &\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}_K = \mathfrak{J}^I{}_K + \delta^I{}_K , \\ &\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{J}^K{}_L = g^{IK} \cdot \mathfrak{e}_L , \end{aligned} \qquad (78)$$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{J}^K{}_L \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}^K \cdot g_{LI} , \\ &\mathfrak{J}^K{}_L \circ \mathfrak{J}^M{}_N = \delta^M{}_L \cdot \mathfrak{J}^K{}_N + \delta^M{}_L \cdot \delta^K{}_N , \\ &\mathfrak{J}^K{}_L \circ \mathfrak{e}^I = \mathfrak{e}^K \cdot \delta^I{}_L , \\ &\mathfrak{J}^K{}_L \circ \mathfrak{K}^M{}_N = g_{LN} \cdot {}^+C^{KM}{}_P \cdot \mathfrak{e}^P + g_{LN} \cdot g^{KM} , \end{aligned} \qquad (79)$$

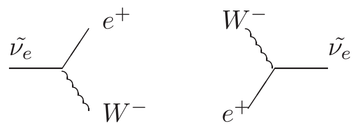
$$\begin{aligned} &\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{e}^I = g^{KI} \cdot \mathfrak{e}_L , \\ &\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{K}^M{}_N = \delta^K{}_N \cdot \mathfrak{K}^M{}_L + \delta^K{}_N \cdot \delta^M{}_L , \\ &\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{e}_I = \delta^K_I \cdot \mathfrak{e}_L , \\ &\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{J}^M{}_N = \mathfrak{e}_P \cdot C^P{}_{NL} \cdot g^{KM} + g^{KM} \cdot g_{LN} , \end{aligned} \qquad (80)$$

Проиллюстрируем некоторые из правил умножения элементарными актами взаимодействия фундаментальных и промежуточных частиц.



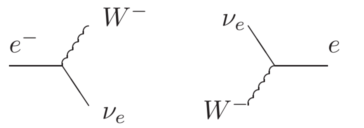
$e^+ \to W^+\, \tilde{\nu_e}$ $\qquad$ $W^+\, \tilde{\nu_e} \to e^+$

$\mathfrak{e}^K \to \mathfrak{J}^K{}_L \circ \mathfrak{e}^I$ $\qquad$ $\mathfrak{J}^I{}_K \circ \mathfrak{e}^K \to \mathfrak{e}^I$



$\tilde{\nu_e} \to e^+\, W^-$ $\qquad$ $e^+\, W^- \to \tilde{\nu_e}$

$\mathfrak{e}^K \to \mathfrak{e}^L \circ \mathfrak{K}^K{}_L$ $\qquad$ $\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{K}^K{}_L \to \mathfrak{e}^K$



$e^- \to W^-\, \nu_e$ $\qquad$ $W^-\, \nu_e \to e$

$\mathfrak{e}_L \to \mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{e}_I$ $\qquad$ $\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{e}_I \to \mathfrak{e}_L$

11. Далее еще раз приведем произведения базисных векторов алгебры действия $\mathbb{S}$ фундаментальных и промежуточных частиц, сопоставив этим произведениям элементарные акты взаимодействий. Фундаментальные частицы обозначим F, промежуточные частицы обозначим B, скалярные частицы обозначим ϕ.

В результате имеем соответствие между произведениями базисных векторов и элементарными актами взаимодействия частиц

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI} + \mathfrak{J}^M{}_L \cdot C^L{}_{MKI} \\ &\qquad\qquad \sim \quad F_1 \circ F_2 \to F_3 + B , \\ &\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{J}^K{}_L = \delta^K{}_I \cdot \mathfrak{e}_L \quad \sim \quad F_1 \circ B \to F_2 , \end{aligned} \qquad (81)$$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}^K = {}^+C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{e}^L + {}^+C^{IKM}{}_L \cdot \mathfrak{K}^L{}_M \\ &\qquad\qquad \sim \quad {}^+F_1 \circ {}^+F_2 \to {}^+F_3 + B , \\ &\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{K}^K{}_L = \delta^I{}_L \cdot \mathfrak{e}^K \quad \sim \quad {}^+F_1 \circ {}^+B \to {}^+F_2 , \end{aligned} \qquad (82)$$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{e}^K = \mathfrak{K}^K{}_I + \delta^K{}_I \quad \sim \quad F \circ {}^+F \to {}^+B + \phi , \\ &\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{K}^K{}_L = g_{IL} \cdot \mathfrak{e}^K \quad \sim \quad F \circ {}^+B \to {}^+F , \end{aligned} \qquad (83)$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}_K = \mathfrak{I}^I{}_K + \delta^I{}_K \quad \sim \quad {}^+F_1 \circ F_2 \to B + \phi\,, \\
&\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{I}^K{}_L = g^{IK} \cdot \mathfrak{e}_L \quad \sim \quad {}^+F \circ B \to F_1\,,
\end{aligned} \tag{84}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}^K \cdot g_{LI} \quad \sim \quad B \circ F_1 \to {}^+F_2 i\,, \\
&\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{I}^M{}_N = \delta^M{}_L \cdot \mathfrak{I}^K{}_N + \delta^M{}_L \cdot \delta^K{}_N \\
&\qquad\qquad \sim \quad B_1 \circ B_2 \to B_3 + \phi\,,
\end{aligned} \tag{85}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{e}^I = g^{KI} \cdot \mathfrak{e}_L \quad \sim \quad {}^+B \circ {}^+F_1 \to F_2\,, \\
&\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{K}^M{}_N = \delta^K{}_N \cdot \mathfrak{K}^M{}_L + \delta^K{}_N \cdot \delta^M{}_L \\
&\qquad\qquad \sim \quad {}^+B_1 \circ {}^+B_2 \to {}^+B_3 + \phi\,,
\end{aligned} \tag{86}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{e}^I = \mathfrak{e}^K \cdot \delta^I{}_L \quad \sim \quad B \circ {}^+F_1 \to {}^+F_2\,, \\
&\mathfrak{I}^K{}_L \circ \mathfrak{K}^M{}_N = g_{LN} \cdot {}^+C^{KM}{}_P \cdot \mathfrak{e}^P + g_{LN} \cdot g^{KM} \\
&\qquad\qquad \sim \quad B_1 \circ {}^+B_2 \to F + \phi\,,
\end{aligned} \tag{87}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{e}_I = \delta^K{}_I \cdot \mathfrak{e}_L \quad \sim \quad {}^+B \circ F_1 \to F_2\,, \\
&\mathfrak{K}^K{}_L \circ \mathfrak{I}^M{}_N = \mathfrak{e}_P \cdot C^P{}_{NL} \cdot g^{KM} + g^{KM} \cdot g_{LN}\,, \\
&\qquad\qquad \sim \quad {}^+B_1 \circ B_2 \to F + \phi\,,
\end{aligned} \tag{88}
$$

VII. ВЫВОДЫ

- Действие промежуточной частицы есть оператор линейного преобразования, действующий на векторы действия фундаментальных частиц. Действие промежуточной античастицы есть оператор линейного преобразования, действующий на векторы действия фундаментальных античастиц.

- Векторы действия промежуточной частицы составляют алгебру. Векторы действия промежуточной античастицы также составляют алгебру.

- Волновое уравнение для свободных промежуточных частиц имеет вид (18). Волновое уравнение для свободных промежуточных античастиц имеет вид (56).

- Рассмотреть взаимодействующие частицы означает: 1) ввести алгебру действия, общую для взаимодействующих частиц; 2) записать уравнения структуры этой алгебры и 3) перейти от указанных уравнений к системе волновых уравнений взаимодействующих частиц.

- Правилам умножения базисных векторов алгебры действия фундаментальных и промежуточных частиц и античастиц соответствуют элементарные акты взаимодействия этих частиц, иллюстрируемые элементарными диаграммами Фейнмана.