Лекция 16. Универсальная алгебра как алгебра фундаментальных частиц

А. А. Кецарис
(20 октября 2005 г.)

В Лекции завершается описание фундаментальных частиц с помощью универсальной тензорной алгебры. Эта алгебра позволяет рассматривать фундаментальные частицы с единых позиций и служит основой для построения единой теории взаимодействий.

I. ВВЕДЕНИЕ

В Лекции 11 мы рассматривали задачу поиска алгебры кварков, отличной от алгебры Клиффорда (алгебры лептонов). Мы подчеркнули, что обе алгебры должны быть двумя частными разновидностями одной алгебры, которую мы назвали *универсальной* или *алгеброй фундаментальных частиц*. Рассмотренные ранее алгебры, отнесенные к разным фундаментальным частицам, отличались перестановочными соотношениями. Поэтому алгебра, являющаяся общей частью этих алгебр, должна строиться без привлечения перестановочных соотношений. Такая алгебра есть универсальная тензорная алгебра, которую мы далее и рассмотрим.

Алгебра фундаментальных частиц имеет две модификации – алгебру действия и алгебру пространства-времени. Алгебра фундаментальных частиц собственно есть общая часть той и другой модификации, не зависящая от физического смысла координат вектора. Далее мы будем строить алгебру фундаментальных частиц как алгебру пространства-времени и как алгебру действия, имея в виду, что они отличаются направлением умножения (см. Лекцию 7). Алгебра пространства-времени характеризуется умножением слева, алгебра действия характеризуется умножением справа.

Кроме того, понятно, что помимо алгебры фундаментальных частиц должна быть введена алгебра фундаментальных античастиц. В наших построениях алгебра фундаментальных частиц выступает как контравариантная алгебра, алгебра фундаментальных античастиц выступает как ковариантная алгебра (см. Лекции 6,7). Их построение идентично. Поэтому далее более подробно остановимся на контравариантной универсальной алгебре и менее подробно остановимся на ковариантной универсальной алгебре, подчеркнув только ее особенности и взаимосвязь между указанными алгебрами.

Некоторые из предыдущих результатов будут здесь повторены, но с единственной целью: показать, что они являются следствием одной основы – универсальной алгебры.

II. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В основе построения универсальной контравариантной алгебры лежит пространство-время специальной теории относительности (СТО). Пространство-время СТО обозначим X и будем рассматривать его как векторное пространство[*] над полем действительных чисел $\mathbb{K}$. Вектор $x \in X$ запишем через базисные векторы:

$$x = \mathfrak{e}_i \, x^i \, ,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$;

$\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ есть базисные векторы геометрического пространства, $\mathfrak{e}_4$ есть базисный вектор времени, $x^i \in \mathbb{K}$ есть координаты вектора.

В ряде случаев мы будем рассматривать геометрическое подпространство пространства-времени СТО. Будем обозначать его X_3. Вектор $x \in X_3$ будем записывать через геометрические базисные векторы следующим образом:

$$x = \mathfrak{e}_a \, x^a \, ,$$

где $a = 1, 2, 3$.

1. Скалярное произведение в пространстве-времени СТО

На X определим *скалярное произведение* векторов. Для этого рассмотрим множество пар векторов (x_1, x_2), где $x_1, x_2 \in X$. Это множество является *произведением* векторного пространства X на себя

---

[*] Нужно понимать, что при таком определении пространство-время рассматривается весьма абстрактно. Например, оно не рассматривается как множество точек и событий. Однако, пока такой уровень абстракции нас устраивает.

Полезно также иметь в виду, что пространство действия и пространство-время алгебраически идентичны до тех пор пока мы не рассматриваем пространство-время как множество точек и событий. При таком рассмотрении пространство-время становится *линейным* или *афинным* пространством, а пространство действия остается векторным пространством.

в теоретико-множественном смысле. Оно обозначается $X{\times}X$. Затем введем отображение $F\colon X{\times}X \to \mathbb{K}$. То есть, сопоставим каждой паре векторов $(x_1, x_2) \in X{\times}X$ число $F(x_1, x_2) \in \mathbb{K}$. Далее положим, что отображение F является *билинейным*, то есть подчиняется соотношениям:

$$\begin{aligned} F(x_1 + a, x_2) &= F(x_1, x_2) + F(a, x_2) \\ F(x_1, x_2 + b) &= F(x_1, x_2) + F(x_1, b) \\ F(\alpha \cdot x_1, x_2) &= \alpha \cdot F(x_1, x_2) \\ F(x_1, \alpha \cdot x_2) &= \alpha \cdot F(x_1, x_2)\,, \end{aligned}$$

где $x_1, x_2, a, b \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Произвольное билинейное отображение F можно записать в виде произведения

$$F(x_1, x_2) = a^{12} \cdot \langle x_1, x_2 \rangle\,,$$

где $a^{12} \in \mathbb{K}$, а через $\langle\ ,\ \rangle$ обозначено другое билинейное отображение $\langle\ ,\ \rangle\colon X{\times}X \to \mathbb{K}$, которое также сопоставляет каждой паре векторов $(x_1, x_2) \in X{\times}X$ число $\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{K}$, но это число зависит только от векторов x_1 и x_2. Отображение $\langle\ ,\ \rangle$ называется *скалярным произведением*, а число $\langle x_1, x_2 \rangle$ называется *скалярным произведением* векторов x_1 и x_2. Так как отображение $\langle\ ,\ \rangle$ является билинейным, то выполняются соотношения (условие билинейности):

$$\begin{aligned} \langle x_1 + a, x_2 \rangle &= \langle x_1, x_2 \rangle + \langle a, x_2 \rangle \\ \langle x_1, x_2 + b \rangle &= \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_1, b \rangle \\ \langle \alpha \cdot x_1, x_2 \rangle &= \alpha \cdot \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_1, \alpha \cdot x_2 \rangle &= \alpha \cdot \langle x_1, x_2 \rangle\,. \end{aligned}$$

Из условия билинейности следует, что скалярное произведение векторов может быть выражено через базисные векторы пространства X. Действительно, для

$$x_1 = \mathfrak{e}_i \cdot x_1^i, \quad x_2 = \mathfrak{e}_i \cdot x_2^i$$

скалярное произведение векторов можно записать так:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = x_1^i \cdot x_2^k \cdot \langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k \rangle\,.$$

Отсюда следует, что скалярное произведение векторов определено, если определены скалярные произведения базисных векторов. Для пространства-времени СТО мы будем полагать

$$\begin{gathered} \langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k \rangle = 0\,, \text{если } i \neq k\,, \quad \langle \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_1 \rangle = 1\,, \\ \langle \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_2 \rangle = 1\,, \quad \langle \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_3 \rangle = 1\,, \quad \langle \mathfrak{e}_4, \mathfrak{e}_4 \rangle = -1\ . \end{gathered}$$

Скалярное произведение базисных векторов определяет *метрический тензор* на X

$$g_{ik} \equiv \langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k \rangle\,,$$

который может быть записан в виде матрицы

$$g_{ik} = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & & & \\ 2 & & 1 & & \\ 3 & & & 1 & \\ 4 & & & & -1 \\ \hline \end{array}\ .$$

Скалярное произведение вектора x на себя определяет его *квадрат длины*

$$\langle x, x \rangle = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2\,,$$

который связан с вводимым в СТО *квадратом интервала* s^2 следующим образом

$$\langle x, x \rangle = -s^2\,.$$

Из двух предыдущих соотношений следует известное из СТО выражение для квадрата интервала, которое мы запишем в следующем виде

$$s^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0\,.$$

III. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО КОНТРАВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРОВ ПОРЯДКА N

Далее рассмотрим векторные пространства, конструируемые с помощью исходного векторного пространства X.

1. Пространство контравариантных тензоров второго порядка

Начнем с того, что рассмотрим множество $X{\times}X$, являющееся *произведением* векторного пространства X на себя, то есть рассмотрим множество пар векторов (x_1, x_2), где $x_1, x_2 \in X$. Это множество будем рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{K}$. Для этого на парах как на векторах введем операции сложения и умножения на число

$$\begin{gathered} (x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ (x, y) = \alpha \cdot (x_1, y_1)\,, \end{gathered}$$

где где $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Такое векторное пространство будем также обозначать $X{\times}X$. Пары как векторы будем называть 2-векторами. 2-векторы можно выразить через базисные векторы в $X{\times}X$

$$(x_1, x_2) = \mathfrak{e}_\alpha \cdot x^\alpha\,,$$

где $x^\alpha \in \mathbb{K}$ – координаты 2-вектора, $\mathfrak{e}_\alpha \in X{\times}X$ – базисные векторы. Отметим, что пока 2-векторы никак не связаны с алгебраическими операциями на векторном пространстве X. Так, например, 2-вектор $(x, y_1 + y_2)$ никак не связан с 2-векторами (x, y_1) и (x, y_2).

Далее потребуем, чтобы 2-векторы удовлетворяли условию билинейности. Для таких 2-векторов вместо обозначения (x_1, x_2) будем использовать обозначение $x_1 \otimes x_2$. Будем называть 2-вектор $x_1 \otimes x_2$ *тензорным произведением* векторов x_1 и x_2. Таким образом, для тензорного произведения выполняется условие билинейности

$$\begin{aligned} (x_1 + a) \otimes x_2 &= x_1 \otimes x_2 + a \otimes x_2 \\ x_1 \otimes (x_2 + b) &= x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes b \\ (\alpha \cdot x_1) \otimes x_2 &= \alpha \cdot (x_1 \otimes x_2) \\ x_1 \otimes (\alpha \cdot x_2) &= \alpha \cdot (x_1 \otimes x_2)\,, \end{aligned}$$

где $x_1, x_2, a, b \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Первые два соотношения условия билинейности представляют собой условие дистрибутивности тензорного умножения относительно сложения векторов.

Условие билинейности, отождествляя 2-векторы, находящиеся в левой и правой частях уравнений, выделяет подмножество в векторном пространстве $X \times X$. Это подмножество является векторным пространством. Оно называется пространством *тензорных произведений второго порядка (степени)* и обозначается $X \otimes X$. Таким образом, условие билинейности выделяет в пространстве $X \times X$ подпространство $X \otimes X$, в котором 2-векторы связаны с алгебраическими операциями на векторном пространстве X. Условие билинейности позволяет выразить 2-векторы в пространстве $X \otimes X$ через тензорные произведения базисных векторов пространства X. Действительно, если

$$x_1 = \mathfrak{e}_i \cdot x_1^i, \quad x_2 = \mathfrak{e}_k \cdot x_2^k\,,$$

то

$$x_1 \otimes x_2 = \mathfrak{e}_i \otimes \mathfrak{e}_k \cdot x_1^i \cdot x_2^k$$

Тензорные произведения базисных векторов $\mathfrak{e}_i \otimes \mathfrak{e}_k$ можно рассматривать как базисные векторы в пространстве $X \otimes X$. Введем для них обозначение

$$\mathfrak{e}_i \otimes \mathfrak{e}_k = \mathfrak{e}_{ik}\,.$$

Тогда для вектора в пространстве $X \otimes X$ получим выражение

$$x_1 \otimes x_2 = \mathfrak{e}_{ik} \cdot x_1^i \cdot x_2^k\,.$$

И, наконец, рассмотрим *линейное* отображение[*] $l \colon X \times X \to X \otimes X$. Пусть

$$(x_1, x_2) = \mathfrak{e}_\alpha \cdot x^\alpha \in X \times X\,.$$

Тогда имеем

$$l(x_1, x_2) = l(\mathfrak{e}_\alpha) \cdot x^\alpha\,.$$

Разложим 2-векторы $l(\mathfrak{e}_\alpha)$ по базисным векторам $\mathfrak{e}_{ik}$ пространства $X \otimes X$:

$$l(\mathfrak{e}_\alpha) = \mathfrak{e}_{ik} \cdot l^{ik}{}_\alpha\,,$$

где $l^{ik}{}_\alpha \in \mathbb{K}$. Тогда

$$l(x_1, x_2) = \mathfrak{e}_{ik} \cdot l^{ik}{}_\alpha \cdot x^\alpha\,.$$

Введем обозначение для координат вектора $l(x_1, x_2)$

$$l^{ik}{}_\alpha \cdot x^\alpha = x^{ik}\,,$$

а сам вектор $l(x_1, x_2)$ обозначим x. В результате перейдем к следующей записи

$$x = \mathfrak{e}_{ik} \cdot x^{ik}\,.$$

Векторы этого вида называются *контравариантными тензорами второго порядка (степени).* Они составляют векторное пространство, которое обозначим X^2 в отличие от пространства $X \otimes X$, имея в виду, что тензор может быть представлен множеством тензорных произведений.

2. Пространство тензоров контравариантных n-го порядка

Для построения контравариантной универсальной алгебры используются пространства тензоров всех порядков, в том числе $2, 3, \ldots, n, \ldots,$. Поэтому далее, повторяя в значительной степени рассуждения предыдущего раздела, рассмотрим пространство контравариантных тензоров n-го порядка.

Рассмотрим множество

$$\overbrace{X \times \ldots \times X}^{n}\,,$$

---

[*] Напомним, что отображение $l \colon V \to W$ называется линейным, если оно обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} l(v_1 + v_2) &= l(v_1) + l(v_2)\,, \\ l(\alpha \cdot v) &= \alpha \cdot l(v)\,. \end{aligned}$$

Если

$$v = \mathfrak{e}_i \cdot v^i\,,$$

где $\mathfrak{e}_i$ – базисные векторы в V, то

$$w = l(x) = l(\mathfrak{e}_i) \cdot v^i\,.$$

Разлагая векторы $l(\mathfrak{e}_i)$ по базисным векторам $\mathfrak{e}_\alpha$ пространства W, получим

$$l(\mathfrak{e}_i) = \mathfrak{e}_\alpha \cdot l^\alpha{}_i\,,$$

где $l^\alpha{}_i \in \mathbb{K}$, и

$$w = \mathfrak{e}_\alpha \cdot l^\alpha{}_i \cdot v^i\,.$$

Если записать $w = \mathfrak{e}_\alpha \cdot w^\alpha$, то для координат вектора w получим

$$w^\alpha = l^\alpha{}_i \cdot v^i\,.$$

являющееся произведением n экземпляров векторного пространства X, то есть множество наборов по n векторов

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

где $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n \in X$.

Это множество будем рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{K}$. Для этого на указанных наборах как на векторах введем операции сложения и умножения на число

$$\begin{gathered}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)\\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n)\,,\end{gathered}$$

где $\alpha \in \mathbb{K}$. Такое векторное пространство будем также обозначать $\overbrace{X\times\ldots\times X}^{n}$. Наборы по n векторов, рассматриваемые в свою очередь как векторы, будем называть n-векторами. n-векторы можно выразить через базисные векторы в $\overbrace{X\times\ldots\times X}^{n}$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathfrak{e}_\alpha \cdot x^\alpha\,,$$

где $x^\alpha \in \mathbb{K}$ – координаты n-вектора, $\mathfrak{e}_\alpha \in \overbrace{X\times\ldots\times X}^{n}$ – базисные векторы. Отметим, что пока n-векторы никак не связаны с алгебраическими операциями на векторном пространстве X. Так, например, n-вектор $(x_1 + a, x_2, \ldots, x_n)$ никак не связан с n-векторами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(a, x_2, \ldots, x_n)$.

Далее потребуем, чтобы n-векторы удовлетворяли условию полилинейности. Для таких n-векторов вместо обозначения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем использовать обозначение $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n$. Будем называть n-вектор $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n$ *тензорным произведением* векторов $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$. Таким образом, для тензорного произведения выполняется условие полилинейности

$$\begin{array}{ll}(x_1 + a_1)\otimes x_2\otimes\ldots\otimes x_n & = x_1\otimes\ldots\otimes x_n + a_1\otimes x_2\otimes\ldots\otimes x_n\\ x_1\otimes(x_2 + a_2)\otimes\ldots\otimes x_n & = x_1\otimes\ldots\otimes x_n + x_1\otimes a_2\otimes\ldots\otimes x_n\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots\ldots\ldots\\ (\alpha_1\cdot x_1)\otimes x_2\otimes\ldots\otimes x_n & = \alpha_1\cdot(x_1\otimes x_2\otimes\ldots\otimes x_n)\\ x_1\otimes(\alpha_1\cdot x_2)\otimes\ldots\otimes x_n & = \alpha_2\cdot(x_1\otimes x_2\otimes\ldots\otimes x_n)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Условие полилинейности, отождествляя n-векторы, находящиеся в левой и правой частях уравнений, выделяет подмножество в векторном пространстве $\overbrace{X\times\ldots\times X}^{n}$. Это подмножество является векторным пространством. Оно называется пространством *тензорных произведений n-го порядка* и обозначается $\overbrace{X\otimes\ldots\otimes X}^{n}$. Таким образом, условие полилинейности выделяет в пространстве $\overbrace{X\times\ldots\times X}^{n}$ подпространство $\overbrace{X\otimes\ldots\otimes X}^{n}$, в котором n-векторы связаны с алгебраическими операциями на векторном пространстве X. Условие полилинейности позволяет выразить n-векторы в пространстве $\overbrace{X\otimes\ldots\otimes X}^{n}$ через тензорные произведения базисных векторов пространства X. Действительно, если

$$x_1 = \mathfrak{e}_{i_1}\cdot x_1^{i_1}\,,\quad x_2 = \mathfrak{e}_{i_2}\cdot x_2^{i_2}\,, \ldots, x_n = \mathfrak{e}_{i_n}\cdot x_n^{i_n}\,,$$

то

$$x_1\otimes x_2\otimes\ldots\otimes x_n = \mathfrak{e}_{i_1}\otimes\mathfrak{e}_{i_2}\otimes\ldots\otimes\mathfrak{e}_{i_n}\cdot x_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{i_n}\,.$$

Тензорные произведения базисных векторов $\mathfrak{e}_{i_1}\otimes\mathfrak{e}_{i_2}\otimes\ldots\otimes\mathfrak{e}_{i_n}$ можно рассматривать как базисные векторы в пространстве $\overbrace{X\otimes\ldots\otimes X}^{n}$. Введем для них обозначение

$$\mathfrak{e}_{i_1}\otimes\mathfrak{e}_{i_2}\otimes\ldots\otimes\mathfrak{e}_{i_n} = \mathfrak{e}_{i_1 i_2\ldots i_n}\,.$$

Тогда для вектора в пространстве $\overbrace{X\otimes\ldots\otimes X}^{n}$ получим выражение

$$x_1\otimes x_2\otimes\ldots\otimes x_n = \mathfrak{e}_{i_1 i_2\ldots i_n}\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{i_n}\,.$$

И, наконец, рассмотрим *линейное* отображение

$$l\colon \overbrace{X\times\ldots\times X}^{n} \to \overbrace{X\otimes\ldots\otimes X}^{n}$$

Пусть

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathfrak{e}_\alpha\cdot x^\alpha \in \overbrace{X\times\ldots\times X}^{n}\,.$$

Тогда имеем

$$l(x_1, x_2, \ldots, x_n) = l(\mathfrak{e}_\alpha)\cdot x^\alpha\,.$$

Разложим n-векторы $l(\mathfrak{e}_\alpha)$ по базисным векторам $\mathfrak{e}_{i_1 i_2\ldots i_n}$ пространства $\overbrace{X\otimes\ldots\otimes X}^{n}$:

$$l(\mathfrak{e}_\alpha) = \mathfrak{e}_{i_1 i_2\ldots i_n}\cdot l^{i_1 i_2\ldots i_n}{}_\alpha\,,$$

где $l^{i_1 i_2\ldots i_n}{}_\alpha \in \mathbb{K}$. Тогда

$$l(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathfrak{e}_{i_1 i_2\ldots i_n}\cdot l^{i_1 i_2\ldots i_n}{}_\alpha\cdot x^\alpha\,.$$

Введем обозначение для координат вектора $l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$l^{i_1 i_2\ldots i_n}{}_\alpha\cdot x^\alpha = x^{i_1 i_2\ldots i_n}\,,$$

а сам вектор $l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обозначим x. В результате перейдем к следующей записи

$$x = \mathfrak{e}_{i_1 i_2\ldots i_n}\cdot x^{i_1 i_2\ldots i_n}\,.$$

Векторы этого вида называются *контравариантными тензорами n-го порядка (степени).* Они составляют векторное пространство, которое обозначим X^n в отличие от пространства $\overbrace{X\otimes\ldots\otimes X}^{n}$, имея в виду, что тензор может быть представлен множеством тензорных произведений.

IV. КОНТРАВАРИАНТНАЯ УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

1. Универсальное пространство контравариантных тензоров

1. Пространство-время фундаментальных частиц $\mathbb{X}$

Обобщим пространство-время СТО следующим образом. Введем векторное пространство

$$\mathbb{X} = X^0 + X^1 + X^2 + \ldots + X^n + \ldots ,$$

где $X^0 = \mathbb{K}$, $X^1 = X$. Это пространство называется *универсальным пространством контравариантных тензоров над* X. Пространство-время СТО X называется *образующим пространством* для $\mathbb{X}$.

Вектор $x \in \mathbb{X}$ можно записать через базисные векторы следующим образом:

$$\begin{aligned} x = \mathfrak{e}_0 \cdot x^0 + \mathfrak{e}_{i_1} \cdot x^{i_1} + \mathfrak{e}_{i_1 i_2} \cdot x^{i_1 i_2} + \ldots \\ + \quad \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot x^{i_1 i_2 \ldots i_n} + \ldots , \end{aligned} \tag{1}$$

где x^0, x^{i_1}, $x^{i_1 i_2}, \ldots,$ $x^{i_1 i_2 \ldots i_n} \in \mathbb{K}$ – координаты вектора. Базисными векторами в $\mathbb{X}$ являются векторы

$$\mathfrak{e}_0, \quad \mathfrak{e}_{i_1}, \quad \mathfrak{e}_{i_1 i_2}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_n} .$$

Здесь единица множества действительных чисел $\mathbb{K}$ обозначена через $\mathfrak{e}_0$. Если ввести верхний и нижний *собирательные индексы* I, пробегающие значения

$$0, i_1, (i_1 i_2), \ldots, (i_1 i_2 \ldots i_n), \ldots ,$$

то вектор $x \in \mathbb{X}$ можно записать через базисные векторы в компактном виде:

$$x = \mathfrak{e}_I \cdot x^I .$$

Теория электрона Дирака заставляет сделать вывод о том, что пространство-время, сопровождающее электрон, есть пространство векторов вида (1). Поэтому мы будем рассматривать векторное пространство $\mathbb{X}$ (универсальное пространство контравариантных тензоров над X) как *пространство-время фундаментальных частиц.* По нашим представлениям (см. Раздел IV Лекции 8) по мере удаления от фундаментальной частицы пространство-время $\mathbb{X}$ асимптотически переходит в пространство-время СТО.

Можно придерживаться более радикальной точки зрения и считать, что пространство-время всегда (а не только вблизи фундаментальной частицы) есть пространство векторов вида (1). В этом случае мы будем рассматривать векторное пространство $\mathbb{X}$ как *обобщенное пространство-время.*

Отметим важный частный случай. Если в качестве образующего пространства взять геометрическое пространство X_3, то получим универсальное пространство контравариантных тензоров над X_3, которое обозначим $\mathbb{X}_3$. Вектор $x \in \mathbb{X}_3$ можно записать через базисные векторы следующим образом:

$$\begin{aligned} x = \mathfrak{e}_0 \cdot x^0 + \mathfrak{e}_{a_1} \cdot x^{a_1} + \mathfrak{e}_{a_1 a_2} \cdot x^{a_1 a_2} + \ldots \\ + \quad \mathfrak{e}_{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot x^{a_1 a_2 \ldots a_n} + \ldots . \end{aligned} \tag{2}$$

Напомним, что индексы a_k принимают значения $1, 2, 3$. Пространство $\mathbb{X}_3$ есть *геометрическое пространство фундаментальных частиц* или *обобщенное геометрическое пространство.*

2. Пространство действия фундаментальных частиц

Пространство действия фундаментальных частиц строится подобно пространству-времени фундаментальных частиц. В основе такого построения лежит четырехмерное векторное пространство, которое обозначим S или S_4, изоморфное пространству-времени СТО. Вектор $S \in S_4$ записывается через базисные векторы следующим образом

$$S = \mathfrak{e}_i \, S^i$$

Координаты $S^i \in \mathbb{K}$ имеют размерность действия. $\mathfrak{e}_i$ – базисные векторы пространства-времени СТО. Затем вводятся тензорные пространства всех порядков S^2, S^3, $\ldots$, S^n,$\ldots$ Далее вводится универсальное пространство контравариантных тензоров над S:

$$\mathbb{S} = S^0 + S^1 + \ldots + S^n + \ldots ,$$

где $S^0 = \mathbb{K}$, $S^1 = S$. Это пространство и рассматривается как *пространство действия фундаментальных частиц.* Вектор $S \in \mathbb{S}$ можно записать через базисные векторы:

$$\begin{aligned} S = \mathfrak{e}_0 \, S^0 + \mathfrak{e}_{i_1} \, S^{i_1} + \mathfrak{e}_{i_1 i_2} \, S^{i_1 i_2} + \ldots \\ + \quad \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \, S^{i_1 i_2 \ldots i_n} + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Через $\mathfrak{e}_0$ обозначена единица множества действительных чисел $\mathbb{K}$. $\mathfrak{e}_i$ есть базисные векторы пространства-времени СТО.

Используя собирательный индекс, вектор $S \in \mathbb{S}$ можно записать через базисные векторы в компактном виде:

$$S = \mathfrak{e}_I \, S^I .$$

Путем подбора множителей можно сделать так, что все координаты S^I будут иметь размерность действия. Именно так в Лекции 8 мы получили координаты x^I (вектора пространства-времени $\mathbb{X}$) размерности длины. Для безразмерных координат S^I и x^I векторные пространства $\mathbb{S}$ и $\mathbb{X}$ эквивалентны. Именно в этом случае пространства $\mathbb{S}$ и $\mathbb{X}$ сводятся к одному универсальному пространству контравариантных тензоров.

Отметим важный частный случай. Если в качестве образующего пространства взять пространство S_3, подобное геометрическому пространству X_3, то получим универсальное пространство контравариантных тензоров над S_3, которое обозначим $\mathbb{S}_3$. Вектор $S \in \mathbb{S}_3$

можно записать через базисные векторы следующим образом:

$$\begin{aligned} S = \mathfrak{e}_0 \cdot S^0 + \mathfrak{e}_{a_1} \cdot S^{a_1} + \mathfrak{e}_{a_1 a_2} \cdot S^{a_1 a_2} + \ldots \\ + \quad \mathfrak{e}_{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot S^{a_1 a_2 \ldots a_n} + \ldots . \end{aligned} \tag{4}$$

Напомним, что индексы a_k принимают значения $1, 2, 3$.

И, наконец, отметим, что универсальное пространство контравариантных тензоров бесконечномерно.

2. Пространство действия как контравариантная универсальная алгебра

Обратимся снова к пространству действия

$$\mathbb{S} = S^0 + S^1 + S^2 + \ldots + S^n + \ldots ,$$

Наличие на множестве векторов $\mathbb{S}$ операций сложения и умножения векторов и чисел (тензорного умножения и умножения на число) делает это множество алгеброй, которую называют *контравариантной универсальной алгеброй.*

Здесь мы должны остановиться на одном обстоятельстве, важном для тензорного умножения и для теории элементарных частиц. При выполнении тензорного умножения необходимо придерживаться определенного порядка расположения сомножителей. Сначала нужно установить *исходный* вектор, участвующий в умножении. Затем установить *последующий* вектор, то есть вектор, на который умножается исходный вектор. При этом произведение зависит от того, с какой стороны от исходного вектора располагается последующий вектор. Если последующий вектор располагается справа от исходного вектора, умножение называется *умножением справа.* Если последующий вектор располагается слева от исходного вектора, умножение называется *умножением слева.* Поэтому мы будем рассматривать универсальную контравариантную алгебру в двух разновидностях: с умножением справа и с умножением слева. Для того, чтобы отличать одну алгебру от другой, мы будем обозначать базисные векторы универсальной контравариантной алгебры с умножением справа – $\mathfrak{e}$, а базисные векторы универсальной контравариантной алгебры с умножением слева – $\mathfrak{E}$.

Теория электрона Дирака и квантовая механика в целом заставляют нас сделать вывод о том, что алгебра действия является алгеброй с умножением справа.

Для базисных векторов пространства $\mathbb{S}$ умножение выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0 \\ &\mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cdot \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_m} \\ &\mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \otimes \mathfrak{e}_{i_{n+1} i_{n+2} \ldots i_{n+m}} = \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_{m+n}} , \end{aligned}$$

Формально символ умножения на число можно переобозначить в символ тензорного произведения. Тогда произведения базисных векторов приобретают единообразный вид

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}_0 \otimes \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0 \, \delta^0_0 \\ &\mathfrak{e}_0 \otimes \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_m} \otimes \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_{l_1 l_2 \ldots l_m} \, \delta^{l_1 l_2 \ldots l_m}_{i_1 i_2 \ldots i_m} \\ &\mathfrak{e}_{k_1 k_2 \ldots k_n} \otimes \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \mathfrak{e}_{l_1 l_2 \ldots l_{n+m}} \, \delta^{l_1 l_2 \ldots l_{n+m}}_{k_1 k_2 \ldots k_n i_1 i_2 \ldots i_m} . \end{aligned}$$

Здесь символы Кронекера есть *структурные постоянные* алгебры $\mathbb{S}$.

Для того, чтобы сделать запись компактной, введем *обобщенный* индекс

$$I_m = i_1 i_2 \ldots i_m$$

Используя это обозначение, имеем

$$\mathfrak{e}_{I_m} = \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_m} , \qquad S^{K_n} = S^{k_1 k_2 \ldots k_n} .$$

С помощью обобщенных индексов закон умножения базисных векторов в алгебре $\mathbb{S}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}_0 \otimes \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0 \, \delta^0_0 \\ &\mathfrak{e}_0 \otimes \mathfrak{e}_{I_m} = \mathfrak{e}_{I_m} \otimes \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_{L_m} \cdot \delta^{L_m}{}_{I_m} \\ &\mathfrak{e}_{K_n} \otimes \mathfrak{e}_{I_m} = \mathfrak{e}_{L_{n+m}} \cdot \delta^{L_{n+m}}{}_{K_n I_m} . \end{aligned}$$

Используя собирательные индексы, произведение базисных векторов в алгебре $\mathbb{S}$ можно записать в компактном виде

$$\mathfrak{e}_K \otimes \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI} . \tag{5}$$

Здесь $C^L{}_{KI}$ есть структурные матрицы контравариантной универсальной алгебры с умножением справа.

Универсальная контравариантная алгебра является *ассоциативной* так как

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{e}_0 \otimes \mathfrak{e}_0) \otimes \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0 \otimes (\mathfrak{e}_0 \otimes \mathfrak{e}_0) = \mathfrak{e}_0 \\ &(\mathfrak{e}_0 \otimes \mathfrak{e}_0) \otimes \mathfrak{e}_l = \mathfrak{e}_0 \otimes (\mathfrak{e}_0 \otimes \mathfrak{e}_l) = \mathfrak{e}_l \\ &(\mathfrak{e}_0 \otimes \mathfrak{e}_k) \otimes \mathfrak{e}_l = \mathfrak{e}_0 \otimes (\mathfrak{e}_k \otimes \mathfrak{e}_l) = \mathfrak{e}_k \otimes \mathfrak{e}_l \\ &(\mathfrak{e}_i \otimes \mathfrak{e}_k) \otimes \mathfrak{e}_l = \mathfrak{e}_i \otimes (\mathfrak{e}_k \otimes \mathfrak{e}_l) = \mathfrak{e}_i \otimes \mathfrak{e}_k \otimes \mathfrak{e}_l \end{aligned}$$

Базисные векторы $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{e}_{i_1}$, $\mathfrak{e}_{i_1 i_2}, \ldots, \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \ldots$ образуют *дискретную полугруппу* с тензорным произведением справа в качестве операции композиции.

3. Пространство-время как контравариантная универсальная алгебра

Обратимся теперь к обобщенному пространству-времени

$$\mathbb{X} = X^0 + X^1 + X^2 + \ldots + X^p + \ldots ,$$

Наличие на множестве векторов $\mathbb{X}$ операций сложения и умножения (тензорного умножения и умножения на число) также делает это множество алгеброй, которую называют *контравариантной универсальной алгеброй.* Теория электрона Дирака и квантовая механика в целом заставляют нас сделать вывод о том, что алгебра пространства-времени является алгеброй с умножением слева. Мы условились обозначать базисные векторы универсальной контравариантной алгебры с умножением слева – $\mathfrak{E}$. Поэтому перепишем выражение для вектора (1) следующим образом

$$\begin{aligned} x = \mathfrak{E}_0 \cdot x^0 + \mathfrak{E}_{i_1} \cdot x^{i_1} + \mathfrak{E}_{i_2 i_1} \cdot x^{i_2 i_1} + \dots \\ + \quad \mathfrak{E}_{i_n \dots i_2 i_1} \cdot x^{i_n \dots i_2 i_1} \, , \end{aligned} \tag{6}$$

Соответственно для вектора (2) обобщенного геометрического пространства имеем

$$\begin{aligned} x = \mathfrak{E}_0 \cdot x^0 + \mathfrak{E}_{a_1} \cdot x^{a_1} + \mathfrak{E}_{a_2 a_1} \cdot x^{a_2 a_1} + \dots \\ + \quad \mathfrak{E}_{a_n \dots a_2 a_1} \cdot x^{a_n \dots a_2 a_1} \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Для базисных векторов пространства $\mathbb{X}$ умножение выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E}_0 \cdot \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_0 \\ &\mathfrak{E}_0 \cdot \mathfrak{E}_{i_m \dots i_2 i_1} = \mathfrak{E}_{i_m \dots i_2 i_1} \cdot \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_{i_m \dots i_2 i_1} \\ &\mathfrak{E}_{i_{m+n} \dots i_{m+2} i_{m+1}} \otimes \mathfrak{E}_{i_m \dots i_2 i_1} = \mathfrak{E}_{i_{m+n} \dots i_2 i_1} \, , \end{aligned}$$

Формально символ умножения на число можно переобозначить в символ тензорного произведения. Тогда произведения базисных векторов приобретают единообразный вид

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E}_0 \otimes \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_0 \, \delta^0_0 \\ &\mathfrak{E}_0 \otimes \mathfrak{E}_{i_m \dots i_2 i_1} = \mathfrak{E}_{i_m \dots i_2 i_1} \otimes \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_{l_m \dots l_2 l_1} \, \delta^{l_m \dots l_2 l_1}_{i_m \dots i_2 i_1} \\ &\mathfrak{E}_{i_m \dots i_2 i_1} \otimes \mathfrak{E}_{k_n \dots k_2 k_1} = \mathfrak{E}_{l_{m+n} \dots l_2 l_1} \, \delta^{l_{m+n} \dots l_2 l_1}_{i_m \dots i_2 i_1 k_n \dots k_2 k_1} \, . \end{aligned}$$

Здесь символы Кронекера есть *структурные постоянные* алгебры $\mathbb{X}$.

Для того, чтобы сделать запись компактной, введем *обобщенный* индекс

$$I_m = i_m \dots i_2 i_1 \, .$$

Используя это обозначение, имеем

$$\mathfrak{E}_{I_m} = \mathfrak{E}_{i_m \dots i_2 i_1} \, , \qquad x^{K_n} = x^{k_n \dots k_2 k_1} \, .$$

С помощью обобщенных индексов закон умножения базисных векторов в алгебре $\mathbb{X}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E}_0 \otimes \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_0 \, \delta^0_0 \\ &\mathfrak{E}_0 \otimes \mathfrak{E}_{I_m} = \mathfrak{E}_{I_m} \otimes \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_{L_m} \cdot \delta^{L_m}{}_{I_m} \\ &\mathfrak{E}_{I_m} \otimes \mathfrak{E}_{K_n} = \mathfrak{E}_{L_{m+n}} \cdot \delta^{L_{m+n}}{}_{I_m K_n} \, . \end{aligned}$$

Используя собирательные индексы, произведение базисных векторов в алгебре $\mathbb{X}$ можно записать в компактном виде

$$\mathfrak{E}_I \otimes \mathfrak{E}_K = \mathfrak{E}_L \cdot {}^{+}C^L{}_{KI} \, . \tag{8}$$

Здесь ${}^{+}C^L{}_{KI}$ есть структурные матрицы контравариантной универсальной алгебры с умножением слева.

Контравариантная универсальная алгебра является *ассоциативной* так как

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{E}_0 \otimes \mathfrak{E}_0) \otimes \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_0 \otimes (\mathfrak{E}_0 \otimes \mathfrak{E}_0) = \mathfrak{E}_0 \\ &(\mathfrak{E}_0 \otimes \mathfrak{E}_0) \otimes \mathfrak{E}_l = \mathfrak{E}_0 \otimes (\mathfrak{E}_0 \otimes \mathfrak{E}_l) = \mathfrak{E}_l \\ &(\mathfrak{E}_0 \otimes \mathfrak{E}_k) \otimes \mathfrak{E}_l = \mathfrak{E}_0 \otimes (\mathfrak{E}_k \otimes \mathfrak{E}_l) = \mathfrak{E}_k \otimes \mathfrak{E}_l \\ &(\mathfrak{E}_i \otimes \mathfrak{E}_k) \otimes \mathfrak{E}_l = \mathfrak{E}_i \otimes (\mathfrak{E}_k \otimes \mathfrak{E}_l) = \mathfrak{E}_i \otimes \mathfrak{E}_k \otimes \mathfrak{E}_l \end{aligned}$$

Базисные векторы $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_{i_1}$, $\mathfrak{E}_{i_2 i_1}, \dots, \mathfrak{E}_{i_n \dots i_2 i_1}, \dots$ образуют *дискретную полугруппу* с тензорным произведением слева в качестве операции композиции.

V. ПОДАЛГЕБРЫ КОНТРАВАРИАНТНОЙ УНИВЕРСАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ – АЛГЕБРЫ РАЗНЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

1. Подалгебра действия фундаментальной частицы

Рассмотрим алгебру действия $\mathbb{S}$. Потребуем, чтобы 2-векторы $S_1 \otimes S_2$ (тензорные произведения двух векторов S_1 и S_2) удовлетворяли двум условиям:

1. *условию соседней транспозиции*;
2. *условию евклидовости.*

Для таких 2-векторов вместо обозначения $S_1 \otimes S_2$ будем использовать обозначение $S_1 \circ S_2$. Будем называть 2-вектор $S_1 \circ S_2$ $\circ$*-произведением* векторов S_1 и S_2. $\circ$-произведение векторов S_1 и S_2 будет определено, если определить $\circ$-произведение базисных векторов. Таким образом, для $\circ$-произведения базисных векторов мы требуем выполнения следующих условий:

1. Условие соседней транспозиции

$$\mathfrak{e}_i \circ \mathfrak{e}_k = \mathrm{sign}(i,k) \cdot \mathfrak{e}_k \circ \mathfrak{e}_i \qquad \text{для } i \neq k \, .$$

Здесь $\mathrm{sign}(i,k)$ – знак соседней транспозиции, зависящий от номеров переставляемых базисных векторов.

2. Условие евклидовости

$$\mathfrak{e}_i \circ \mathfrak{e}_k = \langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k \rangle \qquad \text{для } i = k \, .$$

Здесь справа стоит скалярное произведение базисных векторов.

Условия соседней транспозиции и евклидовости, отождествляя векторы, находящиеся в левой и правой частях уравнений, выделяют подмножество в алгебре $\mathbb{S}$. Это подмножество является алгеброй. Мы будем называть ее подалгеброй действия и обозначать также как алгебру – $\mathbb{S}$. Базисные векторы подалгебры $\mathbb{S}$ обозначим попрежнему $\mathfrak{e}_I$. (При обозначении индексов векторов и координат в подалгебре $\mathbb{S}$ будем использовать большие латинские буквы также как при обозначении индексов векторов и координат в алгебре $\mathbb{S}$.)

Для подалгебры $\mathbb{S}$ закон умножения (5) базисных векторов $\mathfrak{e}_K$ записывается следующим образом:

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \, C^L{}_{KI} \, . \tag{9}$$

Здесь $C^L{}_{KI}$ есть структурные постоянные или структурные матрицы подалгебры $\mathbb{S}$ с умножением справа. Для умножения использован символ $\circ$ в отличие от $\otimes$ умножения в алгебре $\mathbb{S}$.

1. *Конечная размерность*

Условия соседней транспозиции и евклидовости приводят к тому, что подалгебра действия $\mathbb{S}$ имеет конечную размерность. Для того, чтобы пояснить это, рассмотрим пространство тензоров порядка p – S^p. Базисные векторы этого пространства имеют вид

$$\mathfrak{e}_{i_1} \circ \mathfrak{e}_{i_2} \circ \ldots \circ \mathfrak{e}_{i_p} = \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \, .$$

В левую часть этого выражения не могут входить два одинаковых образующих базисных вектора. Если такое имеет место, то с помощью условия соседней транспозиции и условия евклидовости такой базисный вектор может быть сведен к базисному вектору, в произведении которого одинаковые образующие базисные векторы отсутствуют. То есть, такой базисный вектор $\mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ не является линейно независимым вектором. (Не является базисным вектором по определению.)

Отсюда следует, что порядок p пространства тензоров S^p не превышает размерность образующего пространства n. А так как образующее пространство S^1 подобно пространству-времени СТО, то $n \leq 4$. Таким образом, в крайнем случае

$$\mathbb{S} = S^0 + S^1 + S^2 + S^3 + S^4 \, ,$$

где $S^0 = \mathbb{K}$, $S^1 \equiv X$.

Если размерность пространства S^1 обозначить через n, то размерность пространства S^p равна числу сочетаний из n элементов по p

$$\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)}{p!} = \mathrm{C}_n^p \, .$$

Отсюда следует что

$$\dim S^p = \dim S^{n-p} \, , \quad \dim S^n = 1 \, , \quad \dim S^{n-1} = n \, .$$

Подалгебра действия $\mathbb{S}$ в общем случае представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{S} = S^0 + S^1 + \ldots + S^n \, ,$$

где $S^0 = \mathbb{K}$, $S^1 \equiv X$. Размерность подалгебры действия (число базисных векторов) равна

$$N = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n .$$

Иногда будем использовать обозначение $\mathbb{S}_n$ для подалгебры действия, подчеркивая размерность n образующего пространства S^1. В том случае, если образующее пространство четырехмерно (подобно пространству-времени СТО), то

$$\dim \mathbb{S} = 2^4 = 16 \, .$$

Вектор действия (3) в этом случае имеет вид

$$S = \mathfrak{e}_0 \, S^0 + \mathfrak{e}_i \, S^i + \mathfrak{e}_{ij} \, S^{ij} + \mathfrak{e}_{ijk} \, S^{ijk} + \mathfrak{e}_{1324} \, S^{1324} \, .$$

Мы будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$I \, , J \, , K \, , L \, , \sim (0, i, ij, ijk \, , 1324),$$

$$S = \mathfrak{e}_I \, S^I \, .$$

Если образующее пространство трехмерно (подобно геометрическому пространству),

$$\dim \mathbb{S}_3 = 2^3 = 8 \, .$$

Вектор действия (4) имеет вид

$$S = \mathfrak{e}_0 \, S^0 + \mathfrak{e}_a \, S^a + \mathfrak{e}_{ab} \, S^{ab} + \mathfrak{e}_{123} \, S^{123} \, .$$

Мы будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$A \, , B \, , C \, , D \, , \sim (0, a, ab, 123),$$

$$S = \mathfrak{e}_A \, S^A \, .$$

Закон умножения векторов в подалгебре $\mathbb{S}$ записывается так:

$$S = S_1 \circ S_2 \, .$$

Если воспользоваться законом умножения базисных векторов (9), то получим правило вычисления координат вектора-произведения по координатам векторов-сомножителей:

$$S^L = C^L{}_{KI} \, (S_2)^I \, (S_1)^K \, . \tag{10}$$

2. *Скалярное произведение*

Условие соседней транспозиции и условие евклидовости позволяют обобщить скалярное произведение в образующем пространстве до скалярного произведения в подалгебре $\mathbb{S}$. Указанное скалярное произведение определено, если определено скалярное произведение базисных векторов. В свою очередь скалярное произведение базисных векторов является частным случаем умножения (9):

$$\langle \mathfrak{e}_K , \mathfrak{e}_I \rangle = \mathfrak{e}_0 \, C^0{}_{KI} \, .$$

Это соотношение определяет *метрический тензор* в подалгебре действия $\mathbb{S}$

$$g_{KI} = C^0{}_{KI}\,.$$

Так как скалярное произведение не зависит от порядка умножения векторов, то

$$g_{IK} = g_{KI}\,.$$

Скалярное произведение вектора действия на себя определяет его квадрат длины

$$\langle S, S\rangle = g_{IK}\,S^I\,S^K\,.$$

В Лекции 8 мы показали, что пространство действия необходимо подчинить условию: *квадрат длины векторов действия равен нулю*

$$\langle S, S\rangle \equiv g_{IK}\,S^I\,S^K = 0\,.$$

По существу это условие позволяет определить координаты S^0 вектора действия через координаты S^i, S^{ij}, S^{ijk}, S^{1324}.

Кроме того, заметим, что из свойств произведений с участием базисного вектора $\mathfrak{e}_0$, следует

$$C^L{}_{I0} = \delta^L{}_I\,, \qquad C^L{}_{0K} = \delta^L{}_K\,.$$

3. Ассоциативность

Подалгебра $\mathbb{S}$ является ассоциативной. Из условия ассоциативности подалгебры $\mathbb{S}$ следует

$$(\mathfrak{e}_N \circ \mathfrak{e}_K) \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_N \circ (\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I)\,. \tag{11}$$

Используя это соотношение и (9), получим:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{e}_L \circ \mathfrak{e}_I)\,C^L{}_{NK} &= (\mathfrak{e}_N \circ \mathfrak{e}_L)\,C^L{}_{KI}\,,\\ \mathfrak{e}_M\,C^M{}_{LI}\,C^L{}_{NK} &= \mathfrak{e}_M\,C^M{}_{NL}\,C^L{}_{KI}\,.\end{aligned}$$

Откуда

$$C^M{}_{LI}\,C^L{}_{NK} = C^M{}_{NL}\,C^L{}_{KI}\,. \tag{12}$$

Отметим одно полезное соотношение, вытекающее из (12). Выполним в этом уравнении свертку по индексам M и N. Получим

$$C^M{}_{LI}\,C^L{}_{MK} = C^M{}_{ML}\,C^L{}_{KI}\,. \tag{13}$$

Так как произведение базисного вектора $\mathfrak{e}_K$ на базисный вектор, отличный от $\mathfrak{e}_0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением $C^M{}_{L0}$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (13) имеет вид

$$C^M{}_{LI} \cdot C^L{}_{MK} = C^M{}_{M0} \cdot C^0{}_{KI}\,.$$

Отсюда получим

$$g_{KI} = \frac{1}{N} \cdot C^M{}_{LI} \cdot C^L{}_{MK}\,,$$

где N–размерность подалгебры $\mathbb{S}$.

2. Подалгебра пространства-времени фундаментальной частицы

Рассмотрим алгебру пространства-времени $\mathbb{X}$. Как и прежде потребуем, чтобы 2-векторы $x_2 \otimes x_1$ (тензорные произведения двух векторов x_1 и x_2) удовлетворяли двум условиям:

1. *условию соседней транспозиции*;
2. *условию евклидовости.*

Для таких 2-векторов вместо обозначения $x_2 \otimes x_1$ будем использовать обозначение $x_2 \circ x_1$. Будем называть 2-вектор $x_2 \circ x_1$ $\circ$-*произведением* векторов x_1 и x_2. $\circ$-произведение векторов x_1 и x_2 будет определено, если определить $\circ$-произведение базисных векторов. Таким образом, для $\circ$-произведения базисных векторов мы требуем выполнения следующих условий:

1. Условие соседней транспозиции

$$\mathfrak{E}_i \circ \mathfrak{E}_k = \mathrm{sign}(i,k) \cdot \mathfrak{E}_k \circ \mathfrak{E}_i \qquad \text{для } i \neq k\,.$$

Здесь $\mathrm{sign}(i,k)$ – знак соседней транспозиции, зависящий от номеров переставляемых базисных векторов.

2. Условие евклидовости

$$\mathfrak{E}_i \circ \mathfrak{E}_k = \langle \mathfrak{E}_i, \mathfrak{E}_k\rangle \qquad \text{для } i = k\,.$$

Здесь справа стоит скалярное произведение базисных векторов.

Условия соседней транспозиции и евклидовости, отождествляя векторы, находящиеся в левой и правой частях уравнений, выделяют подмножество в алгебре $\mathbb{X}$. Это подмножество является алгеброй. Мы будем называть ее подалгеброй пространства-времени фундаментальной частицы и обозначать также как алгебру – $\mathbb{X}$. Базисные векторы подалгебры $\mathbb{X}$ обозначим попрежнему $\mathfrak{E}_I$. (При обозначении индексов векторов и координат в подалгебре $\mathbb{X}$ будем использовать большие латинские буквы также как при обозначении индексов векторов и координат в алгебре $\mathbb{X}$.)

Для подалгебры $\mathbb{X}$ закон умножения (8) для базисных векторов $\mathfrak{E}_K$ записывается следующим образом:

$$\mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_K = \mathfrak{E}_L\,{}^{+}C^L{}_{KI}\,. \tag{14}$$

Здесь ${}^{+}C^L{}_{KI}$ есть структурные постоянные или структурные матрицы подалгебры $\mathbb{X}$ с умножением слева. Для умножения использован символ $\circ$ в отличие от $\otimes$ умножения в алгебре $\mathbb{X}$.

1. Конечная размерность

Так же как и для подалгебры действия, условия соседней транспозиции и евклидовости приводят к тому, что подалгебра пространства-времени $\mathbb{X}$ имеет конечную размерность. Порядок p пространства тензоров

X^p не превышает размерность пространства-времени СТО. Таким образом,

$$\mathbb{X} = X^0 + X^1 + X^2 + X^3 + X^4\,,$$

где $X^0 = \mathbb{K}$, X^1 – пространство-время СТО.

Размерность подалгебры пространства-времени (число базисных векторов) равна

$$N = \mathrm{C}_4^0 + \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_4^3 + \mathrm{C}_4^4 = (1+1)^4 = 16.$$

Выражение (6) для вектора $x \in \mathbb{X}$ в этом случае принимает вид

$$x = \mathfrak{E}_0\, x^0 + \mathfrak{E}_i\, x^i + \mathfrak{E}_{ij}\, x^{ij} + \mathfrak{E}_{ijk}\, x^{ijk} + \mathfrak{E}_{1324}\, x^{1324}\,.$$

Мы будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$I\,, J\,, K\,, L\,, \sim (0, i, ij, ijk\,, 1324)\,.$$

Тогда

$$x = \mathfrak{E}_I\, x^I\,.$$

Если образующее пространство есть трехмерное геометрическое пространство X_3, то

$$\dim \mathbb{X}_3 = 2^3 = 8\,.$$

Вектор (7) геометрического пространства фундаментальной частицы принимает вид

$$x = \mathfrak{E}_0\, x^0 + \mathfrak{E}_a\, x^a + \mathfrak{E}_{ab}\, x^{ab} + \mathfrak{E}_{123}\, x^{123}\,.$$

Мы будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$A\,, B\,, C\,, D\,, \sim (0, a, ab, 123)\,.$$

Тогда

$$x = \mathfrak{e}_A\, x^A\,.$$

Закон умножения векторов в подалгебре $\mathbb{X}$ записывается так:

$$x = x_2 \circ x_1\,.$$

Если воспользоваться законом умножения базисных векторов (14), то получим правило вычисления координат вектора-произведения по координатам векторов-сомножителей:

$$x^L = {}^+C^L{}_{KI}\, (x_2)^I\, (x_1)^K\,. \tag{15}$$

2. Скалярное произведение

Условие соседней транспозиции и условие евклидовости позволяют обобщить скалярное произведение в пространстве-времени СТО до скалярного произведения в пространстве-времени $\mathbb{X}$. Указанное скалярное произведение определено, если определено скалярное произведение базисных векторов. В свою очередь скалярное произведение базисных векторов является частным случаем умножения (14):

$$\langle \mathfrak{E}_I, \mathfrak{E}_K \rangle = \mathfrak{E}_0\; {}^+C^0{}_{KI}\,.$$

Это соотношение определяет *метрический тензор* в пространстве-времени $\mathbb{X}$

$${}^+g_{KI} = {}^+C^0{}_{KI}\,.$$

Так как скалярное произведение не зависит от порядка умножения векторов, то

$${}^+g_{IK} = {}^+g_{KI}\,.$$

Так как скалярное произведение не зависит от порядка умножения векторов, то

$$\langle \mathfrak{E}_I, \mathfrak{E}_K \rangle = \langle \mathfrak{e}_K, \mathfrak{e}_I \rangle\,.$$

Откуда

$${}^+C^0{}_{KI} = C^0{}_{KI}\,.$$

Или

$${}^+g_{KI} = g_{KI}\,.$$

То есть, в подалгебре действия и в подалгебре пространства-времени $\mathbb{X}$ метрический тензор один и тот же.

Скалярное произведение вектора пространства-времени на себя определяет его квадрат длины

$$\langle x, x \rangle = {}^+g_{IK}\, x^I\, x^K\,.$$

В Разделе IV Лекции 8 мы показали, что пространство-время лептона необходимо подчинить условию: *квадрат длины вектора x равен нулю.* Это условие мы распространяем на пространство-время фундаментальных частиц

$$\langle x, x \rangle \equiv g_{IK}\, x^I\, x^K = 0\,.$$

По существу это условие позволяет рассматривать координаты x^0 как обобщение *интервала* пространства-времени СТО.

Кроме того, заметим, что из свойств произведений с участием базисного вектора $\mathfrak{E}_0$, следует

$${}^+C^L{}_{I0} = \delta^L{}_I\,, \qquad {}^+C^L{}_{0K} = \delta^L{}_K\,.$$

3. Ассоциативность

Подалгебра $\mathbb{X}$ является ассоциативной. Из условия ассоциативности подалгебры $\mathbb{X}$ следует

$$\mathfrak{E}_I \circ (\mathfrak{E}_K \circ \mathfrak{E}_N) = (\mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_K) \circ \mathfrak{E}_N \,. \tag{16}$$

Используя это соотношение и (14), получим:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_L)\, {}^{+}C^{L}{}_{NK} &= (\mathfrak{E}_L \circ \mathfrak{E}_N)\, {}^{+}C^{L}{}_{KI} \,, \\ \mathfrak{E}_M\, {}^{+}C^{M}{}_{LI}\, {}^{+}C^{L}{}_{NK} &= \mathfrak{E}_M\, {}^{+}C^{M}{}_{NL}\, {}^{+}C^{L}{}_{KI} \,. \end{aligned}$$

Откуда

$${}^{+}C^{M}{}_{LI}\, {}^{+}C^{L}{}_{NK} = {}^{+}C^{M}{}_{NL}\, {}^{+}C^{L}{}_{KI} \,. \tag{17}$$

Отметим одно полезное соотношение, вытекающее из (17). Выполним в этом уравнении свертку по индексам M и N. Получим

$${}^{+}C^{M}{}_{LI}\, {}^{+}C^{L}{}_{MK} = {}^{+}C^{M}{}_{ML}\, {}^{+}C^{L}{}_{KI} \,. \tag{18}$$

Так как произведение базисного вектора $\mathfrak{E}_K$, на базисный вектор, отличный от $\mathfrak{E}_0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением ${}^{+}C^{M}{}_{L0}$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (18) имеет вид

$${}^{+}C^{M}{}_{LI} \cdot {}^{+}C^{L}{}_{MK} = {}^{+}C^{M}{}_{M0} \cdot {}^{+}C^{0}{}_{KI} \,.$$

Отсюда получим

$${}^{+}g_{KI} = \frac{1}{N} \cdot {}^{+}C^{M}{}_{LI} \cdot {}^{+}C^{L}{}_{MK} \,,$$

где N–размерность подалгебры $\mathbb{X}$.

3. Деление в подалгебрах $\mathbb{S}$ и $\mathbb{X}$

Подалгебра действия $\mathbb{S}$ и подалгебра пространства-времени $\mathbb{X}$ являются алгебрами с делением. Эту тему рассмотрим на примере подалгебры $\mathbb{X}$. Для каждого вектора $x \in \mathbb{X}$ за исключением нулевого определен *обратный* вектор x^{-1} в соответствии с выражением

$$x \circ x^{-1} = \mathfrak{E}_0 \,. \tag{19}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} {}^{+}g_{KI}\, x^I\, (x^{-1})^K &= 1 \,, \\ {}^{+}C^{L}{}_{KI}\, x^I \cdot (x^{-1})^K &= 0 \,, \quad \text{для } L \neq 0 \,. \end{aligned} \tag{20}$$

То есть, имеем систему из N уравнений, которая позволяет по координатам x^I вектора x определить N координат $(x^{-1})^K$ обратного вектора x^{-1}.

В качестве примера рассмотрим вычисление обратного вектора для алгебры $\mathbb{X}_2$, построенной на базисных векторах $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_{21}$. Для вектора

$$x = \mathfrak{E}_0\, x^0 + \mathfrak{E}_1\, x^1 + \mathfrak{E}_2\, x^2 + \mathfrak{E}_{21}\, x^{21}$$

определим обратный вектор

$$x^{-1} = \mathfrak{E}_0\, (x^{-1})^0 + \mathfrak{E}_1\, (x^{-1})^1 + \mathfrak{E}_2\, (x^{-1})^2 + \mathfrak{E}_{21}\, (x^{-1})^{21}$$

из условия (19). Вычислим вектор $x \circ x^{-1}$. Получим

$$\begin{aligned} & x \circ x^{-1} = \\ & \mathfrak{E}_0\, x^0\, (x^{-1})^0 + \mathfrak{E}_1\, x^0\, (x^{-1})^1 + \\ & \qquad\qquad \mathfrak{E}_2\, x^0\, (x^{-1})^2 + \mathfrak{E}_{21}\, x^0\, (x^{-1})^{21} + \\ & \mathfrak{E}_1\, x^1\, (x^{-1})^0 + \mathfrak{E}_0\, x^1\, (x^{-1})^1 + \\ & \qquad\qquad \mathfrak{E}_{21}\, s\, x^1\, (x^{-1})^2 + \mathfrak{E}_2\, s\, x^1\, (x^{-1})^{21} + \\ & \mathfrak{E}_2\, x^2\, (x^{-1})^0 + \mathfrak{E}_{21}\, x^2\, (x^{-1})^1 + \\ & \qquad\qquad \mathfrak{E}_0\, x^2\, (x^{-1})^2 + \mathfrak{E}_1\, x^2\, (x^{-1})^{21} + \\ & \mathfrak{E}_{21}\, x^{21}\, (x^{-1})^0 + \mathfrak{E}_2\, x^{21}\, (x^{-1})^1 + \\ & \qquad\qquad \mathfrak{E}_1\, s\, x^{21}\, (x^{-1})^2 + \mathfrak{E}_0\, s\, x^{21}\, (x^{-1})^{21} \,. \end{aligned}$$

Здесь $s = \operatorname{sign}(1, 2)$.

Условие (19) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} x^0\, (x^{-1})^0 + x^1\, (x^{-1})^1 + x^2\, (x^{-1})^2 + s\, x^{21}\, (x^{-1})^{21} &= 1 \\ x^1\, (x^{-1})^0 + x^0\, (x^{-1})^1 + s\, x^{21}\, (x^{-1})^2 + x^2\, (x^{-1})^{21} &= 0 \\ x^2\, (x^{-1})^0 + x^{21}\, (x^{-1})^1 + x^0\, (x^{-1})^2 + s\, x^1\, (x^{-1})^{21} &= 0 \\ x^{21}\, (x^{-1})^0 + x^2\, (x^{-1})^1 + s\, x^1\, (x^{-1})^2 + x^0\, (x^{-1})^{21} &= 0 \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\Delta = det \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & s\, x^{21} \\ x^1 & x^0 & s\, x^{21} & x^2 \\ x^2 & x^{21} & x^0 & s\, x^1 \\ x^{21} & x^2 & s\, x^1 & x^0 \end{pmatrix} =$$

$$x^0\, det \begin{pmatrix} x^0 & s\, x^{21} & x^2 \\ x^{21} & x^0 & s\, x^1 \\ x^2 & s\, x^1 & x^0 \end{pmatrix} - x^1\, det \begin{pmatrix} x^1 & s\, x^{21} & x^2 \\ x^2 & x^0 & s\, x^1 \\ x^{21} & s\, x^1 & x^0 \end{pmatrix} +$$

$$+ x^2\, det \begin{pmatrix} x^1 & x^0 & x^2 \\ x^2 & x^{21} & s\, x^1 \\ x^{21} & x^2 & x^0 \end{pmatrix} - s\, x^{21}\, det \begin{pmatrix} x^1 & x^0 & s\, x^{21} \\ x^2 & x^{21} & x^0 \\ x^{21} & x^2 & s\, x^1 \end{pmatrix} \,.$$

Кроме того, обозначим

$$\Delta_0 = det \begin{pmatrix} 1 & x^1 & x^2 & s\, x^{21} \\ 0 & x^0 & s\, x^{21} & x^2 \\ 0 & x^{21} & x^0 & s\, x^1 \\ 0 & x^2 & s\, x^1 & x^0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} x^0 & s\, x^{21} & x^2 \\ x^{21} & x^0 & s\, x^1 \\ x^2 & s\, x^1 & x^0 \end{pmatrix} \,.$$

$$\Delta_1 = det \begin{pmatrix} x^0 & 1 & x^2 & s\, x^{21} \\ x^1 & 0 & s\, x^{21} & x^2 \\ x^2 & 0 & x^0 & s\, x^1 \\ x^{21} & 0 & s\, x^1 & x^0 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} x^1 & s\, x^{21} & x^2 \\ x^2 & x^0 & s\, x^1 \\ x^{21} & s\, x^1 & x^0 \end{pmatrix} \,.$$

$$\Delta_2 = det \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & 1 & s\,x^{21} \\ x^1 & x^0 & 0 & x^2 \\ x^2 & x^{21} & 0 & s\,x^1 \\ x^{21} & x^2 & 0 & x^0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} x^1 & x^0 & x^2 \\ x^2 & x^{21} & s\,x^1 \\ x^{21} & x^2 & x^0 \end{pmatrix} .$$

$$\Delta_{21} = det \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & 1 \\ x^1 & x^0 & s\,x^{21} & 0 \\ x^2 & x^{21} & x^0 & 0 \\ x^{21} & x^2 & s\,x^1 & 0 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} x^1 & x^0 & s\,x^{21} \\ x^2 & x^{21} & x^0 \\ x^{21} & x^2 & s\,x^1 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует

$$\Delta = x^0\,\Delta_0 + x^1\,\Delta_1 + x^2\,\Delta_2 + s\,x^{21}\,\Delta_{21} .$$

И для координат обратного вектора имеем

$$(x^{-1})^0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{x^0 + x^1\,\frac{\Delta_1}{\Delta_0} + x^2\,\frac{\Delta_2}{\Delta_0} + s\,x^{21}\,\frac{\Delta_{21}}{\Delta_0}} .$$

$$(x^{-1})^1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{x^0\,\frac{\Delta_0}{\Delta_1} + x^1 + x^2\,\frac{\Delta_2}{\Delta_1} + s\,x^{21}\,\frac{\Delta_{21}}{\Delta_1}} .$$

$$(x^{-1})^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{x^0\,\frac{\Delta_0}{\Delta_2} + x^1\,\frac{\Delta_1}{\Delta_2} + x^2 + s\,x^{21}\,\frac{\Delta_{21}}{\Delta_2}} .$$

$$(x^{-1})^{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = \frac{1}{x^0\,\frac{\Delta_0}{\Delta_{21}} + x^1\,\frac{\Delta_1}{\Delta_{21}} + x^2\,\frac{\Delta_2}{\Delta_{21}} + s\,x^{21}} .$$

Выведем одно полезное соотношение. Рассмотрим (19), полагая

$$x = x_2 \circ x_1$$

и соответственно

$$x^{-1} = (x_1)^{-1} \circ (x_2)^{-1} .$$

Тогда имеем

$$(x_2 \circ x_1) \circ ((x_1)^{-1} \circ (x_2)^{-1}) = \mathfrak{E}_0 .$$

Используя (14), получим

$$(\mathfrak{E}_L \circ \mathfrak{e}_M)\,{}^{+}C^L{}_{KI}\,(x_1)^K \cdot (x_2)^I \cdot C^M{}_{PQ}\,(x_1^{-1})^P \cdot (x_2^{-1})^Q = \mathfrak{E}_0 .$$

Отсюда с учетом (20) имеем

$$g_{LM} \cdot {}^{+}C^L{}_{KI} \cdot C^M{}_{PQ} = g_{KP} \cdot g_{IQ} .$$

Это соотношение может быть обобщено по математической индукции.

4. Регулярное представление алгебры фундаментальных частиц

1. Подалгебра действия

Перепишем еще раз соотношения (9) и (12). Первое из них есть закон умножения базисных векторов в алгебре $\mathbb{S}$:

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI} . \qquad (21)$$

Здесь $C^L{}_{KI}$ есть структурные постоянные или структурные матрицы алгебры $\mathbb{S}$. Второе соотношение есть следствие ассоциативности умножения в алгебре $\mathbb{S}$:

$$C^M{}_{LI}\,C^L{}_{NK} = C^M{}_{NL}\,C^L{}_{KI} . \qquad (22)$$

Сравнивая эти выражения, заключаем, что базисным векторам $\mathfrak{e}_I$ можно поставить в соответствие структурные матрицы $C^L{}_{NI}$. Это соответствие называется *регулярным (присоединенным) представлением* алгебры $\mathbb{S}$ и обозначается:

$$\mathfrak{e}_I \sim C^L{}_{NI} .$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который может быть представлен этой матрицей. Из (22) следует, что матрицы умножаются в обратной последовательности по отношению к соответствующим базисным векторам. В частности, числовой единице $\mathfrak{e}_0$ соответствует

$$\mathfrak{e}_0 \sim C^L{}_{N0} = \delta^L{}_N .$$

Вектору $S = \mathfrak{e}_I\,S^I$ в регулярном представлении соответствует матрица

$$S^M{}_N = C^M{}_{NI}\,S^I$$

Таким образом,

$$S = \mathfrak{e}_I\,S^I \sim S^M{}_N = C^M{}_{NI}\,S^I .$$

Произведению векторов

$$S_1 \circ S_2 = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI} \cdot (S_2)^I \cdot (S_1)^K$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$$S^M{}_N = C^M{}_{NL} \cdot C^L{}_{KI} \cdot (S_2)^I \cdot (S_1)^K .$$

Преобразуя последнее выражение с помощью (22), получим

$$S^M{}_N = C^M{}_{LI} \cdot C^L{}_{NK} \cdot (S_2)^I \cdot (S_1)^K = (S_2)^M{}_L \cdot (S_1)^L{}_N ,$$

где

$$(S_2)^M{}_L = C^M{}_{LI} \cdot (S_2)^I , \quad (S_1)^L{}_N = C^L{}_{NK} \cdot (S_2)^K .$$

Таким образом, умножению векторов в алгебре $\mathbb{S}$ в регулярном представлении соответствует умножение матриц в обратном порядке

$$S = S_1 \circ S_2 \sim S^M{}_N = (S_2)^M{}_L \cdot (S_1)^L{}_N \,.$$

Обратному вектору

$$S^{-1} = \mathfrak{e}_I \, (S^{-1})^I$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$$(S^{-1})^M{}_N = C^M{}_{NI} \, (S^{-1})^I \,.$$

Соотношению

$$S \circ S^{-1} = \mathfrak{e}_0$$

в регулярном представлении соответствует

$$(S^{-1})^M{}_L \, S^L{}_N = \delta^M{}_N \,.$$

Действительно, имеем

$$S \circ S^{-1} \sim C^M{}_{LI} \cdot C^L{}_{NK} \cdot S^K \cdot (S^{-1})^I \,.$$

Преобразуем правую часть с помощью (22). Получим

$$C^M{}_{NL} \cdot C^L{}_{KI} \cdot S^K \cdot (S^{-1})^I \,.$$

Далее воспользуемся (20). В результате получим

$$C^M{}_{N0} \cdot C^0{}_{KI} \cdot S^K \cdot (S^{-1})^I = \delta^M{}_N \,.$$

Скалярному произведению

$$\langle \mathfrak{e}_I, \mathfrak{e}_K \rangle = \mathfrak{e}_0 \, C^0{}_{IK} \,.$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$$G^M{}_{NIK} = \delta^M{}_N \cdot g_{IK} \,.$$

2. Подалгебра пространства-времени

Перепишем еще раз соотношения (14) и (17). Первое из них есть закон умножения базисных векторов в алгебре $\mathbb{X}$:

$$\mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_K = \mathfrak{e}_L \cdot {}^+C^L{}_{KI} \,. \tag{23}$$

Здесь ${}^+C^L{}_{KI}$ есть структурные постоянные или структурные матрицы алгебры $\mathbb{X}$. Второе соотношение есть следствие ассоциативности умножения в алгебре $\mathbb{X}$:

$${}^+C^M{}_{LI} \, {}^+C^L{}_{NK} = {}^+C^M{}_{NL} \, {}^+C^L{}_{KI} \,. \tag{24}$$

Сравнивая эти выражения, заключаем, что базисным векторам $\mathfrak{E}_I$ можно поставить в соответствие структурные матрицы ${}^+C^L{}_{NI}$.

$$\mathfrak{E}_I \sim {}^+C^L{}_{NI} \,.$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который может быть представлен этой матрицей. Из (24) следует, что матрицы умножаются в той же последовательности, что и соответствующие базисные векторы. В частности, числовой единице $\mathfrak{E}_0$ соответствует

$$\mathfrak{E}_0 \sim {}^+C^L{}_{N0} = \delta^L{}_N \,.$$

Вектору $x = \mathfrak{E}_I \, x^I$ в регулярном представлении соответствует матрица

$$X^M{}_N = {}^+C^M{}_{NI} \, x^I \,.$$

Таким образом,

$$x = \mathfrak{E}_I \, x^I \sim X^M{}_N = {}^+C^M{}_{NI} \, x^I \,.$$

Произведению векторов

$$x = x_2 \circ x_1$$

в регулярном представлении соответствует произведение матриц

$$X^M{}_N = (X_2)^M{}_L \cdot (X_1)^L{}_N \,,$$

в том же порядке. Действительно,

$$\begin{aligned} x = x_2 \circ x_1 &= \mathfrak{E}_L \cdot {}^+C^L{}_{KI} \cdot (x_1)^K \cdot (x_2)^I \\ &\sim X^M{}_N = {}^+C^M{}_{NL} \cdot {}^+C^L{}_{KI} \cdot (x_1)^K \cdot (x_2)^I \,. \end{aligned}$$

Преобразуя последнее выражение с помощью (24), получим

$$\begin{aligned} X^M{}_N &= {}^+C^M{}_{LI} \cdot {}^+C^L{}_{NK} \cdot (x_1)^K \cdot (x_2)^I \\ &= (X_2)^M{}_L \cdot (X_1)^L{}_N \,, \end{aligned}$$

где

$$(X_2)^M{}_L = {}^+C^M{}_{LK} \cdot (x_2)^K \,, (X_1)^L{}_N = {}^+C^L{}_{NI} \cdot (x_1)^I \,.$$

Таким образом, умножению векторов в алгебре $\mathbb{S}$ в регулярном представлении соответствует умножение матриц в том же порядке.

Обратному вектору

$$x^{-1} == \mathfrak{E}_I \, (x^{-1})^I$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$$(X^{-1})^M{}_N = {}^+C^M{}_{NI} \, (x^{-1})^I \,.$$

Соотношению

$$x \circ x^{-1} = \mathfrak{E}_0$$

в регулярном представлении соответствует

$$X^M{}_L \, (X^{-1})^L{}_N = \delta^M{}_N \,.$$

Действительно, имеем

$$x \circ x^{-1} \sim {}^{+}C^{M}{}_{LI} \cdot {}^{+}C^{L}{}_{NK} \cdot x^{I} \cdot (x^{-1})^{K} \, .$$

Преобразуем правую часть с помощью (24). Получим

$${}^{+}C^{M}{}_{NL} \cdot {}^{+}C^{L}{}_{KI} \cdot x^{I} \cdot (x^{-1})^{K}$$

Далее воспользуемся (20). В результате получим

$${}^{+}C^{M}{}_{N0} \cdot {}^{+}C^{0}{}_{KI} \cdot x^{I} \cdot (x^{-1})^{K} = \delta^{M}{}_{N} \, .$$

Скалярному произведению

$$\langle \mathfrak{E}_I , \mathfrak{E}_K \rangle = \mathfrak{E}_0 \, {}^{+}C^{0}{}_{KI} \, .$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$${}^{+}G^{M}{}_{NIK} = \delta^{M}{}_{N} \cdot {}^{+}g_{KI} \, .$$

3. Последовательность индексов

Мы будем рассматривать базисные векторы и координаты вектора алгебры в определенной последовательности. Так вектор $S \in \mathbb{S}_3$ будем записывать следующим образом

$$\begin{aligned} S = {} & \mathfrak{e}_{32} \, S^{32} + \mathfrak{e}_{13} \, S^{13} + \mathfrak{e}_{21} \, S^{21} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{0} \\ & + \mathfrak{e}_{1} \, S^{1} + \mathfrak{e}_{2} \, S^{2} + \mathfrak{e}_{3} \, S^{3} + \mathfrak{e}_{123} \, S^{123} \, . \end{aligned} \qquad (25)$$

Указанная запись соответствует следующему порядку индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123) \, .$$

Если бы мы имели дело с векторным пространством, то порядок индексов не имел бы существенного значения. Но для алгебры это не так. Напомним, что именно для такого порядка индексов мы получили матрицы Дирака. Ни в каком другом случае этот результат был бы невозможен. Попробуем разобраться в чем тут дело. В указанном порядке выделяется группа базисных векторов

$$\mathfrak{e}_{32} \, , \quad \mathfrak{e}_{13} \, , \quad \mathfrak{e}_{21} \, , \quad \mathfrak{e}_{0} \, .$$

За этим обстоятельством стоит определенный физический смысл. Векторное пространство, построенное на указанных базисных векторах является алгеброй. Более того эта алгебра имеет фундаментальное значение для элементарных частиц. В ковариантной пространственно-временной модификации эта алгебра есть алгебра нерелятивистского спина.

Два базисных вектора

$$\mathfrak{e}_{21} \, , \quad \mathfrak{e}_{0}$$

также выделяется в особый блок, который также определяет алгебру, имеющую фундаментальное значение для элементарных частиц. В ковариантной пространственно-временной модификации эта алгебра есть алгебра третьей компоненты спина.

В общем случае вектор $S \in \mathbb{S}$ будем записывать следующим образом

$$\begin{aligned} S = {} & \mathfrak{e}_{32} \, S^{32} + \mathfrak{e}_{13} \, S^{13} + \mathfrak{e}_{21} \, S^{21} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{0} \\ & + \mathfrak{e}_{42} \, S^{42} + \mathfrak{e}_{14} \, S^{14} + \mathfrak{e}_{1324} \, S^{1324} + \mathfrak{e}_{34} \, S^{34} \\ & + \mathfrak{e}_{1} \, S^{1} + \mathfrak{e}_{2} \, S^{2} + \mathfrak{e}_{3} \, S^{3} + \mathfrak{e}_{123} \, S^{123} \\ & + \mathfrak{e}_{134} \, S^{134} + \mathfrak{e}_{234} \, S^{234} + \mathfrak{e}_{4} \, S^{4} + \mathfrak{e}_{124} \, S^{124} \, , \end{aligned}$$

Указанная запись соответствует следующему порядку индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124) \, .$$

В указанном порядке выделяется группа базисных векторов

$$\mathfrak{e}_{32} \, , \quad \mathfrak{e}_{13} \, , \quad \mathfrak{e}_{21} \, , \quad \mathfrak{e}_{0} \, , \quad \mathfrak{e}_{42} \, , \quad \mathfrak{e}_{14} \, , \quad \mathfrak{e}_{1324} \, , \quad \mathfrak{e}_{34} \, .$$

Векторное пространство, построенное на указанных базисных векторах является алгеброй. Эта алгебра имеет фундаментальное значение для элементарных частиц. В ковариантной пространственно-временной модификации эта алгебра есть алгебра релятивистского спина.

4. Представление над полем гиперчисел

Вектор $S \in \mathbb{S}_3$ можно записать в виде[*] :

$$\begin{aligned} S = {} & \mathfrak{e}_{13} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, {}'S^{32} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{13}) \\ & + \mathfrak{e}_{0} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, S^{21} + \mathfrak{e}_{0} \, x^{0}) + \mathfrak{e}_{2} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, S^{1} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{2}) \\ & + \mathfrak{e}_{123} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, {}'S^{3} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{123}) \, . \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{S}_3$ в виде произведения $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_1$. Базисными векторами алгебры $\mathbb{S}_2$ являются $\mathfrak{e}_{13}, \mathfrak{e}_{0}, \mathfrak{e}_{2}, \mathfrak{e}_{123}$; базисными векторами алгебры $\mathbb{S}_1$ являются $\mathfrak{e}_{21}, \mathfrak{e}_{0}$.

Также вектор $S \in \mathbb{S}_4$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} S = {} & \mathfrak{e}_{13} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, {}'S^{32} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{13}) \\ & + \mathfrak{e}_{0} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, S^{21} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{0}) + \mathfrak{e}_{14} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, {}'S^{42} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{14}) \\ & + \mathfrak{e}_{34} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, {}'S^{1324} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{34}) + \mathfrak{e}_{2} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, S^{1} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{2}) \\ & + \mathfrak{e}_{123} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, {}'S^{3} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{123}) + \mathfrak{e}_{234} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, {}'S^{134} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{234}) \\ & + \mathfrak{e}_{124} \circ (\mathfrak{e}_{21} \, {}'S^{4} + \mathfrak{e}_{0} \, S^{124}) \, , \end{aligned}$$

---

[*] Штрих перед координатой означает, что зта координата умножается на знак соответствующей соседней транспозиции. Например

$${}'S^{3} = S^{3} \cdot \mathrm{sign}(2, 3) \cdot \mathrm{sign}(1, 3) \, .$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{S}_4$ в виде произведения $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_1$. Базисными векторами алгебры $\mathbb{S}_3$ являются $\mathfrak{e}_{13}, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_{123}$; $\mathfrak{e}_{14}, \mathfrak{e}_{34}, \mathfrak{e}_{234}, \mathfrak{e}_{124}$; базисными векторами алгебры $\mathbb{S}_1$ являются $\mathfrak{e}_{21}, \mathfrak{e}_0$.

Координаты вектора S (выражения в скобках) в этих случаях можно рассматривать как гиперчисла размерности два. При этом алгебра $\mathbb{S}_1$ выступает как множество указанных гиперчисел. Базисный вектор $\mathfrak{e}_0$ представляет собой действительную единицу, а базисный вектор $\mathfrak{e}_{21}$ мы рассматриваем как вторую гиперединицу. В том случае, если $\operatorname{sign}(1,2) = -1$ (в этом случае $(\mathfrak{e}_{21})^2 = -1$) базисный вектор $\mathfrak{e}_{21}$ мы рассматриваем как мнимую единицу, алгебра $\mathbb{S}_1$ выступает как множество комплексных чисел. В результате мы имеем *комплексное представление* алгебры действия $\mathbb{S}$. Именно в таком виде была создана квантовая механика и поэтому мнимая единица приобрела таинственную, трансцендентную роль в квантовой теории. В действительности, с нею связан лишь способ записи соответствующего базисного вектора.

В том случае, если $\operatorname{sign}(1,2) = 1$ (в этом случае $(\mathfrak{e}_{21})^2 = 1$) базисный вектор $\mathfrak{e}_{21}$ мы рассматриваем как a-единицу (См. Лекцию 11), алгебра $\mathbb{S}_1$ выступает как множество a-гиперчисел. В результате мы имеем *a-представление* алгебры действия $\mathbb{S}$.

Кроме того вектор $S \in \mathbb{S}_3$ может быть записан в следующем виде:

$$\begin{aligned} S = {} & \mathfrak{e}_0 \circ (\mathfrak{e}_{32}\, S^{32} + \mathfrak{e}_{13}\, S^{13} + \mathfrak{e}_{21}\, S^{21} + \mathfrak{e}_0\, S^0) \\ & + \mathfrak{e}_{123} \circ (\mathfrak{e}_{32}\,'S^1 + \mathfrak{e}_{13}\,'S^2 + \mathfrak{e}_{21}\,'S^3 + \mathfrak{e}_0\, S^{123})\,. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{S}_3$ в виде произведения $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$. Базисными векторами алгебры $\mathbb{S}_1$ являются $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_{123}$; базисными векторами алгебры $\mathbb{S}_2$ являются $\mathfrak{e}_{32}, \mathfrak{e}_{13}, \mathfrak{e}_{21}, \mathfrak{e}_0$.

Также вектор $S \in \mathbb{S}_4$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} S = {} & \mathfrak{e}_0 \circ (\mathfrak{e}_{32}\, S^{32} + \mathfrak{e}_{13}\, S^{13} + \mathfrak{e}_{21}\, S^{21} + \mathfrak{e}_0\, S^0) \\ & + \mathfrak{e}_{34} \circ (\mathfrak{e}_{32}\,'S^{42} + \mathfrak{e}_{13}\,'S^{14} + \mathfrak{e}_{21}\,'S^{1324} + \mathfrak{e}_0\, S^{34}) \\ & + \mathfrak{e}_{123} \circ (\mathfrak{e}_{32}\, S^1 + \mathfrak{e}_{13}\,'S^2 + \mathfrak{e}_{21}\,'S^3 + \mathfrak{e}_0\, S^{123}) \\ & + \mathfrak{e}_{124} \circ (\mathfrak{e}_{32}\,'S^{134} + \mathfrak{e}_{13}\,'S^{234} + \mathfrak{e}_{21}\,'S^4 + \mathfrak{e}_0\, S^{124})\,, \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{S}_4$ в виде произведения $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2$. Базисными векторами одной алгебры $\mathbb{S}_2$ являются $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_{123}$, $\mathfrak{e}_{34}, \mathfrak{e}_{124}$; базисными векторами другой алгебры $\mathbb{S}_2$ являются $\mathfrak{e}_{32}, \mathfrak{e}_{13}, \mathfrak{e}_{21}, \mathfrak{e}_0$.

Координаты вектора S (выражения в скобках) в этих случаях можно рассматривать как гиперчисла размерности четыре. При этом алгебра $\mathbb{S}_2$ выступает как множество указанных гиперчисел. Четырем гиперединицам соответствуют базисные векторы $\mathfrak{e}_{32}, \mathfrak{e}_{13}, \mathfrak{e}_{21}, \mathfrak{e}_0$. Базисный вектор $\mathfrak{e}_0$ представляет собой действительную единицу.

В том случае, если*

$$\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(1,3) = \operatorname{sign}(3,2) = -1$$

алгебра $\mathbb{S}_2$ выступает как множество кватернионов. В результате мы имеем *кватернионное представление* алгебры действия $\mathbb{S}$.

5. Сжатое представление контравариантной алгебры

Сжатым называется регулярное представление алгебры $\mathbb{S}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{S}_{n-k}$, где $k < n$.

Для примера рассмотрим сжатое представление алгебры $\mathbb{S}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{S}_{n-1}$.

Разобьем базисные векторы $\mathfrak{e}_I$ алгебры $\mathbb{S}_n$ на две группы $\mathfrak{e}_{I_1}$ и $\mathfrak{e}_{I_2}$ с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы $\mathfrak{e}_{I_1}$ образовывали алгебру. В силу симметрий алгебры соотношения (9) имеют вид

$$\mathfrak{e}_{K_1} \circ \mathfrak{e}_{I_1} = \mathfrak{e}_{L_1}\, C^{L_1}{}_{K_1 I_1}\,, \tag{26}$$

$$\mathfrak{e}_{K_2} \circ \mathfrak{e}_{I_1} = \mathfrak{e}_{L_2}\, C^{L_2}{}_{K_2 I_1}\,, \tag{27}$$

$$\mathfrak{e}_{K_1} \circ \mathfrak{e}_{I_2} = \mathfrak{e}_{L_2}\, C^{L_2}{}_{K_1 I_2}\,,$$

$$\mathfrak{e}_{K_2} \circ \mathfrak{e}_{I_2} = \mathfrak{e}_{L_1}\, C^{L_1}{}_{K_2 I_2}\,.$$

Будем полагать, что приближенно базисные векторы $\mathfrak{e}_{L_2}$ можно заменить на базисные векторы $\mathfrak{e}_{L_1}$ с помощью соотношения

$$\mathfrak{e}_{L_2} = \mathfrak{e}_{L_1} \cdot P^{L_1}{}_{L_2}\,,$$

где $P^{L_2}{}_{L_1}$ есть матрица соответствий. Тогда соотношение (27) принимает вид:

$$\mathfrak{e}_{K_2} \circ \mathfrak{e}_{I_1} = \mathfrak{e}_{L_1} \cdot P^{L_1}{}_{L_2} \cdot C^{L_2}{}_{K_2 I_1}\,. \tag{28}$$

В сжатом представлении базисные векторы подалгебры $\mathbb{S}_{n-1}$ представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно. Соотношения (26) и (28) позволяют получить структурные матрицы алгебры $\mathbb{S}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{S}_{n-1}$. Аналогичным образом можно рассмотреть сжатое представление алгебры $\mathbb{S}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{S}_{n-k}$, где $k < n$.

6. Первое сжатое представление

Рассмотрим сжатое представление $\mathbb{S}_4$ в ее подалгебре $\mathbb{S}_3$, построенной на базисных векторах $\mathfrak{e}_{32}$, $\mathfrak{e}_{13}$, $\mathfrak{e}_{21}$, $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{e}_{123}$. Для этого положим, что при вычислении по формуле (28) базисные векторы с индексами

---

*в этом случае

$$(\mathfrak{e}_{21})^2 = (\mathfrak{e}_{13})^2 = (\mathfrak{e}_{32})^2 = -1\,.$$

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность структурных матриц алгебры $\mathbb{S}_4$ понижается вдвое и равна 8×8 в действительном представлении, 4×4 в представлении 2-гиперчислами и 2×2 в представлении 4-гиперчислами. Структурные матрицы пространственных базисных векторов алгебры $\mathbb{S}_4$ в сжатом представлении совпадают с точными матрицами алгебры $\mathbb{S}_3$. Такое представление мы называли *первым сжатым* и обозначили

$$R_1 : \mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_3 \, \{\mathfrak{e}_{32}, \mathfrak{e}_{13}, \mathfrak{e}_{21}, \mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_{123}\}.$$

7. Второе сжатое представление

Рассмотрим сжатое представление

$$R_2 : \mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_2 \, \{\mathfrak{e}_{32}, \mathfrak{e}_{13}, \mathfrak{e}_{21}, \mathfrak{e}_0\}.$$

которое мы называли *вторым сжатым* представлением. Для этого положим, что при вычислении по формуле (28) базисные векторы с индексами $(42, 14, 1324, 34)$, $(134, 234, 4, 124)$ и $(1, 2, 3, 123)$ отождествляются с базисными векторами с индексами $(32, 13, 21, 0)$ соответственно. Тогда размерность структурных матриц алгебры $\mathbb{S}_4$ понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна 4×4 в действительном представлении, 2×2 в представлении 2-гиперчислами и 1×1 в представлении 4-гиперчислами.

8. Третье сжатое представление

Рассмотрим сжатое представление

$$R_3 : \mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_1 \, \{\mathfrak{e}_{21}, \mathfrak{e}_0\} \,,$$

которое мы называли *третьим сжатым* представлением. Для этого положим, что базисные векторы с индексами $(42, 14)$, $(1324, 34)$, $(134, 234)$, $(4, 124)$, $(1, 2)$, $(3, 123)$, $(32, 13)$ отождествляются с базисными векторами с индексами $(21, 0)$ соответственно. Тогда размерность структурных матриц алгебры $\mathbb{S}_4$ понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна 2×2 в действительном представлении, 1×1 в представлении 2-гиперчислами.

В Лекции 3 мы показали, что теория электрона Дирака использует первое сжатое представление алгебры Клиффорда, теория электрона Паули использует второе сжатое представление алгебры Клиффорда, а теория электрона Шредингера использует третье сжатое представление алгебры Клиффорда.

5. Алгебра Ли алгебр $\mathbb{S}$ и $\mathbb{X}$

Из базисных векторов $\mathfrak{e}_I$ выделим векторы $\mathfrak{e}_\alpha$, для которых по крайней мере один из коммутаторов

$$\mathfrak{e}_\alpha \circ \mathfrak{e}_I - \mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{e}_\alpha \neq 0 \,. \tag{29}$$

Такие векторы являются базисными векторами подалгебры Ли алгебры $\mathbb{S}$. Будем обозначать ее $\mathbb{LS}$. Иначе говоря $\mathfrak{e}_\alpha$ – это такие базисные векторы, которые не коммутируют со всеми базисными векторами алгебры $\mathbb{S}_d$. Или: векторы алгебры $\mathbb{S}$, которые коммутируют со всеми векторами этой алгебры не принадлежат алгебре $\mathbb{LS}$.

Обозначим базисные векторы алгебры $\mathbb{LS}$

$$\rho_\alpha = \mathfrak{e}_\alpha ,$$

а коммутатор (29) будем рассматривать как умножение на $\mathbb{LS}$:

$$\rho_\alpha \odot \rho_\beta = \mathfrak{e}_\alpha \circ \mathfrak{e}_\beta - \mathfrak{e}_\beta \circ \mathfrak{e}_\alpha = \\ \mathfrak{e}_\gamma \, C^\gamma{}_{\alpha\beta} - \mathfrak{e}_\gamma \, C^\gamma{}_{\beta\alpha} = \rho_\gamma \, C^\gamma{}_{[\alpha\beta]} \,.$$

То есть, величины $C^\gamma{}_{[\alpha\beta]}$ являются структурными постоянными подалгебры Ли $\mathbb{LS}$. Регулярное представление алгебры Ли дается соответствием

$$\rho_\beta \sim C^\gamma{}_{[\alpha\beta]} \,.$$

6. Уравнения структуры алгебр $\mathbb{S}$ и $\mathbb{X}$ и квантовые постулаты механики фундаментальных частиц

1. Уравнения структуры алгебры действия

Особенность дифференцирования векторов алгебр связана с дифференцированием закона умножения векторов. Она проявляется в существовании для алгебр *уравнений структуры*. Далее рассмотрим уравнения структуры для подалгебры действия $\mathbb{S}$.

Закон умножения векторов в $\mathbb{S}$ мы записали так:

$$S = S_1 \circ S_2 \,. \tag{30}$$

Если воспользоваться законом умножения базисных векторов (9), то получим правило умножения координат векторов сомножителей (10):

$$S^L = C^L{}_{KI} \, (S_2)^I \, (S_1)^K \,.$$

Введем *дифференциал* d – оператор, действующий на функцию, стоящую справа. Рассмотрим дифференциал dS. Будем индексом различать дифференциалы d_1, $d_2, \ldots$ подобно тому как разные векторы различаются индексом $(S_1, S_2, \ldots)$. Дифференциал вектора S при изменении вектора S_p будем обозначать через d_pS. Из (30) следует

$$d_1 S = dS_1 \circ S_2\,, \qquad d_2 S = S_1 \circ dS_2\,.$$

Из этих выражений получаем

$$dS_2 = (S_1)^{-1} \circ d_2 S\,, \qquad dS_1 = d_1 S \circ (S_2)^{-1}\,. \qquad (31)$$

Введем второй дифференциал $d_2 d_1 S$. Из (30) для него имеет место

$$d_2 d_1 S = dS_1 \circ dS_2\,.$$

Используя (31), получим*

$$d_2 d_1 S = d_1 S \circ (S)^{-1} \circ d_2 S\,.$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при $S = (S)^{-1} = \mathfrak{e}_0$, это уравнение принимает вид

$$d_2 d_1 S = d_1 S \circ d_2 S\,. \qquad (32)$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры $\mathbb{S}$ в векторной форме.

Подставляя в (32) выражения дифференциалов через дифференциалы координат и пользуясь законом умножения базисных векторов (9), получим уравнения структуры в координатной форме

$$d_2 d_1 S^L = C^L{}_{KI} \cdot d_2 S^I \cdot d_1 S^K\,. \qquad (33)$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того, чтобы перейти к размерному действию необходимо уравнение (30) записать в виде

$$S = \frac{1}{S_0}\, S_1 \circ S_2\,,$$

где S_0 есть постоянная, имеющая размерность действия. Тогда уравнения (32) и (33) примут вид соответственно

$$d_2 d_1 S = \frac{1}{S_0}\, d_1 S \circ d_2 S\,. \qquad (34)$$

и

$$d_2 d_1 S^L = \frac{1}{S_0}\, C^L{}_{KI} \cdot d_2 S^I \cdot d_1 S^K\,. \qquad (35)$$

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые постулаты, на которых строится квантовая механика фундаментальных частиц. Мы перейдем к более привычной записи квантовых постулатов, если введем переобозначения

$$d_1 S = \psi\,, \quad d_2 = d\,.$$

Тогда вместо (34) получим

$$d\psi = \frac{1}{S_0}\, \psi \circ dS\,,$$

а вместо (35) получим

$$d\psi^L = \frac{1}{S_0}\, C^L{}_{KI} \cdot dS^I \cdot \psi^K\,.$$

Если ввести обобщенные импульсы фундаментальной частицы в соответствии с соотношением

$$dS = p_M\, dx^M\,,$$

получим квантовые постулаты в векторном виде

$$d\psi = \frac{1}{S_0}\, \psi \circ p_M\, dx^M$$

и в координатном виде

$$d\psi^L = \frac{1}{S_0}\, C^L{}_{KI} \cdot p^I{}_M\, dx^M \cdot \psi^K\,.$$

Здесь ψ есть волновая функция фундаментальной частицы, которая приобретает новый физический смысл и представляет собой частный дифференциал вектора действия.

2. Уравнения структуры алгебры пространства-времени

Предыдущие выкладки, выполненные для алгебры действия $\mathbb{S}$ мы можем повторить и для алгебры пространства-времени $\mathbb{X}$. Далее рассмотрим уравнения структуры для алгебры $\mathbb{X}$.

Закон умножения векторов в $\mathbb{X}$ записываем так:

$$x = x_2 \circ x_1\,. \qquad (36)$$

Если воспользоваться законом умножения базисных векторов (14), то получим правило умножения координат векторов сомножителей:

$$x^L = {}^{+}C^L{}_{KI}\, (x_2)^I\, (x_1)^K\,.$$

Как и прежде Введем *дифференциал* d – оператор, действующий на функцию, стоящую справа. Также будем индексом различать дифференциалы d_1, $d_2, \ldots$ подобно тому как разные векторы различаются индексом $(x_1, x_2, \ldots)$. Дифференциал вектора x при изменении вектора x_p будем обозначать через $d_p x$. Из (36) следует

$$d_1 x = x_2 \circ dx_1\,, \qquad d_2 x = dx_2 \circ x_1\,.$$

Из этих выражений получаем

$$dx_1 = (x_2)^{-1} \circ d_1 x\,, \qquad dx_2 = d_2 x \circ (x_1)^{-1}\,. \qquad (37)$$

---

*Здесь учтено, что для (30)

$$S^{-1} = (S_2)^{-1} \circ (S_1)^{-1}\,.$$

Введем второй дифференциал $d_2 d_1 x$. Из (36) для него имеет место

$$d_2 d_1 x = dx_2 \circ dx_1 \,.$$

Используя (37), получим[†]

$$d_2 d_1 x = d_2 x \circ (x)^{-1} \circ d_1 x \,.$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при $x = (x)^{-1} = \mathfrak{E}_0$, это уравнение принимает вид

$$d_2 d_1 x = d_2 x \circ d_1 x \,. \qquad (38)$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры пространства-времени $\mathbb{X}$ в векторной форме.

Подставляя в (38) выражения дифференциалов через дифференциалы координат и пользуясь законом умножения базисных векторов (14), получим уравнения структуры в координатной форме

$$d_2 d_1 x^L = {}^{+}C^L{}_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K \,. \qquad (39)$$

Здесь уравнения структуры (38) и (39) также относятся к безразмерным координатам. Если ввести координаты, имеющие размерность длины (см. Лекцию 8), то уравнение (36) нужно записать так

$$x = \frac{1}{R_0}\, x_2 \circ x_1 \,,$$

где R_0 есть постоянная, имеющая размерность длины. Тогда уравнения (38) и (39) примут вид соответственно

$$d_2 d_1 x = \frac{1}{R_0}\, d_2 x \circ d_1 x \,. \qquad (40)$$

и

$$d_2 d_1 x^L = \frac{1}{R_0}\, {}^{+}C^L{}_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K \,. \qquad (41)$$

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые постулаты, на которых должно строится квантование пространства-времени фундаментальных частиц. Им можно придать более привычную форму записи. Для этого введем переобозначения

$$d_1 x = \chi \,, \quad d_2 = d \,.$$

Тогда вместо (40) и (41) получим квантовые постулаты в векторном виде

$$d\chi = \frac{1}{R_0}\, dx \circ \chi \,,$$

и в координатном виде

$$d\chi^L = \frac{1}{R_0}\, {}^{+}C^L{}_{KI} \cdot \chi^K \cdot dx^I \,.$$

Здесь χ есть волновая функция пространства-времени фундаментальной частицы, представляющая собой частный дифференциал вектора пространства-времени.

7. Подалгебры фундаментальных частиц

Далее рассмотрим подалгебры контравариантной универсальной алгебры $\mathbb{S}$, которые поставим в соответствие различным типам фундаментальных частиц – лептонам, кваркам и суперсимметричным им гипотетическим кваркино и лептино. Мы переходим к алгебрам разных фундаментальных частиц, выбирая то или иное условие соседней транспозиции.

1. Алгебра лептонов

Алгебра лептонов есть частный случай универсальной контравариантной алгебры $\mathbb{S}$, когда условие соседней транспозиции геометрических базисных векторов имеет вид

$$\mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_2 = -\mathfrak{e}_2 \circ \mathfrak{e}_1 \,, \quad \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_3 = -\mathfrak{e}_3 \circ \mathfrak{e}_1 \,, \quad \mathfrak{e}_3 \circ \mathfrak{e}_2 = -\mathfrak{e}_2 \circ \mathfrak{e}_3 \,.$$

Или иначе

$$\mathrm{sign}(1,2) = \mathrm{sign}(1,3) = \mathrm{sign}(3,2) = -1 \,.$$

Для того, чтобы выделить этот случай мы вводим другое обозначение для базисных векторов. Мы используем ε вместо $\mathfrak{e}$ и $\mathcal{E}$ вместо $\mathfrak{E}$. Кроме того, мы используем специальное обозначение для пространства действия и пространства-времени лептона. Вместо $\mathbb{S}$ мы используем $\mathbb{C}_{right}$, а вместо $\mathbb{X}$ мы используем $\mathbb{C}_{left}$.

В результате пространственная часть волновой функции лептонов имеет вид

$$\psi = \varepsilon_0\, \psi^0 + \varepsilon_a\, \psi^a + \varepsilon_{[ab]}\, \psi^{[ba]} + \varepsilon_{[123]}\, \psi^{[321]} \,.$$

Двум разновидностям условия соседней транспозиции с участием базисного вектора времени соответствуют две цветовые разновидности лептонов: белые и черные лептоны.

Для белых лептонов условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 &= -\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 \,, & \varepsilon_1 \circ \varepsilon_4 &= -\varepsilon_4 \circ \varepsilon_1 \,, \\ \varepsilon_1 \circ \varepsilon_3 &= -\varepsilon_3 \circ \varepsilon_1 \,, & \varepsilon_2 \circ \varepsilon_4 &= -\varepsilon_4 \circ \varepsilon_2 \,, \\ \varepsilon_3 \circ \varepsilon_2 &= -\varepsilon_2 \circ \varepsilon_3 \,, & \varepsilon_3 \circ \varepsilon_4 &= -\varepsilon_4 \circ \varepsilon_3 \,. \end{aligned}$$

Или иначе

$$\begin{gathered} \mathrm{sign}(1,2) = \mathrm{sign}(1,3) = \mathrm{sign}(3,2) = \\ \mathrm{sign}(1,4) = \mathrm{sign}(2,4) = \mathrm{sign}(3,4) = -1 \,. \end{gathered}$$

[†] Здесь учтено, что для (36)

$$x^{-1} = (x_1)^{-1} \circ (x_2)^{-1} \,.$$

Отсюда пространство действия белых лептонов $\mathbb{C}_w$ есть множество векторов вида

$$\psi = \varepsilon_0\, \psi^0 + \varepsilon_i\, \psi^i + \varepsilon_{[ik]}\, \psi^{[ki]} + \varepsilon_{[ikl]}\, \psi^{[lki]} + \varepsilon_{[1324]}\, \psi^{[4231]} \,.$$

Если пространство с базисными векторами $\varepsilon_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{C}_w)^p$ то пространство алгебры белых лептонов $\mathbb{C}_w$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_w = \mathbb{C}^0 + \mathbb{C}^1 + (\mathbb{C}_w)^2 + (\mathbb{C}_w)^3 + (\mathbb{C}_w)^4 \,.$$

Алгебра белых лептонов есть алгебра Клиффорда. Она была рассмотрена в Лекциях 5,6,7.

Для черных лептонов условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 = -\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 \,, \quad \varepsilon_1 \circ \varepsilon_4 = \varepsilon_4 \circ \varepsilon_1 \,, \\
\varepsilon_1 \circ \varepsilon_3 = -\varepsilon_3 \circ \varepsilon_1 \,, \quad \varepsilon_2 \circ \varepsilon_4 = -\varepsilon_4 \circ \varepsilon_2 \,, \\
\varepsilon_3 \circ \varepsilon_2 = -\varepsilon_2 \circ \varepsilon_3 \,, \quad \varepsilon_3 \circ \varepsilon_4 = -\varepsilon_4 \circ \varepsilon_3 \,.
\end{gathered}$$

Или иначе

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(1,3) = \operatorname{sign}(3,2) = \\
&\qquad \operatorname{sign}(2,4) = \operatorname{sign}(3,4) = -1 \,, \\
&\operatorname{sign}(1,4) = 1 \,.
\end{aligned}$$

Отсюда пространство действия черных лептонов $\mathbb{C}_b$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}
\psi = {} & \varepsilon_0\, \psi^0 + \varepsilon_i\, \psi^i + \varepsilon_{[ab]}\, \psi^{[ba]} \\
& + \varepsilon_{\langle 14 \rangle}\, \psi^{\langle 41 \rangle} + \varepsilon_{[42]}\, \psi^{[24]} + \varepsilon_{[34]}\, \psi^{[43]} \\
& + \varepsilon_{[123]}\, \psi^{[321]} + \varepsilon_{(124)_2}\, \psi^{(421)_2} + \varepsilon_{(134)_2}\, \psi^{(431)_2} \\
& + \varepsilon_{[234]}\, \psi^{[432]} + \varepsilon_{(1324)_2}\, \psi^{(4231)_2} \,.
\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\varepsilon_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{C}_b)^p$ то пространство алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_b = \mathbb{C}^0 + \mathbb{C}^1 + (\mathbb{C}_b)^2 + (\mathbb{C}_b)^3 + (\mathbb{C}_b)^4 \,.$$

Эту алгебру мы рассмотрели в Лекции 15.

2. Алгебра кварков

Алгебра кварков есть частный случай контравариантной универсальной алгебры $\mathbb{S}$, когда условие соседней транспозиции геометрических базисных векторов имеет вид

$$\mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_2 = -\mathfrak{e}_2 \circ \mathfrak{e}_1 \,, \quad \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_3 \circ \mathfrak{e}_1 \,, \quad \mathfrak{e}_3 \circ \mathfrak{e}_2 = -\mathfrak{e}_2 \circ \mathfrak{e}_3 \,.$$

Или иначе

$$\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(3,2) = -1 \,, \quad \operatorname{sign}(1,3) = 1 \,.$$

Для того, чтобы выделить этот случай мы вводим другое обозначение для базисных векторов. Мы используем λ вместо $\mathfrak{e}$ и L вместо $\mathfrak{E}$. Кроме того, мы используем специальное обозначение для пространства действия и пространства-времени кварка. Вместо $\mathbb{S}$ мы используем $\mathbb{Q}_{right}$, а вместо $\mathbb{X}$ мы используем $\mathbb{Q}_{left}$.

В результате пространственная часть волновой функции кварков имеет вид

$$\begin{aligned}
\psi = \lambda_0\, \psi^0 + \lambda_a\, \psi^a + \lambda_{[21]}\, \psi^{[12]} + \lambda_{\langle 13 \rangle}\, \psi^{\langle 31 \rangle} + \lambda_{[32]}\, \psi^{[23]} \\
+ \lambda_{(123)_2}\, \psi^{(321)_2} \,.
\end{aligned}$$

Трем разновидностям условия соседней транспозиции с участием базисного вектора времени соответствуют три цветовые разновидности кварков: красные, желтые и синие кварки.

Для красных кварков условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{gathered}
\lambda_1 \circ \lambda_2 = -\lambda_2 \circ \lambda_1 \,, \quad \lambda_1 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_1 \,, \\
\lambda_1 \circ \lambda_3 = \lambda_3 \circ \lambda_1 \,, \quad \lambda_2 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_2 \,, \\
\lambda_3 \circ \lambda_2 = -\lambda_2 \circ \lambda_3 \,, \quad \lambda_3 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_3 \,.
\end{gathered}$$

Или иначе

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(3,2) = \operatorname{sign}(1,4) = \\
&\qquad \operatorname{sign}(2,4) = \operatorname{sign}(3,4) = -1 \,, \\
&\operatorname{sign}(1,3) = 1 \,.
\end{aligned}$$

Отсюда пространство действия красных кварков $\mathbb{Q}_r$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}
\psi = {} & \lambda_0\, \psi^0 + \lambda_i\, \psi^i + \lambda_{[21]}\, \psi^{[12]} + \lambda_{\langle 13 \rangle}\, \psi^{\langle 31 \rangle} + \lambda_{[32]}\, \psi^{[23]} \\
& + \lambda_{[14]}\, \psi^{[41]} + \lambda_{[42]}\, \psi^{[24]} + \lambda_{[34]}\, \psi^{[43]} + \lambda_{(123)_2}\, \psi^{(321)_2} \\
& + \lambda_{[124]}\, \psi^{[421]} + \lambda_{(134)_2}\, \psi^{(431)_2} + \lambda_{[234]}\, \psi^{[432]} \\
& + \lambda_{(1324)_3}\, \psi^{(4231)_3} \,.
\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\lambda_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{Q}_r)^p$ то пространство алгебры красных кварков $\mathbb{Q}_r$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_r = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}_r)^2 + (\mathbb{Q}_r)^3 + (\mathbb{Q}_r)^4 \,.$$

Эта алгебра рассматривалась в Лекции 13.

Для желтых кварков условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{gathered}
\lambda_1 \circ \lambda_2 = -\lambda_2 \circ \lambda_1 \,, \quad \lambda_1 \circ \lambda_4 = \lambda_4 \circ \lambda_1 \,, \\
\lambda_1 \circ \lambda_3 = \lambda_3 \circ \lambda_1 \,, \quad \lambda_2 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_2 \,, \\
\lambda_3 \circ \lambda_2 = -\lambda_2 \circ \lambda_3 \,, \quad \lambda_3 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_3 \,.
\end{gathered}$$

Или иначе

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(3,2) = \operatorname{sign}(2,4) = \\
&\qquad \operatorname{sign}(3,4) = -1 \,, \\
&\operatorname{sign}(1,3) = \operatorname{sign}(1,4) = 1 \,.
\end{aligned}$$

Отсюда пространство действия желтых кварков $\mathbb{Q}_y$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}
\psi = {} & \lambda_0\, \psi^0 + \lambda_i\, \psi^i + \lambda_{[21]}\, \psi^{[12]} + \lambda_{\langle 13 \rangle}\, \psi^{\langle 31 \rangle} + \lambda_{[32]}\, \psi^{[23]} \\
& + \lambda_{\langle 14 \rangle}\, \psi^{\langle 41 \rangle} + \lambda_{[42]}\, \psi^{[24]} + \lambda_{[34]}\, \psi^{[43]} + \lambda_{(123)_2}\, \psi^{(321)_2} \\
& + \lambda_{(124)_2}\, \psi^{(421)_2} + \lambda_{(134)_2}\, \psi^{(431)_2} + \lambda_{[234]}\, \psi^{[432]} \\
& + \lambda_{(1324)_4}\, \psi^{(4231)_4} \,.
\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\lambda_{i_1 \dots i_p}$ обозначить $\mathbb{Q}^p$ то пространство алгебры желтых кварков $\mathbb{Q}_y$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_y = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}_y)^2 + (\mathbb{Q}_y)^3 + (\mathbb{Q}_y)^4 \,.$$

Эта алгебра рассматривалась в Лекции 13.

Для синих кварков условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 \circ \lambda_2 &= -\lambda_2 \circ \lambda_1 \,, \quad & \lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1 \,, \\ \lambda_1 \circ \lambda_3 &= \lambda_3 \circ \lambda_1 \,, \quad & \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2 \,, \\ \lambda_3 \circ \lambda_2 &= -\lambda_2 \circ \lambda_3 \,, \quad & \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3 \,. \end{aligned}$$

Или иначе

$$\begin{aligned} &\mathrm{sign}(1,2) = \mathrm{sign}(3,2) = \mathrm{sign}(2,4) = -1 \,, \\ &\mathrm{sign}(1,3) = \mathrm{sign}(1,4) = \mathrm{sign}(3,4) = 1 \,. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия синих кварков $\mathbb{Q}_b$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi = \lambda_0 \, \psi^0 + \lambda_i \, \psi^i + \lambda_{[21]} \, \psi^{[12]} + \lambda_{\langle 13 \rangle} \, \psi^{\langle 31 \rangle} + \lambda_{[32]} \, \psi^{[23]} \\ + \lambda_{\langle 14 \rangle} \, \psi^{\langle 41 \rangle} + \lambda_{[42]} \, \psi^{[24]} + \lambda_{\langle 34 \rangle} \, \psi^{\langle 43 \rangle} + \lambda_{(123)_2} \, \psi^{(321)_2} \\ + \lambda_{(124)_2} \, \psi^{(421)_2} + \lambda_{\langle 134 \rangle} \, \psi^{\langle 431 \rangle} + \lambda_{(234)_2} \, \psi^{(432)_2} \\ + \lambda_{(1324)_5} \, \psi^{(4231)_5} \,. \end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\lambda_{i_1 \dots i_p}$ обозначить $(\mathbb{Q}_b)^p$ то пространство алгебры синих кварков $\mathbb{Q}_b$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_b = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}_b)^2 + (\mathbb{Q}_b)^3 + (\mathbb{Q}_b)^4 \,.$$

Эта алгебра рассматривалась в Лекции 13.

3. Алгебра кваркино

Алгебра кваркино есть частный случай контравариантной универсальной алгебры $\mathbb{S}$, когда условие соседней транспозиции геометрических базисных векторов имеет вид

$$\mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_2 \circ \mathfrak{e}_1 \,, \quad \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_3 = -\mathfrak{e}_3 \circ \mathfrak{e}_1 \,, \quad \mathfrak{e}_3 \circ \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_2 \circ \mathfrak{e}_3 \,.$$

Или иначе

$$\mathrm{sign}(1,2) = \mathrm{sign}(3,2) = 1 \,, \quad \mathrm{sign}(1,3) = -1 \,.$$

Для того, чтобы выделить этот случай мы вводим другое обозначение для базисных векторов. Мы используем ρ вместо $\mathfrak{e}$ и R вместо $\mathfrak{E}$. Кроме того, мы используем специальное обозначение для пространства действия и пространства-времени кваркино. Вместо $\mathbb{S}$ мы используем $\mathbb{Q}^*_{right}$, а вместо $\mathbb{X}$ мы используем $\mathbb{Q}^*_{left}$.

В результате пространственная часть волновой функции кваркино имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = \rho_0 \, \psi^0 + \rho_a \, \psi^a + \rho_{\langle 21 \rangle} \, \psi^{\langle 12 \rangle} + \rho_{[13]} \, \psi^{[31]} + \rho_{\langle 32 \rangle} \, \psi^{\langle 23 \rangle} \\ + \rho_{(123)_3} \, \psi^{(321)_3} \,. \end{aligned}$$

Трем разновидностям условия соседней транспозиции с участием базисного вектора времени соответствуют три цветовые разновидности кваркино: синие, желтые и красные кваркино.

Для синих кваркино условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_2 &= \rho_2 \circ \rho_1 \,, \quad & \rho_1 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_1 \,, \\ \rho_1 \circ \rho_3 &= -\rho_3 \circ \rho_1 \,, \quad & \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2 \,, \\ \rho_3 \circ \rho_2 &= \rho_2 \circ \rho_3 \,. \quad & \rho_3 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_3 \,. \end{aligned}$$

Или иначе

$$\begin{aligned} &\mathrm{sign}(1,3) = \mathrm{sign}(1,4) = \mathrm{sign}(3,4) = -1 \,, \\ &\mathrm{sign}(1,2) = \mathrm{sign}(3,2) = \mathrm{sign}(2,4) = 1 \,. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия синих кваркино $\mathbb{Q}^*_b$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi = \rho_0 \, \psi^0 + \rho_i \, \psi^i + \rho_{\langle 21 \rangle} \, \psi^{\langle 12 \rangle} + \rho_{[13]} \, \psi^{[31]} + \rho_{\langle 32 \rangle} \, \psi^{\langle 23 \rangle} \\ + \rho_{[14]} \, \psi^{[41]} + \rho_{\langle 42 \rangle} \, \psi^{\langle 24 \rangle} + \rho_{[34]} \, \psi^{[43]} + \rho_{(123)_3} \, \psi^{(321)_3} \\ + \rho_{(124)_3} \, \psi^{(421)_3} + \rho_{[134]} \, \psi^{[431]} + \rho_{(234)_3 s} \, \psi^{(432)_3} \\ + \rho_{(1324)_6} \, \psi^{(4231)_6} \,. \end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\rho_{i_1 \dots i_p}$ обозначить $(\mathbb{Q}^*_b)^p$ то пространство алгебры синих кваркино $\mathbb{Q}^*_b$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}^*_b = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}^*_b)^2 + (\mathbb{Q}^*_b)^3 + (\mathbb{Q}^*_b)^4 \,.$$

Эту алгебру мы рассмотрели в Лекции 15.

Для желтых кваркино условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_2 &= \rho_2 \circ \rho_1 \,, \quad & \rho_1 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_1 \,, \\ \rho_1 \circ \rho_3 &= -\rho_3 \circ \rho_1 \,, \quad & \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2 \,, \\ \rho_3 \circ \rho_2 &= \rho_2 \circ \rho_3 \,, \quad & \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3 \,. \end{aligned}$$

Или иначе

$$\begin{aligned} &\mathrm{sign}(1,3) = \mathrm{sign}(1,4) = -1 \,, \\ &\mathrm{sign}(1,2) = \mathrm{sign}(3,2) = \mathrm{sign}(2,4) = \mathrm{sign}(3,4) = 1 \,. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия желтых кваркино $\mathbb{Q}^*_y$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi = \rho_0 \, \psi^0 + \rho_i \, \psi^i + \rho_{\langle 21 \rangle} \, \psi^{\langle 12 \rangle} + \rho_{[13]} \, \psi^{[31]} + \rho_{\langle 32 \rangle} \, \psi^{\langle 23 \rangle} \\ + \rho_{[14]} \, \psi^{[41]} + \rho_{\langle 42 \rangle} \, \psi^{\langle 24 \rangle} + \rho_{\langle 34 \rangle} \, \psi^{\langle 43 \rangle} + \rho_{(123)_3} \, \psi^{(321)_3} \\ + \rho_{(124)_3} \, \psi^{(421)_3} + \rho_{(134)_2} \, \psi^{(431)_2} + \rho_{(234)_3 s} \, \psi^{(432)_3} \\ + \rho_{(1324)_7} \, \psi^{(4231)_7} \,. \end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\rho_{i_1 \dots i_p}$ обозначить $(\mathbb{Q}^*_y)^p$ то пространство алгебры желтых кваркино $\mathbb{Q}^*_y$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}^*_y = \mathbb{Q}^0 + \mathbb{Q}^1 + (\mathbb{Q}^*_y)^2 + (\mathbb{Q}^*_y)^3 + \mathbb{Q}^4 \,.$$

Эту алгебру мы рассмотрели в Лекции 15.

Для красных кваркино условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{gathered}\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1 \,, \quad \rho_1 \circ \rho_4 = \rho_4 \circ \rho_1 \,, \\ \rho_1 \circ \rho_3 = -\rho_3 \circ \rho_1 \,, \quad \rho_2 \circ \rho_4 = \rho_4 \circ \rho_2 \,, \\ \rho_3 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_3 \,, \quad \rho_3 \circ \rho_4 = \rho_4 \circ \rho_3 \,.\end{gathered}$$

Или иначе

$$\begin{gathered}\mathrm{sign}(1,3) = -1 \,, \\ \mathrm{sign}(1,2) = \mathrm{sign}(3,2) = \mathrm{sign}(1,4) = \\ \mathrm{sign}(2,4) = \mathrm{sign}(3,4) = 1 \,.\end{gathered}$$

Отсюда пространство действия красных кваркино $\mathbb{Q}_r^*$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}\psi = \rho_0 \, \psi^0 + \rho_i \, \psi^i + \rho_{\langle 21\rangle} \, \psi^{\langle 12\rangle} + \rho_{[13]} \, \psi^{[31]} + \rho_{\langle 32\rangle} \, \psi^{\langle 23\rangle} \\ + \rho_{\langle 14\rangle} \, \psi^{\langle 41\rangle} + \rho_{\langle 42\rangle} \, \psi^{\langle 24\rangle} + \rho_{\langle 34\rangle} \, \psi^{\langle 43\rangle} + \rho_{(123)_3} \, \psi^{(321)_3} \\ + \rho_{\langle 124\rangle} \, \psi^{\langle 421\rangle} + \rho_{(134)_3} \, \psi^{(431)_3} + \rho_{\langle 234\rangle} \, \psi^{\langle 432\rangle} \\ + \rho_{(1324)_8} \, \psi^{(4231)_8} \,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\rho_{i_1 \dots i_p}$ обозначить $(\mathbb{Q}_r^*)^p$ то пространство алгебры красных кваркино $\mathbb{Q}_r^*$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_r^* = \mathbb{Q}^{*0} + \mathbb{Q}^{*1} + (\mathbb{Q}_r^*)^2 + (\mathbb{Q}_r^*)^3 + (\mathbb{Q}_r^*)^4 \,.$$

Эту алгебру мы рассмотрели в Лекции 15.

4. Алгебра лептино

Алгебра лептино есть частный случай контравариантной универсальной алгебры $\mathbb{S}$, когда условие соседней транспозиции геометрических базисных векторов имеет вид

$$\mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_2 \circ \mathfrak{e}_1 \,, \quad \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_3 \circ \mathfrak{e}_1 \,, \quad \mathfrak{e}_3 \circ \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_2 \circ \mathfrak{e}_3 \,.$$

Или иначе

$$\mathrm{sign}(1,2) = \mathrm{sign}(3,2) = \mathrm{sign}(1,3) = 1 \,.$$

Для того, чтобы выделить этот случай мы вводим другое обозначение для базисных векторов. Мы используем κ вместо $\mathfrak{e}$ и K вместо $\mathfrak{E}$. Кроме того, мы используем специальное обозначение для пространства действия и пространства-времени лептино. Вместо $\mathbb{S}$ мы используем $\mathbb{C}^*_{right}$, а вместо $\mathbb{X}$ мы используем $\mathbb{C}^*_{left}$.

В результате пространственная часть волновой функции лептино имеет вид

$$\psi = \kappa_0 \, \psi^0 + \kappa_a \, \psi^a + \kappa_{\langle ab\rangle} \, \psi^{\langle ba\rangle} + \kappa_{\langle 123\rangle} \, \psi^{\langle 321\rangle} \,.$$

Двум разновидностям условия соседней транспозиции с участием базисного вектора времени соответствуют две цветовые разновидности лептино: черные и белые лептино.

Для черных лептино условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{gathered}\kappa_1 \circ \kappa_2 = \kappa_2 \circ \kappa_1 \,, \quad \kappa_1 \circ \kappa_4 = -\kappa_4 \circ \kappa_1 \,, \\ \kappa_1 \circ \kappa_3 = \kappa_3 \circ \kappa_1 \,, \quad \kappa_2 \circ \kappa_4 = \kappa_4 \circ \kappa_2 \,, \\ \kappa_3 \circ \kappa_2 = \kappa_2 \circ \kappa_3 \,, \quad \kappa_3 \circ \kappa_4 = \kappa_4 \circ \kappa_3 \,.\end{gathered}$$

Или иначе

$$\begin{gathered}\mathrm{sign}(1,4) = -1 \,, \\ \mathrm{sign}(1,2) = \mathrm{sign}(1,3) = \mathrm{sign}(3,2) = \\ \mathrm{sign}(2,4) = \mathrm{sign}(3,4) = 1 \,.\end{gathered}$$

Отсюда пространство действия черных лептино $\mathbb{C}_b^*$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}\psi = \kappa_0 \, \psi^0 + \kappa_i \, \psi^i + \kappa_{\langle ab\rangle} \, \psi^{\langle ba\rangle} \\ + \kappa_{[14]} \, \psi^{[41]} + \kappa_{\langle 42\rangle} \, \psi^{\langle 24\rangle} + \kappa_{\langle 34\rangle} \, \psi^{\langle 43\rangle} + \kappa_{\langle 123\rangle} \, \psi^{\langle 321\rangle} \\ + \kappa_{(124)_3} \, \psi^{(421)_3} + \kappa_{(134)_3} \, \psi^{(431)_3} + \kappa_{\langle 234\rangle} \, \psi^{\langle 432\rangle} \\ + \kappa_{4321} \, \psi^{1234} \,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\kappa_{i_1 \dots i_p}$ обозначить $(\mathbb{C}_b^*)^p$ то пространство алгебры черных лептино $\mathbb{C}_b^*$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_b^* = (\mathbb{C}^*)^0 + (\mathbb{C}^*)^1 + (\mathbb{C}_b^*)^2 + (\mathbb{C}_b^*)^3 + (\mathbb{C}_b^*)^4 \,.$$

Эту алгебру мы рассмотрели в Лекции 15.

Для белых лептино условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{gathered}\kappa_1 \circ \kappa_2 = \kappa_2 \circ \kappa_1 \,, \quad \kappa_1 \circ \kappa_4 = \kappa_4 \circ \kappa_1 \,, \\ \kappa_1 \circ \kappa_3 = \kappa_3 \circ \kappa_1 \,, \quad \kappa_2 \circ \kappa_4 = \kappa_4 \circ \kappa_2 \,, \\ \kappa_3 \circ \kappa_2 = \kappa_2 \circ \kappa_3 \,, \quad \kappa_3 \circ \kappa_4 = \kappa_4 \circ \kappa_3 \,.\end{gathered}$$

Или иначе

$$\begin{gathered}\mathrm{sign}(1,2) = \mathrm{sign}(1,3) = \mathrm{sign}(3,2) = \\ \mathrm{sign}(1,4) = \mathrm{sign}(2,4) = \mathrm{sign}(3,4) = 1 \,.\end{gathered}$$

Отсюда пространство действия белых лептино $\mathbb{C}_w^*$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}\psi = \kappa_0 \, \psi^0 + \kappa_i \, \psi^i + \kappa_{\langle ik\rangle} \, \psi^{\langle ki\rangle} + \kappa_{\langle ikl\rangle} \, \psi^{\langle lki\rangle} \\ + \kappa_{\langle 1324\rangle} \, \psi^{\langle 4231\rangle} \,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\kappa_{i_1 \dots i_p}$ обозначить $(\mathbb{C}_w^*)^p$ то пространство алгебры белых лептино $\mathbb{C}_w^*$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_w^* = (\mathbb{C}^*)^0 + (\mathbb{C}^*)^1 + (\mathbb{C}_w^*)^2 + (\mathbb{C}_w^*)^3 + (\mathbb{C}_w^*)^4 \,.$$

Эта алгебра была названа коммутативной и рассмотрена в Лекции 11.

VI. КОВАРИАНТНАЯ УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

Согласно теории электрона Дирака переход от комплексных величин к комплексно сопряженным соответствует переходу от описания электрона к описанию его античастицы – позитрона. В трансформированном виде по отношению к нашему формализму эта ситуация выглядит следующим образом. Фундаментальные частицы описываются контравариантной алгеброй. Переход к ковариантной алгебре соответствует переходу к описанию античастиц. Далее рассмотрим ковариантную универсальную алгебру как алгебру фундаментальных античастиц.

1. Сопряженное пространство-время специальной теории относительности

Рассмотрим пространство-время СТО X. Векторы этого пространства мы записали через координаты следующим образом

$$x = \mathfrak{E}_i \, x^i \, .$$

Введем векторы $\mathfrak{E}^i \in X$, для которых потребуем выполнения условия[*]

$$\langle \mathfrak{E}^i, x \rangle = x^i \, .$$

Подставляя в это выражение предыдущее, получим соотношение, которому удовлетворяют векторы $\mathfrak{E}^i$

$$\langle \mathfrak{E}^i, \mathfrak{E}_k \rangle = \delta^i{}_k \, . \qquad (42)$$

Векторы $\mathfrak{E}^i$ называются *сопряженными* по отношению к базисным векторам $\mathfrak{E}_i$. Векторы $\mathfrak{E}^i$ мы будем рассматривать как новые базисные векторы. Вектору $x = \mathfrak{E}_i \, x^i$ поставим в соответствие *сопряженный* вектор

$$^+x = x_i \, \mathfrak{E}^i \, ,$$

где $x_i = \delta_{ik} \, x^k$ есть координаты сопряженного вектора.

Множество сопряженных векторов составляет векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{K}$, которое обозначим ^+X и назовем *сопряженным пространством-временем СТО.*

На ^+X определено *скалярное произведение* векторов. То есть, каждой паре векторов $^+x^1$, $^+x^2 \in X$ ставится в соответствие число $\alpha \in \mathbb{K}$, причем это соответствие является билинейным. Скалярное произведение записывается следующим образом:

$$\alpha = \langle {}^+x^1, {}^+x^2 \rangle \, .$$

Из условия билинейности следует, что скалярное произведение векторов может быть выражено через базисные векторы пространства ^+X. Действительно, для

$$^+x^1 = x^1_i \cdot \mathfrak{E}^i, \quad {}^+x^2 = x^2_i \cdot \mathfrak{E}^i$$

скалярное произведение векторов можно записать так:

$$\langle {}^+x^1, {}^+x^2 \rangle = x^1_i \cdot x^2_k \cdot \langle \mathfrak{E}^i, \mathfrak{E}^k \rangle \, .$$

Отсюда следует, что скалярное произведение векторов определено, если определены скалярные произведения базисных векторов. Из соотношения (42) следует, что базисные векторы $\mathfrak{E}^i$ связаны с базисными векторами $\mathfrak{E}_i$ следующим образом

$$\mathfrak{E}^1 = \mathfrak{E}_1 \, , \quad \mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E}_2 \, , \quad \mathfrak{E}^3 = \mathfrak{E}_3 \, , \quad \mathfrak{E}^4 = -\mathfrak{E}_4 \, .$$

Отсюда следует, что в сопряженном пространстве-времени СТО имеет место обратный отсчет времени по отношению к исходному пространству[†]. Таким образом мы имеем

$$\langle \mathfrak{E}^i, \mathfrak{E}^k \rangle = 0 \, , \text{если } i \neq k \, , \quad \langle \mathfrak{E}^1, \mathfrak{E}^1 \rangle = 1 \, ,$$
$$\langle \mathfrak{E}^2, \mathfrak{E}^2 \rangle = 1 \, , \quad \langle \mathfrak{E}^3, \mathfrak{E}^3 \rangle = 1 \, , \quad \langle \mathfrak{E}^4, \mathfrak{E}^4 \rangle = -1 \, .$$

Скалярное произведение базисных векторов определяет *метрический тензор* на ^+X или *обратный* метрический тензор:

$$g^{ik} \equiv \langle \mathfrak{E}^i, \mathfrak{E}^k \rangle \, ,$$

который может быть записан в виде матрицы

$$g^{ik} = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & & & \\ 2 & & 1 & & \\ 3 & & & 1 & \\ 4 & & & & -1 \\ \hline \end{array} \, .$$

Скалярное произведение вектора ^+x на себя определяет его *квадрат длины*[‡]

$$\langle {}^+x, {}^+x \rangle = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (x_4)^2 \, ,$$

который связан с вводимым в СТО *квадратом интервала* s^2 следующим образом

$$\langle {}^+x, {}^+x \rangle = -s^2 \, .$$

Из двух предыдущих соотношений следует известное из СТО выражение для квадрата интервала, которое мы запишем в следующем виде

$$s^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (x_4)^2 = 0 \, .$$

---

[*] Полезно иметь в виду, что это условие является математической формулировкой физического процесса измерения вектора.

[†] Отсюда также следует, что сопряженное геометрическое пространство $^+X_3$, построенное на векторах

$$^+x = x_a \cdot \mathfrak{E}^a,$$

тождественно геометрическому пространству X_3.

[‡] Очевидно, что

$$\langle {}^+x, {}^+x \rangle = \langle x, x \rangle \, .$$

Обратный метрический тензор g^{ik} связан с метрическим тензором g_{kl} условием:

$$g^{ik}\, g_{kl} = \delta^i_{\ l}\,.$$

Сопряженные базисные векторы $\mathfrak{E}^i$ связаны с базисными векторами $\mathfrak{E}_k$ соотношением:

$$\mathfrak{E}^i = \mathfrak{E}_k\, g^{ik}\,.$$

Скалярное произведение вектора x на сопряженный ему вектор ${}^+x$ равно

$$\langle x, {}^+x\rangle = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2\,.$$

Эта квадратичная форма является положительно определенной.

2. Векторное пространство ковариантных тензоров

Далее рассмотрим векторные пространства, конструируемые с помощью исходного векторного пространства ${}^+X$.

1. Пространство ковариантных тензоров второго порядка

Начнем с того, что рассмотрим множество ${}^+X\times{}^+X$, являющееся *произведением* векторного пространства ${}^+X$ на себя, то есть рассмотрим множество пар векторов $({}^+x^2, {}^+x^1)$, где ${}^+x^1, {}^+x^2 \in {}^+X$. Это множество будем рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{K}$. Для этого на парах как на векторах введем операции сложения и умножения на число

$$\begin{gathered}({}^+x, {}^+y) = ({}^+x^1, {}^+y^1) + ({}^+x^2, {}^+y^2)\\ ({}^+x, {}^+y) = \alpha\cdot({}^+x^1, {}^+y^1)\,,\end{gathered}$$

где ${}^+x, {}^+x^1, {}^+x^2, {}^+y, {}^+y^1, {}^+y^2 \in {}^+X$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Такое векторное пространство будем также обозначать ${}^+X\times{}^+X$. Пары, как векторы, будем называть 2-векторами. 2-векторы можно выразить через базисные векторы в ${}^+X\times{}^+X$

$$({}^+x^2, {}^+x^1) = x_\alpha\cdot\mathfrak{E}^\alpha\,,$$

где $x_\alpha \in \mathbb{K}$ – координаты 2-вектора, $\mathfrak{E}^\alpha \in {}^+X\times{}^+X$ – базисные векторы. Отметим, что пока 2-векторы никак не связаны с алгебраическими операциями на векторном пространстве ${}^+X$. Так, например, 2-вектор $({}^+x, {}^+y^1 + {}^+y^2)$ никак не связан с 2-векторами $({}^+x, {}^+y^1)$ и $({}^+x, {}^+y^2)$.

Далее потребуем, чтобы 2-векторы удовлетворяли условию билинейности. Для таких 2-векторов вместо обозначения $({}^+x^2, {}^+x^1)$ будем использовать обозначение ${}^+x^2\otimes{}^+x^1$. Будем называть 2-вектор ${}^+x^2\otimes{}^+x^1$ *тензорным произведением* векторов ${}^+x^2$ и ${}^+x^1$. Таким образом, для тензорного произведения выполняется условие билинейности

$$\begin{aligned}({}^+x^1 + {}^+a)\otimes{}^+x^2 &= {}^+x^1\otimes{}^+x^2 + {}^+a\otimes{}^+x^2\\ {}^+x^1\otimes({}^+x^2 + {}^+b) &= {}^+x^1\otimes{}^+x^2 + {}^+x^1\otimes{}^+b\\ (\alpha\cdot{}^+x^1)\otimes{}^+x^2 &= \alpha\cdot({}^+x^1\otimes{}^+x^2)\\ {}^+x^1\otimes(\alpha\cdot{}^+x^2) &= \alpha\cdot({}^+x^1\otimes{}^+x^2)\,,\end{aligned}$$

где ${}^+x^1, {}^+x^2, {}^+a, {}^+b \in {}^+X$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Первые два соотношения условия билинейности представляют собой условие дистрибутивности тензорного умножения относительно сложения векторов.

Условие билинейности, отождествляя 2-векторы, находящиеся в левой и правой частях уравнений, выделяет подмножество в векторном пространстве ${}^+X\times{}^+X$. Это подмножество является векторным пространством. Оно называется пространством *тензорных произведений второго порядка (степени)* и обозначается ${}^+X\otimes{}^+X$. Таким образом, условие билинейности выделяет в пространстве ${}^+X\times{}^+X$ подпространство ${}^+X\otimes{}^+X$, в котором 2-векторы связаны с алгебраическими операциями на векторном пространстве ${}^+X$. Условие билинейности позволяет выразить 2-векторы в пространстве ${}^+X\otimes{}^+X$ через тензорные произведения базисных векторов пространства ${}^+X$. Действительно, если

$${}^+x^2 = x^2_i\cdot\mathfrak{E}^i, \quad {}^+x^1 = x^1_k\cdot\mathfrak{E}^k\,,$$

то

$${}^+x^2\otimes{}^+x^1 = x^2_i\cdot x^1_k\cdot\mathfrak{E}^i\otimes\mathfrak{E}^k$$

Тензорные произведения базисных векторов $\mathfrak{E}^i\otimes\mathfrak{E}^k$ можно рассматривать как базисные векторы в пространстве ${}^+X\otimes{}^+X$. Введем для них обозначение

$$\mathfrak{E}^i\otimes\mathfrak{E}^k = \mathfrak{E}^{ik}\,.$$

Тогда для вектора в пространстве ${}^+X\otimes{}^+X$ получим выражение

$${}^+x^2\otimes{}^+x^1 = x^2_i\cdot x^1_k\cdot\mathfrak{E}^{ik}\,.$$

И, наконец, рассмотрим *линейное* отображение $l\colon {}^+X\times{}^+X \to {}^+X\otimes{}^+X$. Пусть

$$({}^+x^2, {}^+x^1) = x_\alpha\cdot\mathfrak{E}^\alpha \in {}^+X\times{}^+X\,.$$

Тогда имеем

$$l({}^+x^2, {}^+x^1) = x_\alpha\cdot l(\mathfrak{E}^\alpha)\,.$$

Разложим 2-векторы $l(\mathfrak{E}^\alpha)$ по базисным векторам $\mathfrak{E}^{ik}$ пространства ${}^+X\otimes{}^+X$:

$$l(\mathfrak{E}^\alpha) = l^\alpha{}_{ik}\cdot\mathfrak{E}^{ik}\,,$$

где $l^\alpha{}_{ik} \in \mathbb{K}$. Тогда

$$l({}^+x^2, {}^+x^1) = x_\alpha\cdot l^\alpha{}_{ik}\cdot\mathfrak{E}^{ik}\,.$$

Введем обозначение для координат вектора $l({}^+x^2, {}^+x^1)$

$$x_\alpha \cdot l^\alpha{}_{ik} = x_{ik} \,,$$

а сам вектор $l({}^+x_2, {}^+x_1)$ обозначим ${}^+x$. В результате перейдем к следующей записи

$${}^+x = x_{ik} \cdot \mathfrak{e}^{ik} \,.$$

Векторы этого вида называются *ковариантными тензорами второго порядка (степени).* Они составляют векторное пространство, которое обозначим X^2 в отличие от пространства ${}^+X \otimes {}^+X$, имея в виду, что тензор включает в себя множество тензорных произведений.

2. Пространство ковариантных тензоров n-го порядка

Для построения ковариантной универсальной алгебры используются пространства тензоров всех порядков, в том числе $2, 3, \ldots, n, \ldots,$. Поэтому далее, повторяя в значительной степени рассуждения предыдущего раздела, рассмотрим пространство ковариантных тензоров n-го порядка.

Рассмотрим множество

$$\overbrace{{}^+X \times \ldots \times {}^+X}^{n} \,,$$

являющееся произведением n экземпляров векторного пространства ${}^+X$, то есть множество наборов по n векторов

$$({}^+x^n, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1) \,,$$

где ${}^+x^1$, ${}^+x^2, \ldots,$ ${}^+x^n \in {}^+X$.

Это множество будем рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{K}$. Для этого на указанных наборах как на векторах введем операции сложения и умножения на число

$$\begin{aligned} ({}^+x^n, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1) &= ({}^+y^n, \ldots, {}^+y^2, {}^+y^1) \\ &\quad + ({}^+z^n, \ldots, {}^+z^2, {}^+z^1) \end{aligned}$$

$$({}^+x^n, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1) = \alpha \cdot ({}^+y^n, \ldots, {}^+y^2, {}^+y^1) \,,$$

где $\alpha \in \mathbb{K}$. Такое векторное пространство будем также обозначать $\overbrace{{}^+X \times \ldots \times {}^+X}^{n}$. Наборы по n векторов, рассматриваемые в свою очередь как векторы, будем называть n-векторами. n-векторы можно выразить через базисные векторы в ${}^+X \times \ldots \times {}^+X$

$$({}^+x^n, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1) = x_\alpha \cdot \mathfrak{e}^\alpha \,,$$

где $x_\alpha \in \mathbb{K}$ – координаты n-вектора, $\mathfrak{e}^\alpha \in \overbrace{{}^+X \times \ldots \times {}^+X}^{n}$ – базисные векторы. Отметим, что пока n-векторы никак не связаны с алгебраическими операциями на векторном пространстве ${}^+X$. Так, например, n-вектор $({}^+x^n + {}^+a, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1)$ никак не связан с n-векторами $({}^+x^n, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1)$ и $({}^+a, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1)$.

Далее потребуем, чтобы n-векторы удовлетворяли условию полилинейности (см. Раздел III.2). Для таких n-векторов вместо обозначения $({}^+x^n, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1)$ будем использовать обозначение ${}^+x^n \otimes \ldots \otimes {}^+x^2 \otimes {}^+x^1$. Будем называть n-вектор ${}^+x^n \otimes \ldots \otimes {}^+x^2 \otimes {}^+x^1$ *тензорным произведением* векторов ${}^+x^1$, ${}^+x^2, \ldots,$ ${}^+x^n$. Условие полилинейности, отождествляя n-векторы, находящиеся в левой и правой частях уравнений, выделяет подмножество в векторном пространстве $\overbrace{{}^+X \times \ldots \times {}^+X}^{n}$. Это подмножество является векторным пространством. Оно называется пространством *тензорных произведений n-го порядка* и обозначается $\overbrace{{}^+X \otimes \ldots \otimes {}^+X}^{n}$. Таким образом, условие полилинейности выделяет в пространстве $\overbrace{{}^+X \times \ldots \times {}^+X}^{n}$ подпространство $\overbrace{{}^+X \otimes \ldots \otimes {}^+X}^{n}$, в котором n-векторы связаны с алгебраическими операциями на векторном пространстве ${}^+X$. Условие полилинейности позволяет выразить n-векторы в пространстве $\overbrace{{}^+X \otimes \ldots \otimes {}^+X}^{n}$ через тензорные произведения базисных векторов пространства ${}^+X$. Действительно, если

$${}^+x^1 = x^1_{i_1} \cdot \mathfrak{e}^{i_1}, \quad {}^+x^2 = x^2_{i_2} \cdot \mathfrak{e}^{i_2}, \ldots, {}^+x^n = x^n_{i_n} \cdot \mathfrak{e}^{i_n} \,,$$

то

$${}^+x^n \otimes \ldots \otimes {}^+x^2 \otimes {}^+x^1 = x^n_{i_n} \cdot \ldots \cdot x^2_{i_2} \cdot x^1_{i_1} \cdot \mathfrak{e}^{i_n} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{e}^{i_2} \otimes \mathfrak{e}^{i_1} \,.$$

Тензорные произведения базисных векторов $\mathfrak{e}^{i_n} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{e}^{i_2} \otimes \mathfrak{e}^{i_1}$ можно рассматривать как базисные векторы в пространстве $\overbrace{{}^+X \otimes \ldots \otimes {}^+X}^{n}$. Введем для них обозначение

$$\mathfrak{e}^{i_n} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{e}^{i_2} \otimes \mathfrak{e}^{i_1} = \mathfrak{e}^{i_n \ldots i_2 i_1} \,.$$

Тогда для вектора в пространстве $\overbrace{{}^+X \otimes \ldots \otimes {}^+X}^{n}$ получим выражение

$${}^+x^n \otimes \ldots \otimes {}^+x^2 \otimes {}^+x^1 = x^n_{i_n} \cdot \ldots \cdot x^2_{i_2} \cdot x^1_{i_1} \cdot \mathfrak{e}^{i_n \ldots i_2 i_1} \,.$$

И, наконец, рассмотрим *линейное* отображение

$$l\colon \overbrace{{}^+X \times \ldots \times {}^+X}^{n} \to \overbrace{{}^+X \otimes \ldots \otimes {}^+X}^{n}$$

Пусть

$$({}^+x^n, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1) = x_\alpha \cdot \mathfrak{e}^\alpha \in \overbrace{{}^+X \times \ldots \times {}^+X}^{n} \,.$$

Тогда имеем

$$l({}^+x^n, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1) = x^\alpha \cdot l(\mathfrak{E}^\alpha)\,.$$

Разложим n-векторы $l(\mathfrak{E}^\alpha)$ по базисным векторам $\mathfrak{E}^{i_n\ldots i_2 i_1}$ пространства $\overbrace{{}^+X \otimes \ldots \otimes {}^+X}^{n}$:

$$l(\mathfrak{E}^\alpha) = l^\alpha{}_{i_n\ldots i_2 i_1} \cdot \mathfrak{E}^{i_1 i_2 \ldots i_n}\,,$$

где $l^\alpha{}_{i_n\ldots i_2 i_1} \in \mathbb{K}$. Тогда

$$l({}^+x^n, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1) = x_\alpha \cdot l^\alpha{}_{i_n\ldots i_2 i_1} \cdot \mathfrak{E}^{i_n\ldots i_2 i_1}\,.$$

Введем обозначение для координат вектора $l({}^+x^n, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1)$

$$x_\alpha \cdot l^\alpha{}_{i_n\ldots i_2 i_1} = x_{i_n\ldots i_2 i_1}\,,$$

а сам вектор $l({}^+x^n, \ldots, {}^+x^2, {}^+x^1)$ обозначим ${}^+x$. В результате перейдем к следующей записи

$${}^+x = x_{i_n\ldots i_2 i_1} \cdot \mathfrak{E}^{i_n\ldots i_2 i_1}\,.$$

Векторы этого вида называются *ковариантными тензорами n-го порядка (степени).* Они составляют векторное пространство, которое обозначим ${}^+X^n$ в отличие от пространства $\overbrace{{}^+X \otimes \ldots \otimes {}^+X}^{n}$, имея в виду, что тензор включает в себя множество тензорных произведений.

3. Алгебра пространства-времени фундаментальных античастиц

1. *Пространство-время фундаментальных античастиц как векторное пространство*

Обобщим сопряженное пространство-время СТО следующим образом. Введем векторное пространство

$${}^+\mathbb{X} = {}^+X^0 + {}^+X^1 + {}^+X^2 + \ldots + {}^+X^n + \ldots\,,$$

где ${}^+X^0 = \mathbb{K}$, ${}^+X^1 = {}^+X$. Это пространство называется *универсальным пространством ковариантных тензоров над* ${}^+X$. Сопряженное пространство-время СТО ${}^+X$ является *образующим пространством* для ${}^+\mathbb{X}$.

Вектор ${}^+x \in {}^+\mathbb{X}$ можно записать через базисные векторы следующим образом:

$$\begin{aligned}{}^+x = x_0 \cdot \mathfrak{E}^0 + x_{i_1} \cdot \mathfrak{E}^{i_1} + x_{i_2 i_1} \cdot \mathfrak{E}^{i_2 i_1} + \ldots\\ + x_{i_n\ldots i_2 i_1} \cdot \mathfrak{E}^{i_n\ldots i_2 i_1} + \ldots\,,\end{aligned} \tag{43}$$

где x_0, x_{i_1}, $x_{i_2 i_1}, \ldots, x_{i_n\ldots i_2 i_1} \in \mathbb{K}$ – координаты вектора. Базисными векторами в ${}^+\mathbb{X}$ являются векторы

$$\mathfrak{E}^0, \mathfrak{E}^{i_1}, \mathfrak{E}^{i_2 i_1}, \ldots, \mathfrak{E}^{i_n\ldots i_2 i_1}\,.$$

Здесь единица множества действительных чисел $\mathbb{K}$ обозначена через $\mathfrak{E}^0$. Если ввести верхний и нижний *собирательные индексы* I, пробегающие значения

$$0, i_1, (i_2 i_1), \ldots, (i_n \ldots i_2 i_1), \ldots,$$

то вектор ${}^+x \in {}^+\mathbb{X}$ можно записать через базисные векторы в компактном виде:

$${}^+x = x_I \cdot \mathfrak{E}^I\,.$$

Теория электрона Дирака заставляет сделать вывод о том, что пространство-время, сопровождающее позитрон, есть пространство векторов вида (43). Поэтому мы будем рассматривать векторное пространство ${}^+\mathbb{X}$ (универсальное пространство ковариантных тензоров над ${}^+X$) как *пространство-время фундаментальных античастиц.* По нашим представлениям по мере удаления от фундаментальной античастицы пространство-время ${}^+\mathbb{X}$ асимптотически переходит в сопряженное пространство-время СТО.

Можно придерживаться более радикальной точки зрения и считать, что не только вблизи фундаментальной античастицы, а везде, наряду с обобщенным пространством-временем, нас окружает пространство векторов вида (43). В этом случае мы будем рассматривать векторное пространство ${}^+\mathbb{X}$ как *обобщенное сопряженное пространство-время.*

Отметим важный частный случай. Если в качестве образующего пространства взять геометрическое пространство ${}^+X_3$, то получим универсальное пространство ковариантных тензоров над ${}^+X_3$, которое обозначим ${}^+\mathbb{X}_3$. Вектор ${}^+x \in {}^+\mathbb{X}_3$ можно записать через базисные векторы следующим образом:

$$\begin{aligned}{}^+x = x_0 \cdot \mathfrak{E}^0 + x_{a_1} \cdot \mathfrak{E}^{a_1} + x_{a_2 a_1} \cdot \mathfrak{E}^{a_2 a_1} + \ldots\\ + x_{a_n\ldots a_2 a_1} \cdot \mathfrak{E}^{a_n\ldots a_2 a_1} + \ldots\,.\end{aligned} \tag{44}$$

Напомним, что индексы a_k принимают значения $1, 2, 3$. Пространство ${}^+\mathbb{X}_3$ есть *геометрическое пространство фундаментальных античастиц* или *обобщенное сопряженное геометрическое пространство.* Но сопряженное геометрическое пространство ${}^+X_3$ тождественно геометрическому пространству X_3. Отсюда следует, что обобщенное сопряженное геометрическое пространство ${}^+\mathbb{X}_3$ тождественно обобщенному геометрическому пространству $\mathbb{X}_3$. Или геометрическое пространство фундаментальных античастиц ${}^+\mathbb{X}_3$ тождественно геометрическому пространству фундаментальных частиц $\mathbb{X}_3$.

2. *Пространство-время фундаментальных античастиц как ковариантная универсальная алгебра*

Наличие на множестве векторов ${}^+\mathbb{X}$ операций сложения и умножения (тензорного умножения и умножения на число) также делает это множество алгеброй, которую называют *ковариантной универсальной алгеброй.*

Мы будем рассматривать универсальную ковариантную алгебру в двух разновидностях: с умножением справа и с умножением слева. Для того, чтобы отличать одну алгебру от другой, мы будем обозначать базисные векторы универсальной ковариантной алгебры* с умножением справа – $\mathfrak{e}$, а базисные векторы универсальной контравариантной алгебры с умножением слева – $\mathfrak{E}$. Теория электрона Дирака и квантовая механика в целом заставляют нас сделать вывод о том, что алгебра пространства-времени фундаментальных античастиц является алгеброй с умножением слева, в то время как алгебра действия фундаментальных античастиц является алгеброй с умножением справа.

Для базисных векторов пространства ${}^{+}\mathbb{X}$ умножение выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{E}^0 \cdot \mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E}^0 \\
&\mathfrak{E}^0 \cdot \mathfrak{E}^{i_m \dots i_2 i_1} = \mathfrak{E}^{i_m \dots i_2 i_1} \cdot \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}^{i_m \dots i_2 i_1} \\
&\mathfrak{E}^{i_{m+n} \dots i_{m+2} i_{m+1}} \otimes \mathfrak{E}^{i_m \dots i_2 i_1} = \mathfrak{E}^{i_{m+n} \dots i_2 i_1}\,,
\end{aligned}$$

Формально символ умножения на число можно переобозначить в символ тензорного произведения. Тогда произведения базисных векторов приобретают единообразный вид

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{E}^0 \otimes \mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E}^0\, \delta^0_0 \\
&\mathfrak{E}^0 \otimes \mathfrak{E}^{i_m \dots i_2 i_1} = \mathfrak{E}^{i_m \dots i_2 i_1} \otimes \mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E}^{l_m \dots l_2 l_1}\, \delta^{i_m \dots i_2 i_1}_{l_m \dots l_2 l_1} \\
&\mathfrak{E}^{i_m \dots i_2 i_1} \otimes \mathfrak{E}^{k_n \dots k_2 k_1} = \mathfrak{E}^{l_{m+n} \dots l_2 l_1}\, \delta^{i_m \dots i_2 i_1 k_n \dots k_2 k_1}_{l_{m+n} \dots l_2 l_1}\,.
\end{aligned}$$

Здесь символы Кронекера есть *структурные постоянные* алгебры ${}^{+}\mathbb{X}$.

Для того, чтобы сделать запись компактной, введем *обобщенный* индекс

$$I_m = i_m \dots i_2 i_1\,.$$

Используя это обозначение, имеем

$$\mathfrak{E}^{I_m} = \mathfrak{E}^{i_m \dots i_2 i_1}\,, \qquad x_{K_n} = x_{k_n \dots k_2 k_1}\,.$$

С помощью обобщенных индексов закон умножения базисных векторов в алгебре ${}^{+}\mathbb{X}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{E}^0 \otimes \mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E}^0\, \delta^0_0 \\
&\mathfrak{E}^0 \otimes \mathfrak{E}^{I_m} = \mathfrak{E}^{I_m} \otimes \mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E}^{L_m} \cdot \delta^{I_m}{}_{L_m} \\
&\mathfrak{E}^{I_m} \otimes \mathfrak{E}^{K_n} = \mathfrak{E}^{L_{m+n}} \cdot \delta^{I_m K_n}{}_{L_{m+n}}\,.
\end{aligned}$$

Используя собирательные индексы, произведение базисных векторов в алгебре ${}^{+}\mathbb{X}$ можно записать в компактном виде

$$\mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{E}^K = C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{E}^L\,. \tag{45}$$

Ковариантная универсальная алгебра является *ассоциативной* так как

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{E}^0 \otimes \mathfrak{E}^0) \otimes \mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E}^0 \otimes (\mathfrak{E}^0 \otimes \mathfrak{E}^0) = \mathfrak{E}^0 \\
&(\mathfrak{E}^0 \otimes \mathfrak{E}^0) \otimes \mathfrak{E}^l = \mathfrak{E}^0 \otimes (\mathfrak{E}^0 \otimes \mathfrak{E}^l) = \mathfrak{E}^l \\
&(\mathfrak{E}^0 \otimes \mathfrak{E}^k) \otimes \mathfrak{E}^l = \mathfrak{E}^0 \otimes (\mathfrak{E}^k \otimes \mathfrak{E}^l) = \mathfrak{E}^k \otimes \mathfrak{E}^l \\
&(\mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}^k) \otimes \mathfrak{E}^l = \mathfrak{E}^i \otimes (\mathfrak{E}^k \otimes \mathfrak{E}^l) = \mathfrak{E}^i \otimes \mathfrak{E}^k \otimes \mathfrak{E}^l
\end{aligned}$$

Базисные векторы $\mathfrak{E}^0$, $\mathfrak{E}^{i_1}$, $\mathfrak{E}^{i_2 i_1}, \dots, \mathfrak{E}^{i_n \dots i_2 i_1}, \dots$ образуют *дискретную полугруппу* с тензорным произведением слева в качестве операции композиции.

4. Алгебра действия фундаментальных античастиц

1. Пространство действия фундаментальных античастиц как векторное пространство

Пространство действия фундаментальных античастиц строится подобно пространству-времени фундаментальных античастиц. В основе такого построения лежит четырехмерное векторное пространство, которое обозначим ${}^{+}S$ или ${}^{+}S_4$, изоморфное сопряженному пространству-времени СТО. Вектор ${}^{+}S \in {}^{+}S_4$ записывается через базисные векторы следующим образом

$${}^{+}S = S_i\, \mathfrak{e}^i$$

Координаты $S_i \in \mathbb{K}$ имеют размерность действия. $\mathfrak{e}^i$ – базисные векторы сопряженного пространства-времени СТО. Затем вводятся тензорные пространства всех порядков ${}^{+}S^2$, ${}^{+}S^3$, …, ${}^{+}S^n$,…. Далее вводится универсальное пространство ковариантных тензоров над ${}^{+}S$:

$${}^{+}\mathbb{S} = {}^{+}S^0 + {}^{+}S^1 + \ldots + {}^{+}S^n + \ldots\,,$$

где ${}^{+}S^0 = \mathbb{K}$, ${}^{+}S^1 = {}^{+}S$. Это пространство и рассматривается как *пространство действия фундаментальных античастиц.* Вектор ${}^{+}S \in {}^{+}\mathbb{S}$ записывается через базисные векторы следующим образом:

$$\begin{aligned}
{}^{+}S = S_0\, \mathfrak{e}^0 + S_{i_1}\, \mathfrak{e}^{i_1} + S_{i_1 i_2}\, \mathfrak{e}^{i_1 i_2} + \ldots \\
+ S_{i_1 i_2 \dots i_n}\, \mathfrak{e}^{i_1 i_2 \dots i_n} + \ldots
\end{aligned} \tag{46}$$

Через $\mathfrak{e}^0$ обозначена единица множества действительных чисел $\mathbb{K}$.

Используя собирательный индекс, вектор ${}^{+}S \in {}^{+}\mathbb{S}$ можно записать через базисные векторы в компактном виде:

$${}^{+}S = S_I\, \mathfrak{e}^I\,.$$

Путем подбора множителей можно сделать так, что все координаты S_I будут иметь размерность действия.

---

*Это обозначение совпадает с тем, которое мы приняли для контравариантной алгебры

Для безразмерных координат S_I и x_I векторные пространства $^+\mathbb{S}$ и $^+\mathbb{X}$ эквивалентны. Именно в этом случае пространства $^+\mathbb{S}$ и $^+\mathbb{X}$ сводятся к одному универсальному пространству ковариантных тензоров.

Отметим важный частный случай. Если в качестве образующего пространства взять пространство $^+S_3$, подобное геометрическому пространству $^+X_3$, то получим универсальное пространство ковариантных тензоров над $^+S_3$, которое обозначим $^+\mathbb{S}_3$. Вектор $^+S \in {}^+\mathbb{S}_3$ можно записать через базисные векторы следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^+S = S_0 \cdot \mathfrak{e}^0 + S_{a_1} \cdot \mathfrak{e}^{a_1} + S_{a_1 a_2} \cdot \mathfrak{e}^{a_1 a_2} + \ldots \\ + S_{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot \mathfrak{e}^{a_1 a_2 \ldots a_n} + \ldots . \end{aligned} \tag{47}$$

Напомним, что индексы a_k принимают значения $1, 2, 3$.

И, наконец, отметим, что универсальное пространство ковариантных тензоров бесконечномерно.

2. Пространство действия фундаментальных античастиц как ковариантная универсальная алгебра

Наличие на множестве векторов $^+\mathbb{S}$ операций сложения и умножения векторов и чисел (тензорного умножения и умножения на число) делает это множество алгеброй, которая является *ковариантной универсальной алгеброй.*

Теория электрона Дирака и квантовая механика в целом заставляют нас сделать вывод о том, что алгебра действия фундаментальных античастиц является алгеброй с умножением справа.

Для базисных векторов пространства $^+\mathbb{S}$ умножение выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}^0 \cdot \mathfrak{e}^0 = \mathfrak{e}^0 \\ &\mathfrak{e}^0 \cdot \mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_m} \cdot \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_m} \\ &\mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_m} \otimes \mathfrak{e}^{i_{m+1} i_{m+2} \ldots i_{m+n}} = \mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_{m+n}} \ , \end{aligned}$$

Формально символ умножения на число можно переобозначить в символ тензорного произведения. Тогда произведения базисных векторов приобретают единообразный вид

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}^0 \otimes \mathfrak{e}^0 = \mathfrak{e}^0 \, \delta^0_0 \\ &\mathfrak{e}^0 \otimes \mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_m} \otimes \mathfrak{e}^0 = \mathfrak{e}^{l_1 l_2 \ldots l_m} \, \delta^{i_1 i_2 \ldots i_m}_{l_1 l_2 \ldots l_m} \\ &\mathfrak{e}^{k_1 k_2 \ldots k_n} \otimes \mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \mathfrak{e}^{l_{m+n} \ldots l_2 l_1} \, \delta^{k_1 k_2 \ldots k_n i_1 i_2 \ldots i_m}_{l_1 l_2 \ldots l_{n+m}} \ . \end{aligned}$$

Здесь символы Кронекера есть *структурные постоянные* алгебры $^+\mathbb{S}$.

Для того, чтобы сделать запись компактной, введем *обобщенный* индекс

$$I_m = i_1 i_2 \ldots i_m$$

Используя это обозначение, имеем

$$\mathfrak{e}^{I_m} = \mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_m} \ , \qquad S_{K_n} = S_{k_1 k_2 \ldots k_n} \ .$$

С помощью обобщенных индексов закон умножения базисных векторов в алгебре $^+\mathbb{S}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}^0 \otimes \mathfrak{e}^0 = \mathfrak{e}^0 \, \delta^0_0 \\ &\mathfrak{e}^0 \otimes \mathfrak{e}^{I_m} = \mathfrak{e}^{I_m} \otimes \mathfrak{e}^0 = \mathfrak{e}^{L_m} \cdot \delta^{I_m}{}_{L_m} \\ &\mathfrak{e}^{K_n} \otimes \mathfrak{e}^{I_m} = \mathfrak{e}^{L_{n+m}} \cdot \delta^{K_n I_m}{}_{L_{n+m}} \ . \end{aligned}$$

Используя собирательные индексы, произведение базисных векторов в алгебре $^+\mathbb{S}$ можно записать в компактном виде

$$\mathfrak{e}^K \otimes \mathfrak{e}^I = {}^+C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{e}^L \ . \tag{48}$$

Ковариантная универсальная алгебра является *ассоциативной* так как

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{e}^0 \otimes \mathfrak{e}^0) \otimes \mathfrak{e}^0 = \mathfrak{e}^0 \otimes (\mathfrak{e}^0 \otimes \mathfrak{e}^0) = \mathfrak{e}^0 \\ &(\mathfrak{e}^0 \otimes \mathfrak{e}^0) \otimes \mathfrak{e}^l = \mathfrak{e}^0 \otimes (\mathfrak{e}^0 \otimes \mathfrak{e}^l) = \mathfrak{e}^l \\ &(\mathfrak{e}^0 \otimes \mathfrak{e}^k) \otimes \mathfrak{e}^l = \mathfrak{e}^0 \otimes (\mathfrak{e}^k \otimes \mathfrak{e}^l) = \mathfrak{e}^k \otimes \mathfrak{e}^l \\ &(\mathfrak{e}^i \otimes \mathfrak{e}^k) \otimes \mathfrak{e}^l = \mathfrak{e}^i \otimes (\mathfrak{e}^k \otimes \mathfrak{e}^l) = \mathfrak{e}^i \otimes \mathfrak{e}^k \otimes \mathfrak{e}^l \end{aligned}$$

Базисные векторы $\mathfrak{e}^0$, $\mathfrak{e}^{i_1}$, $\mathfrak{e}^{i_1 i_2}, \ldots, \mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_n}, \ldots$ образуют *дискретную полугруппу* с тензорным произведением справа в качестве операции композиции.

5. Подалгебры ковариантной универсальной алгебры – алгебры разных фундаментальных античастиц

1. Подалгебра действия фундаментальной частицы

Рассмотрим алгебру действия $^+\mathbb{S}$. Потребуем, чтобы 2-векторы $^+S^1 \otimes {}^+S^2$ (тензорные произведения двух векторов $^+S^1$ и $^+S^2$) удовлетворяли двум условиям:

1. *условию соседней транспозиции*;
2. *условию евклидовости.*

Для таких 2-векторов вместо обозначения $^+S^1 \otimes {}^+S^2$ будем использовать обозначение $^+S^1 \circ {}^+S^2$. Будем называть 2-вектор $^+S^1 \circ {}^+S^2$ *$\circ$-произведением* векторов $^+S^1$ и $^+S^2$. $\circ$-произведение векторов $^+S^1$ и $^+S^2$ будет определено, если определить $\circ$-произведение базисных векторов. Таким образом, для $\circ$-произведения базисных векторов мы требуем выполнения следующих условий:

1. Условие соседней транспозиции

$$\mathfrak{e}^i \circ \mathfrak{e}^k = \mathrm{sign}(i, k) \cdot \mathfrak{e}^k \circ \mathfrak{e}^i \qquad \text{для } i \neq k \ .$$

Здесь $\mathrm{sign}(i, k)$ – знак соседней транспозиции, зависящий от номеров переставляемых базисных векторов.

2. Условие евклидовости

$$\mathfrak{e}^i \circ \mathfrak{e}^k = \langle \mathfrak{e}^i, \mathfrak{e}^k \rangle \qquad \text{для } i = k\,.$$

Здесь справа стоит скалярное произведение базисных векторов.

Условия соседней транспозиции и евклидовости, отождествляя векторы, находящиеся в левой и правой частях уравнений, выделяют подмножество в алгебре $^+\mathbb{S}$. Это подмножество является алгеброй. Мы будем называть ее подалгеброй действия и обозначать также как алгебру – $^+\mathbb{S}$. Базисные векторы подалгебры $^+\mathbb{S}$ обозначим попрежнему $\mathfrak{e}^I$. (При обозначении индексов векторов и координат в подалгебре $^+\mathbb{S}$ будем использовать большие латинские буквы также как при обозначении индексов векторов и координат в алгебре $^+\mathbb{S}$.)

Для подалгебры $^+\mathbb{S}$ закон умножения (48) базисных векторов $\mathfrak{e}^K$ может быть записан следующим образом:

$$\mathfrak{e}^K \circ \mathfrak{e}^I = {}^+C^{IK}{}_L\, \mathfrak{e}^L\,. \tag{49}$$

Здесь $^+C^{IK}{}_L$ есть структурные постоянные или структурные матрицы подалгебры $^+\mathbb{S}$, а для умножения использован символ $\circ$ в отличие от $\otimes$ умножения в алгебре $^+\mathbb{S}$.

Условия соседней транспозиции и евклидовости приводят к тому, что подалгебра действия $\mathbb{S}$ имеет конечную размерность. Отсюда следует, что порядок p пространства тензоров S^p не превышает размерность образующего пространства, равную четырем. Таким образом,

$$^+\mathbb{S} = {}^+S^0 + {}^+S^1 + {}^+S^2 + {}^+S^3 + {}^+S^4\,,$$

где $^+S^0 = \mathbb{K}$, $^+S^1 \equiv {}^+X$.

$$\dim {}^+\mathbb{S} = 2^4 = 16\,.$$

Вектор действия (46) в этом случае принимает вид

$$^+S = S_0\, \mathfrak{e}^0 + S_i\, \mathfrak{e}^i + S_{ij}\, \mathfrak{e}^{ij} + S_{ijk}\, \mathfrak{e}^{ijk} + S_{1324}\, \mathfrak{e}^{1324}\,.$$

Мы будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$I\,, J\,, K\,, L\,, \sim (0, i, ij, ijk\,, 1324),$$

$$^+S = S_I\, \mathfrak{e}^I\,.$$

Если образующее пространство трехмерно (подобно геометрическому пространству),

$$\dim {}^+\mathbb{S}_3 = 2^3 = 8\,.$$

Вектор действия (47) принимает вид

$$^+S = S_0\, \mathfrak{e}^0 + S_a\, \mathfrak{e}^a + S_{ab}\, \mathfrak{e}^{ab} + S_{123}\, \mathfrak{e}^{123}\,.$$

Мы будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$A\,, B\,, C\,, D\,, \sim (0, a, ab, 123),$$

$$^+S = S_A\, \mathfrak{e}^A\,.$$

Закон умножения векторов в подалгебре $^+\mathbb{S}$ записывается так:

$$^+S = {}^+S^1 \circ {}^+S^2\,.$$

Если воспользоваться законом умножения базисных векторов (49), то получим правило вычисления координат вектора-произведения по координатам векторов-сомножителей:

$$S_L = (S^2)_I\, (S^1)_K\, {}^+C^{IK}{}_L\,. \tag{50}$$

Скалярное произведение

Условие соседней транспозиции и условие евклидовости позволяют обобщить скалярное произведение в образующем пространстве до скалярного произведения в подалгебре $\mathbb{S}$. Указанное скалярное произведение определено, если определено скалярное произведение базисных векторов. В свою очередь скалярное произведение базисных векторов является частным случаем умножения (49):

$$\langle \mathfrak{e}^K, \mathfrak{e}^I \rangle = {}^+C^{IK}{}_0\, \mathfrak{e}^0\,.$$

Это соотношение определяет *метрический тензор* в подалгебре действия $^+\mathbb{S}$

$$g^{IK} = {}^+C^{IK}{}_0\,.$$

Так как скалярное произведение не зависит от порядка умножения векторов, то

$$g^{IK} = g^{KI}\,.$$

Скалярное произведение вектора действия на себя определяет его квадрат длины

$$\langle {}^+S, {}^+S \rangle = g^{IK}\, S_I\, S_K\,.$$

Для фундаментальных античастиц, как и для фундаментальных частиц, пространство действия необходимо подчинить условию: *квадрат длины векторов действия равен нулю*

$$\langle {}^+S, {}^+S \rangle \equiv g^{IK}\, S_I\, S_K = 0\,.$$

По существу это условие позволяет определить координаты S_0 вектора действия через координаты S_i, S_{ij}, S_{ijk}, S_{1324}.

Кроме того, заметим, что из свойств произведений с участием базисного вектора $\mathfrak{e}^0$, следует

$$^+C^{I0}{}_L = \delta^I{}_L\,, \qquad {}^+C^{0K}{}_L = \delta^K{}_L\,.$$

Ассоциативность

Подалгебра ${}^{+}\mathbb{S}$ является ассоциативной. Из условия ассоциативности подалгебры ${}^{+}\mathbb{S}$ следует

$$(\mathfrak{e}^N \circ \mathfrak{e}^K) \circ \mathfrak{e}^I = \mathfrak{e}^N \circ (\mathfrak{e}^K \circ \mathfrak{e}^I)\,. \tag{51}$$

Используя это соотношение и (49), получим:

$$\begin{aligned} {}^{+}C^{KN}{}_{L}\,(\mathfrak{e}^L \circ \mathfrak{e}^I) \quad &= {}^{+}C^{IK}{}_{L}\,(\mathfrak{e}^N \circ \mathfrak{e}^L)\,, \\ {}^{+}C^{KN}{}_{L}\,{}^{+}C^{IL}{}_{M}\,\mathfrak{e}^M &= {}^{+}C^{IK}{}_{L}\,{}^{+}C^{LN}{}_{M}\,\mathfrak{e}^M\,. \end{aligned}$$

Откуда

$${}^{+}C^{KN}{}_{L}\,{}^{+}C^{IL}{}_{M} = {}^{+}C^{IK}{}_{L}\,{}^{+}C^{LN}{}_{M}\,. \tag{52}$$

Отметим одно полезное соотношение, вытекающее из (52). Выполним в этом уравнении свертку по индексам M и N. Получим

$${}^{+}C^{KM}{}_{L}\,{}^{+}C^{IL}{}_{M} = {}^{+}C^{IK}{}_{L}\,{}^{+}C^{LM}{}_{M}\,. \tag{53}$$

Так как произведение базисного вектора $\mathfrak{e}^K$ на базисный вектор, отличный от $\mathfrak{e}^0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением ${}^{+}C^{0M}{}_{N}$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (53) имеет вид

$${}^{+}C^{KM}{}_{L}\,{}^{+}C^{IL}{}_{M} = {}^{+}C^{IK}{}_{0}\,{}^{+}C^{0M}{}_{M}\,.$$

Отсюда получим

$$g^{IK} = \frac{1}{N} \cdot {}^{+}C^{KM}{}_{L} \cdot {}^{+}C^{IL}{}_{M}\,,$$

где N–размерность подалгебры ${}^{+}\mathbb{S}$.

Деление.

Подалгебра действия ${}^{+}\mathbb{S}$ является алгеброй с делением. Для каждого вектора ${}^{+}S \in {}^{+}\mathbb{S}$ за исключением нулевого определен *обратный* вектор ${}^{+}S^{-1}$ в соответствии с выражением

$${}^{+}S \circ {}^{+}S^{-1} = \mathfrak{e}^0\,.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} &g^{IK}\,S_I\,(S^{-1})_K \qquad = 1\,, \\ &S_I \cdot (S^{-1})_K\,{}^{+}C^{IK}{}_{L} = 0\,, \quad \text{для } L \neq 0\,. \end{aligned}$$

То есть, имеем систему из N уравнений, которая позволяет по координатам S_I вектора ${}^{+}S$ определить N координат $(S^{-1})_K$ обратного вектора ${}^{+}S^{-1}$.

2. Подалгебра пространства-времени фундаментальной античастицы

Рассмотрим алгебру пространства-времени ${}^{+}\mathbb{X}$. Как и прежде потребуем, чтобы 2-векторы ${}^{+}x^2 \otimes {}^{+}x^1$ (тензорные произведения двух векторов ${}^{+}x^1$ и ${}^{+}x^2$) удовлетворяли двум условиям:

1. *условию соседней транспозиции*;
2. *условию евклидовости.*

Для таких 2-векторов вместо обозначения ${}^{+}x^2 \otimes {}^{+}x^1$ будем использовать обозначение ${}^{+}x^2 \circ {}^{+}x^1$. Будем называть 2-вектор ${}^{+}x^2 \circ {}^{+}x^1$ $\circ$-*произведением* векторов ${}^{+}x^1$ и ${}^{+}x^2$. $\circ$-произведение векторов ${}^{+}x^1$ и ${}^{+}x^2$ будет определено, если определить $\circ$-произведение базисных векторов. Таким образом, для $\circ$-произведения базисных векторов мы требуем выполнения следующих условий:

1. Условие соседней транспозиции

$$\mathfrak{E}^i \circ \mathfrak{E}^k = \mathrm{sign}(i,k) \cdot \mathfrak{E}^k \circ \mathfrak{E}^i \qquad \text{для } i \neq k\,.$$

Здесь $\mathrm{sign}(i,k)$ – знак соседней транспозиции, зависящий от номеров переставляемых базисных векторов.

2. Условие евклидовости

$$\mathfrak{E}^i \circ \mathfrak{E}^k = \langle \mathfrak{E}^i, \mathfrak{E}^k \rangle \qquad \text{для } i = k\,.$$

Здесь справа стоит скалярное произведение базисных векторов.

Условия соседней транспозиции и евклидовости, отождествляя векторы, находящиеся в левой и правой частях уравнений, выделяют подмножество в алгебре ${}^{+}\mathbb{X}$. Это подмножество является алгеброй. Мы будем называть ее подалгеброй пространства-времени фундаментальной античастицы и обозначать также как алгебру – ${}^{+}\mathbb{X}$. Базисные векторы подалгебры ${}^{+}\mathbb{X}$ обозначим попрежнему $\mathfrak{E}^I$. (При обозначении индексов векторов и координат в подалгебре ${}^{+}\mathbb{X}$ будем использовать большие латинские буквы также как при обозначении индексов векторов и координат в алгебре ${}^{+}\mathbb{X}$.)

Для подалгебры ${}^{+}\mathbb{X}$ закон умножения (45) для базисных векторов $\mathfrak{E}^K$ может быть записан следующим образом:

$$\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K = C^{IK}{}_{L} \cdot \mathfrak{E}^L\,. \tag{54}$$

Здесь $C^{IK}{}_{L}$ есть структурные постоянные или структурные матрицы подалгебры ${}^{+}\mathbb{X}$, а для умножения использован символ $\circ$ в отличие от $\otimes$ умножения в алгебре ${}^{+}\mathbb{X}$.

Конечная размерность

Так же как и для подалгебры действия, условия соседней транспозиции и евклидовости приводят к тому, что подалгебра пространства-времени $\mathbb{X}$ имеет конечную размерность. Порядок p пространства тензоров X^p не превышает размерность сопряженного пространства-времени СТО. Таким образом,

$${}^{+}\mathbb{X} = {}^{+}X^0 + {}^{+}X^1 + {}^{+}X^2 + {}^{+}X^3 + {}^{+}X^4\,,$$

где ${}^{+}X^0 = \mathbb{K}$, ${}^{+}X^1$ – сопряженное пространство-время СТО.

Размерность

подалгебры пространства-времени фундаментальных античастиц (число базисных векторов) равна

$$N = \mathrm{C}_4^0 + \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_4^3 + \mathrm{C}_4^4 = (1+1)^4 = 16.$$

Вектор ${}^+x \in {}^+\mathbb{X}$ можно записать через базисные векторы:

$${}^+x = x_0\,\mathfrak{E}^0 + x_i\,\mathfrak{E}^i + x_{ij}\,\mathfrak{E}^{ij} + x_{ijk}\,\mathfrak{E}^{ijk} + x_{1324}\,\mathfrak{E}^{1324}\,.$$

Через $\mathfrak{E}^0$ обозначена единица множества действительных чисел $\mathbb{K}$. Мы будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$I\,, J\,, K\,, L\,, \sim (0, i, ij, ijk\,, 1324)\,.$$

Тогда

$${}^+x = x_I \cdot \mathfrak{E}^I\,.$$

Если образующее пространство есть трехмерное геометрическое пространство X_3, то

$$\dim \mathbb{X}_3 = 2^3 = 8\,.$$

Вектор геометрического пространства античастицы (44) тождественен вектору геометрического пространства частицы и имеет вид

$${}^+x = x_0\,\mathfrak{E}^0 + x_a\,\mathfrak{E}^a + x_{ab}\,\mathfrak{E}^{ab} + x_{123}\,\mathfrak{E}^{123}\,.$$

Мы будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$A\,, B\,, C\,, D\,, \sim (0, a, ab, 123)\,.$$

Тогда

$${}^+x = x_A \cdot \mathfrak{E}^A\,.$$

Закон умножения векторов в алгебре ${}^+\mathbb{X}$ записывается так:

$${}^+x = {}^+x^2 \circ {}^+x^1\,.$$

Если воспользоваться законом умножения базисных векторов (54), то получим правило вычисления координат вектора-произведения по координатам векторов-сомножителей:

$$x_L = (x^1)_I\,(x^2)_K\,C^{IK}{}_L\,. \tag{55}$$

Скалярное произведение

Условие соседней транспозиции и условие евклидовости позволяют обобщить скалярное произведение в сопряженном пространстве-времени СТО до скалярного произведения в пространстве-времени античастицы ${}^+\mathbb{X}$. Указанное скалярное произведение определено, если определено скалярное произведение базисных векторов. В свою очередь скалярное произведение базисных векторов является частным случаем умножения (54). Проекция произведения $\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K$ на направление $\mathfrak{E}^0$ определяет скалярное произведение

$$\langle \mathfrak{E}^I, \mathfrak{E}^K \rangle = C^{IK}{}_0\,\mathfrak{E}^0$$

Это соотношение определяет *обратный метрический тензор* в пространстве-времени ${}^+\mathbb{X}$

$$g^{IK} = C^{IK}{}_0\,.$$

Так как скалярное произведение не зависит от порядка умножения векторов, то

$$g^{IK} = g^{KI}\,.$$

Так как скалярное произведение не зависит от порядка умножения векторов, то

$$\langle \mathfrak{E}^I, \mathfrak{E}^K \rangle = \langle \mathfrak{e}^I, \mathfrak{e}^K \rangle\,.$$

Откуда

$$C^{IK}{}_0 = {}^+C^{IK}{}_0\,.$$

Или

$$g^{IK} = {}^+g^{IK}\,.$$

То есть, в подалгебре действия ${}^+\mathbb{S}$ и в пространстве-времени ${}^+\mathbb{X}$ метрический тензор один и тот же.

Скалярное произведение вектора пространства-времени ${}^+\mathbb{X}$ на себя определяет его квадрат длины

$$\langle {}^+x, {}^+x \rangle = x_I\,x_K\,g^{IK}\,.$$

Пространство-время античастицы мы подчиним условию: *квадрат длины векторов ${}^+x$ равен нулю*

$$\langle {}^+x, {}^+x \rangle = x_I\,x_K\,g^{IK} = 0\,.$$

По существу это условие позволяет рассматривать координаты x_0 как обобщение *интервала* сопряженного пространства-времени СТО.

Кроме того, заметим, что из свойств произведений с участием базисного вектора $\mathfrak{E}^0$, следует

$$C^{I0}{}_L = \delta^I{}_L\,, \qquad C^{0K}{}_L = \delta^K{}_L\,.$$

Ассоциативность

Подалгебра ${}^+\mathbb{X}$ является ассоциативной. Из условия ассоциативности подалгебры ${}^+\mathbb{X}$ следует

$$\mathfrak{E}^I \circ (\mathfrak{E}^K \circ \mathfrak{E}^N) = (\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K) \circ \mathfrak{E}^N\,. \tag{56}$$

Используя это соотношение и (54), получим:

$$C^{KN}{}_L\,(\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^L) = C^{IK}{}_L\,(\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}^N)\,,$$

$$C^{KN}{}_L\,C^{IL}{}_M\,\mathfrak{E}^M = C^{IK}{}_L\,C^{LN}{}_M\,\mathfrak{E}^M\,,$$

Откуда

$$C^{KN}{}_L\,C^{IL}{}_M = C^{IK}{}_L\,C^{LN}{}_M\,. \tag{57}$$

Отметим одно полезное соотношение, вытекающее из (57). Выполним в этом уравнении свертку по индексам M и N. Получим

$$C^{KM}{}_L\, C^{IL}{}_M = C^{IK}{}_L\, C^{LM}{}_M\,. \tag{58}$$

Так как произведение базисного вектора $\mathfrak{E}^K$, на базисный вектор, отличный от $\mathfrak{E}^0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением $C^{0L}{}_M$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (58) имеет вид

$$C^{KM}{}_L\, C^{IL}{}_M = C^{IK}{}_0\, C^{0M}{}_M\,.$$

Отсюда получим

$${}^+g^{IK} = \frac{1}{N}\cdot C^{KM}{}_L\, C^{IL}{}_M\,,$$

где N–размерность подалгебры $\mathbb{X}$.

Деление.

Подалгебра пространства-времени ${}^+\mathbb{X}$ является алгеброй с делением. Для каждого вектора ${}^+x \in {}^+\mathbb{X}$ за исключением нулевого определен *обратный* вектор ${}^+x^{-1}$ в соответствии с выражением

$${}^+x \circ {}^+x^{-1} = \mathfrak{E}^0\,.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{g}^{IK}\, x_I\, (x^{-1})_K &&= 1\,,\\
&x_I \cdot (x^{-1})_K\, C^{IK}{}_L &&= 0\,, \quad \text{для } L \neq 0\,.
\end{aligned}$$

То есть, имеем систему из N уравнений, которая позволяет по координатам x_I вектора ${}^+x$ определить N координат $(x^{-1})_K$ обратного вектора ${}^+x^{-1}$.

6. Регулярное представление ковариантной универсальной алгебры

1. Подалгебра действия фундаментальной античастицы

Перепишем еще раз соотношения (49) и (52). Первое из них есть закон умножения базисных векторов в алгебре ${}^+\mathbb{S}$:

$$\mathfrak{e}^K \circ \mathfrak{e}^I = {}^+C^{IK}{}_L\, \mathfrak{e}^L\,. \tag{59}$$

Здесь ${}^+C^{IK}{}_L$ есть структурные постоянные или структурные матрицы алгебры ${}^+\mathbb{S}$. Второе соотношение есть следствие ассоциативности умножения в алгебре ${}^+\mathbb{S}$:

$${}^+C^{KN}{}_L\, {}^+C^{IL}{}_M = {}^+C^{IK}{}_L\, {}^+C^{LN}{}_M\,. \tag{60}$$

Сравнивая эти выражения, заключаем, что базисным векторам $\mathfrak{e}^I$ можно поставить в соответствие структурные матрицы ${}^+C^{IL}{}_M$. Это соответствие называется *регулярным (присоединенным) представлением* алгебры ${}^+\mathbb{S}$ и обозначается:

$$\mathfrak{e}^I \sim {}^+C^{IL}{}_M\,.$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который может быть представлен этой матрицей. Из (60) следует, что матрицы умножаются в той же последовательности что и соответствующие базисные векторы. В частности, числовой единице $\mathfrak{e}^0$ соответствует

$$\mathfrak{e}^0 \sim {}^+C^{0L}{}_M = \delta^L{}_M\,.$$

Вектору ${}^+S = S_I\, \mathfrak{e}^I$ в регулярном представлении соответствует матрица

$$S^L{}_M = S_I\, C^{IL}{}_M$$

2. Подалгебра пространства-времени фундаментальной античастицы

Перепишем еще раз соотношения (54) и (57). Первое из них есть закон умножения базисных векторов в алгебре ${}^+\mathbb{X}$:

$$\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K = C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{E}^L\,. \tag{61}$$

Здесь $C^{IK}{}_L$ есть структурные постоянные или структурные матрицы подалгебры ${}^+\mathbb{X}$. Второе соотношение есть следствие ассоциативности умножения в алгебре ${}^+\mathbb{X}$:

$$C^{KN}{}_L\, C^{IL}{}_M = C^{IK}{}_L\, C^{LN}{}_M\,. \tag{62}$$

Сравнивая эти выражения, заключаем, что базисным векторам $\mathfrak{E}^I$ можно поставить в соответствие структурные матрицы $C^{IL}{}_M$.

$$\mathfrak{E}^I \sim C^{IL}{}_M\,.$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который может быть представлен этой матрицей. Из (62) следует, что матрицы умножаются в обратной последовательности по отношению к соответствующим базисным векторам. В частности, числовой единице $\mathfrak{E}^0$ соответствует

$$\mathfrak{E}^0 \sim C^{0L}{}_M = \delta^L{}_N\,.$$

Вектору ${}^+x = x_I\, \mathfrak{E}^I$ соответствует матрица

$$x^L{}_M = x_I\, C^{IL}{}_M\,.$$

3. Последовательность индексов

Мы будем рассматривать базисные векторы и координаты вектора алгебры в определенной последовательности. Так вектор ${}^+S \in {}^+\mathbb{S}_3$ будем записывать следующим образом

$$\begin{aligned}
S = S_{32}\, \mathfrak{e}^{32} + S_{13}\, \mathfrak{e}^{13} + S_{21}\, \mathfrak{e}^{21} + S_0\, \mathfrak{e}^0&\\
+ S_1\, \mathfrak{e}^1 + S_2\, \mathfrak{e}^2 + S_3\, \mathfrak{e}^3 + S_{123}\, \mathfrak{e}^{123}&\,.
\end{aligned} \tag{63}$$

Указанная запись соответствует следующему порядку индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

В указанном порядке выделяется группа базисных векторов

$$\mathfrak{e}^{32}\,,\quad \mathfrak{e}^{13}\,,\quad \mathfrak{e}^{21}\,,\quad \mathfrak{e}^{0}\,.$$

Векторное пространство, построенное на указанных базисных векторах является алгеброй, имеющей фундаментальное значение для элементарных частиц. В ковариантной пространственно-временной модификации эта алгебра есть алгебра нерелятивистского спина.

Два базисных вектора

$$\mathfrak{e}^{21}\,,\quad \mathfrak{e}^{0}$$

также выделяется в особый блок, который также определяет алгебру, имеющую фундаментальное значение для элементарных частиц. В ковариантной пространственно-временной модификации эта алгебра есть алгебра третьей компоненты спина.

В общем случае вектор ${}^{+}S \in {}^{+}\mathbb{S}$ будем записывать следующим образом

$$\begin{aligned}{}^{+}S = {} & S_{32}\,\mathfrak{e}^{32} + S_{13}\,\mathfrak{e}^{13} + S_{21}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{0}\,\mathfrak{e}^{0}\\ & + S_{42}\,\mathfrak{e}^{42} + S_{14}\,\mathfrak{e}^{14} + S_{1324}\,\mathfrak{e}^{1324} + S_{34}\,\mathfrak{e}^{34}\\ & + S_{1}\,\mathfrak{e}^{1} + S_{2}\,\mathfrak{e}^{2} + S_{3}\,\mathfrak{e}^{3} + S_{123}\,\mathfrak{e}^{123}\\ & + S_{134}\,\mathfrak{e}^{134} + S_{234}\,\mathfrak{e}^{234} + S_{4}\,\mathfrak{e}^{4} + S_{124}\,\mathfrak{e}^{124}\,,\end{aligned}$$

Указанная запись соответствует следующему порядку индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

В указанном порядке выделяется группа базисных векторов

$$\mathfrak{e}^{32}\,,\quad \mathfrak{e}^{13}\,,\quad \mathfrak{e}^{21}\,,\quad \mathfrak{e}^{0}\,,\quad \mathfrak{e}^{42}\,,\quad \mathfrak{e}^{14}\,,\quad \mathfrak{e}^{1324}\,,\quad \mathfrak{e}^{34}\,.$$

Векторное пространство, построенное на указанных базисных векторах является алгеброй. В ковариантной пространственно-временной модификации эта алгебра есть алгебра релятивистского спина.

4. Представление над полем гиперчисел

Вектор ${}^{+}S \in {}^{+}\mathbb{S}_3$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned}{}^{+}S = {} & ({}'S_{32}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{13}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{13}\\ & + (S_{21}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{0}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{0} + ({}'S_{1}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{2}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{2}\\ & + ({}'S_{3}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{123}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{123}\,.\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_3$ в виде произведения ${}^{+}\mathbb{S}_2 \times {}^{+}\mathbb{S}_1$. Базисными векторами алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_2$ являются $\mathfrak{e}^{13}, \mathfrak{e}^{0}, \mathfrak{e}^{2}, \mathfrak{e}^{123}$; базисными векторами алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_1$ являются $\mathfrak{e}^{21}, \mathfrak{e}^{0}$.

Также вектор ${}^{+}S \in {}^{+}\mathbb{S}_4$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned}{}^{+}S = {} & (S_{32}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{13}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{13}\\ & + (S_{21}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{0}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{0} + (S_{42}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{14}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{14}\\ & + (S_{1324}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{34}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{34} + (S_{1}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{2}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{2}\\ & + (S_{3}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{123}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{123} + (S_{134}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{234}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{234}\\ & + (S_{4}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{124}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{124}\,,\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_4$ в виде произведения ${}^{+}\mathbb{S}_3 \times {}^{+}\mathbb{S}_1$. Базисными векторами алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_2$ являются $\mathfrak{e}^{13}, \mathfrak{e}_{0}, \mathfrak{e}^{2}, \mathfrak{e}^{123}$; $\mathfrak{e}^{14}, \mathfrak{e}^{34}, \mathfrak{e}^{234}, \mathfrak{e}^{124}$; базисными векторами алгебры $\mathbb{S}^1$ являются $\mathfrak{e}^{21}, \mathfrak{e}^{0}$.

Координаты вектора ${}^{+}S$ (выражения в скобках) в этих случаях можно рассматривать как гиперчисла размерности два. При этом алгебра ${}^{+}\mathbb{S}_1$ выступает как множество указанных гиперчисел. Базисный вектор $\mathfrak{e}^{0}$ представляет собой действительную единицу, а базисный вектор $\mathfrak{e}^{21}$ мы рассматриваем как вторую гиперединицу. В том случае, если $\operatorname{sign}(1,2) = -1$ (в этом случае $(\mathfrak{e}^{21})^2 = -1$) базисный вектор $\mathfrak{e}^{21}$ мы рассматриваем как мнимую единицу, алгебра ${}^{+}\mathbb{S}_1$ выступает как множество комплексных чисел. В результате мы имеем *комплексное представление* алгебры действия ${}^{+}\mathbb{S}$.

В том случае, если $\operatorname{sign}(1,2) = 1$ (в этом случае $(\mathfrak{e}^{21})^2 = 1$) базисный вектор $\mathfrak{e}^{21}$ мы рассматриваем как a-единицу, алгебра ${}^{+}\mathbb{S}_1$ выступает как множество a-гиперчисел. В результате мы имеем *a-представление* алгебры действия ${}^{+}\mathbb{S}$.

Кроме того вектор ${}^{+}S \in {}^{+}\mathbb{S}_3$ может быть записан в следующем виде:

$$\begin{aligned}{}^{+}S = {} & (S_{32}\,\mathfrak{e}^{32} + S_{13}\,\mathfrak{e}^{13} + S_{21}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{0}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{0}\\ & + (S_{1}\,\mathfrak{e}^{32} + S_{2}\,\mathfrak{e}^{13} + S_{3}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{123}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{123}\,.\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_3$ в виде произведения ${}^{+}\mathbb{S}_1 \times {}^{+}\mathbb{S}_2$. Базисными векторами алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_1$ являются $\mathfrak{e}^{0}, \mathfrak{e}^{123}$; базисными векторами алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_2$ являются $\mathfrak{e}^{32}, \mathfrak{e}^{13}, \mathfrak{e}^{21}, \mathfrak{e}^{0}$.

Также вектор ${}^{+}S \in {}^{+}\mathbb{S}_4$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned}{}^{+}S = {} & (S_{32}\,\mathfrak{e}^{32} + S_{13}\,\mathfrak{e}^{13} + S_{21}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{0}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{0}\\ & + (S_{42}\,\mathfrak{e}^{32} + S_{14}\,\mathfrak{e}^{13} + S_{1324}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{34}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{34}\\ & + (S_{1}\,\mathfrak{e}^{32} + S_{2}\,\mathfrak{e}^{13} + S_{3}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{123}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{123}\\ & + (S_{134}\,\mathfrak{e}^{32} + S_{234}\,\mathfrak{e}^{13} + S_{4}\,\mathfrak{e}^{21} + S_{124}\,\mathfrak{e}^{0}) \circ \mathfrak{e}^{124}\,,\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_4$ в виде произведения ${}^{+}\mathbb{S}_2 \times {}^{+}\mathbb{S}_2$. Базисными векторами одной алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_2$ являются $\mathfrak{e}^{0}, \mathfrak{e}^{123}$, $\mathfrak{e}^{34}, \mathfrak{e}^{124}$; базисными векторами другой алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_2$ являются $\mathfrak{e}^{32}, \mathfrak{e}^{13}, \mathfrak{e}^{21}, \mathfrak{e}^{0}$.

Координаты вектора ${}^{+}S$ (выражения в скобках) в этих случаях можно рассматривать как гиперчисла размерности четыре. При этом алгебра ${}^{+}\mathbb{S}_2$ выступает как множество указанных гиперчисел. Четырем гиперединицам соответствуют базисные векторы

$\mathfrak{e}^{32}, \mathfrak{e}^{13}, \mathfrak{e}^{21}, \mathfrak{e}^{0}$. Базисный вектор $\mathfrak{e}^0$ представляет собой действительную единицу.

В том случае, если[*]

$$\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(1,3) = \operatorname{sign}(3,2) = -1$$

алгебра ${}^{+}\mathbb{S}_1$ выступает как множество кватернионов. В результате мы имеем *кватернионное представление* алгебры действия $\mathbb{S}$.

5. Сжатое представление базисных векторов

Сжатым называется регулярное представление базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_n$ в ее подалгебре ${}^{+}\mathbb{S}_{n-k}$, где $k < n$.

Для примера рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_n$ в ее подалгебре ${}^{+}\mathbb{S}_{n-1}$.

Разобьем базисные векторы $\mathfrak{e}^I$ алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_n$ на две группы $\mathfrak{e}^{I_1}$ и $\mathfrak{e}^{I_2}$ с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы $\mathfrak{e}^{I_1}$ образовывали алгебру. В силу симметрий алгебры соотношения (49) имеют вид

$$\mathfrak{e}^{K_1} \circ \mathfrak{e}^{I_1} = {}^{+}C^{I_1 K_1}{}_{L_1} \cdot \mathfrak{e}^{L_1}\,, \tag{64}$$

$$\mathfrak{e}^{K_2} \circ \mathfrak{e}^{I_1} = {}^{+}C^{I_2 K_1}{}_{L_2} \cdot \mathfrak{e}^{L_2}\,, \tag{65}$$

$$\mathfrak{e}_{K^1} \circ \mathfrak{e}^{I_2} = {}^{+}C^{I_1 K_2}{}_{L_2} \cdot \mathfrak{e}^{L_2}\,,$$

$$\mathfrak{e}^{K_2} \circ \mathfrak{e}^{I_2} = {}^{+}C^{I_2 K_2}{}_{L_1} \cdot \mathfrak{e}^{L_1}\,.$$

Будем полагать, что приближенно при вычислении матрицы представления базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_n$ в алгебре ${}^{+}\mathbb{S}_{n-1}$ базисные векторы $\mathfrak{e}^{L_2}$ можно заменить на базисные векторы $\mathfrak{e}^{L_1}$ с помощью соотношения

$$\mathfrak{e}^{L_2} = P^{L_2}{}_{L_1} \cdot \mathfrak{e}^{L_1}\,,$$

где $P^{L_1}{}_{L_2}$ есть матрица соответствий. Тогда соотношение (65) принимает вид:

$$\mathfrak{e}^{K_2} \circ \mathfrak{e}^{I_1} = {}^{+}C^{I_2 K_1}{}_{L_2} \cdot P^{L_2}{}_{L_1} \cdot \mathfrak{e}^{L_1}\,. \tag{66}$$

Соотношения (64) и (66) позволяют получить матрицы представления базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_n$ в ее подалгебре ${}^{+}\mathbb{S}_{n-1}$, причем базисные векторы подалгебры ${}^{+}\mathbb{S}_{n-1}$ представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно.

Аналогичным образом можно рассмотреть сжатое представление базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_n$ в ее подалгебре ${}^{+}\mathbb{S}_{n-k}$, где $k < n$.

6. Первое сжатое представление

Рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_4$ в ее подалгебре ${}^{+}\mathbb{S}_3$, построенной на базисных векторах $\mathfrak{e}^{32}$, $\mathfrak{e}^{13}$, $\mathfrak{e}^{21}$, $\mathfrak{e}^{0}$, $\mathfrak{e}^{1}$, $\mathfrak{e}^{2}$, $\mathfrak{e}^{3}$, $\mathfrak{e}^{123}$. Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (66) базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность структурных матриц алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_4$ понижается вдвое и равна 8×8 в действительном представлении, 4×4 в представлении 2-гиперчислами и 2×2 в представлении 4-гиперчислами. Структурные матрицы пространственных векторов для сопряженного пространства действия в сжатом представлении совпадают с точными матрицами для трехмерного случая. Такое представление мы называли *первым сжатым* и обозначили

$$R_1 : {}^{+}\mathbb{S}_4 \to {}^{+}\mathbb{S}_3 \,\{\mathfrak{e}^{32}, \mathfrak{e}^{13}, \mathfrak{e}^{21}, \mathfrak{e}^{0}, \mathfrak{e}^{1}, \mathfrak{e}^{2}, \mathfrak{e}^{3}, \mathfrak{e}^{123}\}.$$

7. Второе сжатое представление

Рассмотрим сжатое представление

$$R_2 : {}^{+}\mathbb{S}_4 \to {}^{+}\mathbb{S}_2 \,\{\mathfrak{e}^{32}, \mathfrak{e}^{13}, \mathfrak{e}^{21}, \mathfrak{e}^{0}\}.$$

которое мы называли *вторым сжатым* представлением. Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (66) базисные векторы с индексами $(42, 14, 1324, 34)$, $(134, 234, 4, 124)$ и $(1, 2, 3, 123)$ заменяются на базисные векторы с индексами $(32, 13, 21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_4$ понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна 4×4 в действительном представлении, 2×2 в представлении 2-гиперчислами и 1×1 в представлении 4-гиперчислами.

8. Третье сжатое представление

Рассмотрим сжатое представление

$$R_3 : {}^{+}\mathbb{S}_4 \to {}^{+}\mathbb{S}_1 \,\{\mathfrak{e}^{21}, \mathfrak{e}^{0}\}\,,$$

которое мы называли *третьим сжатым* представлением. Для этого положим, что при вычислении структурных матриц векторы с индексами $(42, 14)$, $(1324, 34)$, $(134, 234)$, $(4, 124)$, $(1, 2)$, $(3, 123)$, $(32, 13)$

---

[*] в этом случае

$$(\mathfrak{e}^{21})^2 = (\mathfrak{e}^{13})^2 = (\mathfrak{e}^{32})^2 = -1\,.$$

заменяются на векторы с индексами $(21,0)$ соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{S}_4$ понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна 2×2 в действительном представлении, 1×1 в представлении 2-гиперчислами.

7. Уравнения структуры алгебр ${}^{+}\mathbb{S}$ и ${}^{+}\mathbb{X}$ и квантовые постулаты механики фундаментальных античастиц

1. *Уравнения структуры алгебры действия*

Особенность дифференцирования векторов алгебр связана с дифференцированием закона умножения векторов. Она проявляется в существовании для алгебр *уравнений структуры*. Далее рассмотрим уравнения структуры для подалгебры действия ${}^{+}\mathbb{S}$.

Закон умножения векторов в ${}^{+}\mathbb{S}$ мы записали так:

$$ {}^{+}S = {}^{+}S^1 \circ {}^{+}S^2 \,. \tag{67}$$

Если воспользоваться законом умножения базисных векторов (49), то получим правило умножения координат векторов сомножителей (50):

$$ S_L = S^2{}_I \, S^1{}_K \, C^{IK}{}_L \,. $$

Введем *дифференциал* d – оператор, действующий на функцию, стоящую справа. Рассмотрим дифференциал dS. Будем индексом различать дифференциалы d_1, $d_2,\ldots$ подобно тому как разные векторы различаются индексом $({}^{+}S^1, {}^{+}S^2, \ldots)$. Дифференциал вектора ${}^{+}S$ при изменении вектора S^p будем обозначать через d_pS. Из (67) следует

$$ d_1{}^{+}S = d^{+}S^1 \circ S^2 \,, \qquad d_2{}^{+}S = {}^{+}S^1 \circ d^{+}S^2 \,. $$

Из этих выражений получаем

$$ d^{+}S^1 = d_1{}^{+}S \circ ({}^{+}S_2)^{-1} \,, \qquad d^{+}S^2 = ({}^{+}S^1)^{-1} \circ d_2{}^{+}S \,. \tag{68}$$

Введем второй дифференциал d_2d_1S. Из (67) для него имеет место

$$ d_2d_1{}^{+}S = d^{+}S^1 \circ d^{+}S^2 \,. $$

Используя (68), получим*

$$ d_2d_1{}^{+}S = d_1{}^{+}S \circ ({}^{+}S)^{-1} \circ d_2{}^{+}S \,. $$

Вблизи единицы алгебры, то есть при ${}^{+}S = ({}^{+}S)^{-1} = \mathfrak{E}^0$, это уравнение принимает вид

$$ d_2d_1{}^{+}S = d_1{}^{+}S \circ d_2{}^{+}S \,. \tag{69}$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры ${}^{+}\mathbb{S}$ в векторной форме.

Подставляя в (69) выражения дифференциалов через дифференциалы координат и пользуясь законом умножения базисных векторов (9), получим уравнения структуры в координатной форме

$$ d_2d_1S_L = d_2S_I \cdot d_1S_K \cdot {}^{+}C^{IK}{}_L \,. \tag{70}$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того, чтобы перейти к размерному действию необходимо уравнение (67) записать в виде

$$ {}^{+}S = \frac{1}{S_0}\, {}^{+}S^1 \circ {}^{+}S^2 \,, $$

где S_0 есть постоянная, имеющая размерность действия. Тогда уравнения (69) и (70) примут вид соответственно

$$ d_2d_1{}^{+}S = \frac{1}{S_0}\, d_1{}^{+}S \circ d_2{}^{+}S \,. \tag{71}$$

и

$$ d_2d_1S_L = \frac{1}{S_0}\, d_2S_I \cdot d_1S_K \cdot {}^{+}C^{IK}{}_L \,. \tag{72}$$

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые постулаты, на которых строится квантовая механика фундаментальных античастиц. Мы перейдем к более привычной записи квантовых постулатов, если введем переобозначения

$$ d_1{}^{+}S = {}^{+}\psi \,, \quad d_2 = d \,. $$

Тогда вместо (71) получим

$$ d^{+}\psi = \frac{1}{S_0}\, {}^{+}\psi \circ d^{+}S \,, $$

а вместо (72) получим

$$ d^{+}\psi_L = \frac{1}{S_0}\, dS_I \cdot \psi_K \cdot {}^{+}C^{IK}{}_L \,. $$

Если ввести обобщенные импульсы в соответствии с соотношением

$$ d^{+}S = dx_M \, {}^{+}p^M \,, $$

получим квантовые постулаты в векторном виде

$$ d^{+}\psi = \frac{1}{S_0}\, dx_M \, {}^{+}\psi \circ p^M $$

и в координатном виде

$$ d\psi_L = \frac{1}{S_0}\, dx_M \, {}^{+}p^M{}_I \cdot \psi_K \cdot {}^{+}C^{IK}{}_L \,. $$

Здесь ${}^{+}\psi$ есть волновая функция фундаментальной античастицы, которая представляет собой частный дифференциал вектора действия фундаментальной античастицы.

---

[*] Здесь учтено, что для (67)

$$ {}^{+}S^{-1} = ({}^{+}S_2)^{-1} \circ ({}^{+}S_1)^{-1} \,. $$

2. Уравнения структуры алгебры пространства-времени античастиц

Предыдущие выкладки, выполненные для алгебры действия ${}^+\mathbb{S}$ мы можем повторить и для алгебры пространства-времени ${}^+\mathbb{X}$. Далее рассмотрим уравнения структуры для алгебры ${}^+\mathbb{X}$.

Закон умножения векторов в ${}^+\mathbb{X}$ запишем так:

$$ {}^+x = {}^+x^2 \circ {}^+x^1 \,. \tag{73}$$

Если воспользоваться законом умножения базисных векторов (14), то получим правило умножения координат векторов сомножителей:

$$ x_L = (x_1)_I \, (x_2)_K \, C^{KI}{}_L \,. $$

Как и прежде Введем *дифференциал* d – оператор, действующий на функцию, стоящую справа. Также будем индексом различать дифференциалы d_1, $d_2, \ldots$ подобно тому как разные векторы различаются индексом (${}^+x^1, {}^+x^2, \ldots$). Дифференциал вектора ${}^+x$ при изменении вектора ${}^+x^p$ будем обозначать через $d_p{}^+x$. Из (73) следует

$$ d_1{}^+x = {}^+x^2 \circ d^+x^1 \,, \qquad d_2 x = d^+x^2 \circ {}^+x^1 \,. $$

Из этих выражений получаем

$$ d^+x^1 = ({}^+x^2)^{-1} \circ d_1{}^+x \,, \qquad d^+x^2 = d_2{}^+x \circ ({}^+x^1)^{-1} \,. \tag{74}$$

Введем второй дифференциал $d_2 d_1{}^+x$. Из (73) для него имеет место

$$ d_2 d_1{}^+x = d^+x^2 \circ d^+x^1 \,. $$

Используя (74), получим*

$$ d_2 d_1 x = d_2 x \circ (x)^{-1} \circ d_1 x \,. $$

Вблизи единицы алгебры, то есть при ${}^+x = ({}^+x)^{-1} = \mathfrak{E}^0$, это уравнение принимает вид

$$ d_2 d_1{}^+x = d_2{}^+x \circ d_1{}^+x \,. \tag{75}$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры пространства-времени ${}^+\mathbb{X}$ в векторной форме.

Подставляя в (75) выражения дифференциалов через дифференциалы координат и пользуясь законом умножения базисных векторов (40), получим уравнения структуры в координатной форме

$$ d_2 d_1 x_L = d_1 x_I \cdot d_2 x_K \cdot C^{IK}{}_L \,. \tag{76}$$

Здесь уравнения структуры (75) и (76) также относятся к безразмерным координатам. Если ввести координаты, имеющие размерность длины (см. Лекцию 8), то уравнение (73) нужно записать так

$$ {}^+x = \frac{1}{R_0}\, {}^+x^2 \circ {}^+x^1 \,, $$

где R_0 есть постоянная, имеющая размерность длины. Тогда уравнения (75) и (76) примут вид соответственно

$$ d_2 d_1{}^+x = \frac{1}{R_0}\, d_2{}^+x \circ d_1{}^+x \,. \tag{77}$$

и

$$ d_2 d_1 x_L = \frac{1}{R_0}\, d_1 x_I \cdot d_2 x_K \cdot C^{IK}{}_L \,. \tag{78}$$

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые постулаты, на которых должно строится квантование пространства-времени фундаментальных частиц. Им можно придать более привычную форму записи. Для этого введем переобозначения

$$ d_1{}^+x = {}^+\chi \,, \quad d_2 = d \,. $$

Тогда вместо (77) и (78) получим квантовые постулаты в векторном виде

$$ d^+\chi = \frac{1}{R_0}\, d^+x \circ {}^+\chi \,, $$

и в координатном виде

$$ d\chi_L = \frac{1}{R_0}\, \chi_I \cdot dx_K \cdot C^{IK}{}_L \,. $$

Здесь ${}^+\chi$ есть волновая функция пространства-времени фундаментальной античастицы, представляющая собой частный дифференциал вектора пространства-времени.

8. Подалгебры фундаментальных античастиц

Далее рассмотрим подалгебры ковариантной универсальной алгебры ${}^+\mathbb{S}$, которые поставим в соответствие различным типам фундаментальных античастиц – антилептонам, антикваркам и суперсимметричным им гипотетическим антикваркино и антилептино. Мы переходим к алгебрам разных фундаментальных античастиц, выбирая то или иное условие соседней транспозиции.

---

*Здесь учтено, что для (67)

$$ {}^+x^{-1} = ({}^+x^1)^{-1} \circ ({}^+x^2)^{-1} \,. $$

1. Алгебра антилептонов

Алгебра антилептонов есть частный случай универсальной ковариантной алгебры ${}^{+}\mathbb{S}$, когда условие соседней транспозиции геометрических базисных векторов имеет вид

$$\mathfrak{e}^1\circ\mathfrak{e}^2=-\mathfrak{e}^2\circ\mathfrak{e}^1\,,\quad \mathfrak{e}^1\circ\mathfrak{e}^3=-\mathfrak{e}^3\circ\mathfrak{e}^1\,,\quad \mathfrak{e}^3\circ\mathfrak{e}^2=-\mathfrak{e}^2\circ\mathfrak{e}^3\,.$$

Или иначе

$$\mathrm{sign}(1,2)=\mathrm{sign}(1,3)=\mathrm{sign}(3,2)=-1\,.$$

Для того, чтобы выделить этот случай мы вводим другое обозначение для базисных векторов. Мы используем ε вместо $\mathfrak{e}$ и $\mathcal{E}$ вместо $\mathfrak{E}$. Кроме того, мы используем специальное обозначение для пространства действия и пространства-времени антилептона. Вместо ${}^{+}\mathbb{S}$ мы используем ${}^{+}\mathbb{C}_{right}$, а вместо ${}^{+}\mathbb{X}$ мы используем ${}^{+}\mathbb{C}_{left}$.

В результате пространственная часть волновой функции антилептонов имеет вид

$${}^{+}\psi=\psi_0\,\varepsilon^0+\psi_a\,\varepsilon^a+\psi_{[ba]}\,\varepsilon^{[ab]}+\psi_{[321]}\,\varepsilon^{[123]}\,.$$

Двум разновидностям условия соседней транспозиции с участием базисного вектора времени соответствуют две цветовые разновидности антилептонов: черные (антибелые) и белые (античерные) антилептоны.

Для черных антилептонов условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon^1\circ\varepsilon^2&=-\varepsilon^2\circ\varepsilon^1\,,&\quad \varepsilon^1\circ\varepsilon^4&=-\varepsilon^4\circ\varepsilon^1\,,\\ \varepsilon^1\circ\varepsilon^3&=-\varepsilon^3\circ\varepsilon^1\,,&\quad \varepsilon^2\circ\varepsilon^4&=-\varepsilon^4\circ\varepsilon^2\,,\\ \varepsilon^3\circ\varepsilon^2&=-\varepsilon^2\circ\varepsilon^3\,,&\quad \varepsilon^3\circ\varepsilon^4&=-\varepsilon^4\circ\varepsilon^3\,.\end{aligned}$$

Или иначе

$$\begin{aligned}&\mathrm{sign}(1,2)=\mathrm{sign}(1,3)=\mathrm{sign}(3,2)=\\ &\qquad\mathrm{sign}(1,4)=\mathrm{sign}(2,4)=\mathrm{sign}(3,4)=-1\,.\end{aligned}$$

Отсюда пространство действия черных антилептонов ${}^{+}\mathbb{C}_w$ есть множество векторов вида

$${}^{+}\psi=\varepsilon^0\,\psi_0+\varepsilon^i\,\psi_i+\varepsilon^{[ik]}\,\psi_{[ki]}+\varepsilon^{[ikl]}\,\psi_{[lki]}+\varepsilon^{[1324]}\,\psi_{[4231]}\,.$$

Если пространство с базисными векторами $\varepsilon^{i_p\dots i_1}$ обозначить $({}^{+}\mathbb{C}_b)^p$ то пространство алгебры черных антилептонов ${}^{+}\mathbb{C}_b$ представляет собой сумму пространств:

$${}^{+}\mathbb{C}_b={}^{+}\mathbb{C}^0+{}^{+}\mathbb{C}^1+({}^{+}\mathbb{C}_b)^2+({}^{+}\mathbb{C}_b)^3+({}^{+}\mathbb{C}_b)^4\,.$$

Алгебра черных антилептонов есть алгебра Клиффорда. Она была рассмотрена в Лекциях 5,6,7.

Для белых антилептонов условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon^1\circ\varepsilon^2&=-\varepsilon^2\circ\varepsilon^1\,,&\quad \varepsilon^1\circ\varepsilon^4&=\varepsilon^4\circ\varepsilon^1\,,\\ \varepsilon^1\circ\varepsilon^3&=-\varepsilon^3\circ\varepsilon^1\,,&\quad \varepsilon^2\circ\varepsilon^4&=-\varepsilon^4\circ\varepsilon^2\,,\\ \varepsilon^3\circ\varepsilon^2&=-\varepsilon^2\circ\varepsilon^3\,,&\quad \varepsilon^3\circ\varepsilon^4&=-\varepsilon^4\circ\varepsilon^3\,.\end{aligned}$$

Или иначе

$$\begin{gathered}\mathrm{sign}(1,2)=\mathrm{sign}(1,3)=\mathrm{sign}(3,2)=\\ \mathrm{sign}(2,4)=\mathrm{sign}(3,4)=-1\,,\\ \mathrm{sign}(1,4)=1\,.\end{gathered}$$

Отсюда пространство действия белых антилептонов ${}^{+}\mathbb{C}_w$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}{}^{+}\psi=\;&\psi_0\,\varepsilon^0+\psi_i\,\varepsilon^i+\psi_{[ba]}\,\varepsilon^{[ab]}\\ &+\psi_{\langle 41\rangle}\,\varepsilon^{\langle 14\rangle}+\psi_{[24]}\,\varepsilon^{[42]}+\psi_{[43]}\,\varepsilon^{[34]}\\ &+\psi_{[321]}\,\varepsilon^{[123]}+\psi_{(421)_2}\,\varepsilon^{(124)_2}+\psi_{(431)_2}\,\varepsilon^{(134)^2}\\ &+\psi_{[432]}\,\varepsilon^{[234]}+\psi_{(4231)_2}\,\varepsilon^{(1324)_2}\,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\varepsilon^{i_p\dots i_1}$ обозначить $({}^{+}\mathbb{C}_w)^p$ то пространство алгебры белых антилептонов ${}^{+}\mathbb{C}_w$ представляет собой сумму пространств:

$${}^{+}\mathbb{C}_w={}^{+}\mathbb{C}^0+{}^{+}\mathbb{C}^1+({}^{+}\mathbb{C}_w)^2+({}^{+}\mathbb{C}_w)^3+({}^{+}\mathbb{C}_w)^4\,.$$

2. Алгебра антикварков

Алгебра антикварков есть частный случай ковариантной универсальной алгебры ${}^{+}\mathbb{S}$, когда условие соседней транспозиции геометрических базисных векторов имеет вид

$$\mathfrak{e}^1\circ\mathfrak{e}^2=-\mathfrak{e}^2\circ\mathfrak{e}^1\,,\quad \mathfrak{e}^1\circ\mathfrak{e}^3=\mathfrak{e}^3\circ\mathfrak{e}^1\,,\quad \mathfrak{e}^3\circ\mathfrak{e}^2=-\mathfrak{e}^2\circ\mathfrak{e}^3\,.$$

Или иначе

$$\mathrm{sign}(1,2)=\mathrm{sign}(3,2)=-1\,,\quad \mathrm{sign}(1,3)=1\,.$$

Для того, чтобы выделить этот случай мы вводим другое обозначение для базисных векторов. Мы используем λ вместо $\mathfrak{e}$ и L вместо $\mathfrak{E}$. Кроме того, мы используем специальное обозначение для пространства действия и пространства-времени антикварка. Вместо ${}^{+}\mathbb{S}$ мы используем ${}^{+}\mathbb{Q}_{right}$, а вместо ${}^{+}\mathbb{X}$ мы используем ${}^{+}\mathbb{Q}_{left}$.

В результате пространственная часть волновой функции антикварков имеет вид

$$\begin{aligned}{}^{+}\psi=\psi_0\,\lambda^0+\psi_a\,\lambda^a+\psi_{[12]}\,\lambda^{[21]}+\psi_{\langle 31\rangle}\,\lambda^{\langle 13\rangle}+\psi_{[23]}\,\lambda^{[32]}&\\ +\psi_{(321)_2}\,\lambda^{(123)_2}&\,.\end{aligned}$$

Трем разновидностям условия соседней транспозиции с участием базисного вектора времени соответствуют три цветовые разновидности антикварков: зеленые (антикрасные), фиолетовые (антижелтые) и оранжевые (антисиние) антикварки.

Для зеленых антикварков условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{aligned}\lambda^1\circ\lambda^2&=-\lambda^2\circ\lambda^1\,,&\quad \lambda^1\circ\lambda^4&=-\lambda^4\circ\lambda^1\,,\\ \lambda^1\circ\lambda^3&=\lambda^3\circ\lambda^1\,,&\quad \lambda^2\circ\lambda^4&=-\lambda^4\circ\lambda^2\,,\\ \lambda^3\circ\lambda^2&=-\lambda^2\circ\lambda^3\,,&\quad \lambda^3\circ\lambda^4&=-\lambda^4\circ\lambda^3\,.\end{aligned}$$

Или иначе

$$\begin{aligned}&\mathrm{sign}(1,2)=\mathrm{sign}(3,2)=\mathrm{sign}(1,4)=\\&\qquad\mathrm{sign}(2,4)=\mathrm{sign}(3,4)=-1\,,\\&\mathrm{sign}(1,3)=1\,.\end{aligned}$$

Отсюда пространство действия зеленых антикварков ${}^{+}\mathbb{Q}_r$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}{}^{+}\psi=\psi_0\,\lambda^0+\psi_i\,\lambda^i+\psi_{[12]}\,\lambda^{[21]}+\psi_{\langle 31\rangle}\,\lambda^{\langle 13\rangle}+\psi_{[23]}\,\lambda^{[32]}\\+\psi_{[41]}\,\lambda^{[14]}+\psi_{[24]}\,\lambda^{[42]}+\psi_{[43]}\,\lambda^{[34]}+\psi_{(321)_2}\,\lambda^{(123)_2}\\+\psi_{[421]}\,\lambda^{[124]}+\psi_{(431)_2}\,\lambda^{(134)_2}+\psi_{[432]}\,\lambda^{[234]}\\+\psi_{(4231)_3}\,\lambda^{(1324)_3}\,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\lambda^{i_p\dots i_1}$ обозначить $({}^{+}\mathbb{Q}_r)^p$ то пространство алгебры зеленых антикварков ${}^{+}\mathbb{Q}_r$ представляет собой сумму пространств:

$${}^{+}\mathbb{Q}_r={}^{+}\mathbb{Q}^0+{}^{+}\mathbb{Q}^1+({}^{+}\mathbb{Q}_r)^2+({}^{+}\mathbb{Q}_r)^3+({}^{+}\mathbb{Q}_r)^4\,.$$

Для фиолетовых антикварков условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{aligned}\lambda^1\circ\lambda^2=-\lambda^2\circ\lambda^1\,,\quad \lambda^1\circ\lambda^4=\lambda^4\circ\lambda^1\,,\\ \lambda^1\circ\lambda^3=\lambda^3\circ\lambda^1\,,\quad \lambda^2\circ\lambda^4=-\lambda^4\circ\lambda^2\,,\\ \lambda^3\circ\lambda^2=-\lambda^2\circ\lambda^3\,,\quad \lambda^3\circ\lambda^4=-\lambda^4\circ\lambda^3\,.\end{aligned}$$

Или иначе

$$\begin{aligned}&\mathrm{sign}(1,2)=\mathrm{sign}(3,2)=\mathrm{sign}(2,4)=\\&\qquad\mathrm{sign}(3,4)=-1\,,\\&\mathrm{sign}(1,3)=\mathrm{sign}(1,4)=1\,.\end{aligned}$$

Отсюда пространство действия фиолетовых антикварков ${}^{+}\mathbb{Q}_y$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}{}^{+}\psi=\psi_0\,\lambda^0+\psi_i\,\lambda^i+\psi_{[12]}\,\lambda^{[21]}+\psi_{\langle 31\rangle}\,\lambda^{\langle 13\rangle}+\psi_{[23]}\,\lambda^{[32]}\\+\psi_{\langle 41\rangle}\,\lambda^{\langle 14\rangle}+\psi_{[24]}\,\lambda^{[42]}+\psi_{[43]}\,\lambda^{[34]}+\psi_{(321)_2}\,\lambda^{(123)_2}\\+\psi_{(421)_2}\,\lambda^{(124)_2}+\psi_{(431)_2}\,\lambda^{(134)_2}+\psi_{[432]}\,\lambda^{[234]}\\+\psi_{(4231)_4}\,\lambda^{(1324)_4}\,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\lambda^{i_p\dots i_1}$ обозначить ${}^{+}\mathbb{Q}^p$ то пространство алгебры фиолетовых антикварков ${}^{+}\mathbb{Q}$ представляет собой сумму пространств:

$${}^{+}\mathbb{Q}_y={}^{+}\mathbb{Q}^0+{}^{+}\mathbb{Q}^1+({}^{+}\mathbb{Q}_y)^2+({}^{+}\mathbb{Q}_y)^3+({}^{+}\mathbb{Q}_y)^4\,.$$

Для оранжевых антикварков условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{aligned}\lambda^1\circ\lambda^2=-\lambda^2\circ\lambda^1\,,\quad \lambda^1\circ\lambda^4=\lambda^4\circ\lambda^1\,,\\ \lambda^1\circ\lambda^3=\lambda^3\circ\lambda^1\,,\quad \lambda^2\circ\lambda^4=-\lambda^4\circ\lambda^2\,,\\ \lambda^3\circ\lambda^2=-\lambda^2\circ\lambda^3\,,\quad \lambda^3\circ\lambda^4=\lambda^4\circ\lambda^3\,.\end{aligned}$$

Или иначе

$$\begin{aligned}&\mathrm{sign}(1,2)=\mathrm{sign}(3,2)=\mathrm{sign}(2,4)=-1\,,\\&\mathrm{sign}(1,3)=\mathrm{sign}(1,4)=\mathrm{sign}(3,4)=1\,.\end{aligned}$$

Отсюда пространство действия оранжевых антикварков ${}^{+}\mathbb{Q}_b$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}{}^{+}\psi=\psi_0\,\lambda^0+\psi_i\,\lambda^i+\psi_{[12]}\,\lambda^{[21]}+\psi_{\langle 31\rangle}\,\lambda^{\langle 13\rangle}+\psi_{[23]}\,\lambda^{[32]}\\+\psi_{\langle 41\rangle}\,\lambda^{\langle 14\rangle}+\psi_{[24]}\,\lambda^{[42]}+\psi_{\langle 43\rangle}\,\lambda^{\langle 34\rangle}+\psi_{(321)_2}\,\lambda^{(123)_2}\\+\psi_{(421)_2}\,\lambda^{(124)_2}+\psi_{\langle 431\rangle}\,\lambda^{\langle 134\rangle}+\psi_{(432)_2}\,\lambda^{(234)_2}\\+\psi_{(4231)_5}\,\lambda^{(1324)_5}\,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\lambda^{i_p\dots i_1}$ обозначить $({}^{+}\mathbb{Q}_b)^p$ то пространство алгебры оранжевых антикварков ${}^{+}\mathbb{Q}_b$ представляет собой сумму пространств:

$${}^{+}\mathbb{Q}_b={}^{+}\mathbb{Q}^0+{}^{+}\mathbb{Q}^1+({}^{+}\mathbb{Q}_b)^2+({}^{+}\mathbb{Q}_b)^3+({}^{+}\mathbb{Q}_b)^4\,.$$

3. Алгебра антикваркино

Алгебра антикваркино есть частный случай ковариантной универсальной алгебры ${}^{+}\mathbb{S}$, когда условие соседней транспозиции геометрических базисных векторов имеет вид

$$\mathfrak{e}^1\circ\mathfrak{e}^2=\mathfrak{e}^2\circ\mathfrak{e}^1\,,\quad \mathfrak{e}^1\circ\mathfrak{e}^3=-\mathfrak{e}^3\circ\mathfrak{e}^1\,,\quad \mathfrak{e}^3\circ\mathfrak{e}^2=\mathfrak{e}^2\circ\mathfrak{e}^3\,.$$

Или иначе

$$\mathrm{sign}(1,2)=\mathrm{sign}(3,2)=1\,,\quad \mathrm{sign}(1,3)=-1\,.$$

Для того, чтобы выделить этот случай мы вводим другое обозначение для базисных векторов. Мы используем ρ вместо $\mathfrak{e}$ и R вместо $\mathfrak{E}$. Кроме того, мы используем специальное обозначение для пространства действия и пространства-времени антикваркино. Вместо ${}^{+}\mathbb{S}$ мы используем ${}^{+}\mathbb{Q}^{*}_{right}$, а вместо ${}^{+}\mathbb{X}$ мы используем ${}^{+}\mathbb{Q}^{*}_{left}$.

В результате пространственная часть волновой функции антикваркино имеет вид

$$\begin{aligned}{}^{+}\psi=\rho^0\,\psi_0+\rho^a\,\psi_a+\rho^{\langle 21\rangle}\,\psi_{\langle 12\rangle}+\rho^{[13]}\,\psi_{[31]}+\rho^{\langle 32\rangle}\,\psi_{\langle 23\rangle}\\+\rho^{(123)_3}\,\psi_{(321)_3}\,.\end{aligned}$$

Трем разновидностям условия соседней транспозиции с участием базисного вектора времени соответствуют три цветовые разновидности антикваркино: оранжевые (антисиние), фиолетовые (антижелтые) и зеленые (антикрасные) антикваркино.

Для оранжевых антикваркино условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{aligned}\rho^1\circ\rho^2=\rho^2\circ\rho^1\,,\quad \rho^1\circ\rho^4=-\rho^4\circ\rho^1\,,\\ \rho^1\circ\rho^3=-\rho^3\circ\rho^1\,,\quad \rho^2\circ\rho^4=\rho^4\circ\rho^2\,,\\ \rho^3\circ\rho^2=\rho^2\circ\rho^3\,,\quad \rho^3\circ\rho^4=-\rho^4\circ\rho^3\,.\end{aligned}$$

Или иначе

$$\begin{aligned}&\mathrm{sign}(1,3)=\mathrm{sign}(1,4)=\mathrm{sign}(3,4)=-1\,,\\&\mathrm{sign}(1,2)=\mathrm{sign}(3,2)=\mathrm{sign}(2,4)=1\,.\end{aligned}$$

Отсюда пространство действия оранжевых антикваркино ${}^+\mathbb{Q}^*_b$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}{}^+\psi &= \psi_0\,\rho^0 + \psi_i\,\rho^i + \psi_{\langle 12\rangle}\,\rho^{\langle 21\rangle} + \psi_{[31]}\,\rho^{[13]} + \psi_{\langle 23\rangle}\,\rho^{\langle 32\rangle} \\ &+ \psi_{[41]}\,\rho^{[14]} + \psi_{\langle 24\rangle}\,\rho^{\langle 42\rangle} + \psi_{[43]}\,\rho^{[34]} + \psi_{(321)_3}\,\rho^{(123)_3} \\ &+ \psi_{(421)_3}\,\rho^{(124)_3} + \psi_{[431]}\,\rho^{[134]} + \psi_{(432)_3}\,\rho^{(234)_3 s} \\ &+ \psi_{(4231)_6}\,\rho^{(1324)_6}\,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\rho^{i_p\cdots i_1}$ обозначить $({}^+\mathbb{Q}^*_b)^p$ то пространство алгебры оранжевых антикваркино ${}^+\mathbb{Q}^*_b$ представляет собой сумму пространств:

$${}^+\mathbb{Q}^*_b = {}^+\mathbb{Q}^0 + {}^+\mathbb{Q}^1 + ({}^+\mathbb{Q}^*_b)^2 + ({}^+\mathbb{Q}^*_b)^3 + ({}^+\mathbb{Q}^*_b)^4\,.$$

Для фиолетовых антикваркино условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{gathered}\rho^1\circ\rho^2 = \rho^2\circ\rho^1\,, \quad \rho^1\circ\rho^4 = -\rho^4\circ\rho^1\,, \\ \rho^1\circ\rho^3 = -\rho^3\circ\rho^1\,, \quad \rho^2\circ\rho^4 = \rho^4\circ\rho^2\,, \\ \rho^3\circ\rho^2 = \rho^2\circ\rho^3\,, \quad \rho^3\circ\rho^4 = \rho^4\circ\rho^3\,.\end{gathered}$$

Или иначе

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign}(1,3) = \operatorname{sign}(1,4) = -1\,, \\ &\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(3,2) = \operatorname{sign}(2,4) = \operatorname{sign}(3,4) = 1\,.\end{aligned}$$

Отсюда пространство действия фиолетовых антикваркино ${}^+\mathbb{Q}^*_y$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}{}^+\psi &= \psi_0\,\rho^0 + \psi_i\,\rho^i + \psi_{\langle 12\rangle}\,\rho^{\langle 21\rangle} + \psi_{[31]}\,\rho^{[13]} + \psi_{\langle 23\rangle}\,\rho^{\langle 32\rangle} \\ &+ \psi_{[41]}\,\rho^{[14]} + \psi_{\langle 24\rangle}\,\rho^{\langle 42\rangle} + \psi_{\langle 43\rangle}\,\rho^{\langle 34\rangle} + \psi_{(321)_3}\,\rho^{(123)_3} \\ &+ \psi_{(421)_3}\,\rho^{(124)_3} + \psi_{(431)_2}\,\rho^{(134)_2} + \psi_{(432)_3}\,\rho^{(234)_3 s} \\ &+ \psi_{(4231)_7}\,\rho^{(1324)_7}\,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\rho^{i_p\cdots i_1}$ обозначить $({}^+\mathbb{Q}^*_y)^p$ то пространство алгебры фиолетовых антикваркино ${}^+\mathbb{Q}^*_y$ представляет собой сумму пространств:

$${}^+\mathbb{Q}^*_y = {}^+\mathbb{Q}^0 + {}^+\mathbb{Q}^1 + ({}^+\mathbb{Q}^*_y)^2 + ({}^+\mathbb{Q}^*_y)^3 + {}^+\mathbb{Q}^4\,.$$

Для зеленых антикваркино условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{gathered}\rho^1\circ\rho^2 = \rho^2\circ\rho^1\,, \quad \rho^1\circ\rho^4 = \rho^4\circ\rho^1\,, \\ \rho^1\circ\rho^3 = -\rho^3\circ\rho^1\,, \quad \rho^2\circ\rho^4 = \rho^4\circ\rho^2\,, \\ \rho^3\circ\rho^2 = \rho^2\circ\rho^3\,, \quad \rho^3\circ\rho^4 = \rho^4\circ\rho^3\,.\end{gathered}$$

Или иначе

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign}(1,3) = -1\,, \\ &\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(3,2) = \operatorname{sign}(1,4) = \\ &\qquad \operatorname{sign}(2,4) = \operatorname{sign}(3,4) = 1\,.\end{aligned}$$

Отсюда пространство действия зеленых антикваркино ${}^+\mathbb{Q}^*_r$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}{}^+\psi &= \psi_0\,\rho^0 + \psi_i\,\rho^i + \psi_{\langle 12\rangle}\,\rho^{\langle 21\rangle} + \psi_{[31]}\,\rho^{[13]} + \psi_{\langle 23\rangle}\,\rho^{\langle 32\rangle} \\ &+ \psi_{\langle 41\rangle}\,\rho^{\langle 14\rangle} + \psi_{\langle 24\rangle}\,\rho^{\langle 42\rangle} + \psi_{\langle 43\rangle}\,\rho^{\langle 34\rangle} + \psi_{(321)_3}\,\rho^{(123)_3} \\ &+ \psi_{\langle 421\rangle}\,\rho^{\langle 124\rangle} + \psi_{(431)_3}\,\rho^{(134)_3} + \psi_{\langle 432\rangle}\,\rho^{\langle 234\rangle} \\ &+ \psi_{(4231)_8}\,\rho^{(1324)_8}\,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\rho^{i_p\cdots i_1}$ обозначить $({}^+\mathbb{Q}^*_r)^p$ то пространство алгебры зеленых антикваркино ${}^+\mathbb{Q}^*_r$ представляет собой сумму пространств:

$${}^+\mathbb{Q}^*_r = {}^+\mathbb{Q}^{*0} + {}^+\mathbb{Q}^{*1} + ({}^+\mathbb{Q}^*_r)^2 + ({}^+\mathbb{Q}^*_r)^3 + ({}^+\mathbb{Q}^*_r)^4\,.$$

4. Алгебра антилептино

Алгебра антилептино есть частный случай ковариантной универсальной алгебры ${}^+\mathbb{S}$, когда условие соседней транспозиции геометрических базисных векторов имеет вид

$$\mathfrak{e}^1\circ\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{e}^2\circ\mathfrak{e}^1\,, \quad \mathfrak{e}^1\circ\mathfrak{e}^3 = \mathfrak{e}^3\circ\mathfrak{e}^1\,, \quad \mathfrak{e}^3\circ\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{e}^2\circ\mathfrak{e}^3\,.$$

Или иначе

$$\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(3,2) = \operatorname{sign}(1,3) = 1\,.$$

Для того, чтобы выделить этот случай мы вводим другое обозначение для базисных векторов. Мы используем κ вместо $\mathfrak{e}$ и K вместо $\mathfrak{E}$. Кроме того, мы используем специальное обозначение для пространства действия и пространства-времени антилептино. Вместо ${}^+\mathbb{S}$ мы используем ${}^+\mathbb{C}^*_{right}$, а вместо ${}^+\mathbb{X}$ мы используем ${}^+\mathbb{C}^*_{left}$.

В результате пространственная часть волновой функции антилептино имеет вид

$${}^+\psi = \psi_0\,\kappa^0 + \psi_a\,\kappa^a + \psi_{\langle ba\rangle}\,\kappa^{\langle ab\rangle} + \psi_{\langle 321\rangle}\,\kappa^{\langle 123\rangle}\,.$$

Двум разновидностям условия соседней транспозиции с участием базисного вектора времени соответствуют две цветовые разновидности антилептино: белые (античерные) и черные (антибелые) антилептино.

Для белых антилептино условие соседней транспозиции имеет вид

$$\begin{gathered}\kappa^1\circ\kappa^2 = \kappa^2\circ\kappa^1\,, \quad \kappa^1\circ\kappa^4 = -\kappa^4\circ\kappa^1\,, \\ \kappa^1\circ\kappa^3 = \kappa^3\circ\kappa^1\,, \quad \kappa^2\circ\kappa^4 = \kappa^4\circ\kappa^2\,, \\ \kappa^3\circ\kappa^2 = \kappa^2\circ\kappa^3\,, \quad \kappa^3\circ\kappa^4 = \kappa^4\circ\kappa^3\,.\end{gathered}$$

Или иначе

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign}(1,4) = -1\,, \\ &\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(1,3) = \operatorname{sign}(3,2) = \\ &\qquad \operatorname{sign}(2,4) = \operatorname{sign}(3,4) = 1\,.\end{aligned}$$

Отсюда пространство действия белых антилептино ${}^+\mathbb{C}^*_b$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}{}^+\psi &= \psi_0\,\kappa^0 + \psi_i\,\kappa^i + \psi_{\langle ba\rangle}\,\kappa^{\langle ab\rangle} \\ &+ \psi_{[41]}\,\kappa^{[14]} + \psi_{\langle 24\rangle}\,\kappa^{\langle 42\rangle} + \psi_{\langle 43\rangle}\,\kappa^{\langle 34\rangle} + \psi_{\langle 321\rangle}\,\kappa^{\langle 123\rangle} \\ &+ \psi_{(421)_3}\,\kappa^{(124)_3} + \psi_{(431)_3}\,\kappa^{(134)_3} + \psi_{\langle 432\rangle}\,\kappa^{\langle 234\rangle} \\ &+ \psi_{1234}\,\kappa^{4321}\,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\kappa^{i_p\cdots i_1}$ обозначить $({}^+\mathbb{C}_b^*)^p$ то пространство алгебры белых антилептино ${}^+\mathbb{C}_b^*$ представляет собой сумму пространств:

$$ {}^+\mathbb{C}_b^* = ({}^+\mathbb{C}^*)^0 + ({}^+\mathbb{C}^*)^1 + ({}^+\mathbb{C}_b^*)^2 + ({}^+\mathbb{C}_b^*)^3 + ({}^+\mathbb{C}_b^*)^4 \,. $$

Для черных антилептино условие соседней транспозиции имеет вид

$$ \begin{array}{ll} \kappa^1 \circ \kappa^2 = \kappa^2 \circ \kappa^1 \,, & \kappa^1 \circ \kappa^4 = \kappa^4 \circ \kappa^1 \,, \\ \kappa^1 \circ \kappa^3 = \kappa^3 \circ \kappa^1 \,, & \kappa^2 \circ \kappa^4 = \kappa^4 \circ \kappa^2 \,, \\ \kappa^3 \circ \kappa^2 = \kappa^2 \circ \kappa^3 \,, & \kappa^3 \circ \kappa^4 = \kappa^4 \circ \kappa^3 \,. \end{array} $$

Или иначе

$$ \begin{aligned} &\operatorname{sign}(1,2) = \operatorname{sign}(1,3) = \operatorname{sign}(3,2) = \\ &\quad \operatorname{sign}(1,4) = \operatorname{sign}(2,4) = \operatorname{sign}(3,4) = 1 \,. \end{aligned} $$

Отсюда пространство действия черных антилептино ${}^+\mathbb{C}_w^*$ есть множество векторов вида

$$ \begin{aligned} {}^+\psi = \psi_0\, \kappa^0 + \psi_i\, \kappa^i + \psi_{\langle ki \rangle}\, \kappa^{\langle ik \rangle} + \psi_{\langle lki \rangle}\, \kappa^{\langle ikl \rangle} \\ + \psi_{\langle 4231 \rangle}\, \kappa^{\langle 1324 \rangle} \,. \end{aligned} $$

Если пространство с базисными векторами $\kappa^{i_p\cdots i_1}$ обозначить $({}^+\mathbb{C}_w^*)^p$ то пространство алгебры черных антилептино ${}^+\mathbb{C}_w^*$ представляет собой сумму пространств:

$$ {}^+\mathbb{C}_w^* = (\mathbb{C}^*)^0 + ({}^+\mathbb{C}^*)^1 + ({}^+\mathbb{C}_w^*)^2 + ({}^+\mathbb{C}_w^*)^3 + ({}^+\mathbb{C}_w^*)^4 \,. $$

VII. АЛГЕБРА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ И АНТИЧАСТИЦ

Связь между структурными постоянными алгебры ${}^+\mathbb{S}$ и алгебры $\mathbb{S}$ определяется следующим образом:

$$ {}^+C^{RQ}{}_P = \delta^{RI} \cdot \delta^{QK} \cdot C^L{}_{KI} \cdot \delta_{LP} \,. \qquad (79) $$

Обратный метрический тензор g^{IK} определяется условием:

$$ {}^+g^{IK}\, g_{KL} = \delta^I{}_L \,. $$

Измерение вектора S базисными векторами $\mathfrak{e}^I$ дает в результате координаты вектора S^I:

$$ \langle \mathfrak{e}^I, x \rangle = S^I \,. $$

Сопряженные базисные векторы $\mathfrak{e}^I$ связаны с базисными векторами $\mathfrak{e}_K$ соотношением:

$$ \mathfrak{e}^I = \mathfrak{e}_K\, {}^+g^{IK} \,. $$

Вектору $S = \mathfrak{e}_I\, S^I$ соответствует сопряженный вектор

$$ {}^+S = S_I\, \mathfrak{e}^I \,, $$

где $S_I = \delta_{IK}\, S^K$ есть координаты сопряженного вектора. Скалярное произведение вектора S на сопряженный ему вектор ${}^+S$ равно

$$ \langle S, {}^+S \rangle = \delta_{KI}\, S^I\, S^K \,. $$

Эта квадратичная форма является положительно определенной.

Введем скалярное произведение векторов пространств $\mathbb{S}$ и ${}^+\mathbb{S}$. В частности, базисные векторы $\mathfrak{e}_{k_n \ldots k_2 k_1}$ и $\mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ могут быть выбраны так, что

$$ \langle \mathfrak{e}^{i_1 i_2 \ldots i_n}, \mathfrak{e}_{k_n \ldots k_2 k_1} \rangle = \delta^{i_n}_{k_n} \, \ldots \, \delta^{i_2}_{k_2}\, \delta^{i_1}_{k_1} \,. $$

И в общем случае

$$ \langle \mathfrak{e}^I, \mathfrak{e}_K \rangle = \delta^I{}_K \,. $$

Формально это произведение можно рассматривать как $\circ$-умножение векторов $\mathfrak{e}^I$ и $\mathfrak{e}_K$

$$ \mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}_K \equiv \langle \mathfrak{e}^I, \mathfrak{e}_K \rangle = \delta^I{}_K \,. \qquad (80) $$

Связь между структурными постоянными алгебры ${}^+\mathbb{X}$ и алгебры $\mathbb{X}$ определяется следующим образом:

$$ C^{RQ}{}_P = \delta^{RI} \cdot \delta^{QK} \cdot {}^+C^L{}_{KI} \cdot \delta_{LP} \,. \qquad (81) $$

Обратный метрический тензор g^{IK} определяется условием:

$$ g^{IK}\, g_{KL} = \delta^I{}_L \,. $$

Измерение вектора x базисными векторами $\mathfrak{E}^I$ дает в результате координаты вектора x^I:

$$ \langle \mathfrak{E}^I, x \rangle = x^I \,. $$

Сопряженные базисные векторы $\mathfrak{E}^I$ связаны с базисными векторами $\mathfrak{E}_K$ соотношением:

$$ \mathfrak{E}^I = \mathfrak{E}_K\, g^{IK} \,. $$

Вектору $x = \mathfrak{E}_I\, x^I$ соответствует сопряженный вектор

$$ {}^+x = x_I\, \mathfrak{E}^I \,, $$

где $x_I = \delta_{IK}\, x^K$ есть координаты сопряженного вектора. Скалярное произведение вектора x на сопряженный ему вектор ${}^+x$ равно

$$ \langle x, {}^+x \rangle = \delta_{KI}\, x^I\, x^K \,. $$

Эта квадратичная форма является положительно определенной.

Таким образом, свойства пространства -времени СТО и сопряженного пространства -времени СТО обобщаются в алгебрах $\mathbb{X}$ и ${}^+\mathbb{X}$.

Скалярное произведение векторов пространств X и ${}^+X$ обобщается на скалярное произведение векторов пространств $\mathbb{X}$ и ${}^+\mathbb{X}$. В частности, базисные векторы $\mathfrak{E}_{k_n \ldots k_2 k_1}$ и $\mathfrak{E}^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ могут быть выбраны так, что

$$\langle \mathfrak{E}^{i_1 i_2 \ldots i_n}, \mathfrak{E}_{k_n \ldots k_2 k_1} \rangle = \delta^{i_n}_{k_n} \, \ldots \, \delta^{i_2}_{k_2} \, \delta^{i_1}_{k_1} \,.$$

И в общем случае

$$\langle \mathfrak{E}^I, \mathfrak{E}_K \rangle = \delta^I{}_K \,.$$

Формально это произведение можно рассматривать как $\circ$-умножение векторов $\mathfrak{E}^I$ и $\mathfrak{E}_K$

$$\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}_K \equiv \langle \mathfrak{E}^I, \mathfrak{E}_K \rangle = \delta^I{}_K \,. \tag{82}$$

1. Уравнения структуры алгебр $\mathbb{S} + {}^+\mathbb{S}$ и $\mathbb{X} + {}^+\mathbb{X}$ и квантовые постулаты механики фундаментальных частиц и античастиц

1. Уравнения структуры алгебры действия

Особенность дифференцирования векторов алгебр связана с дифференцированием закона умножения векторов. Она проявляется в существовании для алгебр *уравнений структуры.* Далее рассмотрим уравнения структуры для подалгебры действия частиц и античастиц $\mathbb{S} + {}^+\mathbb{S}$.

Закон умножения векторов в $\mathbb{S} + {}^+\mathbb{S}$ мы запишем так:

$$S + {}^+S = (S_1 + {}^+S^1) \circ (S_2 + {}^+S^2) \,. \tag{83}$$

Введем *дифференциал* d – оператор, действующий на функцию, стоящую справа. Рассмотрим дифференциал dS. Будем индексом различать дифференциалы d_1, $d_2, \ldots$ подобно тому как разные векторы различаются индексом $({}^+S^1, {}^+S^2, \ldots)$. Дифференциал вектора ${}^+S$ при изменении вектора S_p будем обозначать через $d_p S$. Из (83) следует

$$\begin{aligned} d_1(S + {}^+S) &= d(S_1 + {}^+S^1) \circ (S_2 + {}^+S^2) \,, \\ d_2(S + {}^+S) &= (S_1 + {}^+S^1) \circ d(S_2 + {}^+S^2) \,. \end{aligned}$$

Из этих выражений получаем

$$\begin{aligned} d(S_1 + {}^+S^1) &= d_1(S + {}^+S) \circ (S_2 + {}^+S_2)^{-1} \,, \\ d(S_2 + {}^+S^2) &= (S_1 + {}^+S^1)^{-1} \circ d_2(S + {}^+S) \,. \end{aligned} \tag{84}$$

Введем второй дифференциал $d_2 d_1 (S + {}^+S)$. Из (83) для него имеет место

$$d_2 d_1 (S + {}^+S) = d(S_1 + {}^+S^1) \circ d(S_2 + {}^+S^2) \,.$$

Используя (84), получим*

$$d_2 d_1 {}^+S = d_1 {}^+S \circ ({}^+S)^{-1} \circ d_2 {}^+S \,.$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при $S = S^{-1} = \mathfrak{e}_0$ и при ${}^+S = ({}^+S)^{-1} = \mathfrak{e}^0$, это уравнение принимает вид

$$d_2 d_1 (S + {}^+S) = d_1 (S + {}^+S) \circ d_2 (S + {}^+S) \,. \tag{85}$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры $\mathbb{S} + {}^+\mathbb{S}$ в векторной форме.

Подставим в (85) выражения дифференциалов через дифференциалы координат

$$\begin{aligned} & d_2 d_1 (\mathfrak{e}_L \, S^L + S_L \, \mathfrak{e}^L) = \\ & \qquad d_2 (\mathfrak{e}_I \, S^I + S_I \, \mathfrak{e}^I) \circ d_1 (\mathfrak{e}_K \, S^K + S_K \, \mathfrak{e}^K) \,. \end{aligned} \tag{86}$$

Или

$$\begin{aligned} & \mathfrak{e}_L \, d_2 d_1 S^L + d_2 d_1 S_L \, \mathfrak{e}^L = \\ & \qquad d_2 (\mathfrak{e}_I \, S^I + S_I \, \mathfrak{e}^I) \circ d_1 (\mathfrak{e}_K \, S^K + S_K \, \mathfrak{e}^K) \,. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \mathfrak{e}_L \, d_2 d_1 S^L + d_2 d_1 S_L \, \mathfrak{e}^L = \\ & \qquad (\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{e}_K) \, d_2 S^I \, d_1 S^K + (\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}_K \,) d_2 S_I \, d_1 S^K + \\ & \qquad (\mathfrak{e}_I \circ \mathfrak{e}^K) \, d_2 S^I \, d_1 S_K + d_2 S_I \, d_1 S_K \, (\mathfrak{e}^I \circ \mathfrak{e}^K) \,. \end{aligned}$$

Пользуясь законом умножения базисных векторов (21), (59), (80), получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} & \mathfrak{e}_L \, d_2 d_1 S^L + d_2 d_1 S_L \, \mathfrak{e}^L = \\ & \qquad \mathfrak{e}_L \, C^L{}_{KI} \, d_2 S^I \, d_1 S^K + d_2 S_I \, d_1 S^I \\ & \qquad + d_2 S^K \, d_1 S_K + d_2 S_I \, d_1 S_K \, {}^+C^{IK}{}_L \, \mathfrak{e}^L \,. \end{aligned}$$

После разделения уравнения по компонентам базисных векторов, получим уравнения структуры в координатной форме

$$\begin{aligned} & d_2 d_1 S^0 + d_2 d_1 S_0 = C^0{}_{KI} \, d_2 S^I \, d_1 S^K + d_2 S_I \, d_1 S^I \\ & \qquad + d_2 S^K \, d_1 S_K + d_2 S_I \, d_1 S_K \, {}^+C^{IK}{}_0 \,, \\ & d_2 d_1 S^L = C^L{}_{KI} \, d_2 S^I \, d_1 S^K \,, \quad \text{для } L \neq 0 \,. \\ & d_2 d_1 S_L = d_2 S_I \, d_1 S_K \, {}^+C^{IK}{}_L \,, \quad \text{для } L \neq 0 \,. \end{aligned} \tag{87}$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того, чтобы перейти к размерному действию необходимо уравнение (83) записать в виде

$$S + {}^+S = \frac{1}{S_0} \, (S_1 + {}^+S^1) \circ (S_2 + {}^+S^2) \,.$$

где S_0 есть постоянная, имеющая размерность действия. Тогда уравнения (85) и (87) примут вид соответственно

$$d_2 d_1 (S + {}^+S) = \frac{1}{S_0} \, d_1 (S + {}^+S) \circ d_2 (S + {}^+S) \,. \tag{88}$$

и

---

*Здесь учтено, что для (83)

$$(S + {}^+S)^{-1} = (S_2 + {}^+S_2)^{-1} \circ (S_1 + {}^+S_1)^{-1} \,.$$

$$
\begin{aligned}
&d_2d_1S^0 + d_2d_1S_0 = \\
&\qquad \tfrac{1}{S_0}\, C^0{}_{KI}\, d_2S^I\, d_1S^K + \tfrac{1}{S_0}\, d_2S_I\, d_1S^I \\
&\qquad + \tfrac{1}{S_0}\, d_2S^K\, d_1S_K + \tfrac{1}{S_0}\, d_2S_I\, d_1S_K\, {}^+C^{IK}{}_0\,, \\
&d_2d_1S^L = \tfrac{1}{S_0}\, C^L{}_{KI}\, d_2S^I\, d_1S^K\,, \quad \text{для } L \neq 0\,. \\
&d_2d_1S_L = \tfrac{1}{S_0}\, d_2S_I\, d_1S_K\, {}^+C^{IK}{}_L\,, \quad \text{для } L \neq 0\,.
\end{aligned}
\tag{89}
$$

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые постулаты, на которых строится квантовая механика фундаментальных частиц и античастиц. Мы перейдем к более привычной записи квантовых постулатов, если введем переобозначения

$$d_1S = \psi\,, \quad d_1{}^+S = {}^+\psi\,, \quad d_2 = d\,.$$

Тогда вместо (88) получим

$$d\psi + d^+\psi = \frac{1}{S_0}\,(\psi + {}^+\psi) \circ (dS + d^+S)\,.$$

а вместо (89) получим

$$
\begin{aligned}
&d\psi^0 + d\psi_0 = \tfrac{1}{S_0}\, C^0{}_{KI}\, dS^I\, \psi^K + \tfrac{1}{S_0}\, dS_I\, \psi^I \\
&\qquad + \tfrac{1}{S_0}\, dS^K\, \psi_K + \tfrac{1}{S_0}\, dS_I\, \psi_K\, {}^+C^{IK}{}_0\,, \\
&d\psi^L = \tfrac{1}{S_0}\, C^L{}_{KI}\, dS^I\, \psi^K\,, \quad \text{для } L \neq 0\,. \\
&d\psi_L = \tfrac{1}{S_0}\, dS_I\, \psi_K\, {}^+C^{IK}{}_L\,, \quad \text{для } L \neq 0\,.
\end{aligned}
\tag{90}
$$

Если ввести обобщенные импульсы в соответствии с соотношениями

$$dS = p_M\, dx^M\,, \qquad d^+S = dx_M\, {}^+p^M\,,$$

получим квантовые постулаты в векторном виде

$$d\psi + d^+\psi = \frac{1}{S_0}\,(\psi + {}^+\psi) \circ (p_M\, dx^M + dx_M\, {}^+p^M)$$

и в координатном виде

$$
\begin{aligned}
&d\psi^0 + d\psi_0 = \\
&\qquad \tfrac{1}{S_0}\, C^0{}_{KI}\, (p^I{}_M\, dx^M)\, \psi^K + \tfrac{1}{S_0}\, (dx_M\, {}^+p^M{}_I)\, \psi^I \\
&\qquad + \tfrac{1}{S_0}\, (p^K{}_M\, dx^M)\, \psi_K + \tfrac{1}{S_0}\, (dx_M\, {}^+p^M{}_I)\, \psi_K\, {}^+C^{IK}{}_0\,, \\
&d\psi^L = \tfrac{1}{S_0}\, C^L{}_{KI}\, (p^I{}_M\, dx^M)\, \psi^K\,, \quad \text{для } L \neq 0\,. \\
&d\psi_L = \tfrac{1}{S_0}\, (dx_M\, {}^+p^M{}_I)\, \psi_K\, {}^+C^{IK}{}_L\,, \quad \text{для } L \neq 0\,.
\end{aligned}
$$

Здесь ψ есть волновая функция фундаментальной частицы, которая приобретает новый физический смысл и представляет собой частный дифференциал вектора действия фундаментальной частицы. ${}^+\psi$ есть волновая функция фундаментальной античастицы, которая приобретает новый физический смысл и представляет собой частный дифференциал вектора действия фундаментальной античастицы.

2. Уравнения структуры алгебры пространства-времени частиц и античастиц

Предыдущие выкладки, выполненные для алгебры действия частиц и античастиц $\mathbb{S} + {}^+\mathbb{S}$ мы можем повторить и для алгебры пространства-времени частиц и античастиц $\mathbb{X} + {}^+\mathbb{X}$. Далее рассмотрим уравнения структуры для алгебры $\mathbb{X} + {}^+\mathbb{X}$.

Закон умножения векторов в $\mathbb{X} + {}^+\mathbb{X}$ запишем так:

$$x + {}^+x = (x_2 + {}^+x^2) \circ (x_1 + {}^+x^1)\,. \tag{91}$$

Как и прежде Введем *дифференциал* d – оператор, действующий на функцию, стоящую справа. Также будем индексом различать дифференциалы d_1, $d_2, \ldots$ подобно тому как разные векторы различаются индексом $(x_1, x_2, \ldots)$. Дифференциал вектора x при изменении вектора x_p будем обозначать через d_px. Из (91) следует

$$
\begin{aligned}
d_1(x + {}^+x) = (x_2 + {}^+x^2) \circ d(x_1 + {}^+x^1)\,, \\
d_1(x + {}^+x) = (x_2 + {}^+x^2) \circ d(x_1 + {}^+x^1)\,,
\end{aligned}
$$

Из этих выражений получаем

$$
\begin{aligned}
d(x_1 + {}^+x^1) = (x_2 + {}^+x^2)^{-1} \circ d_1(x + {}^+x)\,, \\
d(x_2 + {}^+x^2) = d_2(x + {}^+x) \circ (x_1 + {}^+x^1)^{-1}\,.
\end{aligned}
\tag{92}
$$

Введем второй дифференциал $d_2d_1(x + {}^+x)$. Из (91) для него имеет место

$$d_2d_1(x + {}^+x) = d(x_2 + {}^+x^2) \circ d(x_1 + {}^+x^1)\,.$$

Используя (92), получим*

$$d_2d_1(x + {}^+x) = d_2(x + {}^+x) \circ (x + {}^+x)^{-1} \circ d_1(x + {}^+x)\,.$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при $x = (x)^{-1} = \mathfrak{E}_0$, это уравнение принимает вид

$$d_2d_1(x + {}^+x) = d_2(x + {}^+x) \circ d_1(x + {}^+x)\,. \tag{93}$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры пространства-времени частиц и античастиц $\mathbb{X} + {}^+\mathbb{X}$ в векторной форме.

Подставим в (93) выражения дифференциалов через дифференциалы координат

$$
\begin{aligned}
&d_2d_1(\mathfrak{E}_L\, x^L + x_L\, \mathfrak{E}^L) = \\
&\qquad d_2(\mathfrak{E}_I\, x^I + x_I\, \mathfrak{E}^I) \circ d_1(\mathfrak{E}_K\, x^K + x_K\, \mathfrak{E}^K)\,.
\end{aligned}
$$

---

*Здесь учтено, что для (91)

$$(x + {}^+x)^{-1} = (x_1 + {}^+x^1)^{-1} \circ (x_2 + {}^+x^2)^{-1}\,.$$

Или

$$\mathfrak{E}_L\, d_2 d_1 x^L + d_2 d_1 x_L\, \mathfrak{E}^L = \\ d_2(\mathfrak{E}_I\, x^I + x_I\, \mathfrak{E}^I) \circ d_1(\mathfrak{E}_K\, x^K + x_K\, \mathfrak{E}^K)\,.$$

Отсюда

$$\mathfrak{E}_L\, d_2 d_1 x^L + d_2 d_1 x_L\, \mathfrak{E}^L = \\ (\mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_K)\, d_2 x^I\, d_1 x^K + (\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}_K\,) d_2 x_I\, d_1 x^K \\ + (\mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}^K)\, d_2 x^I\, d_1 x_K + d_2 x_I\, d_1 x_K\, (\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K)\,.$$

Пользуясь законом умножения базисных векторов (23), (61), (82), получим следующее уравнение

$$\mathfrak{E}_L\, d_2 d_1 x^L + d_2 d_1 x_L\, \mathfrak{E}^L = \\ \mathfrak{E}_L\, C^L{}_{KI}\, d_2 x^I\, d_1 x^K + d_2 x_I\, d_1 x^I \\ + d_2 x^K\, d_1 x_K + d_2 x_I\, d_1 x_K\, {}^{+}C^{IK}{}_L\, \mathfrak{E}^L\,.$$

После разделения уравнения по компонентам базисных векторов, получим уравнения структуры в координатной форме

$$d_2 d_1 x^0 + d_2 d_1 x_0 = \\ {}^{+}C^0{}_{KI}\, d_2 x^I\, d_1 x^K + d_2 x_I\, d_1 x^I \\ + d_2 x^K\, d_1 x_K + d_2 x_I\, d_1 x_K\, C^{IK}{}_0\,, \qquad (94)$$

$$d_2 d_1 x^L = {}^{+}C^L{}_{KI}\, d_2 x^I\, d_1 x^K\,, \quad \text{для } L \neq 0\,.$$

$$d_2 d_1{}^{+}x_L = d_2 x_I\, d_1 x_K\, C^{IK}{}_L\,, \quad \text{для } L \neq 0\,.$$

Уравнения структуры (93) и (94) также относятся к безразмерным координатам. Если ввести координаты, имеющие размерность длины (см. Лекцию 8), то уравнение (91) нужно записать так

$$x + {}^{+}x = \frac{1}{R_0}\,(x_2 + {}^{+}x^2) \circ (x_1 + {}^{+}x^1)\,,$$

где R_0 есть постоянная, имеющая размерность длины. Тогда уравнения (93) и (94) примут вид соответственно

$$d_2 d_1 (x + {}^{+}x) = \frac{1}{R_0}\, d_2(x + {}^{+}x) \circ d_1(x + {}^{+}x)\,. \qquad (95)$$

и

$$d_2 d_1 x^0 + d_2 d_1 x_0 = \\ \tfrac{1}{R_0}\, {}^{+}C^0{}_{KI}\, d_2 x^I\, d_1 x^K + \tfrac{1}{R_0}\, d_2 x_I\, d_1 x^I \\ + \tfrac{1}{R_0}\, d_2 x^K\, d_1 x_K + \tfrac{1}{R_0}\, d_2 x_I\, d_1 x_K\, C^{IK}{}_0\,, \qquad (96)$$

$$d_2 d_1 x^L = \tfrac{1}{R_0}\, {}^{+}C^L{}_{KI}\, d_2 x^I\, d_1 x^K\,, \quad \text{для } L \neq 0\,.$$

$$d_2 d_1{}^{+}x_L = \tfrac{1}{R_0}\, d_2 x_I\, d_1 x_K\, C^{IK}{}_L\,, \quad \text{для } L \neq 0\,.$$

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые постулаты, на которых должно строится квантование пространства-времени фундаментальных частиц и античастиц. Им можно придать более привычную форму записи. Для этого введем переобозначения

$$d_1 x = \chi\,, \quad d_1{}^{+}x = {}^{+}\chi\,, \quad d_2 = d\,.$$

Тогда вместо (95) и (96) получим квантовые постулаты в векторном виде

$$d\chi + d^{+}\chi = \frac{1}{R_0}\, d_2(x + {}^{+}x) \circ d_1(x + {}^{+}x)\,.$$

и в координатном виде

$$d\chi^0 + d\chi_0 = \tfrac{1}{R_0}\, {}^{+}C^0{}_{KI}\, dx^I\, \chi^K + \tfrac{1}{R_0}\, dx_I\, \chi^I \\ + \tfrac{1}{R_0}\, dx^K\, \chi_K + \tfrac{1}{R_0}\, dx_I\, \chi_K\, C^{IK}{}_0\,,$$

$$d\chi^L = \tfrac{1}{R_0}\, {}^{+}C^L{}_{KI}\, dx^I\, \chi^K\,, \quad \text{для } L \neq 0\,.$$

$$d^{+}\chi_L = \tfrac{1}{R_0}\, dx_I\, \chi_K\, C^{IK}{}_L\,, \quad \text{для } L \neq 0\,.$$

Здесь χ есть волновая функция пространства-времени фундаментальной частицы, представляющая собой частный дифференциал вектора пространства-времени. ${}^{+}\chi$ есть волновая функция пространства-времени фундаментальной античастицы, представляющая собой частный дифференциал вектора сопряженного пространства-времени.

VIII. ВЫВОДЫ

- Контравариантная универсальная алгебра с правым умножением является алгеброй действия фундаментальных частиц.
- Контравариантная универсальная алгебра с левым умножением является алгеброй пространства-времени фундаментальных частиц.
- Ковариантная универсальная алгебра с правым умножением является алгеброй действия фундаментальных античастиц.
- Ковариантная универсальная алгебра с левым умножением является алгеброй пространства-времени фундаментальных античастиц.
- Контравариантная и ковариантная универсальные алгебры благодаря операции свертки образуют общую алгебру фундаментальных частиц и античастиц.