Лекция 13. Алгебра релятивистских кварков

А. А. Кецарис
(25 апреля 2005 г.)

В этой Лекции мы продолжаем рассматривать алгебру кварков как обобщение алгебры Клиффорда. Цветовым разновидностям кварков мы ставим в соответствие разновидности перестановочных соотношений с участием базисного вектора времени. Уравнения квантовой механики для релятивистских кварков устанавливаются на основании того же алгоритма, из которого ранее было получено обобщение уравнения Дирака для лептонов. Эти уравнения относятся к кваркам одного поколения и в стандартном представлении разделяются на две независимые системы уравнений, одна из которых относится к верхнему кварку, а другая к нижнему.

I. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ КВАРКИ И ЦВЕТ

Прежде чем обратиться к алгебре релятивистских кварков $\mathbb{Q}_4$ напомним следующее. Установлено, что каждый из кварков u, d, c, s, t, b существует в трех разновидностях. Отличительное свойство этих разновидностей названо *цветом*, а кварки в указанных разновидностях обозначены как *красный*, *желтый* и *синий*. Было бы странно, если бы цветовая симметрия не имела под собой алгебраической основы. Скорее всего искомая алгебра релятивистских кварков $\mathbb{Q}_4$ будет представлена тремя вариантами, каждый из которых базируется на одной и той же алгебре $\mathbb{Q}_3$. Для того, чтобы получить релятивистскую алгебру $\mathbb{Q}_4$, нам предстоит расширить образующее пространство, заменив геометрическое пространство на пространство-время СТО. Иными словами, мы должны ввести координату времени, базисный вектор λ_4 и записать перестановочные соотношения этого базисного вектора с геометрическими базисными векторами λ_a. Именно с разновидностями указанных перестановочных соотношений мы в дальнейшем свяжем цветовые разновидности кварков.

Итак, возможны следующие четыре разновидности перестановочных соотношений с участием λ_4.

1. Все соотношения антикоммутативны

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1\,,\\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2\,,\\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3\,,\end{aligned} \tag{1}$$

2. Два соотношения антикоммутативны, одно соотношение коммутативно

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1\,,\\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2\,,\\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3\,,\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1\,,\\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2\,,\\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3\,,\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1\,,\\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2\,,\\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3\,,\end{aligned} \tag{4}$$

3. Одно соотношение антикоммутативно, два соотношения коммутативны

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1\,,\\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2\,,\\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3\,,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1\,,\\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2\,,\\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3\,,\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1\,,\\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2\,,\\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3\,,\end{aligned} \tag{7}$$

4. Все соотношения коммутативны

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1\,,\\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2\,,\\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3\,,\end{aligned} \tag{8}$$

Теперь нам необходимо выбрать перестановочные соотношения из перечисленных и определить алгебры цветных кварков. Забегая вперед, отметим, что такой выбор может быть сделан на основании определенного прочтения диаграмм Юнга, классифицирующих симметрии тензоров произвольного ранга. Этому вопросу будет посвящена следующая Лекция. А пока начнем с алгебры цветных кварков первого поколения $\mathbb{Q}(u,d)$ и примем без каких-либо пояснений следующее.

Алгебра красных u и d-кварков $\mathbb{Q}(u,d)_r$ использует перестановочные соотношения

$$\lambda_1 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_1 \,,$$
$$\lambda_2 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_2 \,,$$
$$\lambda_3 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_3 \,,$$

Алгебра желтых u и d-кварков $\mathbb{Q}(u,d)_y$ использует перестановочные соотношения

$$\lambda_1 \circ \lambda_4 = \lambda_4 \circ \lambda_1 \,,$$
$$\lambda_2 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_2 \,,$$
$$\lambda_3 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_3 \,,$$

Алгебра синих u и d-кварков $\mathbb{Q}(u,d)_b$ использует перестановочные соотношения

$$\lambda_1 \circ \lambda_4 = \lambda_4 \circ \lambda_1 \,,$$
$$\lambda_2 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_2 \,,$$
$$\lambda_3 \circ \lambda_4 = \lambda_4 \circ \lambda_3 \,,$$

Для того, чтобы перейти к алгебрам цветных кварков второго и третьего поколений, необходимо (в соответствии с нашим общим подходом) использовать перестановочные соотношения, отличающиеся от предыдущих циклической перестановкой геометрических базисных векторов. Тогда для алгебры $\mathbb{Q}(c,s)$ получим:

Алгебра красных c и s-кварков $\mathbb{Q}(c,s)_r$ использует перестановочные соотношения

$$\lambda_3 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_3 \,,$$
$$\lambda_1 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_1 \,,$$
$$\lambda_2 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_2 \,,$$

Алгебра желтых c и s-кварков $\mathbb{Q}(c,s)_y$ использует перестановочные соотношения

$$\lambda_3 \circ \lambda_4 = \lambda_4 \circ \lambda_3 \,,$$
$$\lambda_1 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_1 \,,$$
$$\lambda_2 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_2 \,,$$

Алгебра синих c и s-кварков $\mathbb{Q}(c,s)_b$ использует перестановочные соотношения

$$\lambda_3 \circ \lambda_4 = \lambda_4 \circ \lambda_3 \,,$$
$$\lambda_1 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_1 \,,$$
$$\lambda_2 \circ \lambda_4 = \lambda_4 \circ \lambda_2 \,,$$

Для алгебры $\mathbb{Q}(t,b)$ получим:

Алгебра красных t и b-кварков $\mathbb{Q}(t,b)_r$ использует перестановочные соотношения

$$\lambda_2 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_2 \,,$$
$$\lambda_3 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_3 \,,$$
$$\lambda_1 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_1 \,,$$

Алгебра желтых t и b-кварков $\mathbb{Q}(t,b)_y$ использует перестановочные соотношения

$$\lambda_2 \circ \lambda_4 = \lambda_4 \circ \lambda_2 \,,$$
$$\lambda_3 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_3 \,,$$
$$\lambda_1 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_1 \,,$$

Алгебра синих t и b-кварков $\mathbb{Q}(t,b)_b$ использует перестановочные соотношения

$$\lambda_2 \circ \lambda_4 = \lambda_4 \circ \lambda_2 \,,$$
$$\lambda_3 \circ \lambda_4 = -\lambda_4 \circ \lambda_3 \,,$$
$$\lambda_1 \circ \lambda_4 = \lambda_4 \circ \lambda_1 \,,$$

Далее рассмотрим подробнее алгебры цветных кварков только первого поколения, имея в виду, что переход к алгебрам кварков других поколений очевиден. Наши построения имеют общую часть, которая, по существу, совпадает с Разделом 2 Лекции 12. С учетом этого перейдем непосредственно к рассмотрению алгебры красных кварков $\mathbb{Q}(u,d)_r$.

II. АЛГЕБРА КРАСНЫХ U И D-КВАРКОВ $\mathbb{Q}(U,D)_R$

1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры $\mathbb{Q}(u,d)_r$ и правила умножения, которым они подчиняются.

- λ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для λ_0 имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0 \,.$$

- Образующие векторы λ_i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов λ_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_i \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_i = \lambda_i \,.$$

$$\lambda_i \circ \lambda_i = \operatorname{sign} \lambda_i \,,$$

где

$$\operatorname{sign} \lambda_1 = \operatorname{sign} \lambda_2 = \operatorname{sign} \lambda_3 = -\operatorname{sign} \lambda_4 = \lambda_0 \,.$$

- Векторы

$$\lambda_{ik} = \lambda_k \circ \lambda_i \,.$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6 \,.$$

В соответствии с Разделом I Лекции 12 и Разделом I настоящей Лекции для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения)

$$\lambda_{21} = -\lambda_{21}\,, \quad \lambda_{13} = \lambda_{31}\,, \quad \lambda_{32} = -\lambda_{23}\,,$$
$$\lambda_{14} = -\lambda_{41}\,, \quad \lambda_{24} = -\lambda_{42}\,, \quad \lambda_{34} = -\lambda_{43}\,.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности, имеем

$$\lambda_{21} \circ \lambda_{21} = -\lambda_0\,, \qquad \lambda_{42} \circ \lambda_{42} = \lambda_0\,,$$
$$\lambda_{32} \circ \lambda_{32} = -\lambda_0\,, \qquad \lambda_{14} \circ \lambda_{14} = \lambda_0\,,$$
$$\lambda_{13} \circ \lambda_{13} = \lambda_0\,, \qquad \lambda_{34} \circ \lambda_{34} = \lambda_0\,.$$

- Векторы

$$\lambda_{ikl} = \lambda_l \circ \lambda_k \circ \lambda_i\,.$$

Здесь $i \neq k\,, i \neq l\,, k \neq l$. Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4\,.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\lambda_{123} = -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132}\,,$$
$$\lambda_{124} = -\lambda_{214} = \lambda_{241} = -\lambda_{421} = \lambda_{412} = -\lambda_{142}\,,$$
$$\lambda_{134} = \lambda_{314} = -\lambda_{341} = \lambda_{431} = \lambda_{413} = -\lambda_{143}\,,$$
$$\lambda_{234} = -\lambda_{324} = \lambda_{342} = -\lambda_{432} = \lambda_{423} = -\lambda_{243}\,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0\,, \qquad \lambda_{124} \circ \lambda_{124} = \lambda_0\,,$$
$$\lambda_{134} \circ \lambda_{134} = -\lambda_0\,, \qquad \lambda_{234} \circ \lambda_{234} = \lambda_0\,.$$

- Вектор

$$\lambda_{1324} = \lambda_1 \circ \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_4\,.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\lambda_{1234} = -\lambda_{2134} = -\lambda_{2314} = \lambda_{3214} =$$
$$-\lambda_{3124} = -\lambda_{1324} = \lambda_{1243} = -\lambda_{2143} =$$
$$\lambda_{2413} = -\lambda_{4213} = \lambda_{4123} = -\lambda_{1423} =$$
$$\lambda_{1342} = \lambda_{3142} = -\lambda_{3412} = \lambda_{4312} =$$
$$\lambda_{4132} = -\lambda_{1432} = \lambda_{2341} = -\lambda_{3241} =$$
$$\lambda_{3421} = -\lambda_{4321} = \lambda_{4231} = -\lambda_{2431}\,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{1324} \circ \lambda_{1324} = \lambda_0\,.$$

2. Структурные матрицы алгебры красных кварков $\mathbb{Q}(u,d)_r$

Приведем структурные матрицы контравариантной алгебры $\mathbb{Q}(u,d)_r$. Компоненты векторов и матриц рассматриваются в следующей последовательности индексов

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

Переход от действительного представления к компактным представлениям осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц $C^L{}_{KI}$ и $C^{IK}{}_L$ от действительного представления к iab-представлению использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad i = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}\,.$$

$$a = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \quad b = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,.$$

При преобразовании матриц $C^L{}_{KI}$ и $C^{IK}{}_L$ от iab-представления к IAB-представлению использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathbb{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \qquad I = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,,$$

$$A = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \qquad B = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,.$$

1. Структурные матрицы контравариантной алгебры действия красных кварков $\mathbb{Q}(u,d)_{r_{right}}$

$$
\lambda_0 \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
13 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
21 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
0 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
14 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
1324 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
34 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
2 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
3 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
123 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
234 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
4 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
124 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 &&&&&&&& 13 \\
& 1 &&&&&&& 0 \\
&& 1 &&&&&& 14 \\
&&& 1 &&&&& 34 \\ \hline
&&&& 1 &&&& 2 \\
&&&&& 1 &&& 123 \\
&&&&&& 1 && 234 \\
&&&&&&& 1 & 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\mathbb{1} &&&& 0 \\
& \mathbb{1} &&& 34 \\ \hline
&& \mathbb{1} && 123 \\
&&& \mathbb{1} & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_1 \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
13 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
21 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
0 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
14 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
1324 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\
34 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\ \hline
1 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
2 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
3 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
123 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\
234 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
4 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
124 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&& 1 &&& 13 \\
&&&& 1 &&&& 0 \\
&&&&&&& -1 & 14 \\
&&&&&& -1 && 34 \\ \hline
& 1 &&&&&&& 2 \\
1 &&&&&&&& 123 \\
&&& -1 &&&&& 234 \\
&& -1 &&&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& A && 0 \\
&&& -A & 34 \\ \hline
A &&&& 123 \\
& -A &&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_2 \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
13 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
21 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
0 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
14 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
34 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\ \hline
1 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
2 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
3 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
123 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
234 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
4 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
124 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&& -1 &&& 13 \\
&&&& 1 &&&& 0 \\
&&&&&&& -1 & 14 \\
&&&&&& 1 && 34 \\ \hline
& 1 &&&&&&& 2 \\
-1 &&&&&&&& 123 \\
&&& 1 &&&&& 234 \\
&& -1 &&&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& -I && 0 \\
&&& -I & 34 \\ \hline
I &&&& 123 \\
& I &&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_3 \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
13 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
21 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
0 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
14 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\ \hline
1 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
2 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
3 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
123 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
234 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
4 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\
124 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& -1 &&&& 13 \\
&&&&& -1 &&& 0 \\
&&&&&& 1 && 14 \\
&&&&&&& 1 & 34 \\ \hline
1 &&&&&&&& 2 \\
& 1 &&&&&&& 123 \\
&& -1 &&&&&& 234 \\
&&& -1 &&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& -\mathbb{1} && 0 \\
&&& \mathbb{1} & 34 \\ \hline
\mathbb{1} &&&& 123 \\
& -\mathbb{1} &&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\lambda_4 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
13 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
21 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
14 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
34 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
123 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
234 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
4 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
124 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; i \; \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& & & & & & 1 & & 13 \\
& & & & & & & 1 & 0 \\
& & & & -1 & & & & 14 \\
& & & & & -1 & & & 34 \\ \hline
& & -1 & & & & & & 2 \\
& & & -1 & & & & & 123 \\
1 & & & & & & & & 234 \\
& 1 & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
\quad = \; i \; \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& & & \mathbb{1} & 0 \\
& & -\mathbb{1} & & 34 \\ \hline
& -\mathbb{1} & & & 123 \\
\mathbb{1} & & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{13} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
21 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
1324 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
3 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
4 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; b \; \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& 1 & & & & & & & 13 \\
1 & & & & & & & & 0 \\
& & & 1 & & & & & 14 \\
& & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
& & & & & -1 & & & 2 \\
& & & & -1 & & & & 123 \\
& & & & & & & -1 & 234 \\
& & & & & & -1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
\quad = \; b \; \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
A & & & & 0 \\
& A & & & 34 \\ \hline
& & -A & & 123 \\
& & & -A & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{21} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; i \; \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
-1 & & & & & & & & 13 \\
& 1 & & & & & & & 0 \\
& & 1 & & & & & & 14 \\
& & & -1 & & & & & 34 \\ \hline
& & & & 1 & & & & 2 \\
& & & & & -1 & & & 123 \\
& & & & & & -1 & & 234 \\
& & & & & & & 1 & 124 \\ \hline
\end{array}
\quad = \; i \; \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
B & & & & 0 \\
& -B & & & 34 \\ \hline
& & -B & & 123 \\
& & & B & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{32} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; a \; \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& 1 & & & & & & & 13 \\
-1 & & & & & & & & 0 \\
& & & -1 & & & & & 14 \\
& & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
& & & & & 1 & & & 2 \\
& & & & -1 & & & & 123 \\
& & & & & & & -1 & 234 \\
& & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
\quad = \; a \; \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
I & & & & 0 \\
& -I & & & 34 \\ \hline
& & I & & 123 \\
& & & -I & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{14} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&-1&&&&&&&&& \\
13 &&&&&&&&1&&&&&&&& \\
21 &&&&&-1&&&&&&&&&&& \\
0 &&&&&&1&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&-1&&&&&&&&&&&&& \\
14 &&&&1&&&&&&&&&&&& \\
1324 &-1&&&&&&&&&&&&&&& \\
34 &&1&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&&1& \\
2 &&&&&&&&&&&&&&&&-1 \\
3 &&&&&&&&&&&&&1&&& \\
123 &&&&&&&&&&&&&&-1&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&1&&&&& \\
234 &&&&&&&&&&&&-1&&&& \\
4 &&&&&&&&&1&&&&&&& \\
124 &&&&&&&&&&-1&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&1&&&&&13 \\
&&1&&&&&&0 \\
&1&&&&&&&14 \\
1&&&&&&&&34 \\ \hline
&&&&&&&-1&2 \\
&&&&&&-1&&123 \\
&&&&&-1&&&234 \\
&&&&-1&&&&124 \\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&A&&&0 \\
A&&&&34 \\ \hline
&&&-A&123 \\
&&-A&&124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{34} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&1&&&&&&&&&&& \\
13 &&&&&&1&&&&&&&&&& \\
21 &&&&&&&1&&&&&&&&& \\
0 &&&&&&&&1&&&&&&&& \\ \hline
42 &1&&&&&&&&&&&&&&& \\
14 &&1&&&&&&&&&&&&&& \\
1324 &&&1&&&&&&&&&&&&& \\
34 &&&&1&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&1&&& \\
2 &&&&&&&&&&&&&&1&& \\
3 &&&&&&&&&&&&&&&1& \\
123 &&&&&&&&&&&&&&&&1 \\ \hline
134 &&&&&&&&&1&&&&&&& \\
234 &&&&&&&&&&1&&&&&& \\
4 &&&&&&&&&&&1&&&&& \\
124 &&&&&&&&&&&&1&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&1&&&&&&13 \\
&&&1&&&&&0 \\
1&&&&&&&&14 \\
&1&&&&&&&34 \\ \hline
&&&&&&1&&2 \\
&&&&&&&1&123 \\
&&&&1&&&&234 \\
&&&&&1&&&124 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&\mathbb{1}&&&0 \\
\mathbb{1}&&&&34 \\ \hline
&&&\mathbb{1}&123 \\
&&\mathbb{1}&&124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{42} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&-1&&&&&&&& \\
13 &&&&&&&-1&&&&&&&&& \\
21 &&&&&&1&&&&&&&&&& \\
0 &&&&&1&&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&&1&&&&&&&&&&&& \\
14 &&&1&&&&&&&&&&&&& \\
1324 &&-1&&&&&&&&&&&&&& \\
34 &-1&&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&&&-1 \\
2 &&&&&&&&&&&&&&&-1& \\
3 &&&&&&&&&&&&&&1&& \\
123 &&&&&&&&&&&&&1&&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&1&&&& \\
234 &&&&&&&&&&&1&&&&& \\
4 &&&&&&&&&&-1&&&&&& \\
124 &&&&&&&&&-1&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&-1&&&&&13 \\
&&1&&&&&&0 \\
&1&&&&&&&14 \\
-1&&&&&&&&34 \\ \hline
&&&&&&&-1&2 \\
&&&&&&1&&123 \\
&&&&&1&&&234 \\
&&&&-1&&&&124 \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&-I&&&0 \\
I&&&&34 \\ \hline
&&&-I&123 \\
&&I&&124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&-1&&&&&&& \\
13 &&&&&&&&&&-1&&&&&& \\
21 &&&&&&&&&&&1&&&&& \\
0 &&&&&&&&&&&&1&&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&-1&&& \\
14 &&&&&&&&&&&&&&-1&& \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&&1& \\
34 &&&&&&&&&&&&&&&&1 \\ \hline
1 &-1&&&&&&&&&&&&&&& \\
2 &&-1&&&&&&&&&&&&&& \\
3 &&&1&&&&&&&&&&&&& \\
123 &&&&1&&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&&-1&&&&&&&&&&& \\
234 &&&&&&-1&&&&&&&&&& \\
4 &&&&&&&1&&&&&&&&& \\
124 &&&&&&&&1&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&-1&&&&13 \\
&&&&&1&&&0 \\
&&&&&&-1&&14 \\
&&&&&&&1&34 \\ \hline
-1&&&&&&&&2 \\
&1&&&&&&&123 \\
&&-1&&&&&&234 \\
&&&1&&&&&124 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&B&&0 \\
&&&B&34 \\ \hline
B&&&&123 \\
&B&&&124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{124} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
13 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
21 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
0 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
42 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
14 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
34 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ \hline
1 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
2 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
123 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
134 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
234 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
4 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
124 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & & -1 & & 13 \\
 & & & & & & & 1 & 0 \\
 & & & & -1 & & & & 14 \\
 & & & & & 1 & & & 34 \\ \hline
 & & -1 & & & & & & 2 \\
 & & & 1 & & & & & 123 \\
-1 & & & & & & & & 234 \\
 & 1 & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & B & 0 \\
 & & B & & 34 \\ \hline
 & B & & & 123 \\
B & & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{234} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
13 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
21 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
0 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
14 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
1324 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
34 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
3 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
123 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
234 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
4 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
124 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 13 \\
 & & & & & & 1 & & 0 \\
 & & & & & -1 & & & 14 \\
 & & & & 1 & & & & 34 \\ \hline
 & & & 1 & & & & & 2 \\
 & & -1 & & & & & & 123 \\
 & 1 & & & & & & & 234 \\
-1 & & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & -I & 0 \\
 & & -I & & 34 \\ \hline
 & I & & & 123 \\
I & & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{134} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
13 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
21 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
0 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
14 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
1324 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
34 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
123 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
234 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
4 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
124 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 13 \\
 & & & & & & -1 & & 0 \\
 & & & & & 1 & & & 14 \\
 & & & & 1 & & & & 34 \\ \hline
 & & & -1 & & & & & 2 \\
 & & -1 & & & & & & 123 \\
 & 1 & & & & & & & 234 \\
1 & & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & -A & 0 \\
 & & A & & 34 \\ \hline
 & -A & & & 123 \\
A & & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{1324} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
13 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
14 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
34 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
234 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
124 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & 1 & & & & & & 13 \\
 & & & -1 & & & & & 0 \\
-1 & & & & & & & & 14 \\
 & 1 & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & -1 & & 2 \\
 & & & & & & & 1 & 123 \\
 & & & & 1 & & & & 234 \\
 & & & & & -1 & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -B & & & 0 \\
B & & & & 34 \\ \hline
 & & & B & 123 \\
 & & -B & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

2. Структурные матрицы ковариантной алгебры пространства-времени красных кварков $\mathbb{Q}(u,d)_{r_{left}}$

$$\Lambda^0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &1&&& &&&& &&&& &&&& \\
13 &&1&& &&&& &&&& &&&& \\
21 &&&1& &&&& &&&& &&&& \\
0 &&&&1 &&&& &&&& &&&& \\ \hline
42 &&&& &1&&& &&&& &&&& \\
14 &&&& &&1&& &&&& &&&& \\
1324 &&&& &&&1& &&&& &&&& \\
34 &&&& &&&&1 &&&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &1&&& &&&& \\
2 &&&& &&&& &&1&& &&&& \\
3 &&&& &&&& &&&1& &&&& \\
123 &&&& &&&& &&&&1 &&&& \\ \hline
134 &&&& &&&& &&&& &1&&& \\
234 &&&& &&&& &&&& &&1&& \\
4 &&&& &&&& &&&& &&&1& \\
124 &&&& &&&& &&&& &&&&1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{c|cccc|cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &1&&& &&&& \\
0 &&1&& &&&& \\
14 &&&1& &&&& \\
34 &&&&1 &&&& \\ \hline
2 &&&& &1&&& \\
123 &&&& &&1&& \\
234 &&&& &&&1& \\
124 &&&& &&&&1 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{c|cc|cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & \mathbb{1} & & & \\
34 & & \mathbb{1} & & \\ \hline
123 & & & \mathbb{1} & \\
124 & & & & \mathbb{1} \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&&-1 &&&& \\
13 &&&& &&&& &&&1& &&&& \\
21 &&&& &&&& &&-1&& &&&& \\
0 &&&& &&&& &1&&& &&&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& &&&&-1 \\
14 &&&& &&&& &&&& &&&1& \\
1324 &&&& &&&& &&&& &&-1&& \\
34 &&&& &&&& &&&& &1&&& \\ \hline
1 &&&&1 &&&& &&&& &&&& \\
2 &&&-1& &&&& &&&& &&&& \\
3 &&1&& &&&& &&&& &&&& \\
123 &-1&&& &&&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& &&&&1 &&&& &&&& \\
234 &&&& &&&-1& &&&& &&&& \\
4 &&&& &&1&& &&&& &&&& \\
124 &&&& &-1&&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{c|cccc|cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&& &&-1&& \\
0 &&&& &-1&&& \\
14 &&&& &&&&-1 \\
34 &&&& &&&-1& \\ \hline
2 &&1&& &&&& \\
123 &1&&& &&&& \\
234 &&&&1 &&&& \\
124 &&&1& &&&& \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{c|cc|cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & & -A & \\
34 & & & & -A \\ \hline
123 & A & & & \\
124 & & A & & \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&-1& &&&& \\
13 &&&& &&&& &&&&-1 &&&& \\
21 &&&& &&&& &1&&& &&&& \\
0 &&&& &&&& &&1&& &&&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& &&&-1& \\
14 &&&& &&&& &&&& &&&&-1 \\
1324 &&&& &&&& &&&& &1&&& \\
34 &&&& &&&& &&&& &&1&& \\ \hline
1 &&&1& &&&& &&&& &&&& \\
2 &&&&1 &&&& &&&& &&&& \\
3 &-1&&& &&&& &&&& &&&& \\
123 &&-1&& &&&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& &&&1& &&&& &&&& \\
234 &&&& &&&&1 &&&& &&&& \\
4 &&&& &-1&&& &&&& &&&& \\
124 &&&& &&-1&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{c|cccc|cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&& &&-1&& \\
0 &&&& &1&&& \\
14 &&&& &&&&-1 \\
34 &&&& &&&1& \\ \hline
2 &&1&& &&&& \\
123 &-1&&& &&&& \\
234 &&&&1 &&&& \\
124 &&&-1& &&&& \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{c|cc|cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & & -I & \\
34 & & & & -I \\ \hline
123 & I & & & \\
124 & & I & & \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&1&& &&&& \\
13 &&&& &&&& &1&&& &&&& \\
21 &&&& &&&& &&&&1 &&&& \\
0 &&&& &&&& &&&1& &&&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& &&1&& \\
14 &&&& &&&& &&&& &1&&& \\
1324 &&&& &&&& &&&& &&&&1 \\
34 &&&& &&&& &&&& &&&1& \\ \hline
1 &&1&& &&&& &&&& &&&& \\
2 &1&&& &&&& &&&& &&&& \\
3 &&&&1 &&&& &&&& &&&& \\
123 &&&1& &&&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& &&1&& &&&& &&&& \\
234 &&&& &1&&& &&&& &&&& \\
4 &&&& &&&&1 &&&& &&&& \\
124 &&&& &&&1& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{c|cccc|cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&& &1&&& \\
0 &&&& &&1&& \\
14 &&&& &&&1& \\
34 &&&& &&&&1 \\ \hline
2 &1&&& &&&& \\
123 &&1&& &&&& \\
234 &&&1& &&&& \\
124 &&&&1 &&&& \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{c|cc|cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & & \mathbb{1} & \\
34 & & & & \mathbb{1} \\ \hline
123 & \mathbb{1} & & & \\
124 & & \mathbb{1} & & \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^4 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\
13 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
21 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\ \hline
42 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
14 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
1324 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
34 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\ \hline
1 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
2 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
3 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\
123 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\ \hline
134 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
234 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
4 &&&& -1 &&&&&&&&&&&& \\
124 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; -i \begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&& 1 & \\
0 &&&&&&&& 1 \\
14 &&&&& 1 &&& \\
34 &&&&&& 1 && \\ \hline
2 &&& 1 &&&&& \\
123 &&&& 1 &&&& \\
234 & 1 &&&&&&& \\
124 && 1 &&&&&& \\ \hline
\end{array}
\; = \; -i \begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& \mathbb{1} \\
34 &&& \mathbb{1} & \\ \hline
123 && \mathbb{1} && \\
124 & \mathbb{1} &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^{13} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
13 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
21 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
0 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
14 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
1324 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
34 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
2 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
3 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
123 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
234 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
4 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
124 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; b \begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 && 1 &&&&&& \\
0 & 1 &&&&&&& \\
14 &&&& 1 &&&& \\
34 &&& 1 &&&&& \\ \hline
2 &&&&&& -1 && \\
123 &&&&& -1 &&& \\
234 &&&&&&&& -1 \\
124 &&&&&&& -1 & \\ \hline
\end{array}
\; = \; b \begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & A &&& \\
34 && A && \\ \hline
123 &&& -A & \\
124 &&&& -A \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^{21} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
13 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
21 &&&& -1 &&&&&&&&&&&& \\
0 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
14 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
1324 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\
34 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
2 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
3 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
123 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
234 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
4 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
124 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; i \begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & 1 &&&&&&& \\
0 && -1 &&&&&& \\
14 &&& 1 &&&&& \\
34 &&&& -1 &&&& \\ \hline
2 &&&&& 1 &&& \\
123 &&&&&& -1 && \\
234 &&&&&&& 1 & \\
124 &&&&&&&& -1 \\ \hline
\end{array}
\; = \; -i \begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & B &&& \\
34 && B && \\ \hline
123 &&& B & \\
124 &&&& B \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^{32} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& -1 &&&&&&&&&&&& \\
13 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
21 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
0 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\
14 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
1324 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
34 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
2 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
3 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
123 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
234 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
4 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\
124 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \; a \begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 && -1 &&&&&& \\
0 & 1 &&&&&&& \\
14 &&&& -1 &&&& \\
34 &&& 1 &&&&& \\ \hline
2 &&&&&& 1 && \\
123 &&&&& -1 &&& \\
234 &&&&&&&& 1 \\
124 &&&&&&& -1 & \\ \hline
\end{array}
\; = \; a \begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & -I &&& \\
34 && -I && \\ \hline
123 &&& I & \\
124 &&&& I \\ \hline
\end{array}$$

$$
\Lambda^{14} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
13 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
21 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
0 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
14 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
1324 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
34 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
2 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
3 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
123 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\ \hline
134 &&&&&&&&&&& -1 &&&&& \\
234 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
4 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
124 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{|cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& 1 &&&&& 13 \\
&& 1 &&&&&& 0 \\
& 1 &&&&&&& 14 \\
1 &&&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&&& -1 & 2 \\
&&&&&& -1 && 123 \\
&&&&& -1 &&& 234 \\
&&&& -1 &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& A &&& 0 \\
A &&&& 34 \\ \hline
&&& -A & 123 \\
&& -A && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{34} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
13 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
21 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
0 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\ \hline
42 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
14 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
1324 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
34 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
2 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
3 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
123 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
134 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
234 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
4 &&&&&&&&&&& -1 &&&&& \\
124 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{|cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&& 1 &&&&&& 13 \\
&&& 1 &&&&& 0 \\
1 &&&&&&&& 14 \\
& 1 &&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&& 1 && 2 \\
&&&&&&& 1 & 123 \\
&&&& 1 &&&& 234 \\
&&&&& 1 &&& 124 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& \mathbb{1} &&& 0 \\
\mathbb{1} &&&& 34 \\ \hline
&&& \mathbb{1} & 123 \\
&& \mathbb{1} && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{42} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
13 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
21 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
0 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
14 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
1324 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
34 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
2 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
3 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
123 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
234 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
4 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
124 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& 1 &&&&& 13 \\
&& -1 &&&&&& 0 \\
& 1 &&&&&&& 14 \\
-1 &&&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&&& -1 & 2 \\
&&&&&& 1 && 123 \\
&&&&& -1 &&& 234 \\
&&&& 1 &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& I &&& 0 \\
I &&&& 34 \\ \hline
&&& -I & 123 \\
&& -I && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{123} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
13 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
21 &&&&&&&&&&& -1 &&&&& \\
0 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
14 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
34 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
1 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
2 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
3 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
123 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
234 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
4 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
124 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{|cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& -1 &&&& 13 \\
&&&&& 1 &&& 0 \\
&&&&&& -1 && 14 \\
&&&&&&& 1 & 34 \\ \hline
-1 &&&&&&&& 2 \\
& 1 &&&&&&& 123 \\
&& -1 &&&&&& 234 \\
&&& 1 &&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& B && 0 \\
&&& B & 34 \\ \hline
B &&&& 123 \\
& B &&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{124} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
13 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\
21 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
0 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
42 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
14 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
1324 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
34 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\ \hline
1 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
2 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
3 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
123 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\ \hline
134 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
234 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
4 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
124 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= 1
\begin{array}{cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&&& -1 && 13 \\
&&&&&&& 1 & 0 \\
&&&& -1 &&&& 14 \\
&&&&& 1 &&& 34 \\ \hline
&& -1 &&&&&& 2 \\
&&& 1 &&&&& 123 \\
-1 &&&&&&&& 234 \\
& 1 &&&&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= 1
\begin{array}{cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& B & 0 \\
&& B && 34 \\ \hline
& B &&& 123 \\
B &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{234} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
13 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
21 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
0 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\ \hline
42 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
14 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
1324 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
34 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
2 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
3 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
123 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
234 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
4 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
124 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&&&& -1 & 13 \\
&&&&&& 1 && 0 \\
&&&&& -1 &&& 14 \\
&&&& 1 &&&& 34 \\ \hline
&&& 1 &&&&& 2 \\
&& -1 &&&&&& 123 \\
& 1 &&&&&&& 234 \\
-1 &&&&&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& -I & 0 \\
&& -I && 34 \\ \hline
& I &&& 123 \\
I &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{134} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
21 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
0 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
14 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
1324 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
34 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\
2 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
3 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
123 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&& -1 &&&&&&&&&&&& \\
234 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
4 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
124 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&&&& 1 & 13 \\
&&&&&& 1 && 0 \\
&&&&& 1 &&& 14 \\
&&&& 1 &&&& 34 \\ \hline
&&& -1 &&&&& 2 \\
&& -1 &&&&&& 123 \\
& -1 &&&&&&& 234 \\
-1 &&&&&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& A & 0 \\
&& A && 34 \\ \hline
& -A &&& 123 \\
-A &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{1324} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
13 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
21 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
0 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\ \hline
42 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
14 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
1324 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
34 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\
2 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
3 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
123 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\ \hline
134 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
234 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
4 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
124 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{cccc|cccc|r}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&& -1 &&&&&& 13 \\
&&& 1 &&&&& 0 \\
-1 &&&&&&&& 14 \\
& 1 &&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&& -1 && 2 \\
&&&&&&& 1 & 123 \\
&&&& -1 &&&& 234 \\
&&&&& 1 &&& 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{cc|cc|r}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& B &&& 0 \\
B &&&& 34 \\ \hline
&&& B & 123 \\
&& B && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

3. Действительное представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

Структурные матрицы $C^L{}_{KI}$ в действительном представлении вычислены по алгоритму, приведенному в Разделе II 2 Лекции 12, для принятого ранее порядка индексов. При этом слагаемые вектора ψ записываются в следующей последовательности

$$\psi = \lambda_{32}\,\psi^{32} + \lambda_{13}\,\psi^{13} + \lambda_{21}\,\psi^{21} + \lambda_0\,\psi^0 +
\lambda_{42}\,\psi^{42} + \lambda_{14}\,\psi^{14} + \lambda_{1324}\,\psi^{1324} + \lambda_{34}\,\psi^{34} +
\lambda_1\,\psi^1 + \lambda_2\,\psi^2 + \lambda_3\,\psi^3 + \lambda_{123}\,\psi^{123} +
\lambda_{134}\,\psi^{134} + \lambda_{234}\,\psi^{234} + \lambda_4\,\psi^4 + \lambda_{124}\,\psi^{124}\,.$$

В результате получим действительные структурные матрицы λ_I размерности 16×16. Помимо действительного представления мы использовали a-представление.

4. iab-представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

iab-представление основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \lambda_{13}\circ(\lambda_{21}\,\psi^{32} + \lambda_0\,\psi^{13}) + \lambda_0\circ(\lambda_{21}\,\psi^{21} + \lambda_0\,\psi^0) +
\lambda_{14}\circ(\lambda_{21}\,\psi^{42} + \lambda_0\,\psi^{14}) + \lambda_{34}\circ(\lambda_{21}\,\psi^{1324} + \lambda_0\,\psi^{34}) +
\lambda_2\circ(\lambda_{21}\,\psi^1 + \lambda_0\,\psi^2) + \lambda_{123}\circ(\lambda_{21}\,\psi^3 + \lambda_0\,\psi^{123}) +
\lambda_{234}\circ(\lambda_{21}\,\psi^{134} + \lambda_0\,\psi^{234}) + \lambda_{124}\circ(\lambda_{21}\,\psi^4 + \lambda_0\,\psi^{124})\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{Q}_4$ в виде произведения $\mathbb{Q}_3\times\mathbb{Q}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_3$ являются

$$\lambda_{13}\,,\lambda_0\,,\lambda_{14}\,,\lambda_{34}\,,\lambda_2\,,\lambda_{123}\,,\lambda_{234}\,,\lambda_{124}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_1$ являются

$$\lambda_{21}\,,\quad \lambda_0\,.$$

Как и прежде поставим в соответствие базисному вектору λ_{21} алгебры $\mathbb{Q}_1$ мнимую единицу, а базисному вектору λ_0 действительную единицу. В результате получим вектор алгебры $\mathbb{Q}_4$ в iab-представлении имеет вид

$$\psi = \lambda_{13}\circ(i\,\psi^{32} + \psi^{13}) + \lambda_0\circ(i\,\psi^{21} + \psi^0) +
\lambda_{14}\circ(i\,\psi^{42} + \psi^{14}) + \lambda_{34}\circ(i\,\psi^{1324} + \psi^{34}) +
\lambda_2\circ(i\,\psi^1 + \psi^2) + \lambda_{123}\circ(i\,\psi^3 + \psi^{123}) +
\lambda_{234}\circ(i\,\psi^{134} + \psi^{234}) + \lambda_{124}\circ(i\,\psi^4 + \psi^{124})\,.$$

Таким образом, в iab-представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными числами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}^{13} &= i\,\psi^{32} + \psi^{13}\,, & \boldsymbol{\psi}^{0} &= i\,\psi^{21} + \psi^{0}\,,\\
\boldsymbol{\psi}^{14} &= i\,\psi^{42} + \psi^{14}\,, & \boldsymbol{\psi}^{34} &= i\,\psi^{1324} + \psi^{34}\,,\\
\boldsymbol{\psi}^{2} &= i\,\psi^{1} + \psi^{2}\,, & \boldsymbol{\psi}^{123} &= i\,\psi^{3} + \psi^{123}\,,\\
\boldsymbol{\psi}^{234} &= i\,\psi^{134} + \psi^{234}\,, & \boldsymbol{\psi}^{124} &= i\,\psi^{4} + \psi^{124}\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \lambda_{13}\,\boldsymbol{\psi}^{13} + \lambda_0\,\boldsymbol{\psi}^0 + \lambda_{14}\,\boldsymbol{\psi}^{14} + \lambda_{34}\,\boldsymbol{\psi}^{34} +
\lambda_2\,\boldsymbol{\psi}^2 + \lambda_{123}\,\boldsymbol{\psi}^{123} + \lambda_{234}\,\boldsymbol{\psi}^{234} + \lambda_{124}\,\boldsymbol{\psi}^{124}\,.$$

Отсюда видно, что в iab-представлении вектор ψ проецируется на направления λ_{13}, λ_0,λ_{14}, λ_{34}, λ_2, λ_{123}, λ_{234}, λ_{124}.

В iab-представлении структурные матрицы 8×8 имеют размерность (см. Раздел II 2).

5. IAB-представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

IAB-представление алгебры $\mathbb{Q}_4$ основано на разложении вектора:

$$\psi = (\lambda_{32}\,\psi^{32} + \lambda_{13}\,\psi^{13} + \lambda_{21}\,\psi^{21} + \lambda_0\,\psi^0)\circ\lambda_0 +
(\lambda_{32}\,\psi^{42} + \lambda_{13}\,\psi^{14} + \lambda_{21}\,\psi^{1324} + \lambda_0\,\psi^{34})\circ\lambda_{34} +
(\lambda_{32}\,\psi^{1} + \lambda_{13}\,\psi^{2} + \lambda_{21}\,\psi^{3} + \lambda_0\,\psi^{123})\circ\lambda_{123} +
(\lambda_{32}\,\psi^{134} + \lambda_{13}\,\psi^{234} + \lambda_{21}\,\psi^{4} + \lambda_0\,\psi^{124})\circ\lambda_{124}\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{Q}_4$ в виде произведения $\mathbb{Q}_2\times\mathbb{Q}_2$. Базисными векторами одной алгебры $\mathbb{Q}_2$ являются

$$\lambda_0\,,\quad \lambda_{34}\,,\quad \lambda_{123}\,,\quad \lambda_{124}\,;$$

базисными векторами другой алгебры $\mathbb{Q}_2$ являются

$$\lambda_{32}\,,\quad \lambda_{13}\,,\quad \lambda_{21}\,,\quad \lambda_0\,.$$

Последнюю алгебру мы назвали IAB-алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц IAB-алгебры используем следующие обозначения

$$a\cdot I\,,\quad b\cdot A\,,\quad i\cdot B\,,\quad \mathbb{1}\,.$$

Заменим базисные векторы λ_{32}, λ_{13}, λ_{21}, λ_0 приведенными гиперчислами в соответствии

$$\begin{aligned}
\lambda_{32} &\sim a\,I\,,\\
\lambda_{13} &\sim b\,A\,,\\
\lambda_{21} &\sim i\,B\,,\\
\lambda_0 &\sim 1\,\mathbb{1}\,.
\end{aligned}$$

Получим вектор алгебры $\mathbb{Q}_4$ в IAB-представлении

$$\psi = (a\cdot I\,\psi^{32} + b\cdot A\,\psi^{13} + i\cdot B\,\psi^{21} + \mathbb{1}\,\psi^0)\circ\lambda_0 +
(a\cdot I\,\psi^{42} + b\cdot A\,\psi^{14} + i\cdot B\,\psi^{1324} + \mathbb{1}\,\psi^{34})\circ\lambda_{34} +
(a\cdot I\,\psi^{1} + b\cdot A\,\psi^{2} + i\cdot B\,\psi^{3} + \mathbb{1}\,\psi^{123})\circ\lambda_{123} +
(a\cdot I\,\psi^{134} + b\cdot A\,\psi^{234} + i\cdot B\,\psi^{4} + \mathbb{1}\,\psi^{124})\circ\lambda_{124}\,.$$

Таким образом, в IAB-представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}
\Psi^{0} &= a\,I\,\psi^{32} + b\,A\,\psi^{13} + i\,B\,\psi^{21} + \mathbb{1}\,\psi^{0}\,,\\
\Psi^{34} &= a\,I\,\psi^{42} + b\,A\,\psi^{14} + i\,B\,\psi^{1324} + \mathbb{1}\,\psi^{34}\,,\\
\Psi^{123} &= a\,I\,\psi^{1} + b\,A\,\psi^{2} + i\,B\,\psi^{3} + \mathbb{1}\,\psi^{123}\,,\\
\Psi^{124} &= a\,I\,\psi^{134} + b\,A\,\psi^{234} + i\,B\,\psi^{4} + \mathbb{1}\,\psi^{124}\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \Psi^0\,\lambda_0 + \Psi^{34}\,\lambda_{34} + \Psi^{123}\,\lambda_{123} + \Psi^{124}\,\lambda_{124}\,.$$

Отсюда видно, что в IAB-представлении вектор ψ проецируется на направления λ_0, λ_{34}, λ_{123}, λ_{124}.

В IAB-представлении структурные матрицы имеют размерность 4×4 (см. Раздел II).

III. УРАВНЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ СВОБОДНЫХ КВАРКОВ

Мы вычислили структурные матрицы алгебры кварков и теперь вернемся к результатам Лекции 1. Согласно этой Лекции: если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи квантовые явления, а уравнения структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовые постулаты. Квантовые постулаты для произвольной алгебры действия были записаны следующим образом

$$\partial_M \psi^L = \frac{1}{S_0}\,C^L{}_{KI}\cdot p^I{}_M\cdot\psi^K\,. \tag{11}$$

Здесь ∂_M – оператор дифференцирования по обобщенной координате, $p^I{}_M$ – координаты обобщенного импульса, $C^L{}_{KI}$ – структурные постоянные алгебры действия, S_0 – действительная постоянная величина, имеющая размерность действия. В последующих Лекциях мы ввели алгебру Клиффорда как алгебру действия и связали ее с лептонами. При этом постоянную величину S_0 мы отождествили с постоянной Планка. Если бы нам удалось найти несколько алгебр действия, то мы имели бы несколько объектов, подчиняющихся квантовым явлениям разного типа.

Теперь мы ввели новый объект – кварки, которым сопоставили свою алгебру действия и алгебру пространства-времени. И согласно предыдущему кварки подчиняются своей квантовой теории. Уравнения (11) будут квантовыми постулатами для кварков, если в них положить постоянные $C^L{}_{KI}$ равными структурным постоянным алгебры кварков и установить значение S_0. При этом возникает вопрос: нужно ли связывать постоянную Планка только с лептонами и соответственно с алгеброй Клиффорда, а для алгебры кварков вводить другую постоянную с размерностью действия, или постоянная Планка является универсальной? A priori ответить на этот вопрос нельзя. Поэтому для кварков мы введем свою постоянную действия, значение которой предстоит установить, и обозначим ее через q.

Аналогично Разделу II Лекции 9 придадим соотношению (11) форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные постоянные $C^{MN}{}_L$. Получим

$$C^{MN}{}_L\cdot\partial_M\psi^L(x) = \frac{1}{q}\,C^{MN}{}_L\cdot C^L{}_{KI}\cdot p^I{}_M\cdot\psi^K\,. \tag{12}$$

С нашей точки зрения это уравнение и есть уравнение релятивистской квантовой механики для кварков в самом общем виде. Далее, повторяя рассуждения Раздела II Лекции 9, запишем это уравнение при следующих ограничениях: дифференцирование выполняется только по координатам образующего пространства и условии, что в первом сжатом представлении коэффициент при волновой функции в правой части принимает вид

$$-\frac{\mathrm{m}_d\,c}{q}\,.$$

Здесь m_d есть масса d-кварка. В результате получим следующее уравнение

$$C^{mN}{}_L\cdot\partial_m\psi^L(x) = \frac{1}{q}\,(C^N{}_{K0}\,p^0{}_0 + C^N{}_{K34}\,p^{34}{}_0)\cdot\psi^K\,. \tag{13}$$

При этом имеет место условие *

$$p^0{}_0 + p^{34}{}_0 = -\mathrm{m}_d\,c\,. \tag{14}$$

Разобьем величину $\mathrm{m}_d\,c$ между импульсами $p^0{}_0$ и $p^{34}{}_0$ в некоторой пропорции. Для этого положим

$$p^0{}_0 = -\frac{\mathrm{m}_d\,c}{2}\,\alpha\,,\qquad p^{34}{}_0 = -\frac{\mathrm{m}_d\,c}{2}\,\beta\,.$$

Из (14) имеем

$$\alpha+\beta = 2\,. \tag{15}$$

Кроме того, положим

$$\beta-\alpha = 2\,\frac{\mathrm{m}_u}{\mathrm{m}_d}\,. \tag{16}$$

Здесь m_u масса u-кварка. После подстановки импульсов получим

$$C^{mN}{}_L\cdot\partial_m\psi^L(x) = -\frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\alpha\cdot C^N{}_{K0} + \beta\cdot C^N{}_{K34})\cdot\psi^K\,. \tag{17}$$

Понятно, что здесь $C^N{}_{K0} = \delta^N{}_K$ в отличие от $C^N{}_{K34}$.

1. Уравнение для красных кварков первого поколения

Уравнение релятивистской квантовой механики для свободных красных кварков первого поколения получим, подставив в уравнение (17) структурные матрицы, выведенные в Разделе II. Для действительного

*См. Раздел II Лекции 9.

регулярного представления алгебры кварков $\mathbb{Q}(u,d)$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В iab-представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (9). И в IAB-представлении компонентами волновой функции являются четыре IAB-функции вида (10). Приведем уравнения квантовой механики по отношению к IAB-компонентам волновой функции кварков:

$$\left(-i\left|\begin{array}{cc|cc} & & & 1\\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right|\partial_4 + i\left|\begin{array}{cc|cc} & & \text{-}A & \\ & & & \text{-}A\\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right|\partial_1 + \left|\begin{array}{cc|cc} & & \text{-}I & \\ & & & \text{-}I\\ \hline I & & & \\ & I & & \end{array}\right|\partial_2 + a\left|\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1\\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right|\partial_3\right)\left\|\begin{array}{c}\Psi^0\\ \Psi^{34}\\ \Psi^{123}\\ \Psi^{124}\end{array}\right\|$$

$$= -\frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,q}\left|\begin{array}{cc|cc} \alpha & \beta & & \\ \beta & \alpha & & \\ \hline & & \alpha & \beta\\ & & \beta & \alpha \end{array}\right|\left\|\begin{array}{c}\Psi^0\\ \Psi^{34}\\ \Psi^{123}\\ \Psi^{124}\end{array}\right\|$$

Или

$$\begin{aligned}
i\,\partial_4\Psi^{124} \quad &+(i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 - a\,\partial_3)\Psi^{123}\\
&= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,q}\,(\alpha\cdot\Psi^0 + \beta\cdot\Psi^{34})\,,\\
i\,\partial_4\Psi^{123} \quad &+(i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 - a\,\partial_3)\Psi^{124}\\
&= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,q}\,(\beta\cdot\Psi^0 + \alpha\cdot\Psi^{34})\,,\\
i\,\partial_4\Psi^{34} \quad &-(i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + a\,\partial_3)\Psi^{0}\\
&= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,q}\,(\alpha\cdot\Psi^{123} + \beta\cdot\Psi^{124})\,,\\
i\,\partial_4\Psi^{0} \quad &-(i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + a\,\partial_3)\Psi^{34}\\
&= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,q}\,(\beta\cdot\Psi^{123} + \alpha\cdot\Psi^{124})\,.
\end{aligned} \tag{18}$$

2. Стандартное представление уравнения квантовой механики для красных u и d кварков.

Преобразуем уравнения (18) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$\begin{aligned}
i\,\partial_4\varphi_2 + (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 - a\,\partial_3)\,\varphi_2 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,q}\,(\alpha+\beta)\,\varphi_1\,,\\
i\,\partial_4\varphi_1 - (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + a\,\partial_3)\,\varphi_1 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,q}\,(\alpha+\beta)\,\varphi_2\,,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{aligned}
i\,\partial_4\chi_2 + (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + a\,\partial_3)\,\chi_2 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,q}\,(\beta-\alpha)\,\chi_1\,,\\
i\,\partial_4\chi_1 - (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 - a\,\partial_3)\,\chi_1 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,q}\,(\beta-\alpha)\,\chi_2\,,
\end{aligned} \tag{20}$$

где $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ и $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$.

Или с учетом (15) и (16)

$$\begin{aligned}
i\,\partial_4\varphi_2 + (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 - a\,\partial_3)\,\varphi_2 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{q}\,\varphi_1\,,\\
i\,\partial_4\varphi_1 - (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + a\,\partial_3)\,\varphi_1 &= \frac{\mathrm{m}_d\, c}{q}\,\varphi_2\,,
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
i\,\partial_4\chi_2 + (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + a\,\partial_3)\,\chi_2 &= \frac{\mathrm{m}_u\, c}{q}\,\chi_1\,,\\
i\,\partial_4\chi_1 - (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 - a\,\partial_3)\,\chi_1 &= \frac{\mathrm{m}_u\, c}{q}\,\chi_2\,,
\end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений. Одна из систем представляет уравнение для частицы с массой m_d, а другая представляет уравнение для частицы с массой m_u. Отсюда вытекает следующая интерпретация компонент волновой функции. Для красного d кварка левая компонента $d_L = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и правая компонента $d_R = \Psi^{123} + \Psi^{124}$, а для красного u кварка $u_L = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ и $u_R = \Psi^0 - \Psi^{34}$.

3. Уравнение для желтых кварков первого поколения

Уравнение релятивистской квантовой механики для свободных желтых кварков первого поколения получим, подставив в уравнение (17) структурные матрицы, выведенные в Приложении A. Для действительного регулярного представления алгебры кварков $\mathbb{Q}(u,d)$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В iab-представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (9). И в IAB-представлении компонентами волновой функции являются четыре IAB-функции вида (10). Приведем уравнения квантовой механики по отношению к IAB-компонентам волновой функции кварков:

$$\left(a\left|\begin{array}{cc|cc} & & & B\\ & & B & \\ \hline & \text{-}B & & \\ \text{-}B & & & \end{array}\right|\partial_4 + i\left|\begin{array}{cc|cc} & & \text{-}A & \\ & & & \text{-}A\\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right|\partial_1 + \left|\begin{array}{cc|cc} & & \text{-}I & \\ & & & \text{-}I\\ \hline I & & & \\ & I & & \end{array}\right|\partial_2 + a\left|\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1\\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right|\partial_3\right)\left\|\begin{array}{c}\Psi^0\\ \Psi^{34}\\ \Psi^{123}\\ \Psi^{124}\end{array}\right\|$$

$$= -\frac{\mathrm{m}_d\, c}{2\,q}\left|\begin{array}{cc|cc} \alpha & \beta & & \\ \beta & \alpha & & \\ \hline & & \alpha & \beta\\ & & \beta & \alpha \end{array}\right|\left\|\begin{array}{c}\Psi^0\\ \Psi^{34}\\ \Psi^{123}\\ \Psi^{124}\end{array}\right\|$$

Или

$$
\begin{aligned}
-a\,B\,\partial_4\Psi^{124} \quad &+(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2-a\,\partial_3)\Psi^{123} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\alpha\cdot\Psi^0+\beta\cdot\Psi^{34})\,, \\
-a\,B\,\partial_4\Psi^{123} \quad &+(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2-a\,\partial_3)\Psi^{124} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\beta\cdot\Psi^0+\alpha\cdot\Psi^{34})\,, \\
a\,B\,\partial_4\Psi^{34} \quad &-(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2+a\,\partial_3)\Psi^{0} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\alpha\cdot\Psi^{123}+\beta\cdot\Psi^{124})\,, \\
a\,B\,\partial_4\Psi^{0} \quad &-(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2+a\,\partial_3)\Psi^{34} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\beta\cdot\Psi^{123}+\alpha\cdot\Psi^{124})\,.
\end{aligned} \tag{23}
$$

4. Стандартное представление уравнения квантовой механики для желтых u и d кварков.

Преобразуем уравнения (23) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$
\begin{aligned}
-a\,B\,\partial_4\varphi_2+(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2-a\,\partial_3)\,\varphi_2 &= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\alpha+\beta)\,\varphi_1\,, \\
a\,B\,\partial_4\varphi_1-(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2+a\,\partial_3)\,\varphi_1 &= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\alpha+\beta)\,\varphi_2\,,
\end{aligned} \tag{24}
$$

где $\varphi_1=\Psi^0+\Psi^{34}$ и $\varphi_2=\Psi^{123}+\Psi^{124}$. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$
\begin{aligned}
a\,B\,\partial_4\chi_2+(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2+a\,\partial_3)\,\chi_2 &= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\beta-\alpha)\,\chi_1\,, \\
-a\,B\,\partial_4\chi_1-(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2-a\,\partial_3)\,\chi_1 &= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\beta-\alpha)\,\chi_2\,,
\end{aligned} \tag{25}
$$

где $\chi_1=\Psi^0-\Psi^{34}$ и $\chi_2=\Psi^{123}-\Psi^{124}$.

Или с учетом (15) и (16)

$$
\begin{aligned}
-a\,B\,\partial_4\varphi_2+(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2-a\,\partial_3)\,\varphi_2 &= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{q}\,\varphi_1\,, \\
a\,B\,\partial_4\varphi_1-(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2+a\,\partial_3)\,\varphi_1 &= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{q}\,\varphi_2\,,
\end{aligned} \tag{26}
$$

и

$$
\begin{aligned}
a\,B\,\partial_4\chi_2+(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2+a\,\partial_3)\,\chi_2 &= \frac{\mathrm{m}_u\,c}{q}\,\chi_1\,, \\
-a\,B\,\partial_4\chi_1-(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2-a\,\partial_3)\,\chi_1 &= \frac{\mathrm{m}_u\,c}{q}\,\chi_2\,,
\end{aligned} \tag{27}
$$

Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений. Одна из систем представляет уравнение для частицы с массой m_d, а другая представляет уравнение для частицы с массой m_u. Отсюда вытекает следующая интерпретация компонент волновой функции. Для желтого d кварка левая компонента $d_L=\Psi^0+\Psi^{34}$ и правая компонента $d_R=\Psi^{123}+\Psi^{124}$, а для желтого u кварка $u_L=\Psi^{123}-\Psi^{124}$ и $u_R=\Psi^0-\Psi^{34}$.

5. Уравнение для синих кварков первого поколения

Уравнение релятивистской квантовой механики для свободных синих кварков первого поколения получим, подставив в уравнение (17) структурные матрицы, выведенные в Приложении B. Для Для действительного регулярного представления алгебры кварков $\mathbb{Q}(u,d)$ компоненты волновой функции $\psi^K(x)$ представляют собой шестнадцать действительных функций. В iab-представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (9). И в IAB-представлении компонентами волновой функции являются четыре IAB-функции вида (10). Приведем уравнения квантовой механики по отношению к IAB-компонентам волновой функции кварков:

$$
\left(a \left|\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \end{array}\right| \partial_4 + i \left|\begin{array}{cc|cc} & & -A & \\ & & & -A \\ \hline A & & & \\ & A & & \end{array}\right| \partial_1 + \left|\begin{array}{cc|cc} & & -I & \\ & & & -I \\ \hline I & & & \\ & I & & \end{array}\right| \partial_2 + a \left|\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right| \partial_3 \right) \left\|\begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array}\right\|
$$

$$
= -\frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q} \left|\begin{array}{cc|cc} \alpha & -\beta & & \\ \beta & \alpha & & \\ \hline & & \alpha & -\beta \\ & & \beta & \alpha \end{array}\right| \left\|\begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array}\right\|
$$

Или

$$
\begin{aligned}
-a\,\partial_4\Psi^{124} \quad &+(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2-a\,\partial_3)\Psi^{123} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\alpha\cdot\Psi^0-\beta\cdot\Psi^{34})\,, \\
a\,\partial_4\Psi^{123} \quad &+(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2-a\,\partial_3)\Psi^{124} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\beta\cdot\Psi^0+\alpha\cdot\Psi^{34})\,, \\
-a\,\partial_4\Psi^{34} \quad &-(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2+a\,\partial_3)\Psi^{0} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\alpha\cdot\Psi^{123}-\beta\cdot\Psi^{124})\,, \\
a\,\partial_4\Psi^{0} \quad &-(i\,A\,\partial_1+I\,\partial_2+a\,\partial_3)\Psi^{34} \\
&= \frac{\mathrm{m}_d\,c}{2\,q}\,(\beta\cdot\Psi^{123}+\alpha\cdot\Psi^{124})\,.
\end{aligned} \tag{28}
$$

6. Стандартное представление уравнения квантовой механики для синих u и d кварков.

Преобразуем уравнения (28) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$a\,\partial_4\chi_1 + (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 - a\,\partial_3)\,\varphi_2 = \frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,q}\,\varphi_1 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,q}\,\chi_2\,,$$

$$a\,\partial_4\chi_2 - (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + a\,\partial_3)\,\varphi_1 = \frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,q}\,\varphi_2 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,q}\,\chi_1\,, \tag{29}$$

где $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$, $\chi_1 = \Psi^0 - \Psi^{34}$ и $\chi_2 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$, $\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_d\,\alpha$, $\mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_d\,\beta$.

Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$a\,\partial_4\varphi_1 + (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 + a\,\partial_3)\,\chi_2 = -\frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,q}\,\chi_1 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,q}\,\varphi_2\,,$$

$$a\,\partial_4\varphi_2 - (i\,A\,\partial_1 + I\,\partial_2 - a\,\partial_3)\,\chi_1 = -\frac{\mathrm{m}_1\,c}{2\,q}\,\chi_2 + \frac{\mathrm{m}_2\,c}{2\,q}\,\varphi_1\,, \tag{30}$$

Мы столкнулись со странным обстоятельством: система уравнений для синих кварков не разделяется на две системы, которые относились бы к разным частицам – верхней и нижней. Отметим этот вопрос и оставим его открытым.

IV. ВЫВОДЫ.

- Цветовые разновидности кварков ставятся в соответствие перестановочным соотношениям с участием базисного вектора времени и геометрических базисных векторов.
- В принятом понимании цвета кварки имеют три цветовые разновидности – красные, желтые, синие.
- Из алгебраической структуры векторов действия кварков следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений этих частиц. В общем случае нет оснований считать, что квантовые явления с участием кварков определяются постоянной Планка, а не другой постоянной величиной, имеющей размерность действия.
- Структура квантовых уравнений для свободных кварков такова, что они разделяются на две системы уравнений. Таким образом, мы имеем две частицы, одна из которых это верхний кварк, а другая – нижний кварк.
- Уравнения для верхних и нижних кварков отличаются не только массами частиц, но и знаком одной из компонент оператора импульса. Таким образом, в отличие от лептонов, движение в пространстве нижних кварков отличается от движения верхних кварков.
- Структура квантовых уравнений для свободных кварков такова, что волновые функции кварков разделяются на две компоненты – правую и левую подобно тому как это имеет место для лептонов. Такое разделение необходимо для описания электрослабого взаимодействия кварков.
- Правила формирования правых и левых компонент волновой функции для красных и желтых частиц отличаются от аналогичных правил для синих частиц. В первом случае для нижних частиц $\Psi_L = \Psi^0 + \Psi^{34}$ и $\Psi_R = \Psi^{123} + \Psi^{124}$, а для верхних частиц $\Psi_R = \Psi^0 - \Psi^{34}$ и $\Psi_L = \Psi^{123} - \Psi^{124}$, во втором случае указанные компоненты не относятся к разным частицам.

ПРИЛОЖЕНИЕ А: АЛГЕБРА ЖЕЛТЫХ U И D-КВАРКОВ $\mathbb{Q}(U,D)_Y$

1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры $\mathbb{Q}(u,d)_y$ и правила умножения, которым они подчиняются.

- λ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для λ_0 имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0 \,.$$

- Образующие векторы λ_i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов λ_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_i \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_i = \lambda_i \,.$$

$$\lambda_i \circ \lambda_i = \operatorname{sign} \lambda_i \,,$$

где

$$\operatorname{sign} \lambda_1 = \operatorname{sign} \lambda_2 = \operatorname{sign} \lambda_3 = -\operatorname{sign} \lambda_4 = \lambda_0 \,.$$

- Векторы

$$\lambda_{ik} = \lambda_k \circ \lambda_i \,.$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6 \,.$$

В соответствии с Разделом I Лекции 12 и Разделом I настоящей Лекции для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения)

$$\lambda_{21} = -\lambda_{21} \,, \quad \lambda_{13} = \lambda_{31} \,, \quad \lambda_{32} = -\lambda_{23} \,,$$
$$\lambda_{14} = \lambda_{41} \,, \quad \lambda_{24} = -\lambda_{42} \,, \quad \lambda_{34} = -\lambda_{43} \,.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности, имеем

$$\lambda_{21} \circ \lambda_{21} = -\lambda_0 \,, \qquad \lambda_{42} \circ \lambda_{42} = \lambda_0 \,,$$
$$\lambda_{32} \circ \lambda_{32} = -\lambda_0 \,, \qquad \lambda_{14} \circ \lambda_{14} = -\lambda_0 \,,$$
$$\lambda_{13} \circ \lambda_{13} = \lambda_0 \,, \qquad \lambda_{34} \circ \lambda_{34} = \lambda_0 \,.$$

- Векторы

$$\lambda_{ikl} = \lambda_l \circ \lambda_k \circ \lambda_i \,.$$

Здесь

$$i \neq k \,, i \neq l \,, k \neq l \,.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4 \,.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\lambda_{123} = -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132} \,,$$
$$\lambda_{124} = -\lambda_{214} = -\lambda_{241} = \lambda_{421} = -\lambda_{412} = -\lambda_{142} \,,$$
$$\lambda_{134} = \lambda_{314} = \lambda_{341} = -\lambda_{431} = -\lambda_{413} = -\lambda_{143} \,,$$
$$\lambda_{234} = -\lambda_{324} = \lambda_{342} = -\lambda_{432} = \lambda_{423} = -\lambda_{243} \,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0 \,, \qquad \lambda_{124} \circ \lambda_{124} = -\lambda_0 \,,$$
$$\lambda_{134} \circ \lambda_{134} = -\lambda_0 \,, \qquad \lambda_{234} \circ \lambda_{234} = \lambda_0 \,.$$

- Вектор

$$\lambda_{1324} = \lambda_1 \circ \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_4 \,.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\lambda_{1234} = -\lambda_{2134} = -\lambda_{2314} = \lambda_{3214} =$$
$$-\lambda_{3124} = -\lambda_{1324} = -\lambda_{1243} = \lambda_{2143} =$$
$$\lambda_{2413} = -\lambda_{4213} = \lambda_{4123} = \lambda_{1423} =$$
$$-\lambda_{1342} = -\lambda_{3142} = -\lambda_{3412} = \lambda_{4312} =$$
$$\lambda_{4132} = -\lambda_{1432} = \lambda_{2341} = -\lambda_{3241} =$$
$$\lambda_{3421} = -\lambda_{4321} = \lambda_{4231} = -\lambda_{2431} \,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений законов также следует

$$\lambda_{1324} \circ \lambda_{1324} = \lambda_0 \,.$$

2. Структурные матрицы алгебры желтых кварков $\mathbb{Q}(u,d)_y$

а. Структурные матрицы контравариантной алгебры действия желтых кварков $\mathbb{Q}(u,d)_{y_{right}}$

$$\lambda_0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 & & & & & & & & 13 \\
& 1 & & & & & & & 0 \\
& & 1 & & & & & & 14 \\
& & & 1 & & & & & 34 \\ \hline
& & & & 1 & & & & 2 \\
& & & & & 1 & & & 123 \\
& & & & & & 1 & & 234 \\
& & & & & & & 1 & 124 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 0 \\
& \mathbb{1} & & & 34 \\ \hline
& & \mathbb{1} & & 123 \\
& & & \mathbb{1} & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
13 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
21 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
0 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
14 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
1324 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
34 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ \hline
1 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
2 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
3 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
123 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
234 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
4 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
124 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& & & & & 1 & & & 13 \\
& & & & 1 & & & & 0 \\
& & & & & & & 1 & 14 \\
& & & & & & 1 & & 34 \\ \hline
& 1 & & & & & & & 2 \\
1 & & & & & & & & 123 \\
& & & 1 & & & & & 234 \\
& & 1 & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& A & & & 0 \\
& & & A & 34 \\ \hline
A & & & & 123 \\
& & A & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
13 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
21 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
14 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
1324 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
34 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
1 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
2 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
3 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
123 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
234 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
4 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
124 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& & & & & -1 & & & 13 \\
& & & & 1 & & & & 0 \\
& & & & & & & -1 & 14 \\
& & & & & & 1 & & 34 \\ \hline
& 1 & & & & & & & 2 \\
-1 & & & & & & & & 123 \\
& & & 1 & & & & & 234 \\
& & -1 & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& -I & & & 0 \\
& & & -I & 34 \\ \hline
I & & & & 123 \\
& & I & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
13 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
21 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
0 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
14 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
1324 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
34 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline
1 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
2 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
3 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
123 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
234 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
4 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
124 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& & & & -1 & & & & 13 \\
& & & & & -1 & & & 0 \\
& & & & & & 1 & & 14 \\
& & & & & & & 1 & 34 \\ \hline
1 & & & & & & & & 2 \\
& 1 & & & & & & & 123 \\
& & -1 & & & & & & 234 \\
& & & -1 & & & & & 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& -\mathbb{1} & & & 0 \\
& & & \mathbb{1} & 34 \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 123 \\
& & -\mathbb{1} & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$
\lambda_4 \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
13 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
21 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
14 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
34 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
123 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
234 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
4 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
124 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& & & & & & 1 & & 13 \\
& & & & & & & 1 & 0 \\
& & & & -1 & & & & 14 \\
& & & & & -1 & & & 34 \\ \hline
& & -1 & & & & & & 2 \\
& & & -1 & & & & & 123 \\
1 & & & & & & & & 234 \\
& 1 & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& & & \mathbb{1} & 0 \\
& & -\mathbb{1} & & 34 \\ \hline
& -\mathbb{1} & & & 123 \\
\mathbb{1} & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_{13} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
21 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
1324 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
3 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
4 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& 1 & & & & & & & 13 \\
1 & & & & & & & & 0 \\
& & & -1 & & & & & 14 \\
& & -1 & & & & & & 34 \\ \hline
& & & & & -1 & & & 2 \\
& & & & -1 & & & & 123 \\
& & & & & & & 1 & 234 \\
& & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
A & & & & 0 \\
& -A & & & 34 \\ \hline
& & -A & & 123 \\
& & & A & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_{21} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
-1 & & & & & & & & 13 \\
& 1 & & & & & & & 0 \\
& & -1 & & & & & & 14 \\
& & & 1 & & & & & 34 \\ \hline
& & & & 1 & & & & 2 \\
& & & & & -1 & & & 123 \\
& & & & & & 1 & & 234 \\
& & & & & & & -1 & 124 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
B & & & & 0 \\
& B & & & 34 \\ \hline
& & -B & & 123 \\
& & & -B & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_{32} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& 1 & & & & & & & 13 \\
-1 & & & & & & & & 0 \\
& & & -1 & & & & & 14 \\
& & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
& & & & & 1 & & & 2 \\
& & & & -1 & & & & 123 \\
& & & & & & & -1 & 234 \\
& & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
I & & & & 0 \\
& -I & & & 34 \\ \hline
& & I & & 123 \\
& & & -I & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\lambda_{14} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32&&&&&&&1&&&&&&&&&\\
13&&&&&&&&-1&&&&&&&&\\
21&&&&&1&&&&&&&&&&&\\
0&&&&&&-1&&&&&&&&&&\\ \hline
42&&&-1&&&&&&&&&&&&&\\
14&&&&1&&&&&&&&&&&&\\
1324&-1&&&&&&&&&&&&&&&\\
34&&1&&&&&&&&&&&&&&\\ \hline
1&&&&&&&&&&&&&&-1&&\\
2&&&&&&&&&&&&&&&&1\\
3&&&&&&&&&&&&&-1&&&\\
123&&&&&&&&&&&&&&&1&\\ \hline
134&&&&&&&&&&&1&&&&&\\
234&&&&&&&&&&&&-1&&&&\\
4&&&&&&&&&1&&&&&&&\\
124&&&&&&&&&&-1&&&&&&\\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&-1&&&&&13\\
&&-1&&&&&&0\\
&1&&&&&&&14\\
1&&&&&&&&34\\ \hline
&&&&&&&1&2\\
&&&&&&1&&123\\
&&&&&-1&&&234\\
&&&&-1&&&&124\\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&-A&&&0\\
A&&&&34\\ \hline
&&&A&123\\
&&-A&&124\\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{34} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32&&&&&1&&&&&&&&&&&\\
13&&&&&&1&&&&&&&&&&\\
21&&&&&&&1&&&&&&&&&\\
0&&&&&&&&1&&&&&&&&\\ \hline
42&1&&&&&&&&&&&&&&&\\
14&&1&&&&&&&&&&&&&&\\
1324&&&1&&&&&&&&&&&&&\\
34&&&&1&&&&&&&&&&&&\\ \hline
1&&&&&&&&&&&&&1&&&\\
2&&&&&&&&&&&&&&1&&\\
3&&&&&&&&&&&&&&&1&\\
123&&&&&&&&&&&&&&&&1\\ \hline
134&&&&&&&&&1&&&&&&&\\
234&&&&&&&&&&1&&&&&&\\
4&&&&&&&&&&&1&&&&&\\
124&&&&&&&&&&&&1&&&&\\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&1&&&&&&13\\
&&&1&&&&&0\\
1&&&&&&&&14\\
&1&&&&&&&34\\ \hline
&&&&&&1&&2\\
&&&&&&&1&123\\
&&&&1&&&&234\\
&&&&&1&&&124\\ \hline
\end{array} = \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&\mathbb{1}&&&0\\
\mathbb{1}&&&&34\\ \hline
&&&\mathbb{1}&123\\
&&\mathbb{1}&&124\\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{42} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32&&&&&&&&-1&&&&&&&&\\
13&&&&&&&-1&&&&&&&&&\\
21&&&&&&1&&&&&&&&&&\\
0&&&&&1&&&&&&&&&&&\\ \hline
42&&&&1&&&&&&&&&&&&\\
14&&&1&&&&&&&&&&&&&\\
1324&&-1&&&&&&&&&&&&&&\\
34&-1&&&&&&&&&&&&&&&\\ \hline
1&&&&&&&&&&&&&&&&-1\\
2&&&&&&&&&&&&&&&-1&\\
3&&&&&&&&&&&&&&1&&\\
123&&&&&&&&&&&&&1&&&\\ \hline
134&&&&&&&&&&&&1&&&&\\
234&&&&&&&&&&&1&&&&&\\
4&&&&&&&&&&-1&&&&&&\\
124&&&&&&&&&-1&&&&&&&\\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&-1&&&&&13\\
&&1&&&&&&0\\
&1&&&&&&&14\\
-1&&&&&&&&34\\ \hline
&&&&&&&-1&2\\
&&&&&&1&&123\\
&&&&&1&&&234\\
&&&&-1&&&&124\\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&-I&&&0\\
I&&&&34\\ \hline
&&&-I&123\\
&&I&&124\\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{123} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32&&&&&&&&&-1&&&&&&&\\
13&&&&&&&&&&-1&&&&&&\\
21&&&&&&&&&&&1&&&&&\\
0&&&&&&&&&&&&1&&&&\\ \hline
42&&&&&&&&&&&&&1&&&\\
14&&&&&&&&&&&&&&1&&\\
1324&&&&&&&&&&&&&&&-1&\\
34&&&&&&&&&&&&&&&&-1\\ \hline
1&-1&&&&&&&&&&&&&&&\\
2&&-1&&&&&&&&&&&&&&\\
3&&&1&&&&&&&&&&&&&\\
123&&&&1&&&&&&&&&&&&\\ \hline
134&&&&&1&&&&&&&&&&&\\
234&&&&&&1&&&&&&&&&&\\
4&&&&&&&-1&&&&&&&&&\\
124&&&&&&&&-1&&&&&&&&\\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&-1&&&&13\\
&&&&&1&&&0\\
&&&&&&1&&14\\
&&&&&&&-1&34\\ \hline
-1&&&&&&&&2\\
&1&&&&&&&123\\
&&1&&&&&&234\\
&&&-1&&&&&124\\ \hline
\end{array} = \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&B&&0\\
&&&-B&34\\ \hline
B&&&&123\\
&-B&&&124\\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{124} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
13 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
21 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
0 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
42 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
14 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
1324 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
34 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\ \hline
1 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
2 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
3 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
123 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\ \hline
134 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
234 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
4 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
124 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&& 1 & \\
0 &&&&&&&& -1 \\
14 &&&&& -1 &&& \\
34 &&&&&& -1 && \\ \hline
2 &&& 1 &&&&& \\
123 &&&& -1 &&&& \\
234 & -1 &&&&&&& \\
124 && 1 &&&&&& \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& -B \\
34 &&& B & \\ \hline
123 && -B && \\
124 & B &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{234} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
13 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
21 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
0 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\ \hline
42 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
14 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
1324 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
34 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
2 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
3 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
123 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
234 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
4 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
124 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&& 1 & \\
14 &&&&&& -1 && \\
34 &&&&& 1 &&& \\ \hline
2 &&&& 1 &&&& \\
123 &&& -1 &&&&& \\
234 && 1 &&&&&& \\
124 & -1 &&&&&&& \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& -I \\
34 &&& -I & \\ \hline
123 && I && \\
124 & I &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{134} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
21 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
0 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
14 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
1324 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
34 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
2 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
3 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
123 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
234 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
4 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
124 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&&& 1 \\
0 &&&&&&& 1 & \\
14 &&&&&& 1 && \\
34 &&&&& 1 &&& \\ \hline
2 &&&& 1 &&&& \\
123 &&& 1 &&&&& \\
234 && 1 &&&&&& \\
124 & 1 &&&&&&& \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& A \\
34 &&& A & \\ \hline
123 && A && \\
124 & A &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{1324} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
13 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
21 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
0 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\ \hline
42 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
14 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
1324 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
34 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
2 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
3 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
123 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\ \hline
134 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
234 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
4 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
124 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&& -1 &&&&& \\
0 &&&& 1 &&&& \\
14 & -1 &&&&&&& \\
34 && 1 &&&&&& \\ \hline
2 &&&&&&& 1 & \\
123 &&&&&&&& -1 \\
234 &&&&& 1 &&& \\
124 &&&&&& -1 && \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 && B && \\
34 & B &&& \\ \hline
123 &&&& -B \\
124 &&& -B & \\ \hline
\end{array}$$

b. Структурные матрицы ковариантной алгебры пространства-времени желтых кварков $\mathbb{Q}(u,d)_{y_{left}}$

$$\Lambda^0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32&13&21&0 & 42&14&1324&34 & 1&2&3&123 & 134&234&4&124 \\ \hline
32 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\
13 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\
21 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\
0 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\ \hline
42 & &&& & 1&&& & &&& & &&& \\
14 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\
1324 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\
34 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\
2 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\
3 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\
123 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\ \hline
134 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\
234 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\
4 & &&& & &&& & &&& & &&1& \\
124 & &&& & &&& & &&& & &&&1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13&0&14&34 & 2&123&134&124 & \\ \hline
1&&& & &&& & 13 \\
&1&& & &&& & 0 \\
&&1& & &&& & 14 \\
&&&1 & &&& & 34 \\ \hline
&&& & 1&&& & 2 \\
&&& & &1&& & 123 \\
&&& & &&1& & 234 \\
&&& & &&&1 & 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c}
0&34 & 123&124 & \\ \hline
\mathbb{1}& & & & 0 \\
&\mathbb{1} & & & 34 \\ \hline
& & \mathbb{1}& & 123 \\
& & &\mathbb{1} & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32&13&21&0 & 42&14&1324&34 & 1&2&3&123 & 134&234&4&124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &&&-1 & &&& \\
13 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\
21 & &&& & &&& & &-1&& & &&& \\
0 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\ \hline
42 & &&& & &&& & &&& & &&&-1 \\
14 & &&& & &&& & &&& & &&1& \\
1324 & &&& & &&& & &&& & &-1&& \\
34 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\ \hline
1 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\
2 & &&& & &&-1& & &&& & &&& \\
3 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\
123 & &&& & -1&&& & &&& & &&& \\ \hline
134 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
234 & &&-1& & &&& & &&& & &&& \\
4 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\
124 & -1&&& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13&0&14&34 & 2&123&134&124 & \\ \hline
&&& & &-1&& & 13 \\
&&& & -1&&& & 0 \\
&&& & &&&-1 & 14 \\
&&& & &&-1& & 34 \\ \hline
&1&& & &&& & 2 \\
1&&& & &&& & 123 \\
&&&1 & &&& & 234 \\
&&1& & &&& & 124 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|c}
0&34 & 123&124 & \\ \hline
& & -A& & 0 \\
& & &-A & 34 \\ \hline
A& & & & 123 \\
&A & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32&13&21&0 & 42&14&1324&34 & 1&2&3&123 & 134&234&4&124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &&-1& & &&& \\
13 & &&& & &&& & &&&-1 & &&& \\
21 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\
0 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\ \hline
42 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\
14 & &&& & &&& & &&& & &&&-1 \\
1324 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\
34 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\ \hline
1 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\
2 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
3 & -1&&& & &&& & &&& & &&& \\
123 & &-1&& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
134 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\
234 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\
4 & &&& & -1&&& & &&& & &&& \\
124 & &&& & &-1&& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13&0&14&34 & 2&123&134&124 & \\ \hline
&&& & &-1&& & 13 \\
&&& & 1&&& & 0 \\
&&& & &&&-1 & 14 \\
&&& & &&1& & 34 \\ \hline
&1&& & &&& & 2 \\
-1&&& & &&& & 123 \\
&&&1 & &&& & 234 \\
&&-1& & &&& & 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c}
0&34 & 123&124 & \\ \hline
& & -I& & 0 \\
& & &-I & 34 \\ \hline
I& & & & 123 \\
&I & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32&13&21&0 & 42&14&1324&34 & 1&2&3&123 & 134&234&4&124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\
13 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\
21 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\
0 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\ \hline
42 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\
14 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\
1324 & &&& & &&& & &&& & &&&1 \\
34 & &&& & &&& & &&& & &&1& \\ \hline
1 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\
2 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\
3 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
123 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
134 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\
234 & &&& & 1&&& & &&& & &&& \\
4 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\
124 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13&0&14&34 & 2&123&134&124 & \\ \hline
&&& & 1&&& & 13 \\
&&& & &1&& & 0 \\
&&& & &&1& & 14 \\
&&& & &&&1 & 34 \\ \hline
1&&& & &&& & 2 \\
&1&& & &&& & 123 \\
&&1& & &&& & 234 \\
&&&1 & &&& & 124 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|c}
0&34 & 123&124 & \\ \hline
& & \mathbb{1}& & 0 \\
& & &\mathbb{1} & 34 \\ \hline
\mathbb{1}& & & & 123 \\
&\mathbb{1} & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$
\Lambda^{4} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \cline{2-17}
32 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\
13 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
21 &&&& &&&& &&&& &&&& 1 \\
0 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\ \cline{2-17}
42 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\
14 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\
1324 &&&& &&&& &&&& 1 &&&& \\
34 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\ \cline{2-17}
1 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\
2 &&&& & 1 &&&& &&&& &&& \\
3 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
123 &&&& &&& -1 &&&& &&&& & \\ \cline{2-17}
134 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\
234 & 1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
4 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
124 &&& -1 &&&& &&&& &&&& & \\ \cline{2-17}
\end{array}
$$

$$
= \quad a
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& && -1 && 13 \\
&&&& &&& 1 & 0 \\
&&&& -1 &&&& 14 \\
&&&& & 1 &&& 34 \\ \cline{1-8}
&& 1 &&&& && 2 \\
&&& -1 &&&& & 123 \\
1 &&&& &&&& 234 \\
& -1 &&&& &&& 124 \\ \cline{1-8}
\end{array}
\quad = \quad a
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& B & 0 \\
&& B && 34 \\ \cline{1-4}
& -B &&& 123 \\
-B &&&& 124 \\ \cline{1-4}
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{13} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \cline{2-17}
32 &&& -1 &&&& &&&& &&&& & \\
13 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
21 & -1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
0 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\ \cline{2-17}
42 &&&& &&& -1 &&&& &&&& & \\
14 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
1324 &&&& & -1 &&&& &&&& &&& \\
34 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\ \cline{2-17}
1 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\
2 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
3 &&&& &&&& & 1 &&&& &&& \\
123 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\ \cline{2-17}
134 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
234 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
4 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
124 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\ \cline{2-17}
\end{array}
$$

$$
= \quad b
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& 1 &&&& &&& 13 \\
1 &&&& &&&& 0 \\
&&& 1 &&&& & 14 \\
&& 1 &&&& && 34 \\ \cline{1-8}
&&&& & -1 &&& 2 \\
&&&& -1 &&&& 123 \\
&&&& &&& -1 & 234 \\
&&&& && -1 && 124 \\ \cline{1-8}
\end{array}
\quad = \quad b
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
A &&&& 0 \\
& A &&& 34 \\ \cline{1-4}
&& -A && 123 \\
&&& -A & 124 \\ \cline{1-4}
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{21} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \cline{2-17}
32 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\
13 & -1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
21 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
0 &&& 1 &&&& &&&& &&&& & \\ \cline{2-17}
42 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\
14 &&&& & -1 &&&& &&&& &&& \\
1324 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
34 &&&& &&& 1 &&&& &&&& & \\ \cline{2-17}
1 &&&& &&&& && 1 &&&& && \\
2 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\
3 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
123 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\ \cline{2-17}
134 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
234 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
4 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
124 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\ \cline{2-17}
\end{array}
$$

$$
= \quad i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 &&&& &&&& 13 \\
& -1 &&&& &&& 0 \\
&& 1 &&&& && 14 \\
&&& -1 &&&& & 34 \\ \cline{1-8}
&&&& 1 &&&& 2 \\
&&&& & -1 &&& 123 \\
&&&& && 1 && 234 \\
&&&& &&& -1 & 124 \\ \cline{1-8}
\end{array}
\quad = \quad -i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
B &&&& 0 \\
& B &&& 34 \\ \cline{1-4}
&& B && 123 \\
&&& B & 124 \\ \cline{1-4}
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{32} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \cline{2-17}
32 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
13 &&& -1 &&&& &&&& &&&& & \\
21 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\
0 & 1 &&&& &&&& &&&& &&& \\ \cline{2-17}
42 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
14 &&&& &&& -1 &&&& &&&& & \\
1324 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\
34 &&&& & 1 &&&& &&&& &&& \\ \cline{2-17}
1 &&&& &&&& &&&& 1 &&&& \\
2 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\
3 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\
123 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\ \cline{2-17}
134 &&&& &&&& &&&& &&&& 1 \\
234 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
4 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\
124 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\ \cline{2-17}
\end{array}
$$

$$
= \quad a
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& -1 &&&& &&& 13 \\
1 &&&& &&&& 0 \\
&&& -1 &&&& & 14 \\
&& 1 &&&& && 34 \\ \cline{1-8}
&&&& & 1 &&& 2 \\
&&&& -1 &&&& 123 \\
&&&& &&& 1 & 234 \\
&&&& && -1 && 124 \\ \cline{1-8}
\end{array}
\quad = \quad a
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
-I &&&& 0 \\
& -I &&& 34 \\ \cline{1-4}
&& I && 123 \\
&&& I & 124 \\ \cline{1-4}
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{14} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&& -1 \\
21 &&&&& -1 \\
0 &&&&&& 1 \\ \hline
42 &&& 1 \\
14 &&&& -1 \\
1324 & -1 \\
34 && 1 \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
2 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
3 &&&&&&&&&&&&& -1 \\
123 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
134 &&&&&&&&&&& 1 \\
234 &&&&&&&&&&&& -1 \\
4 &&&&&&&&& -1 \\
124 &&&&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& -1 &&&&& 13 \\
&& 1 &&&&&& 0 \\
& -1 &&&&&&& 14 \\
1 &&&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&&& -1 & 2 \\
&&&&&& 1 && 123 \\
&&&&& 1 &&& 234 \\
&&&& -1 &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= -b
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& I &&& 0 \\
I &&&& 34 \\ \hline
&&& I & 123 \\
&& I && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{34} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&& -1 \\
13 &&&&&& -1 \\
21 &&&&&&& 1 \\
0 &&&&&&&& 1 \\ \hline
42 & -1 \\
14 && -1 \\
1324 &&& 1 \\
34 &&&& 1 \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&& 1 \\
2 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\
3 &&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
123 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
134 &&&&&&&&& 1 \\
234 &&&&&&&&&& 1 \\
4 &&&&&&&&&&& -1 \\
124 &&&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= 1
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&& -1 &&&&&& 13 \\
&&& 1 &&&&& 0 \\
-1 &&&&&&&& 14 \\
& 1 &&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&& 1 && 2 \\
&&&&&&& -1 & 123 \\
&&&& 1 &&&& 234 \\
&&&&& -1 &&& 124 \\ \hline
\end{array}
= 1
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& B &&& 0 \\
B &&&& 34 \\ \hline
&&& -B & 123 \\
&& -B && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{42} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&& 1 \\
21 &&&&&& 1 \\
0 &&&&& 1 \\ \hline
42 &&&& 1 \\
14 &&& 1 \\
1324 && 1 \\
34 & 1 \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
2 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
3 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\
123 &&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&& 1 \\
234 &&&&&&&&&&& 1 \\
4 &&&&&&&&&& 1 \\
124 &&&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& 1 &&&&& 13 \\
&& 1 &&&&&& 0 \\
& 1 &&&&&&& 14 \\
1 &&&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&&& 1 & 2 \\
&&&&&& 1 && 123 \\
&&&&& 1 &&& 234 \\
&&&& 1 &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& A &&& 0 \\
A &&&& 34 \\ \hline
&&& A & 123 \\
&& A && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{123} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&&&& -1 \\
21 &&&&&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&& 1 \\
14 &&&&&&&&&&&&&& -1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
1 & 1 \\
2 && -1 \\
3 &&& -1 \\
123 &&&& 1 \\ \hline
134 &&&&& 1 \\
234 &&&&&& -1 \\
4 &&&&&&& -1 \\
124 &&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& -1 &&&& 13 \\
&&&&& 1 &&& 0 \\
&&&&&& -1 && 14 \\
&&&&&&& 1 & 34 \\ \hline
-1 &&&&&&&& 2 \\
& 1 &&&&&&& 123 \\
&& -1 &&&&&& 234 \\
&&& 1 &&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& B && 0 \\
&&& B & 34 \\ \hline
B &&&& 123 \\
& B &&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\Lambda^{124} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
13 & &&& &&&& &&&& && 1 && \\
21 & &&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
0 & &&& &&&& &&&& &&&& 1 \\ \hline
42 & &&& &&&& -1 &&& &&&& \\
14 & &&& &&&& & 1 && &&&& \\
1324 & &&& &&&& && -1 & &&&& \\
34 & &&& &&&& &&& 1 &&&& \\ \hline
1 & &&& & 1 &&& &&&& &&&& \\
2 & &&& && -1 && &&&& &&&& \\
3 & &&& &&& 1 & &&&& &&&& \\
123 & &&& &&&& -1 &&&& &&&& \\ \hline
134 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\
234 & & -1 && &&&& &&&& &&&& \\
4 & && 1 & &&&& &&&& &&&& \\
124 & &&& -1 &&&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&&& 1 && 13 \\
&&&&&&& 1 & 0 \\
&&&& 1 &&&& 14 \\
&&&&& 1 &&& 34 \\ \hline
&& -1 &&&&&& 2 \\
&&& -1 &&&&& 123 \\
-1 &&&&&&&& 234 \\
& -1 &&&&&&& 124 \\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& \mathbb{1} & 0 \\
&& \mathbb{1} && 34 \\ \hline
& -\mathbb{1} &&& 123 \\
-\mathbb{1} &&&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^{234} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
13 & &&& &&&& &&&& &&&& 1 \\
21 & &&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
0 & &&& &&&& &&&& && 1 && \\ \hline
42 & &&& &&&& &&& 1 & &&&& \\
14 & &&& &&&& &&&& 1 &&&& \\
1324 & &&& &&&& & 1 &&& &&&& \\
34 & &&& &&&& && 1 && &&&& \\ \hline
1 & &&& &&& 1 & &&&& &&&& \\
2 & &&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
3 & &&& & 1 &&& &&&& &&&& \\
123 & &&& && 1 && &&&& &&&& \\ \hline
134 & && 1 & &&&& &&&& &&&& \\
234 & &&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
4 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\
124 & & 1 && &&&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&&&& 1 & 13 \\
&&&&&& 1 && 0 \\
&&&&& 1 &&& 14 \\
&&&& 1 &&&& 34 \\ \hline
&&& 1 &&&&& 2 \\
&& 1 &&&&&& 123 \\
& 1 &&&&&&& 234 \\
1 &&&&&&&& 124 \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& A & 0 \\
&& A && 34 \\ \hline
& A &&& 123 \\
A &&&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^{134} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& &&&& &&&& &&&& 1 \\
13 & &&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
21 & &&& &&&& &&&& && -1 && \\
0 & &&& &&&& &&&& & 1 &&& \\ \hline
42 & &&& &&&& &&&& 1 &&&& \\
14 & &&& &&&& &&& -1 & &&&& \\
1324 & &&& &&&& && -1 && &&&& \\
34 & &&& &&&& & 1 &&& &&&& \\ \hline
1 & &&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
2 & &&& &&& -1 & &&&& &&&& \\
3 & &&& && -1 && &&&& &&&& \\
123 & &&& & 1 &&& &&&& &&&& \\ \hline
134 & &&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
234 & && -1 & &&&& &&&& &&&& \\
4 & & -1 && &&&& &&&& &&&& \\
124 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&&&& 1 & 13 \\
&&&&&& -1 && 0 \\
&&&&& 1 &&& 14 \\
&&&& -1 &&&& 34 \\ \hline
&&& 1 &&&&& 2 \\
&& -1 &&&&&& 123 \\
& 1 &&&&&&& 234 \\
-1 &&&&&&&& 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& I & 0 \\
&& I && 34 \\ \hline
& I &&& 123 \\
I &&&& 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^{1324} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& && -1 && &&&& &&&& \\
13 & &&& & 1 &&& &&&& &&&& \\
21 & &&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
0 & &&& &&& 1 & &&&& &&&& \\ \hline
42 & & -1 && &&&& &&&& &&&& \\
14 & 1 &&& &&&& &&&& &&&& \\
1324 & &&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
34 & && 1 & &&&& &&&& &&&& \\ \hline
1 & &&& &&&& &&&& & 1 && \\
2 & &&& &&&& &&&& -1 &&& \\
3 & &&& &&&& &&&& &&& 1 \\
123 & &&& &&&& &&&& && -1 & \\ \hline
134 & &&& &&&& & 1 && &&&& \\
234 & &&& &&&& -1 &&& &&&& \\
4 & &&& &&&& &&& 1 & &&&& \\
124 & &&& &&&& && -1 & &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&& -1 &&&&&& 13 \\
&&& -1 &&&&& 0 \\
-1 &&&&&&&& 14 \\
& -1 &&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&& 1 && 2 \\
&&&&&&& 1 & 123 \\
&&&& 1 &&&& 234 \\
&&&&& 1 &&& 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& -\mathbb{1} &&& 0 \\
-\mathbb{1} &&&& 34 \\ \hline
&&& \mathbb{1} & 123 \\
&& \mathbb{1} && 124 \\ \hline
\end{array}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В: АЛГЕБРА СИНИХ U И D-КВАРКОВ $\mathbb{Q}(U, D)_B$

1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры $\mathbb{Q}(u, d)_b$ и правила умножения, которым они подчиняются.

- λ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для λ_0 имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0 .$$

- Образующие векторы λ_i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов λ_i равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_i \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_i = \lambda_i .$$

$$\lambda_i \circ \lambda_i = \operatorname{sign} \lambda_i ,$$

где

$$\operatorname{sign} \lambda_1 = \operatorname{sign} \lambda_2 = \operatorname{sign} \lambda_3 = - \operatorname{sign} \lambda_4 = \lambda_0 .$$

- Векторы

$$\lambda_{ik} = \lambda_k \circ \lambda_i .$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6 .$$

В соответствии с Разделом I Лекции 12 и Разделом I настоящей Лекции для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения)

$$\lambda_{21} = -\lambda_{21} , \quad \lambda_{13} = \lambda_{31} , \quad \lambda_{32} = -\lambda_{23} ,$$
$$\lambda_{14} = \lambda_{41} , \quad \lambda_{24} = -\lambda_{42} , \quad \lambda_{34} = \lambda_{43} .$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности, имеем

$$\lambda_{21} \circ \lambda_{21} = -\lambda_0 , \qquad \lambda_{42} \circ \lambda_{42} = \lambda_0 ,$$
$$\lambda_{32} \circ \lambda_{32} = -\lambda_0 , \qquad \lambda_{14} \circ \lambda_{14} = -\lambda_0 ,$$
$$\lambda_{13} \circ \lambda_{13} = \lambda_0 , \qquad \lambda_{34} \circ \lambda_{34} = -\lambda_0 .$$

- Векторы

$$\lambda_{ikl} = \lambda_l \circ \lambda_k \circ \lambda_i .$$

Здесь

$$i \neq k , i \neq l , k \neq l .$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4 .$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\lambda_{123} = -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132} ,$$
$$\lambda_{124} = -\lambda_{214} = -\lambda_{241} = \lambda_{421} = -\lambda_{412} = -\lambda_{142} ,$$
$$\lambda_{134} = \lambda_{314} = \lambda_{341} = \lambda_{431} = \lambda_{413} = \lambda_{143} ,$$
$$\lambda_{234} = -\lambda_{324} = \lambda_{342} = \lambda_{432} = -\lambda_{423} = \lambda_{243} .$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0 , \qquad \lambda_{124} \circ \lambda_{124} = -\lambda_0 ,$$
$$\lambda_{134} \circ \lambda_{134} = -\lambda_0 , \qquad \lambda_{234} \circ \lambda_{234} = -\lambda_0 .$$

- Вектор

$$\lambda_{1324} = \lambda_1 \circ \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_4 .$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из перестановочных соотношений

$$\lambda_{1234} = -\lambda_{2134} = -\lambda_{2314} = \lambda_{3214} =$$
$$-\lambda_{3124} = -\lambda_{1324} = \lambda_{1243} = -\lambda_{2143} =$$
$$-\lambda_{2413} = \lambda_{4213} = -\lambda_{4123} = -\lambda_{1423} =$$
$$\lambda_{1342} = \lambda_{3142} = \lambda_{3412} = \lambda_{4312} =$$
$$\lambda_{4132} = \lambda_{1432} = -\lambda_{2341} = \lambda_{3241} =$$
$$-\lambda_{3421} = -\lambda_{4321} = \lambda_{4231} = -\lambda_{2431} .$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{1324} \circ \lambda_{1324} = \lambda_0 .$$

2. Структурные матрицы алгебры синих кварков $\mathbb{Q}(u,d)_b$

a. Структурные матрицы контравариантной алгебры действия синих кварков $\mathbb{Q}(u,d)_{b_{right}}$

$$
\lambda_0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & 1 \\
13 && 1 \\
21 &&& 1 \\
0 &&&& 1 \\ \hline
42 &&&&& 1 \\
14 &&&&&& 1 \\
1324 &&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&&& 1 \\ \hline
1 &&&&&&&&& 1 \\
2 &&&&&&&&&& 1 \\
3 &&&&&&&&&&& 1 \\
123 &&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&& 1 \\
234 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\
4 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
124 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1} \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 &&&&&&&& 13 \\
& 1 &&&&&&& 0 \\
&& 1 &&&&&& 14 \\
&&& 1 &&&&& 34 \\ \hline
&&&& 1 &&&& 2 \\
&&&&& 1 &&& 123 \\
&&&&&& 1 && 234 \\
&&&&&&& 1 & 124 \\ \hline
\end{array}
\quad = \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\mathbb{1} &&&& 0 \\
& \mathbb{1} &&& 34 \\ \hline
&& \mathbb{1} && 123 \\
&&& \mathbb{1} & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&&&&& 1 \\
21 &&&&&&&&&& 1 \\
0 &&&&&&&&& 1 \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
14 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
1 &&&& 1 \\
2 &&& 1 \\
3 && 1 \\
123 & 1 \\ \hline
134 &&&&&&&& 1 \\
234 &&&&&&& 1 \\
4 &&&&&& 1 \\
124 &&&&& 1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&& 1 &&& 13 \\
&&&& 1 &&&& 0 \\
&&&&&&& 1 & 14 \\
&&&&&& 1 && 34 \\ \hline
& 1 &&&&&&& 2 \\
1 &&&&&&&& 123 \\
&&& 1 &&&&& 234 \\
&& 1 &&&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
\quad = a \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& A && 0 \\
&&& A & 34 \\ \hline
A &&&& 123 \\
& A &&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&&&&&& -1 \\
21 &&&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&&&&& 1 \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
14 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&& -1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
1 &&& -1 \\
2 &&&& 1 \\
3 & 1 \\
123 && -1 \\ \hline
134 &&&&&&& -1 \\
234 &&&&&&&& 1 \\
4 &&&&& 1 \\
124 &&&&&& -1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&& -1 &&& 13 \\
&&&& 1 &&&& 0 \\
&&&&&&& -1 & 14 \\
&&&&&& 1 && 34 \\ \hline
& 1 &&&&&&& 2 \\
-1 &&&&&&&& 123 \\
&&& 1 &&&&& 234 \\
&& -1 &&&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
\quad = b \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& -I && 0 \\
&&& -I & 34 \\ \hline
I &&&& 123 \\
& I &&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&& -1 \\
13 &&&&&&&&& 1 \\
21 &&&&&&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&& -1 \\
14 &&&&&&&&&&&&& 1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
1 && 1 \\
2 & -1 \\
3 &&&& 1 \\
123 &&& -1 \\ \hline
134 &&&&&& 1 \\
234 &&&&& -1 \\
4 &&&&&&&& 1 \\
124 &&&&&&& -1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& -1 &&&& 13 \\
&&&&& -1 &&& 0 \\
&&&&&& -1 && 14 \\
&&&&&&& -1 & 34 \\ \hline
1 &&&&&&&& 2 \\
& 1 &&&&&&& 123 \\
&& 1 &&&&&& 234 \\
&&& 1 &&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
\quad = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& -\mathbb{1} && 0 \\
&&& -\mathbb{1} & 34 \\ \hline
\mathbb{1} &&&& 123 \\
& \mathbb{1} &&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\lambda_4 \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
13 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
21 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
14 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
34 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
123 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
234 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
4 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
124 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& & & & & & 1 & & 13 \\
& & & & & & & 1 & 0 \\
& & & & -1 & & & & 14 \\
& & & & & -1 & & & 34 \\ \hline
& & -1 & & & & & & 2 \\
& & & -1 & & & & & 123 \\
1 & & & & & & & & 234 \\
& 1 & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& & & \mathbb{1} & 0 \\
& & -\mathbb{1} & & 34 \\ \hline
& -\mathbb{1} & & & 123 \\
\mathbb{1} & & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{13} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
21 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
1324 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
3 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
4 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& 1 & & & & & & & 13 \\
1 & & & & & & & & 0 \\
& & & 1 & & & & & 14 \\
& & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
& & & & & -1 & & & 2 \\
& & & & -1 & & & & 123 \\
& & & & & & & -1 & 234 \\
& & & & & & -1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
A & & & & 0 \\
& A & & & 34 \\ \hline
& & -A & & 123 \\
& & & -A & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{21} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
-1 & & & & & & & & 13 \\
& 1 & & & & & & & 0 \\
& & -1 & & & & & & 14 \\
& & & 1 & & & & & 34 \\ \hline
& & & & 1 & & & & 2 \\
& & & & & -1 & & & 123 \\
& & & & & & 1 & & 234 \\
& & & & & & & -1 & 124 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
B & & & & 0 \\
& B & & & 34 \\ \hline
& & -B & & 123 \\
& & & -B & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\lambda_{32} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& 1 & & & & & & & 13 \\
-1 & & & & & & & & 0 \\
& & & 1 & & & & & 14 \\
& & -1 & & & & & & 34 \\ \hline
& & & & & 1 & & & 2 \\
& & & & -1 & & & & 123 \\
& & & & & & & 1 & 234 \\
& & & & & & -1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
I & & & & 0 \\
& I & & & 34 \\ \hline
& & I & & 123 \\
& & & I & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$
\lambda_{14} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
13 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\
21 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
0 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
14 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
1324 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
34 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
2 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
3 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
123 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\ \hline
134 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
234 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
4 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
124 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& -1 &&&&& 13 \\
&& -1 &&&&&& 0 \\
& 1 &&&&&&& 14 \\
1 &&&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&&& 1 & 2 \\
&&&&&& 1 && 123 \\
&&&&& -1 &&& 234 \\
&&&& -1 &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& -A &&& 0 \\
A &&&& 34 \\ \hline
&&& A & 123 \\
&& -A && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_{34} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
13 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
21 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
0 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\ \hline
42 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
14 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
1324 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
34 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
2 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\
3 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
123 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
134 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
234 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
4 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
124 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&& -1 &&&&&& 13 \\
&&& -1 &&&&& 0 \\
1 &&&&&&&& 14 \\
& 1 &&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&& -1 && 2 \\
&&&&&&& -1 & 123 \\
&&&& 1 &&&& 234 \\
&&&&& 1 &&& 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& -\mathbb{1} &&& 0 \\
\mathbb{1} &&&& 34 \\ \hline
&&& -\mathbb{1} & 123 \\
&& \mathbb{1} && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_{42} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\
13 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
21 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
0 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
14 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
1324 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
34 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
2 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
3 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
123 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
234 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
4 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
124 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& -1 &&&&& 13 \\
&& 1 &&&&&& 0 \\
& 1 &&&&&&& 14 \\
-1 &&&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&&& -1 & 2 \\
&&&&&& 1 && 123 \\
&&&&& 1 &&& 234 \\
&&&& -1 &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& -I &&& 0 \\
I &&&& 34 \\ \hline
&&& -I & 123 \\
&& I && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_{123} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
13 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
21 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
0 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
14 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
34 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
1 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
2 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
3 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
123 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
234 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
4 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
124 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& -1 &&&& 13 \\
&&&&& 1 &&& 0 \\
&&&&&& -1 && 14 \\
&&&&&&& 1 & 34 \\ \hline
-1 &&&&&&&& 2 \\
& 1 &&&&&&& 123 \\
&& -1 &&&&&& 234 \\
&&& 1 &&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& B && 0 \\
&&& B & 34 \\ \hline
B &&&& 123 \\
& B &&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_{124} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\
13 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\
21 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\
0 & &&& & &&& & &&& & &&&-1 \\ \hline
42 & &&& & &&& & -1&&& & &&& \\
14 & &&& & &&& & &-1&& & &&& \\
1324 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\
34 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\ \hline
1 & &&& & 1&&& & &&& & &&& \\
2 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\
3 & &&& & &&-1& & &&& & &&& \\
123 & &&& & &&&-1 & &&& & &&& \\ \hline
134 & -1&&& & &&& & &&& & &&& \\
234 & &-1&& & &&& & &&& & &&& \\
4 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\
124 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& & &&1& & 13 \\
&&& & &&&-1 & 0 \\
&&& & -1&&& & 14 \\
&&& & &1&& & 34 \\ \hline
&&1& & &&& & 2 \\
&&&-1 & &&& & 123 \\
-1&&& & &&& & 234 \\
&1&& & &&& & 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& & & -B & 0 \\
& & B & & 34 \\ \hline
& -B & & & 123 \\
B & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_{234} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\
13 & &&& & &&& & &&& & &&&1 \\
21 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\
0 & &&& & &&& & &&& & &-1&& \\ \hline
42 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\
14 & &&& & &&& & &&&-1 & &&& \\
1324 & &&& & &&& & -1&&& & &&& \\
34 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\
2 & &&& & &&&-1 & &&& & &&& \\
3 & &&& & -1&&& & &&& & &&& \\
123 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\ \hline
134 & &&-1& & &&& & &&& & &&& \\
234 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
4 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\
124 & &-1&& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& & &&&1 & 13 \\
&&& & &&-1& & 0 \\
&&& & &-1&& & 14 \\
&&& & 1&&& & 34 \\ \hline
&&&-1 & &&& & 2 \\
&&1& & &&& & 123 \\
&1&& & &&& & 234 \\
-1&&& & &&& & 124 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& & & I & 0 \\
& & -I & & 34 \\ \hline
& -I & & & 123 \\
I & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_{134} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &&& & &&&-1 \\
13 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\
21 & &&& & &&& & &&& & &-1&& \\
0 & &&& & &&& & &&& & -1&&& \\ \hline
42 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\
14 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\
1324 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\
34 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &&&-1 & &&& & &&& \\
2 & &&& & &&-1& & &&& & &&& \\
3 & &&& & &-1&& & &&& & &&& \\
123 & &&& & -1&&& & &&& & &&& \\ \hline
134 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
234 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\
4 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\
124 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& & &&&-1 & 13 \\
&&& & &&-1& & 0 \\
&&& & &1&& & 14 \\
&&& & 1&&& & 34 \\ \hline
&&&-1 & &&& & 2 \\
&&-1& & &&& & 123 \\
&1&& & &&& & 234 \\
1&&& & &&& & 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& & & -A & 0 \\
& & A & & 34 \\ \hline
& -A & & & 123 \\
A & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\lambda_{1324} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\
13 & &&& & -1&&& & &&& & &&& \\
21 & &&& & &&&-1 & &&& & &&& \\
0 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\ \hline
42 & &-1&& & &&& & &&& & &&& \\
14 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\
1324 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
34 & &&-1& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &&& & &&& & &-1&& \\
2 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\
3 & &&& & &&& & &&& & &&&1 \\
123 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\ \hline
134 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\
234 & &&& & &&& & -1&&& & &&& \\
4 & &&& & &&& & &&&-1 & &&& \\
124 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&1& & &&& & 13 \\
&&&-1 & &&& & 0 \\
-1&&& & &&& & 14 \\
&1&& & &&& & 34 \\ \hline
&&& & &&-1& & 2 \\
&&& & &&&1 & 123 \\
&&& & 1&&& & 234 \\
&&& & &-1&& & 124 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& -B & & & 0 \\
B & & & & 34 \\ \hline
& & & B & 123 \\
& & -B & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

b. Структурные матрицы ковариантной алгебры пространства-времени синих кварков $\mathbb{Q}(u,d)_{b_{left}}$

$$\Lambda^0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
13 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
21 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
0 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
14 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
1324 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
34 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
2 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
3 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
123 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
234 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
4 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
124 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & 1 &&&&&&& \\
0 && 1 &&&&&& \\
14 &&& 1 &&&&& \\
34 &&&& 1 &&&& \\ \hline
2 &&&&& 1 &&& \\
123 &&&&&& 1 && \\
234 &&&&&&& 1 & \\
124 &&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array} = \mathit{1} \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & \mathbb{1} &&& \\
34 && \mathbb{1} && \\ \hline
123 &&& \mathbb{1} & \\
124 &&&& \mathbb{1} \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
13 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
21 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
0 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
14 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
1324 &&&&&&&&&&&&&& -1 && \\
34 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\ \hline
1 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
2 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
3 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
123 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
234 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
4 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
124 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= i \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&& -1 && \\
0 &&&&& -1 &&& \\
14 &&&&&&&& -1 \\
34 &&&&&&& -1 & \\ \hline
2 && 1 &&&&&& \\
123 & 1 &&&&&&& \\
234 &&&& 1 &&&& \\
124 &&& 1 &&&&& \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&& -A & \\
34 &&&& -A \\ \hline
123 & A &&& \\
124 && A && \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&& -1 &&&&& \\
13 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\
21 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
0 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
14 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
34 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\ \hline
1 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
2 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
3 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
123 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
234 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
4 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
124 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \mathit{1} \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&& -1 && \\
0 &&&&& 1 &&& \\
14 &&&&&&&& -1 \\
34 &&&&&&& 1 & \\ \hline
2 && 1 &&&&&& \\
123 & -1 &&&&&&& \\
234 &&&& 1 &&&& \\
124 &&& -1 &&&&& \\ \hline
\end{array} = \mathit{1} \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&& -I & \\
34 &&&& -I \\ \hline
123 & I &&& \\
124 && I && \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda^3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
13 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
21 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
0 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
14 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\ \hline
1 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
2 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
3 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
123 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
234 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
4 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
124 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&& 1 &&& \\
0 &&&&&& 1 && \\
14 &&&&&&& 1 & \\
34 &&&&&&&& 1 \\ \hline
2 & 1 &&&&&&& \\
123 && 1 &&&&&& \\
234 &&& 1 &&&&& \\
124 &&&& 1 &&&& \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&& \mathbb{1} & \\
34 &&&& \mathbb{1} \\ \hline
123 & \mathbb{1} &&& \\
124 && \mathbb{1} && \\ \hline
\end{array}$$

$$
\Lambda^{4} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
13 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
21 &&&& &&&& &&&& &&&& 1 \\
0 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\ \hline
42 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\
14 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\
1324 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
34 &&&& &&&& &&& -1 &&&& & \\ \hline
1 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\
2 &&&& & 1 &&&& &&&& &&& \\
3 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
123 &&&& &&& 1 &&&& &&&& & \\ \hline
134 && -1 &&&& &&&& &&&& && \\
234 & -1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
4 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
124 &&& -1 &&&& &&&& &&&& & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&&&& 1 && 13 \\
&&&&&&& 1 & 0 \\
&&&& -1 &&&& 14 \\
&&&&& -1 &&& 34 \\ \hline
&& 1 &&&&&& 2 \\
&&& 1 &&&&& 123 \\
-1 &&&&&&&& 234 \\
& -1 &&&&&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& \mathbb{1} & 0 \\
&& -\mathbb{1} && 34 \\ \hline
& \mathbb{1} &&& 123 \\
-\mathbb{1} &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{13} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&& -1 &&&& &&&& &&&& & \\
13 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
21 & -1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
0 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\ \hline
42 &&&& &&& -1 &&&& &&&& & \\
14 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
1324 &&&& & -1 &&&& &&&& &&& \\
34 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\ \hline
1 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\
2 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
3 &&&& &&&& & 1 &&&& &&& \\
123 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\ \hline
134 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
234 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
4 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
124 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& 1 &&&&&&& 13 \\
1 &&&&&&&& 0 \\
&&& 1 &&&&& 14 \\
&& 1 &&&&&& 34 \\ \hline
&&&&& -1 &&& 2 \\
&&&& -1 &&&& 123 \\
&&&&&&& -1 & 234 \\
&&&&&& -1 && 124 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
A &&&& 0 \\
& A &&& 34 \\ \hline
&& -A && 123 \\
&&& -A & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{21} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\
13 & -1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
21 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
0 &&& 1 &&&& &&&& &&&& & \\ \hline
42 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\
14 &&&& & -1 &&&& &&&& &&& \\
1324 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
34 &&&& &&& 1 &&&& &&&& & \\ \hline
1 &&&& &&&& && 1 &&&& && \\
2 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\
3 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
123 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\ \hline
134 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
234 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
4 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
124 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 &&&&&&&& 13 \\
& -1 &&&&&&& 0 \\
&& 1 &&&&&& 14 \\
&&& -1 &&&&& 34 \\ \hline
&&&& 1 &&&& 2 \\
&&&&& -1 &&& 123 \\
&&&&&& 1 && 234 \\
&&&&&&& -1 & 124 \\ \hline
\end{array}
= -i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
B &&&& 0 \\
& B &&& 34 \\ \hline
&& B && 123 \\
&&& B & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{32} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\
13 &&& -1 &&&& &&&& &&&& & \\
21 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\
0 & 1 &&&& &&&& &&&& &&& \\ \hline
42 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
14 &&&& &&& -1 &&&& &&&& & \\
1324 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\
34 &&&& & 1 &&&& &&&& &&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &&&& 1 &&&& \\
2 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\
3 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\
123 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\ \hline
134 &&&& &&&& &&&& &&&& 1 \\
234 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
4 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\
124 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
& -1 &&&&&&& 13 \\
1 &&&&&&&& 0 \\
&&& -1 &&&&& 14 \\
&& 1 &&&&&& 34 \\ \hline
&&&&& 1 &&& 2 \\
&&&& -1 &&&& 123 \\
&&&&&&& 1 & 234 \\
&&&&&& -1 && 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
-I &&&& 0 \\
& -I &&& 34 \\ \hline
&& I && 123 \\
&&& I & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{14} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
13 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
21 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & \\
1324 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
34 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
2 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
3 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
4 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
124 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; b
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & -1 & & & & & 13 \\
 & & 1 & & & & & & 0 \\
 & -1 & & & & & & & 14 \\
1 & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 2 \\
 & & & & & & 1 & & 123 \\
 & & & & & -1 & & & 234 \\
 & & & & -1 & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; -b
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & I & & & 0 \\
I & & & & 34 \\ \hline
 & & & I & 123 \\
 & & I & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{34} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
42 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
14 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
134 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
234 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; 1
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & 1 & & & & & & 13 \\
 & & & 1 & & & & & 0 \\
-1 & & & & & & & & 14 \\
 & -1 & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & 1 & & 2 \\
 & & & & & & & 1 & 123 \\
 & & & & -1 & & & & 234 \\
 & & & & & -1 & & & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; 1
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & \mathbb{1} & & & 0 \\
-\mathbb{1} & & & & 34 \\ \hline
 & & & \mathbb{1} & 123 \\
 & & -\mathbb{1} & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{42} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
13 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
0 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
14 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
34 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
2 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
123 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
234 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
124 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; a
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & -1 & & & & & 13 \\
 & & 1 & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & & & 14 \\
-1 & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & 1 & 2 \\
 & & & & & & -1 & & 123 \\
 & & & & & -1 & & & 234 \\
 & & & & 1 & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; a
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -I & & & 0 \\
I & & & & 34 \\ \hline
 & & & I & 123 \\
 & & -I & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{123} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
13 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
21 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
0 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
14 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
1324 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
34 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
2 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
3 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
123 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
234 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
4 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
124 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; b
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & -1 & & & & 13 \\
 & & & & & 1 & & & 0 \\
 & & & & & & -1 & & 14 \\
 & & & & & & & 1 & 34 \\ \hline
-1 & & & & & & & & 2 \\
 & 1 & & & & & & & 123 \\
 & & -1 & & & & & & 234 \\
 & & & 1 & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \;
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & B & & 0 \\
 & & & B & 34 \\ \hline
B & & & & 123 \\
 & B & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{124} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\
13 & &&& & &&& & &&& & &-1&& \\
21 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\
0 & &&& & &&& & &&& & &&&1 \\ \hline
42 & &&& & &&& & -1&&& & &&& \\
14 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\
1324 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\
34 & &&& & &&& & &&&-1 & &&& \\ \hline
1 & &&& & 1&&& & &&& & &&& \\
2 & &&& & &-1&& & &&& & &&& \\
3 & &&& & &&-1& & &&& & &&& \\
123 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\ \hline
134 & -1&&& & &&& & &&& & &&& \\
234 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\
4 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\
124 & &&&-1 & &&& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; b
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& & &&-1& & 13 \\
&&& & &&&1 & 0 \\
&&& & 1&&& & 14 \\
&&& & &-1&& & 34 \\ \hline
&&-1& & &&& & 2 \\
&&&1 & &&& & 123 \\
1&&& & &&& & 234 \\
&-1&& & &&& & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; b
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & B & 0 \\
 & & -B & & 34 \\ \hline
 & B & & & 123 \\
-B & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{234} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\
13 & &&& & &&& & &&& & &&&-1 \\
21 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\
0 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\ \hline
42 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\
14 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\
1324 & &&& & &&& & -1&&& & &&& \\
34 & &&& & &&& & &-1&& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\
2 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\
3 & &&& & -1&&& & &&& & &&& \\
123 & &&& & &-1&& & &&& & &&& \\ \hline
134 & &&-1& & &&& & &&& & &&& \\
234 & &&&-1 & &&& & &&& & &&& \\
4 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\
124 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; 1
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& & &&&-1 & 13 \\
&&& & &&1& & 0 \\
&&& & &1&& & 14 \\
&&& & -1&&& & 34 \\ \hline
&&&1 & &&& & 2 \\
&&-1& & &&& & 123 \\
&-1&& & &&& & 234 \\
1&&& & &&& & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; 1
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & -I & 0 \\
 & & I & & 34 \\ \hline
 & A & & & 123 \\
-A & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{134} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &&& & &&&-1 \\
13 & &&& & &&& & &&& & &&1& \\
21 & &&& & &&& & &&& & &-1&& \\
0 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\ \hline
42 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\
14 & &&& & &&& & &&-1& & &&& \\
1324 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\
34 & &&& & &&& & -1&&& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\
2 & &&& & &&-1& & &&& & &&& \\
3 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\
123 & &&& & -1&&& & &&& & &&& \\ \hline
134 & &&&-1 & &&& & &&& & &&& \\
234 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\
4 & &-1&& & &&& & &&& & &&& \\
124 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& & &&&-1 & 13 \\
&&& & &&-1& & 0 \\
&&& & &1&& & 14 \\
&&& & 1&&& & 34 \\ \hline
&&&1 & &&& & 2 \\
&&1& & &&& & 123 \\
&-1&& & &&& & 234 \\
-1&&& & &&& & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & -A & 0 \\
 & & A & & 34 \\ \hline
 & A & & & 123 \\
-A & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\Lambda^{1324} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\
13 & &&& & -1&&& & &&& & &&& \\
21 & &&& & &&&-1 & &&& & &&& \\
0 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\ \hline
42 & &-1&& & &&& & &&& & &&& \\
14 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\
1324 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
34 & &&-1& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\
2 & &&& & &&& & &&& & -1&&& \\
3 & &&& & &&& & &&& & &&&-1 \\
123 & &&& & &&& & &&& & &&1& \\ \hline
134 & &&& & &&& & &-1&& & &&& \\
234 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\
4 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\
124 & &&& & &&& & &&-1& & &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&1& & &&& & 13 \\
&&&-1 & &&& & 0 \\
-1&&& & &&& & 14 \\
&1&& & &&& & 34 \\ \hline
&&& & &&1& & 2 \\
&&& & &&&-1 & 123 \\
&&& & -1&&& & 234 \\
&&& & &1&& & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -B & & & 0 \\
B & & & & 34 \\ \hline
 & & & -B & 123 \\
 & & B & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$