

А. А. Кецарис

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВАНИЯ  
НОВОЙ ФИЗИКИ

Том второй

Третье электронное издание

Москва

2022

УДК 539.1  
ББК 22.311  
К33

Кецарис А. А.

**К33** Математические основания Новой Физики. Т.2. – М. 2022. – 549 с.

Монография относится к области обобщающих построений в современной физике, которые имеют различные названия: Единая Теория, Теория Всего и т.д. Здесь эта область названа Новой Физикой. Ключевым является алгебраическое обобщение двух пространств: пространства-времени и пространства действия, подобного пространству-времени. И пространство-время, и пространство действия наделяются свойствами универсальной алгебры. Это позволяет объяснить квантовые явления и дать новое понимание волновой функции. Кроме того, указанное обобщение позволяет объяснить иерархию фундаментальных элементарных частиц и сделать обобщения, касающиеся этих частиц. Частным случаем универсальной алгебры является алгебра Клиффорда, которая ставится в соответствие лептонам. Линейные и билинейные преобразования универсальной алгебры ставятся в соответствие промежуточным частицам. Эти преобразования позволяют описать взаимодействие фундаментальных и промежуточных частиц.

Монография предназначена для специалистов, занимающихся исследованиями в области теоретической и математической физики, физики элементарных частиц, теории гравитации и единой теории поля, а также для преподавателей, аспирантов и студентов этих специальностей.

**A. A. Ketsaris**

Mathematical foundations of New Physics.

This study concerns the field of fundamental generalizing concepts in present-day physics known as Unified Theory, Theory of Everything etc. Here we call it the New Physics. Our key approach is to make algebraic generalization of two spaces: the space-time and the space of the action similar to the space-time. We attribute the properties of the universal algebra to the space-time and the action space. This main concept allows us to explain quantum phenomena and give a new understanding of the wave function. Furthermore, it helps us to explain the hierarchy of fundamental elementary particles and make generalizations about them. A special case of universal algebra is Clifford's algebra assigned to leptons in our approach. Linear and bilinear transformations of universal algebra are set to match intermediate particles. These transformations make it possible to describe the interaction of fundamental and intermediate particles.

The book is intended for researchers in theoretical and mathematical physics, particle physics, gravitation theory and unified field theory, as well as for teachers, postgraduates and students of these specialties.

---

УДК 539.1  
ББК 22.311

© Кецарис А. А., 2022

# Оглавление

<b>Часть 4</b>	<b>Фундаментальные частицы</b>	24
<b>Глава 4.1</b>	<b>Алгебры фундаментальных частиц. Общая часть</b>	24
I.	Присоединенное представление алгебр действия и пространства-времени	24
1.	Контравариантные алгебры действия и пространства-времени	24
1.1.	Правая контравариантная алгебра	24
1.2.	Левая контравариантная алгебра	25
1.3.	Ковариантный метрический тензор	26
2.	Ковариантные алгебры действия и пространства-времени	27
2.1.	Правая ковариантная алгебра	27
2.2.	Левая ковариантная алгебра	28
2.3.	Контравариантный метрический тензор	29
II.	Вычисление структурных матриц	29
1.	Контравариантные алгебры действия и пространства-времени	30
1.1.	Правая контравариантная алгебра	30
1.2.	Левая контравариантная алгебра	30
2.	Ковариантные алгебры действия и пространства-времени	30
2.1.	Правая ковариантная алгебра	30
2.2.	Левая ковариантная алгебра	31
3.	Сравнение структурных матриц	31
3.1.	Правые алгебры	31
3.2.	Левые алгебры	31
4.	Последовательность индексов	31
4.1.	Трехмерное образующее пространство	31
4.2.	Четырехмерное образующее пространство	32
5.	Представление над полем гиперчисел	32
5.1.	Представление над полем двумерных гиперчисел	32
5.2.	Представление над полем четырехмерных гиперчисел	32
5.3.	Представление над полем восьмимерных гиперчисел	33
6.	Сжатое представление контравариантной алгебры	33
6.1.	Первое сжатое представление	33
6.2.	Второе сжатое представление	34
6.3.	Третье сжатое представление	34
III.	Выводы по Главе	34
<b>Глава 4.2</b>	<b>Нерелятивистские лептоны. Алгебры действия и пространства-времени лептонов</b>	35
I.	Предварительные замечания	35
II.	Контравариантная алгебра действия нерелятивистских лептонов	35
1.	Действительное представление алгебры действия лептонов $\mathbb{C}_3$	35
2.	Комплексное представление алгебры действия лептонов $\mathbb{C}_3$	35
3.	Кватернионное представление алгебры действия лептонов $\mathbb{C}_3$	36
4.	Бикватернионное представление алгебры действия лептонов $\mathbb{C}_3$	37

III. Структурные матрицы контравариантной алгебры действия лептонов $\mathbb{C}_3$ .....	37
1. Структурные матрицы правой алгебры действия лептонов ${}_r\mathbb{C}_3$ .....	37
1.1. Алгебра электрического заряда лептонов .....	38
2. Структурные матрицы левой алгебры действия лептонов ${}_l\mathbb{C}_3$ .....	38
2.1. Алгебра нерелятивистского спина .....	40
2.2. Матрицы Дирака .....	40
IV. Системообразующий постулат. Поколения фундаментальных частиц .....	40
V. Ковариантная алгебра пространства-времени лептонов .....	41
1. Действительное представление ковариантной алгебры пространства-времени лептонов $(\mathbb{X}_L)_3^*$ .....	42
2. Комплексное представление ковариантной алгебры пространства-времени лептонов $(\mathbb{X}_L)_3^*$ .....	42
3. Кватернионное представление ковариантной алгебры пространства-времени лептонов $(\mathbb{X}_L)_3^*$ .....	42
VI. Структурные матрицы ковариантной алгебры пространства-времени лептонов $(\mathbb{X}_L)_3^*$ .....	43
1. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры пространства-времени лептонов ${}_l(\mathbb{X}_L)_3^*$ .....	43
VII. Выводы по Главе .....	44
<b>Глава 4.3 Белые лептоны. Алгебра действия белых лептонов <math>\mathbb{C}_w</math> .....</b>	<b>46</b>
I. Предварительные замечания .....	46
II. Алгебра действия белых лептонов .....	46
1. Действительное представление алгебры действия белых лептонов $\mathbb{C}_w$ .....	46
2. Комплексное представление алгебры действия белых лептонов $\mathbb{C}_w$ .....	47
3. Кватернионное представление алгебры действия лептонов $\mathbb{C}_w$ .....	47
4. Бикватернионное представление алгебры действия белых лептонов $\mathbb{C}_4$ .....	48
III. Структурные матрицы алгебры действия белых лептонов $\mathbb{C}_w$ .....	48
1. Структурные матрицы правой алгебры действия белых лептонов ${}_r\mathbb{C}_w$ .....	48
1.1. Алгебра электрического заряда белых лептонов .....	53
1.2. Алгебра слабого заряда белых лептонов .....	53
2. Структурные матрицы левой алгебры действия белых лептонов ${}_l\mathbb{C}_w$ .....	53
2.1. Алгебра релятивистского спина .....	58
2.2. Матрицы Дирака .....	58
IV. Системообразующий постулат. Нижние и верхние фундаментальные частицы .....	58
V. Сжатое представление правой алгебры действия белых лептонов .....	59
1. Первое сжатое представление .....	59
2. Второе сжатое представление .....	61
3. Третье сжатое представление .....	62
VI. Сжатое представление левой алгебры действия белых лептонов .....	62
1. Первое сжатое представление .....	62
1.1. Матрицы Дирака .....	64
2. Второе сжатое представление .....	64
3. Третье сжатое представление .....	65
VII. Динамические параметры подалгебр действия и пространства-времени .....	65
1. Спин – собственный момент левых геометрических поворотов .....	66
2. Релятивистский спин .....	67
2.1. Релятивистский момент импульса .....	68
3. Электрический заряд – собственный заряд правых геометрических поворотов .....	69
4. Слабый заряд – собственный заряд правой подалгебры действия .....	70
VIII. Выводы по Главе .....	70

<b>Глава 4.4</b>	<b>Белые лептоны. Обобщение уравнения Дирака</b>	<b>72</b>
I.	Введение. Уравнение Дирака	72
II.	Волновая функция электрона	73
1.	Комплексное представление	73
2.	Кватернионное представление	74
3.	Действительное представление	74
III.	Волновые функции мюона и тау-лептона	75
1.	Волновая функция и уравнение Дирака для мюона	75
1.1.	Действительное представление	75
1.2.	Комплексное представление	76
1.3.	Кватернионное представление	77
2.	Волновая функция и уравнение Дирака для тау-лептона	77
2.1.	Действительное представление	77
2.2.	Комплексное представление	78
2.3.	Кватернионное представление	79
IV.	Фундаментальные частицы – лептоны	79
V.	Волновая функция лептонов первого поколения	80
1.	Действительное представление	80
2.	Комплексное представление	81
3.	Кватернионное представление	82
VI.	Волновые функции лептонов разных поколений	82
VII.	Принятые обозначения	83
VIII.	Обобщенное квантовое уравнение для фундаментальных объектов	84
IX.	Стандартное представление	85
1.	Стандартное представление уравнения Дирака	85
2.	Стандартное представление обобщенного квантового уравнения	86
X.	Компоненты волновой функции. Верхние и нижние лептоны	86
XI.	Левый аналог уравнения Дирака	87
XII.	Фундаментальные частицы – кварки	87
XIII.	Выводы по Главе	88
<b>Глава 4.5</b>	<b>Черные лептоны. Алгебра действия черных лептонов <math>\mathbb{C}_b</math></b>	<b>90</b>
I.	Предварительные замечания	90
II.	Алгебра действия черных лептонов	90
1.	Действительное представление алгебры действия черных лептонов $\mathbb{C}_b$	90
2.	$iab$ -представление алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$	91
3.	$IAB$ -представление алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$	91
4.	Базисные векторы и их произведения	92
III.	Структурные матрицы алгебр действия и пространства-времени черных лептонов	92
1.	Структурные матрицы правой контравариантной алгебры действия черных лептонов ${}_r\mathbb{C}_b$	93
2.	Структурные матрицы левой ковариантной алгебры пространства-времени черных лептонов ${}_l\mathbb{X}_{Lb}^*$	97

IV. Верхние и нижние черные лептоны . . . . .	101
1. Структурные матрицы алгебры черных лептонов $S_b$ . . . . .	102
2. Квантовое уравнение для свободных черных лептонов . . . . .	102
3. Стандартное представление квантового уравнения для свободных черных лептонов . . . . .	103
V. Таблица фундаментальных частиц – лептонов . . . . .	103
1. Лептоны первого поколения . . . . .	103
2. Лептоны второго поколения . . . . .	103
3. Лептоны третьего поколения . . . . .	103
VI. Выводы по Главе . . . . .	103
<b>Глава 4.6 Цветовое взаимодействие электронов . . . . .</b>	<b>105</b>
I. Цветовое взаимодействие электронов . . . . .	105
II. Мультиэлектрон . . . . .	105
1. Энергия цветовой связи . . . . .	106
III. Электронная структура атомов. Принцип Паули. Правило Хунда . . . . .	106
IV. Организация молекул . . . . .	107
1. Двухатомные молекулы . . . . .	107
1.1. Молекула водорода $H_2$ . . . . .	107
1.2. Молекула кислорода $O_2$ . . . . .	109
1.3. Молекула азота $N_2$ . . . . .	109
2. Трехатомные молекулы . . . . .	110
2.1. Молекула воды $H_2O$ . . . . .	110
2.2. Молекула окиси серы $SO_2$ . . . . .	110
3. Четырехатомные молекулы . . . . .	110
4. Пятиатомные молекулы . . . . .	110
5. Молекула бензола . . . . .	111
V. Кристаллическая решетка . . . . .	111
1. Поваренная соль $NaCl$ . . . . .	111
2. Металлическая связь . . . . .	112
2.1. Натрий . . . . .	112
2.2. Литий . . . . .	112
3. Графит . . . . .	113
VI. Сверхпроводимость . . . . .	113
VII. Шаровая молния . . . . .	114
1. Искусственная шаровая молния . . . . .	115
VIII. Выводы по Главе . . . . .	117
<b>Глава 4.7 Нерелятивистские кварки. Алгебры действия и пространства-времени кварков . . . . .</b>	<b>118</b>
I. Предварительные замечания . . . . .	118
II. Алгебра действия кварков. Начальные сведения . . . . .	118
1. Алгебра действия и поколения кварков . . . . .	118
1.1. Алгебра действия кварков первого поколения . . . . .	118
1.2. Алгебра действия кварков второго поколения . . . . .	119
1.3. Алгебра действия кварков третьего поколения . . . . .	119
2. Алгебра действия нижних и верхних кварков . . . . .	120

III. Алгебра нерелятивистских кварков. Общая часть .....	120
1. Базисные векторы .....	120
2. Умножение базисных векторов .....	120
2.1. Контравариантная алгебра .....	120
2.2. Ковариантная алгебра .....	121
IV. Алгебра действия кварков первого поколения $\mathbb{Q}(1)$ .....	122
1. Действительное представление алгебры действия кварков $\mathbb{Q}(1)$ .....	122
2. $iab$ -представление алгебры действия кварков $\mathbb{Q}(1)$ .....	122
3. $IAB$ -представление алгебры действия кварков $\mathbb{Q}(1)$ .....	123
V. Структурные матрицы контравариантной алгебры действия кварков $\mathbb{Q}_3$ .....	123
1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры действия кварков первого поколения ${}_r\mathbb{Q}_3(1)$ .....	124
2. Структурные матрицы левой контравариантной алгебры действия кварков первого поколения ${}_l\mathbb{Q}(1)$ .....	125
VI. Алгебра кварков второго поколения $\mathbb{Q}(2)$ .....	126
VII. Алгебра кварков третьего поколения $\mathbb{Q}(3)$ .....	126
VIII. Генераторы ароматической $SU(3)$ группы .....	127
IX. Выводы по Главе .....	128

#### **Глава 4.8 Красные кварки. Алгебра действия красных кварков $\mathbb{Q}_r$ .....**

I. Релятивистские кварки и цвет .....	130
II. Алгебра красных $u$ - и $d$ -кварков $\mathbb{Q}(1)_r$ .....	132
1. Базисные векторы и их произведения .....	132
2. Структурные матрицы алгебры красных кварков .....	133
2.1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры красных кварков первого поколения ${}_r(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_\mathbb{Q})_r$ .....	133
2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры красных кварков первого поколения ${}_l(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_\mathbb{Q})_r^*$ .....	137
3. Действительное представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$ .....	142
4. $iab$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$ .....	142
5. $IAB$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$ .....	142
III. Квантовое уравнение для свободных красных кварков .....	143
1. Квантовое уравнение для красных кварков первого поколения .....	144
2. Стандартное представление квантового уравнения для красных $u$ - и $d$ -кварков .....	144
IV. Выводы по Главе .....	145

#### **Глава 4.9 Желтые кварки. Алгебра действия желтых кварков $\mathbb{Q}_y$ .....**

I. Желтые кварки трех поколений .....	146
II. Алгебра желтых $u$ - и $d$ -кварков $\mathbb{Q}(1)_y$ .....	146
1. Базисные векторы и их произведения .....	146
2. Структурные матрицы алгебры желтых кварков .....	147
2.1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры желтых кварков первого поколения ${}_r(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_\mathbb{Q})_y$ .....	148
2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры желтых кварков первого поколения ${}_l(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_\mathbb{Q})_y^*$ .....	152
3. Действительное представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$ .....	156

4. $iab$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$ .....	157
5. $IAB$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$ .....	157
III. Квантовое уравнение для свободных желтых кварков .....	157
1. Квантовое уравнение для желтых кварков первого поколения .....	158
2. Стандартное представление квантового уравнения для желтых $u$ - и $d$ -варков .....	158
IV. Выводы по Главе .....	159
<b>Глава 4.10 Синие кварки. Алгебра действия синих кварков <math>\mathbb{Q}_b</math></b> .....	160
I. Синие кварки трех поколений .....	160
II. Алгебра синих кварков первого поколения $\mathbb{Q}(1)_b$ .....	160
1. Базисные векторы и их произведения .....	160
2. Структурные матрицы алгебры синих кварков .....	161
2.1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры синих кварков первого поколения $r(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_\mathbb{Q})_b$ .....	162
2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры синих кварков первого поколения $l(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_\mathbb{Q})_b^*$ .....	166
3. Действительное представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$ .....	170
4. $iab$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$ .....	170
5. $IAB$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$ .....	171
III. Квантовое уравнение для свободных синих кварков .....	171
1. Квантовое уравнение для синих кварков первого поколения .....	171
2. Стандартное представление квантовое уравнение для синих $u$ и $d$ кварков .....	172
IV. Таблица фундаментальных частиц – кварков .....	172
1. Кварки первого поколения .....	172
2. Кварки второго поколения .....	172
3. Кварки третьего поколения .....	172
V. Выводы по Главе .....	172
<b>Глава 4.11 Нерелятивистские кваркино. Алгебры действия и пространства-времени кваркино</b> .....	174
I. Предварительные замечания .....	174
II. Алгебра действия кваркино. Начальные сведения .....	174
1. Алгебра действия и поколения кваркино .....	174
1.1. Алгебра действия кваркино первого поколения .....	174
1.2. Алгебра действия кваркино второго поколения .....	175
1.3. Алгебра действия кваркино третьего поколения .....	175
2. Алгебра действия нижних и верхних кваркино .....	176
III. Алгебра нерелятивистских кваркино. Общая часть .....	176
1. Базисные векторы .....	176
2. Умножение базисных векторов .....	177
2.1. Контравариантная алгебра .....	177
2.2. Ковариантная алгебра .....	177
IV. Алгебра действия кваркино первого поколения $\mathbb{Q}^s(1)$ .....	178
1. Действительное представление алгебры действия кваркино $\mathbb{Q}^s(1)$ .....	178
2. $iab$ -представление алгебры действия кваркино $\mathbb{Q}^s(1)$ .....	179
3. $IAB$ -представление алгебры действия кваркино $\mathbb{Q}^s(1)$ .....	179



V. Структурные матрицы контравариантной алгебры действия кваркино $\mathbb{Q}_3^s$ .....	180
1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры действия кваркино первого поколения $r\mathbb{Q}_3^s(1)$ .....	180
2. Структурные матрицы левой контравариантной алгебры действия кваркино первого поколения $l\mathbb{Q}_3^s(1)$ .....	181
VI. Алгебра кваркино второго поколения $\mathbb{Q}^s(2)$ .....	182
VII. Алгебра кваркино третьего поколения $\mathbb{Q}^s(3)$ .....	183
VIII. Выводы по Главе .....	183

#### **Глава 4.12 Синие кваркино. Алгебра действия синих кваркино $\mathbb{Q}_b^s$ .....**

I. Релятивистские кваркино и цвет .....	184
1. Алгебры цветных кваркино первого поколения $\mathbb{Q}^s(1)$ .....	184
1.1. Алгебра синих кваркино первого поколения $\mathbb{Q}_b^s(1)$ .....	184
1.2. Алгебра желтых кваркино первого поколения $\mathbb{Q}_y^s(1)$ .....	184
1.3. Алгебра красных кваркино первого поколения $\mathbb{Q}_r^s(1)$ .....	184
2. Алгебры цветных кваркино второго поколения $\mathbb{Q}^s(2)$ .....	185
2.1. Алгебра синих кваркино второго поколения $\mathbb{Q}_b^s(2)$ .....	185
2.2. Алгебра желтых кваркино второго поколения $\mathbb{Q}_y^s(2)$ .....	185
2.3. Алгебра красных кваркино второго поколения $\mathbb{Q}_r^s(2)$ .....	185
3. Алгебры цветных кваркино третьего поколения $\mathbb{Q}^s(3)$ .....	185
3.1. Алгебра синих кваркино третьего поколения $\mathbb{Q}_b^s(3)$ .....	185
3.2. Алгебра желтых кваркино третьего поколения $\mathbb{Q}_y^s(3)$ .....	186
3.3. Алгебра красных кваркино третьего поколения $\mathbb{Q}_r^s(3)$ .....	186
II. Алгебра синих кваркино $\mathbb{Q}_b^s(1)$ .....	186
1. Базисные векторы и их произведения .....	186
2. Структурные матрицы алгебр синих кваркино .....	187
2.1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры синих кваркино первого поколения $r(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})_b(1)$ .....	187
2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры синих кваркино первого поколения $l(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})_b^*(1)$ .....	192
3. Действительное представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$ .....	196
4. $iab$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$ .....	196
5. $IAB$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$ .....	196
III. Квантовое уравнение для свободных кваркино .....	197
1. Структурные матрицы алгебры синих кваркино $\mathbb{Q}_b^s$ .....	198
2. Квантовое уравнение для синих кваркино первого поколения .....	198
2.1. Стандартное представление квантового уравнения для синих кваркино .....	199
IV. Выводы по Главе .....	199

#### **Глава 4.13 Желтые кваркино. Алгебра действия желтых кваркино $\mathbb{Q}_y^s$ .....**

I. Желтые кваркино трех поколений .....	201
II. Алгебра желтых кваркино первого поколения $\mathbb{Q}_y^s(1)$ .....	201
1. Базисные векторы и их произведения .....	201
2. Структурные матрицы алгебры желтых кваркино .....	202
2.1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры желтых кваркино первого поколения $r(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})_y$ .....	203
2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры желтых кваркино первого поколения $l(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})_y^*$ .....	207
3. Действительное представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$ .....	211

4. $iab$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$ .....	212
5. $IAB$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$ .....	212
III. Квантовое уравнение свободных кваркино .....	212
1. Структурные матрицы алгебры желтых кваркино $\mathbb{Q}_y^s$ .....	213
2. Квантовое уравнение для свободных желтых кваркино .....	213
3. Стандартное представление квантового уравнения для желтых кваркино .....	213
IV. Выводы по Главе .....	214
<b>Глава 4.14 Красные кваркино. Алгебра действия красных кваркино <math>\mathbb{Q}_r^s</math></b> .....	<b>215</b>
I. Красные кваркино трех поколений .....	215
II. Алгебра красных кваркино первого поколения $\mathbb{Q}_r^s(1)$ .....	215
1. Базисные векторы и их произведения .....	215
2. Структурные матрицы алгебры красных кваркино .....	216
2.1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры красных кваркино первого поколения ${}_r(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)_r$ .....	217
2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры красных кваркино первого поколения ${}_l(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)_r^*$ .....	221
3. Действительное представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$ .....	225
4. $iab$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$ .....	226
5. $IAB$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$ .....	226
III. Квантовое уравнение для свободных кваркино .....	226
1. Структурные матрицы алгебры красных кваркино $\mathbb{Q}_r^s$ .....	227
2. Квантовое уравнение для красных кваркино .....	227
3. Стандартное представление квантового уравнения для красных кваркино .....	227
IV. Таблица гипотетических фундаментальных частиц – кваркино .....	228
1. Кваркино первого поколения .....	228
2. Кваркино второго поколения .....	228
3. Кваркино третьего поколения .....	228
V. Выводы по Главе .....	228
<b>Глава 4.15 Нерелятивистские лептино. Алгебры действия и пространства-времени лептино</b> .....	<b>229</b>
I. Предварительные замечания .....	229
II. Алгебра действия лептино. Начальные сведения .....	229
1. Алгебра действия и поколения лептино .....	229
1.1. Алгебра действия лептино первого поколения .....	229
1.2. Алгебра действия лептино второго поколения .....	230
1.3. Алгебра действия лептино третьего поколения .....	230
2. Алгебра действия нижних и верхних лептино .....	231
III. Алгебра лептино $(\mathbb{C}^s, \mathbb{X}_C^s)$ .....	231
1. Деление в алгебре $\mathbb{C}^s$ .....	232
2. Структурные матрицы коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^s$ .....	232
3. Действительное представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^s$ .....	234
4. $a$ -представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^s$ .....	234
5. $A$ -представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^s$ .....	235
6. Физический смысл коммутативности умножения .....	235
IV. Выводы по Главе .....	236

<b>Глава 4.16</b>	<b>Черные лептино. Алгебра действия черных лептино <math>\mathbb{C}_b^s</math></b>	238
I.	Релятивистские лептино и цвет	238
1.	Алгебры цветных лептино первого поколения $\mathbb{C}^s(1)$	238
1.1.	Алгебра черных лептино первого поколения $\mathbb{C}^s(1)_b$	238
1.2.	Алгебра белых лептино первого поколения $\mathbb{C}^s(1)_w$	238
2.	Алгебры цветных лептино второго поколения $\mathbb{C}^s(2)$	238
2.1.	Алгебра черных лептино второго поколения $\mathbb{C}^s(2)_b$	238
2.2.	Алгебра белых лептино второго поколения $\mathbb{C}^s(2)_w$	239
3.	Алгебры цветных лептино третьего поколения $\mathbb{C}^s(3)$	239
3.1.	Алгебра черных лептино третьего поколения $\mathbb{C}^s(3)_b$	239
3.2.	Алгебра белых лептино третьего поколения $\mathbb{C}^s(3)_w$	239
II.	Алгебра черных лептино $\mathbb{C}^s(1)_b$	239
1.	Базисные векторы и их произведения	239
2.	Структурные матрицы алгебр черных лептино	240
2.1.	Структурные матрицы правой контравариантной алгебры действия черных лептино первого поколения $r(\mathbb{C}^s, \mathbb{X}\mathbb{C}^s)_b$	241
2.2.	Структурные матрицы левой ковариантной алгебры черных лептино первого поколения $l(\mathbb{C}^s, \mathbb{X}\mathbb{C}^s)_b^*$	245
3.	Действительное представление алгебры лептино $\mathbb{C}_4^s$	249
4.	$iab$ -представление алгебры лептино $\mathbb{C}_4^s$	250
5.	$IAB$ -представление алгебры лептино $\mathbb{C}_4^s$	250
III.	Квантовое уравнение для свободных лептино	250
1.	Структурные матрицы алгебры черных лептино $\mathbb{C}_b^s$	251
2.	Квантовое уравнение для черных лептино	252
3.	Стандартное представление квантового уравнения для черных лептино	252
IV.	Выводы по Главе	252
<b>Глава 4.17</b>	<b>Белые лептино. Алгебра действия белых лептино <math>\mathbb{C}_w^s</math></b>	254
I.	Алгебра белых лептино $\mathbb{C}_w^s$	254
1.	Базисные векторы и их произведения	254
2.	Структурные матрицы коммутативной алгебры белых лептино	255
3.	Действительное представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_4^s$	259
4.	$a$ -представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_4^s$	259
5.	$A$ -представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_4^s$	260
6.	Сжатое представление коммутативной алгебры	260
6.1.	Первое сжатое представление	261
6.2.	Второе сжатое представление	262
6.3.	Третье сжатое представление	263
II.	Квантовое уравнение для лептино	263
1.	Структурные матрицы алгебры белых лептино $\mathbb{Q}_w^s$	264
2.	Квантовое уравнение для белых лептино	264
III.	Выводы по Главе	264
<b>Часть 5</b>	<b>Промежуточные физические объекты</b>	266
<b>Глава 5.1</b>	<b>Алгебра действия промежуточных объектов</b>	266

I. Взаимодействие как отношение эквивалентности .....	266
1. Скалярное действие и отношение эквивалентности .....	266
2. Класс и тип взаимодействий .....	267
II. Пространство действия промежуточных объектов .....	268
1. Воздействие промежуточного объекта на фундаментальный объект .....	269
2. Векторное пространство действия промежуточных объектов .....	269
3. Левое и правое воздействия промежуточного объекта на фундаментальный объект .....	269
3.1. Левое воздействие промежуточного объекта на фундаментальный объект .....	270
3.2. Правое воздействие промежуточного объекта на фундаментальный объект .....	270
4. Группа и алгебра действия промежуточных объектов .....	270
4.1. Левая группа и левая алгебра действия промежуточных объектов .....	270
4.2. Правая группа и правая алгебра действия промежуточных объектов .....	271
III. Квантовое уравнение для свободных промежуточных объектов .....	272
1. Системообразующий постулат .....	272
2. Уравнения структуры алгебры действия промежуточных объектов .....	272
2.1. Правая алгебра действия промежуточных объектов .....	272
2.2. Левая алгебра действия промежуточных объектов .....	272
3. Квантовые уравнения для свободного промежуточного объекта .....	273
3.1. Правая алгебра действия промежуточных объектов .....	273
3.2. Левая алгебра действия промежуточных объектов .....	274
IV. Взаимодействие фундаментального и промежуточного объектов .....	274
1. Системообразующий постулат .....	275
2. Алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов .....	275
2.1. Правая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов ${}_r\mathbb{T}$ .....	276
2.2. Левая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов ${}_l\mathbb{T}$ .....	276
3. Уравнения структуры алгебры действия фундаментальных и промежуточных объектов .....	277
3.1. Правая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов .....	277
3.2. Левая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов .....	278
4. Система квантовых уравнений для фундаментальных и промежуточных объектов .....	279
4.1. Правая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов .....	279
4.2. Левая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов .....	280
5. Частные случаи .....	281
V. Промежуточные антиобъекты. Пространство действия .....	281
1. Воздействие промежуточного антиобъекта на фундаментальный антиобъект .....	281
2. Векторное пространство действия промежуточных антиобъектов .....	282
3. Левое и правое воздействия промежуточного антиобъекта на фундаментальный антиобъект .....	282
3.1. Левое воздействие промежуточного антиобъекта на фундаментальный антиобъект .....	282
3.2. Правое воздействие промежуточного антиобъекта на фундаментальный антиобъект .....	282
4. Группа и алгебра действия промежуточных антиобъектов .....	283
4.1. Правая группа и правая алгебра действия промежуточных антиобъектов .....	283
4.2. Левая группа и левая алгебра действия промежуточных антиобъектов .....	284
5. Связь между физическими объектами и антиобъектами. Операция сопряжения .....	284
5.1. Сопряжение правых векторов действия .....	284
5.2. Сопряжение левых векторов действия .....	285
VI. Квантовое уравнение для свободных промежуточных антиобъектов .....	285
1. Уравнения структуры алгебры действия промежуточных антиобъектов .....	285
1.1. Правая алгебра действия промежуточных антиобъектов .....	285
1.2. Левая алгебра действия промежуточных антиобъектов .....	286
2. Квантовые уравнения для свободных промежуточных антиобъектов .....	286
2.1. Правая алгебра действия промежуточных антиобъектов .....	286
2.2. Левая алгебра действия промежуточных антиобъектов .....	287
VII. Выводы по Главе .....	287

<b>Глава 5.2</b>	<b>Взаимодействие элементарных частиц</b>	<b>289</b>
I.	Взаимодействие элементарных частиц. Обобщающая точка зрения	289
1.	Предварительные замечания	289
2.	Системообразующий постулат	289
3.	Взаимодействие элементарных частиц. Обобщающая точка зрения	289
II.	Взаимодействия элементарных частиц. Дополнение	294
1.	Простейшие диаграммы взаимодействий	294
2.	Скалярное, векторное и тензорное взаимодействия	296
3.	Скалярные частицы	296
III.	Фундаментальные частицы и взаимодействия	297
IV.	Электрослабые взаимодействия между лептонами	298
V.	Электромагнитное взаимодействие между лептонами одного поколения	298
1.	Фотон – промежуточная частица электромагнитного взаимодействия	298
2.	Взаимодействие между лептонами одного поколения и фотоном	299
2.1.	Взаимодействие между электроном и фотоном	299
2.2.	Взаимодействие между позитроном и фотоном	299
2.3.	Притяжение между разноименными электрическими зарядами	299
2.4.	Отталкивание между одноименными электрическими зарядами	300
3.	Электромагнитное взаимодействие между фотонами	300
3.1.	Составные электромагнитные взаимодействия с участием фотонов	300
VI.	Слабое взаимодействие между лептонами одного поколения	300
1.	$Z$ -бозон – промежуточная частица слабого взаимодействия	301
2.	Взаимодействие между лептонами одного поколения и $Z$ -бозоном	301
2.1.	Взаимодействие между электронным нейтрино и $Z$ -бозоном	301
2.2.	Взаимодействие между электронным антинейтрино и $Z$ -бозоном	302
2.3.	Притяжение между разноименными слабыми зарядами	302
2.4.	Отталкивание между одноименными слабыми зарядами	302
3.	Слабое взаимодействие между $Z$ -бозонами	303
3.1.	Составные слабые взаимодействия с участием $Z$ -бозонов	303
VII.	Электрослабое взаимодействие между лептонами одного поколения	303
1.	$W_-$ -бозон – промежуточная частица электрослабого взаимодействия	303
2.	$W^+$ -бозон – промежуточная частица слабо-электрического взаимодействия	304
3.	Взаимодействие между лептонами одного поколения и $W_-$ -бозоном	305
4.	Взаимодействие между лептонами одного поколения и $W^+$ -бозоном	306
4.1.	Составные взаимодействия	307
5.	Взаимодействие промежуточных частиц электрослабого взаимодействия между собой	307
5.1.	Составные взаимодействия	309
VIII.	Электрослабые взаимодействия между кварками	309
1.	$W_-$ -бозон – промежуточная частица электрослабого взаимодействия	310
2.	$W^+$ -бозон – промежуточная частица слабо-электрического взаимодействия	311
3.	Фотон и $Z$ -бозон – промежуточные частицы электрослабого взаимодействия	311
3.1.	Аннигиляция верхних кварков	311
3.2.	Аннигиляция нижних кварков	312
4.	Взаимодействие между кварками одного поколения и $W_-$ -бозоном	313
5.	Взаимодействие между кварками одного поколения и $W^+$ -бозоном	314
6.	$(\gamma-Z)$ -взаимодействие верхних кварков	315
6.1.	$(\gamma-Z)$ -взаимодействие $u$ -кварка	315
6.2.	$(\gamma-Z)$ -взаимодействие $\bar{u}$ -кварка	316
7.	$(\gamma-Z)$ -взаимодействие нижних кварков	316
7.1.	$(\gamma-Z)$ -взаимодействие $d$ -кварка	316
7.2.	$(\gamma-Z)$ -взаимодействие $\bar{d}$ -кварка	317

IX. Электрослабые взаимодействия между лептонами и кварками . . . . .	317
X. Остаточное сильное взаимодействие между кварками . . . . .	319
1. Промежуточные частицы остаточного сильного взаимодействия . . . . .	319
1.1. $\pi_-$ -мезон . . . . .	319
1.2. $\pi^+$ -мезон . . . . .	320
1.3. $\pi^u$ -мезон и скалярная частица $\delta_2$ . . . . .	320
1.4. $\pi_d$ -мезон и скалярная частица $\delta_1$ . . . . .	321
2. Взаимодействия между кварками одного поколения и промежуточными мезонами . . . . .	322
2.1. Взаимодействия с $\pi_-$ -мезоном . . . . .	322
2.2. Взаимодействия с $\pi^+$ -мезоном . . . . .	322
2.3. Взаимодействия с $\pi^u$ -мезоном . . . . .	323
2.4. Взаимодействия с $\pi_d$ -мезоном . . . . .	323
3. Взаимодействия между антикварками одного поколения и промежуточными мезонами . . . . .	323
3.1. Взаимодействия с $\pi_-$ -мезоном . . . . .	324
3.2. Взаимодействия с $\pi^+$ -мезоном . . . . .	324
3.3. Взаимодействия с $\pi^u$ -мезоном . . . . .	324
3.4. Взаимодействия с $\pi_d$ -мезоном . . . . .	325
4. Взаимодействие промежуточных частиц сильного взаимодействия между собой . . . . .	325
5. Простейшие диаграммы элементарных сильных взаимодействий . . . . .	329
6. Диаграммы составных сильных взаимодействий . . . . .	330
XI. Цветовое взаимодействие между кварками . . . . .	331
1. Цветные кварки . . . . .	331
2. Глюоны . . . . .	331
2.1. Пример диаграммы синтеза глюона . . . . .	332
3. Цветовое взаимодействие кварков и глюонов . . . . .	332
3.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия кварка и глюона . . . . .	332
4. Цветовое взаимодействие антикварков и глюонов . . . . .	333
4.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия антикварка и глюона . . . . .	333
5. Мезоны . . . . .	333
5.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия кварка и антикварка в мезоне . . . . .	333
6. Барионы . . . . .	333
6.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия кварков в барионе . . . . .	334
7. Мультикварк . . . . .	334
7.1. Линейный мультикварк . . . . .	334
7.2. Поверхностный мультикварк . . . . .	334
8. Цветовые взаимодействия между глюонами . . . . .	335
8.1. Простейшие диаграммы цветового взаимодействия между глюонами . . . . .	335
8.2. Двойные диаграммы цветового взаимодействия между глюонами . . . . .	336
9. Глюболы . . . . .	336
XII. Цветовое взаимодействие лептонов . . . . .	336
1. Цветные лептоны . . . . .	336
2. Промежуточные частицы цветового взаимодействия лептонов . . . . .	336
2.1. Пример диаграммы синтеза клея . . . . .	337
3. Цветовое взаимодействие лептонов и клеев . . . . .	337
3.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия лептона и клея . . . . .	337
4. Цветовое взаимодействие антилептонов и клеев . . . . .	337
4.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия антилептона и клея . . . . .	338
5. Лептонно-антилептонные цветовые соединения . . . . .	338
6. Лептонные пары . . . . .	338
6.1. Электронная пара . . . . .	339
7. Мультиэлектрон . . . . .	339
7.1. Линейный мультиэлектрон . . . . .	339
7.2. Поверхностный мультиэлектрон . . . . .	340

XIII. Скалярные электрослабые взаимодействия . . . . .	340
1. Скалярные электрослабые взаимодействия между лептонами . . . . .	341
1.1. Бозон Хиггса $H$ . . . . .	341
1.2. Бозон Хиггса $h$ . . . . .	341
2. Скалярные электрослабые взаимодействия между кварками . . . . .	341
2.1. Бозон Хиггса $H$ . . . . .	342
2.2. Бозон Хиггса $h$ . . . . .	342
3. Скалярные электрослабые взаимодействия между лептонами и промежуточными частицами . . . . .	342
3.1. Бозон Хиггса $H$ . . . . .	342
3.2. Бозон Хиггса $h$ . . . . .	343
4. Скалярные электрослабые взаимодействия между кварками и промежуточными частицами . . . . .	343
4.1. Бозон Хиггса $H$ . . . . .	343
4.2. Бозон Хиггса $h$ . . . . .	343
5. Скалярные электрослабые взаимодействия между антилептонами и промежуточными частицами . . . . .	344
5.1. Бозон Хиггса $H$ . . . . .	344
5.2. Бозон Хиггса $h$ . . . . .	344
6. Скалярные электрослабые взаимодействия между антикварками и промежуточными частицами . . . . .	345
6.1. Бозон Хиггса $H$ . . . . .	345
6.2. Бозон Хиггса $h$ . . . . .	345
7. Скалярные электрослабые взаимодействия между промежуточными частицами . . . . .	345
XIV. Выводы по Главе . . . . .	347
<b>Глава 5.3 Калибровочное поле . . . . .</b>	<b>348</b>
I. Предварительные замечания . . . . .	348
II. Калибровочная группа . . . . .	348
1. Левая калибровочная группа ${}_l\mathbb{G}_1$ . . . . .	348
2. Правая калибровочная группа ${}_r\mathbb{G}_1$ . . . . .	349
3. Системообразующие постулаты . . . . .	351
III. Калибровочное поле . . . . .	351
1. Левое калибровочное поле . . . . .	351
1.1. Левое кинематическое поле . . . . .	351
1.2. Левое калибровочное поле . . . . .	352
2. Правое калибровочное поле . . . . .	353
2.1. Правое кинематическое поле . . . . .	353
2.2. Правое калибровочное поле . . . . .	354
3. Системообразующие постулаты . . . . .	355
IV. Группа поворотов как калибровочная группа . . . . .	355
1. Скалярное произведение. Длина вектора . . . . .	356
2. Правая калибровочная группа поворотов . . . . .	356
3. Повороты в пространстве действия лептонов (алгебре Клиффорда) . . . . .	358
V. Взаимодействие фундаментальных частиц с полем внутренней симметрии . . . . .	360
1. Алгебра действия фундаментальной частицы и правого калибровочного поля . . . . .	360
2. Уравнение структуры алгебры действия фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии . . . . .	361
3. Квантовые постулаты для фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии . . . . .	361
4. Квантовое уравнение для фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии . . . . .	362
5. Квантовое уравнение для лептонов в поле внутренней симметрии . . . . .	362
VI. Взаимодействие лептонов с электромагнитным полем . . . . .	363
1. Уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле . . . . .	363
2. Квантовое уравнение для лептонов в электромагнитном поле . . . . .	364

VII. Взаимодействие лептонов с электрослабым полем .....	365
1. Уравнения Салама–Вайнберга .....	366
2. Квантовое уравнение для лептонов в электрослабом поле. Первое приближение .....	366
3. Квантовое уравнение для лептонов в электрослабом поле. Второе приближение .....	369
4. Сравнение с теорией электрослабого взаимодействия лептонов Салама–Вайнберга .....	371
VIII. Правая и левая волновые функции фундаментальных частиц и античастиц .....	372
1. Волновые функции фундаментальных частиц .....	372
1.1. Правая волновая функция фундаментальной частицы .....	372
1.2. Левая волновая функция фундаментальной частицы .....	373
1.3. Заключительное замечание .....	373
2. Волновые функции фундаментальных античастиц .....	373
2.1. Правая волновая функция фундаментальной античастицы .....	373
2.2. Левая волновая функция фундаментальной античастицы .....	373
IX. Выводы по Главе .....	374
<b>Глава 5.4 Дуализм: промежуточные частицы – калибровочное поле .....</b>	<b>375</b>

I. Предварительные замечания .....	375
II. Фундаментальные и промежуточные частицы в поле внутренней симметрии .....	375
1. Алгебра действия фундаментальной и промежуточной частиц и поля внутренней симметрии .....	375
2. Уравнения структуры алгебры действия фундаментальной и промежуточной частиц и поля внутренней симметрии .....	376
3. Квантовые постулаты для фундаментальной и промежуточной частиц в поле внутренней симметрии .....	378
4. Тензор Янга–Миллса .....	379
5. Система квантовых уравнений для фундаментальной и промежуточной частиц в поле внутренней симметрии .....	380
5.1. Система квантовых уравнений для лептонов и промежуточных частиц в поле внутренней симметрии .....	381
5.2. Частные случаи .....	382
6. Инвариантная форма квантовых уравнений .....	382
III. Модель взаимодействия зарядов с участием промежуточных частиц .....	383
1. Корпускулярная модель излучения .....	384
IV. Модель взаимодействия зарядов с участием калибровочного поля .....	385
1. Начала обобщенной электродинамики .....	385
1.1. Закрученные электромагнитные волны .....	387
2. Преобразования потенциала и тензора электромагнитного поля при переходе к ускоренной системе отсчета .....	388
V. Выводы по Главе .....	390

<b>Глава 5.5 Промежуточные частицы второго рода .....</b>	<b>391</b>
I. Предварительные замечания .....	391
II. Промежуточные частицы второго рода .....	392
1. Алгебра действия фундаментальных частиц и промежуточных частиц первого и второго рода .....	392
1.1. Правая алгебра действия фундаментальных частиц и промежуточных частиц первого и второго рода $rT_2$ .....	393
2. Уравнения структуры правой алгебры действия фундаментальных и промежуточных частиц .....	394
3. Квантовые постулаты для фундаментальной и промежуточных частиц .....	394
4. Система квантовых уравнений для фундаментальной и промежуточных частиц .....	395



III. Взаимодействие фундаментальных, промежуточных частиц и поля внутренней симметрии .....	396
1. Промежуточные частицы второго рода и поле внутренней симметрии .....	396
2. Уравнения структуры алгебры действия фундаментальных, промежуточных частиц в поле внутренней симметрии .....	397
3. Квантовые постулаты для фундаментальной и промежуточных частиц в поле внутренней симметрии .....	398
4. Квантовые уравнения для фундаментальной и промежуточных частиц в поле внутренней симметрии .....	399
IV. Частицы и античастицы .....	399
1. Алгебра действия частиц и античастиц .....	399
V. Инвариант действия, лагранжиан и полевое слагаемое .....	402
1. Инвариант действия .....	402
2. Упрощающие обозначения .....	403
3. Лагранжиан и полевое слагаемое .....	403
VI. Выводы по Главе .....	404
<b>Глава 5.6 Пятимерная теория гравитации и электромагнетизма .....</b>	<b>405</b>
I. Предварительные замечания .....	405
II. Уравнения поля I .....	406
1. Уравнения поля для контравариантных компонент .....	406
2. Уравнения поля для смешанных компонент .....	408
3. Уравнения поля для ковариантных компонент .....	408
4. Уравнения поля с учетом размерности потенциалов электромагнитного поля .....	409
III. Масса и электрический заряд .....	409
1. Принцип наименьшего действия .....	409
2. Квадрат линейного элемента .....	410
3. Плотность массы и электрического заряда .....	411
4. Калибровочное преобразование .....	411
5. Тензор энергии-импульса материи .....	412
IV. Уравнения поля II .....	413
1. Уравнения поля с источниками .....	413
2. Закон сохранения заряда .....	414
3. Калибровка Лоренца .....	414
V. Уравнения движения в пятимерном пространстве .....	415
VI. $G$ -взаимодействие электрических зарядов .....	416
1. Уравнение $G$ -поля .....	417
2. Движение заряда под действием $G$ -поля .....	418
3. Замечание к полученному результату .....	419
VII. Физические постоянные I .....	419
1. Замечание относительно постоянной длины $L_0$ .....	420
VIII. Физические постоянные II .....	421
1. Исходные физические постоянные $(\varepsilon_0, \mu_0)$ .....	421
2. Исходные физические постоянные $(\varepsilon_0, \mu_0, \gamma)$ .....	421
3. Исходные физические постоянные $(\varepsilon_0, \mu_0, \gamma, \hbar)$ .....	422
4. Исходные физические постоянные $(\varepsilon_0, \mu_0, \gamma, \hbar, e)$ .....	422
5. Замечания относительно физических постоянных .....	423
IX. Выводы по Главе .....	423

X.	Приложение 1. Геометрия пятимерного пространства .....	423
1.	Метрический тензор .....	423
2.	Обратный метрический тензор .....	423
3.	Коэффициенты связности .....	423
4.	Тензор Риччи .....	425
5.	Скалярная кривизна .....	427
XI.	Приложение 2. Приведение к тензору электромагнитного поля .....	428
1.	Символы Кристоффеля первого рода .....	428
2.	Символы Кристоффеля второго рода .....	428
3.	Тензор Риччи .....	429
4.	Скалярная кривизна .....	429
XII.	Приложение 3. Геометрия пятимерного пространства с $G$ -полем .....	430
1.	Метрический тензор .....	430
2.	Обратный метрический тензор .....	430
3.	Коэффициенты связности .....	430
4.	Тензор Риччи .....	431
XIII.	Приложение 4. Сравнение слагаемых свертки тензора энергии-импульса .....	433
<b>Глава 5.7 Сильная гравитация и слабый электромагнетизм .....</b>		<b>434</b>
I.	Предварительные замечания .....	434
1.	Уравнения поля внешней симметрии .....	434
1.1.	Первое уравнение поля внешней симметрии .....	434
1.2.	Второе уравнение поля внешней симметрии .....	434
2.	Уравнения поля внутренней симметрии .....	434
2.1.	Первое уравнение поля внутренней симметрии .....	434
2.2.	Второе уравнение поля внутренней симметрии .....	434
3.	Сильная гравитация и слабый электромагнетизм .....	435
4.	Исходные представления о гравитации и электромагнетизме .....	435
II.	Группа гравитации и электрическая группа .....	436
1.	Группа гравитации .....	436
2.	Электрическая группа .....	436
III.	Гравитация и слабый электромагнетизм .....	437
1.	Геометрия гравитации и слабого электромагнетизма .....	437
1.1.	Коэффициенты связности .....	437
1.2.	Тензор кривизны .....	437
1.3.	Тензор Риччи .....	438
1.4.	Скалярная кривизна .....	438
2.	Аналогия между гравитацией и слабым электромагнетизмом .....	438
3.	Уравнения слабого электромагнитного поля .....	439
4.	Уравнение движения в слабом электромагнитном поле .....	439
5.	Полное действие для материи и электромагнитного поля .....	440
6.	Полная система уравнений электромагнитного поля .....	440
7.	Уравнения движения частицы в электромагнитном поле .....	440
IV.	Электромагнетизм и сильная гравитация .....	440
1.	Геометрия электромагнетизма и сильной гравитации .....	440
1.1.	Коэффициенты связности .....	440
1.2.	Тензор кривизны .....	441
2.	Аналогия между электромагнетизмом и сильной гравитацией .....	441
3.	Уравнения сильного гравитационного поля .....	442
4.	Замечание относительно постоянной $r$ .....	443
5.	Тензор энергии-импульса гравитационного поля .....	443

6. Полная система уравнений гравитационного поля .....	444
7. Уравнения движения частицы в гравитационном поле.....	444
V. Выводы по Главе .....	444
<b>Глава 5.8 Электро-гравитационное поле.....</b>	<b>445</b>
I. Наводящие соображения .....	445
1. Электромагнитное поле .....	445
2. Электро-гравитационное поле.....	445
II. Уравнения электромагнитного поля в векторной форме.....	446
1. Алгебра геометрического пространства в теории электромагнитного поля.....	446
2. Уравнения электромагнитного поля в векторной форме.....	446
2.1. Электрический ток.....	446
2.2. Уравнение свободного электрического поля .....	446
2.3. Уравнение свободного магнитного поля .....	447
3. Координатная форма уравнений электромагнитного поля.....	447
III. Уравнения электромагнитного поля в потенциальной форме.....	447
1. Электрический и магнитный потенциалы .....	447
2. Калибровка Лоренца .....	448
3. Уравнения электромагнитного поля в потенциальной форме.....	448
3.1. Первое уравнение электромагнитного поля в потенциальной форме.....	448
3.2. Второе уравнение электромагнитного поля в потенциальной форме.....	448
IV. Уравнения электромагнитного поля в четырехмерном представлении.....	449
1. Пространство-время СТО.....	449
2. Электромагнитный потенциал.....	449
3. Четырехмерный вектор плотности тока.....	449
4. Уравнения электромагнитного поля.....	450
5. Тензор электромагнитного поля.....	450
5.1. Уравнения электромагнитного поля.....	451
6. Слагаемые действия электромагнитного поля и тока .....	451
6.1. Слагаемое $S_1$ .....	451
6.2. Слагаемое $S_2$ .....	452
6.3. Вывод уравнений электромагнитного поля.....	452
V. Электро-гравитационное поле.....	453
1. Предварительные замечания .....	453
2. Пятимерное пространство-время .....	453
3. Пятимерный электромагнитный потенциал .....	454
3.1. Ковариантный потенциал.....	454
3.2. Контравариантный потенциал .....	454
3.3. Обобщенная калибровка Лоренца.....	455
4. Пятимерный вектор плотности тока.....	455
4.1. Обобщенный закон сохранения заряда.....	455
5. Тензор электро-гравитационного поля .....	455
6. Уравнения электро-гравитационного поля .....	456
6.1. Первое уравнение .....	456
6.2. Второе уравнение.....	457
6.3. Третье уравнение.....	457
VI. Антигравитация .....	458
1. Уравнение статического гравитационного поля.....	458
2. Уравнения статического $\mathbf{G}^0$ поля .....	458
2.1. Эквивалентная масса .....	459

VII. Обобщение электро-гравитационного поля .....	459
1. Алгебра правых поворотов ${}_rU$ .....	459
1.1. Квадрат линейного элемента в алгебре ${}_rU$ .....	460
1.2. $\theta$ -параметры .....	460
1.3. Оператор набла в алгебре ${}_rU$ .....	460
2. Восьмерное пространство-время .....	460
3. Компоненты электро-гравитационного потенциала .....	461
3.1. Ковариантные потенциалы .....	461
3.2. Контравариантные потенциалы .....	461
3.3. Обобщенная калибровка Лоренца .....	462
4. Восьмермерный вектор плотности тока .....	462
4.1. Обобщенный закон сохранения заряда .....	462
5. Тензор электро-гравитационного поля .....	463
6. Уравнения электро-гравитационного поля .....	464
6.1. Первое уравнение .....	464
6.2. Второе уравнение .....	465
6.3. Третье уравнение .....	465
6.4. Четвертое уравнение .....	466
7. Заключительные замечания .....	467
VIII. Экстаз .....	467
IX. Выводы по Главе .....	467
<b>Часть 6    Уравнения динамики</b> .....	<b>469</b>
<b>Глава 6.1    Уравнения динамики I. Вариационный принцип</b> .....	<b>469</b>
I. Преобразования левых динамических параметров физического объекта .....	469
1. Левые кинематические переменные .....	469
2. Преобразования левых динамических параметров физического объекта .....	470
II. Уравнения динамики и вариационный принцип .....	471
1. Уравнения динамики параметров фундаментального объекта .....	471
1.1. Уравнения динамики сдвига для параметров фундаментального объекта .....	474
1.2. Уравнения динамики линейного преобразования для параметров фундаментального объекта .....	475
1.3. Уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров фундаментального объекта .....	476
2. Уравнения динамики параметров промежуточного объекта .....	477
2.1. Уравнения динамики сдвига для параметров промежуточного объекта .....	480
2.2. Уравнения динамики линейного преобразования для параметров промежуточного объекта .....	481
2.3. Уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров промежуточного объекта .....	482
3. Уравнения динамики параметров второго промежуточного объекта .....	483
3.1. Уравнения динамики сдвига для параметров второго промежуточного объекта .....	486
3.2. Уравнения динамики линейного преобразования для параметров второго промежуточного объекта .....	487
3.3. Уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров второго промежуточного объекта .....	488
III. Таблицы слагаемых функции Лагранжа .....	490
1. Физический объект .....	490
1.1. Левая физика .....	490
1.2. Правая физика .....	490
2. Физический антиобъект .....	491
2.1. Левая физика .....	491
2.2. Правая физика .....	492

<b>Глава 6.2</b>	<b>Уравнения динамики II. Метод Гамильтона</b>	<b>494</b>
I.	Метод Гамильтона. Предварительные замечания	494
II.	Вывод уравнений динамики физического объекта	494
1.	Первое приближение	495
2.	Второе приближение	496
2.1.	Уравнения динамики сдвига	498
2.2.	Уравнения динамики линейного преобразования	499
3.	Общий случай – третье приближение	501
3.1.	Уравнения динамики сдвига	504
3.2.	Уравнения динамики линейного преобразования	506
3.3.	Уравнения динамики второго линейного преобразования	507
III.	Уравнения динамики фундаментального объекта в первом приближении	509
1.	Уравнение динамики сдвига для импульса	509
IV.	Уравнения динамики фундаментального объекта во втором приближении	509
1.	Уравнения динамики сдвига	509
1.1.	Уравнение динамики сдвига для импульса	510
1.2.	Уравнение динамики сдвига для момента	510
2.	Уравнения динамики линейного преобразования	510
2.1.	Уравнение динамики линейного преобразования для импульса	510
2.2.	Уравнения динамики линейного преобразования для момента	511
V.	Уравнения динамики фундаментального объекта в общем случае	511
1.	Уравнения динамики сдвига	511
1.1.	Уравнение динамики сдвига для импульса	511
1.2.	Уравнение динамики сдвига для момента	511
1.3.	Уравнение динамики сдвига для второго момента	511
2.	Уравнения динамики линейного преобразования	512
2.1.	Уравнение динамики линейного преобразования для импульса	512
2.2.	Уравнение динамики линейного преобразования для момента	512
2.3.	Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента	512
3.	Уравнения динамики второго линейного преобразования	513
3.1.	Уравнение динамики для импульса	513
3.2.	Уравнение динамики для момента	513
3.3.	Уравнение динамики для второго момента	513
VI.	Уравнения динамики промежуточного объекта в первом приближении	514
1.	Уравнение динамики сдвига для импульса	514
VII.	Уравнения динамики промежуточного объекта во втором приближении	514
1.	Уравнения динамики сдвига	514
1.1.	Уравнение динамики сдвига для импульса	514
1.2.	Уравнение динамики сдвига для момента	515
2.	Уравнения динамики линейного преобразования	515
2.1.	Уравнение динамики линейного преобразования для импульса	515
2.2.	Уравнения динамики линейного преобразования для момента	515
VIII.	Уравнения динамики промежуточного объекта в общем случае	516
1.	Уравнения динамики сдвига	516
1.1.	Уравнение динамики сдвига для импульса	516
1.2.	Уравнение динамики сдвига для момента	516
1.3.	Уравнение динамики сдвига для второго момента	516
2.	Уравнения динамики линейного преобразования	517
2.1.	Уравнение динамики линейного преобразования для импульса	517
2.2.	Уравнение динамики линейного преобразования для момента	517
2.3.	Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента	518

3.	Уравнения динамики второго линейного преобразования . . . . .	518
3.1.	Уравнение динамики для импульса . . . . .	518
3.2.	Уравнение динамики для момента . . . . .	518
3.3.	Уравнение динамики для второго момента . . . . .	519
IX.	Уравнения динамики второго промежуточного объекта в первом приближении . . . . .	519
1.	Уравнение динамики сдвига для импульса . . . . .	519
X.	Уравнения динамики второго промежуточного объекта во втором приближении . . . . .	519
1.	Уравнения динамики сдвига . . . . .	519
1.1.	Уравнение динамики сдвига для импульса . . . . .	520
1.2.	Уравнение динамики сдвига для момента . . . . .	520
2.	Уравнения динамики линейного преобразования . . . . .	520
2.1.	Уравнение динамики линейного преобразования для импульса . . . . .	520
2.2.	Уравнения динамики линейного преобразования для момента . . . . .	521
XI.	Уравнения динамики второго промежуточного объекта в общем случае . . . . .	521
1.	Уравнения динамики сдвига . . . . .	521
1.1.	Уравнение динамики сдвига для импульса . . . . .	521
1.2.	Уравнение динамики сдвига для момента . . . . .	521
1.3.	Уравнение динамики сдвига для второго момента . . . . .	522
2.	Уравнения динамики линейного преобразования . . . . .	522
2.1.	Уравнение динамики линейного преобразования для импульса . . . . .	522
2.2.	Уравнение динамики линейного преобразования для момента . . . . .	523
2.3.	Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента . . . . .	523
3.	Уравнения динамики второго линейного преобразования . . . . .	523
3.1.	Уравнение динамики для импульса . . . . .	523
3.2.	Уравнение динамики для момента . . . . .	524
3.3.	Уравнение динамики для второго момента . . . . .	524
<b>Глава 6.3</b>	<b>Перестановочные соотношения . . . . .</b>	<b>525</b>
I.	Предварительные замечания . . . . .	525
II.	Динамические параметры . . . . .	525
1.	Левые динамические параметры . . . . .	525
2.	Правые динамические параметры . . . . .	526
III.	Перестановочные соотношения операторов дифференцирования левой алгебры пространства-времени ${}_i\mathbb{X}$ . . . . .	526
IV.	Перестановочные соотношения операторов дифференцирования левой алгебры линейных преобразований ${}_i\mathbb{L}$ . . . . .	527
V.	Перестановочные соотношения операторов дифференцирования общей левой алгебры линейных преобразований ${}_i\mathbb{L} = {}_i\mathbb{L} + {}_i\mathbb{L}^*$ . . . . .	528
VI.	Перестановочные соотношения операторов дифференцирования левой кинематической алгебры ${}_i\mathbb{T} = {}_i\mathbb{X} + {}_i\mathbb{L}$ . . . . .	529
VII.	Перестановочные соотношения операторов дифференцирования левой кинематической алгебры ${}_i\mathbb{T} = {}_i\mathbb{X} + {}_i\mathbb{L}$ в поле внешней симметрии . . . . .	530
VIII.	Перестановочные соотношения операторов дифференцирования левой второй кинематической алгебры ${}_i\mathbb{T}_2 = {}_i\mathbb{X} + {}_i\mathbb{L} + {}_i\mathbb{A}$ . . . . .	531
1.	Частный случай . . . . .	532
2.	Общий случай . . . . .	534

IX. Перестановочные соотношения операторов дифференцирования левой второй кинематической алгебры ${}_l\mathbb{T}_2 = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L} + {}_l\mathbb{A}$ в поле внешней симметрии.....	536
1. Частный случай.....	536
2. Общий случай.....	538
3. Частный случай 2.....	543

## Глава 6.4 Уравнения динамики III. Учет перестановочных соотношений..... 544

I. Перестановочные соотношения.....	544
1. Первое приближение.....	544
1.1. В уравнениях динамики для импульса физического объекта.....	544
2. Второе приближение.....	544
2.1. В уравнениях динамики для импульса физического объекта.....	544
2.2. В уравнениях динамики для момента физического объекта.....	544
3. Общий случай.....	545
3.1. В уравнениях динамики для импульса физического объекта.....	545
3.2. В уравнениях динамики для момента физического объекта.....	545
3.3. В уравнениях динамики для второго момента физического объекта.....	545
II. Уравнения динамики фундаментального объекта в первом приближении.....	546
1. Уравнение динамики сдвига для импульса.....	546
III. Уравнения динамики фундаментального объекта во втором приближении.....	546
1. Уравнения динамики сдвига. Поле отсутствует.....	546
1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса.....	546
1.2. Уравнение динамики сдвига для момента.....	547
2. Уравнения динамики сдвига в поле внешней симметрии.....	547
2.1. Уравнение динамики сдвига для импульса.....	547
2.2. Уравнение динамики сдвига для момента.....	548
3. Уравнения динамики линейного преобразования.....	549
3.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса.....	549
4. Уравнение динамики линейного преобразования для момента.....	551
IV. Уравнения динамики фундаментального объекта в общем случае.....	554
1. Уравнения динамики сдвига.....	554
1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса.....	554
1.2. Уравнение динамики сдвига для момента.....	555
1.3. Уравнение динамики сдвига для второго момента.....	556
2. Уравнения динамики линейного преобразования.....	557
2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса.....	557
2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента.....	559
2.3. Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента.....	560
3. Уравнения динамики второго линейного преобразования.....	561
3.1. Уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса.....	561
3.2. Уравнение динамики второго линейного преобразования для момента.....	563
3.3. Уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента.....	564
V. Уравнения динамики промежуточного объекта в первом приближении.....	565
1. Уравнение динамики сдвига для импульса.....	565
VI. Уравнения динамики промежуточного объекта во втором приближении.....	566
1. Уравнения динамики сдвига.....	566
1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса.....	566
1.2. Уравнение динамики сдвига для момента.....	567
2. Уравнения динамики линейного преобразования.....	568
2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса.....	569
2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента.....	569

VII. Уравнения динамики промежуточного объекта в общем случае . . . . .	570
1. Уравнения динамики сдвига . . . . .	570
1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса . . . . .	571
1.2. Уравнение динамики сдвига для момента . . . . .	572
1.3. Уравнение динамики сдвига для второго момента . . . . .	573
2. Уравнение динамики линейного преобразования . . . . .	574
2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса . . . . .	574
2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента . . . . .	575
2.3. Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента . . . . .	576
3. Уравнения динамики второго линейного преобразования . . . . .	577
3.1. Уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса . . . . .	578
3.2. Уравнение динамики второго линейного преобразования для момента . . . . .	579
3.3. Уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента . . . . .	580
VIII. Уравнения динамики второго промежуточного объекта в первом приближении . . . . .	581
1. Уравнение динамики сдвига для импульса . . . . .	582
IX. Уравнения динамики второго промежуточного объекта во втором приближении . . . . .	582
1. Уравнения динамики сдвига . . . . .	582
1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса . . . . .	583
1.2. Уравнение динамики сдвига для момента . . . . .	584
2. Уравнения динамики линейного преобразования . . . . .	585
2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса . . . . .	585
2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента . . . . .	586
X. Уравнения динамики второго промежуточного объекта в общем случае . . . . .	587
1. Уравнения динамики сдвига . . . . .	587
1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса . . . . .	588
1.2. Уравнение динамики сдвига для момента . . . . .	589
1.3. Уравнение динамики сдвига для второго момента . . . . .	590
2. Уравнения динамики линейного преобразования . . . . .	591
2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса . . . . .	592
2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента . . . . .	593
2.3. Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента . . . . .	595
3. Уравнения динамики второго линейного преобразования . . . . .	596
3.1. Уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса . . . . .	596
3.2. Уравнение динамики второго линейного преобразования для момента . . . . .	597
3.3. Уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента . . . . .	598
XI. Условие совместности уравнений динамики . . . . .	599
<b>Глава 6.5 Уравнения динамики IV. Частные случаи . . . . .</b>	<b>602</b>
I. Уравнения динамики сдвига . . . . .	602
1. Уравнение динамики сдвига для импульса в поле внешней симметрии . . . . .	602
1.1. Частные случаи . . . . .	603
2. Уравнение динамики сдвига для импульса в поле внутренней симметрии . . . . .	605
2.1. Частные случаи . . . . .	605
3. Уравнение динамики сдвига для момента в поле внешней симметрии . . . . .	608
3.1. Частные случаи . . . . .	609
4. Уравнение динамики сдвига для второго момента . . . . .	610
II. Уравнения динамики линейного преобразования . . . . .	611
1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса . . . . .	611
2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента . . . . .	611
3. Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента . . . . .	612



---

III. Уравнения динамики второго линейного преобразования.....	612
1. Уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса.....	612
2. Уравнение динамики второго линейного преобразования для момента.....	612
3. Уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента.....	612
<b>Послесловие</b> .....	<b>613</b>



# Часть 4

## Фундаментальные частицы

### Глава 4.1 Алгебры фундаментальных частиц. Общая часть

#### I. ПРИСОЕДИНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБР ДЕЙСТВИЯ И ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Присоединенное (регулярное) представление алгебры замечательно тем, что позволяет представить векторы алгебры матрицами, а умножение векторов представить умножением матриц. Ключевыми при таком представлении являются алгебра матриц Паули и алгебра матриц Дирака.

##### 1. Контравариантные алгебры действия и пространства-времени

###### 1.1. Правая контравариантная алгебра

Обратимся к правой контравариантной алгебре действия  ${}_r\mathbf{S}$ . Напомним, что закон умножения базисных векторов этой алгебры записывается следующим образом:

$${}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_r\mathbf{e}_{K_2} = {}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rC^K_{K_1K_2} \quad (1)$$

или в других обозначениях

$${}_r\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_r\mathbf{e}_{K_3} = {}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rC^K_{K_2K_3}. \quad (2)$$

Алгебра  ${}_r\mathbf{S}$  является ассоциативной, то есть произведение нескольких векторов не зависит от порядка умножения сомножителей. Это условие может быть сведено к условию ассоциативности

$$({}_r\mathbf{S}_1 \circ {}_r\mathbf{S}_2) \circ {}_r\mathbf{S}_3 = {}_r\mathbf{S}_1 \circ ({}_r\mathbf{S}_2 \circ {}_r\mathbf{S}_3).$$

Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов

$$({}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_r\mathbf{e}_{K_2}) \circ {}_r\mathbf{e}_{K_3} = {}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ ({}_r\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_r\mathbf{e}_{K_3}).$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (1), (2) получим

$${}_rC^K_{K_1K_2} ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_{K_3}) = ({}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_r\mathbf{e}_K) {}_rC^K_{K_2K_3}.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (1), получим

$${}_rC^K_{K_1K_2} \cdot {}_rC^{K_4}_{KK_3} = {}_rC^{K_4}_{K_1K} \cdot {}_rC^K_{K_2K_3}. \quad (3)$$

Сравним это выражение с соотношением (2). Заключаем, что базисным векторам  ${}_r\mathbf{e}_K$  можно поставить в соответствие структурные матрицы  ${}_rC^{K_4}_{K_1K}$ . При этом  $\circ$  – умножению базисных векторов ставится в соответствие умножение соответствующих матриц в обратном порядке. Это соответствие называется *присоединенным (регулярным) представлением* алгебры  ${}_r\mathbf{S}$  и обозначается как

$${}_r\mathbf{e}_K \sim {}_rC^{K_4}_{K_1K}.$$

Номер структурной матрицы  $K$  есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. В частности, числовой единице  $\mathbf{e}_0$  соответствует

$$\mathbf{e}_0 \sim {}_rC^{K_4}_{K_10} = \delta^{K_4}_{K_1}.$$

В присоединенном представлении произвольному вектору алгебры  ${}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{e}_K S^K$  соответствует матрица

$${}_rS^{K_4}_{K_1} = {}_rC^{K_4}_{K_1K} \cdot S^K \sim {}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{e}_K S^K.$$

В присоединенном представлении произведению векторов

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{S}_1 \circ {}_r\mathbf{S}_2 &= {}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_r\mathbf{e}_{K_2} \cdot (S_1)^{K_1} \cdot (S_2)^{K_2} = \\ &= {}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rC^K_{K_1K_2} \cdot (S_1)^{K_1} \cdot (S_2)^{K_2} \end{aligned}$$

соответствует матрица

$${}_rC^{K_4}_{K_3K} \cdot {}_rC^K_{K_1K_2} \cdot (S_1)^{K_1} \cdot (S_2)^{K_2}.$$

Преобразуем это выражение с помощью равенства (3), которое предварительно преобразуем следующим образом:

$${}_rC^K_{K_3K_1} \cdot {}_rC^{K_4}_{KK_2} = {}_rC^{K_4}_{K_3K} \cdot {}_rC^K_{K_1K_2}.$$

Получим

$$\begin{aligned} {}_rC^K_{K_3K_1} \cdot {}_rC^{K_4}_{KK_2} \cdot (S_1)^{K_1} \cdot (S_2)^{K_2} &= \\ = {}_r(S_1)^K_{K_3} \cdot {}_r(S_2)^{K_4}_K, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} {}_r(S_1)^K_{K_3} &= {}_rC^K_{K_3K_1} \cdot (S_1)^{K_1}, \\ {}_r(S_2)^{K_4}_K &= {}_rC^{K_4}_{KK_2} \cdot (S_2)^{K_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, умножению векторов в алгебре  ${}_r\mathcal{S}$  в присоединенном представлении соответствует умножение матриц представления векторов-сомножителей в обратном порядке

$${}_r\mathbf{S}_1 \circ {}_r\mathbf{S}_2 \sim {}_r(S_1)^K_{K_3} \cdot {}_r(S_2)^{K_4}_K.$$

Отсюда следует, что закон умножения в правой алгебре действия

$${}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} {}_r\mathbf{S}_1 \circ {}_r\mathbf{S}_2$$

в присоединенном представлении принимает вид

$${}_rS^{K_4}_{K_3} = \frac{1}{S_0} {}_r(S_1)^K_{K_3} \cdot {}_r(S_2)^{K_4}_K.$$

Обратному вектору

$${}_r\mathbf{S}^{-1} = {}_r\mathbf{e}_I (S^{-1})^I$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$${}_r(S^{-1})^M_N = {}_rC^M_{NI} (S^{-1})^I.$$

Соотношению

$${}_r\mathbf{S} \circ {}_r\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{e}_0$$

в регулярном представлении соответствует матричное соотношение

$${}_r(S^{-1})^M_L \cdot {}_rS^L_N = \delta^M_N.$$

Действительно, имеем

$$\mathbf{S} \circ \mathbf{S}^{-1} \sim {}_rC^M_{LI} \cdot {}_rC^L_{NK} \cdot S^K \cdot (S^{-1})^I.$$

Преобразуем правую часть с помощью равенства (3). Получим

$${}_rC^M_{NL} \cdot {}_rC^L_{KI} \cdot S^K \cdot (S^{-1})^I.$$

Далее воспользуемся формулами (25) и (26) Главы 3.1.

$$\begin{aligned} {}_rC^0_{K_1K_2} \cdot (S^{-1})^{K_2} \cdot S^{K_1} &= 1, \\ {}_rC^\alpha_{K_1K_2} \cdot (S^{-1})^{K_2} \cdot S^{K_1} &= 0. \end{aligned}$$

В результате получим

$${}_rC^M_{N0} \cdot {}_rC^0_{KI} \cdot S^K \cdot (S^{-1})^I = \delta^M_N.$$

Скалярному произведению

$${}_r\mathbf{e}_I \cdot {}_r\mathbf{e}_K = \mathbf{e}_0 C^0_{IK}.$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$$G^M_{NIK} = \delta^M_N \cdot g_{IK}.$$

Аналогичные соотношения выполняются для правой контравариантной алгебры пространства-времени  ${}_r\mathcal{X}$ .

## 1.2. Левая контравариантная алгебра

Обратимся к левой контравариантной алгебре действия  ${}_l\mathcal{S}$ . Напомним, что закон умножения базисных векторов этой алгебры записывается следующим образом:

$${}_l\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_1} = {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lC^K_{K_1K_2} \quad (4)$$

или в других обозначениях

$${}_l\mathbf{e}_{K_3} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_2} = {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lC^K_{K_2K_3}. \quad (5)$$

Алгебра  ${}_l\mathcal{S}$  является ассоциативной, то есть произведение нескольких векторов не зависит от порядка умножения сомножителей. Это условие может быть сведено к условию ассоциативности

$$({}_l\mathbf{S}_1 \circ {}_l\mathbf{S}_2) \circ {}_l\mathbf{S}_3 = {}_l\mathbf{S}_1 \circ ({}_l\mathbf{S}_2 \circ {}_l\mathbf{S}_3).$$

Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов

$$({}_l\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_2}) \circ {}_l\mathbf{e}_{K_3} = {}_l\mathbf{e}_{K_1} \circ ({}_l\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_3}).$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (4), (5) получим

$${}_lC^K_{K_2K_1} ({}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_{K_3}) = ({}_l\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_l\mathbf{e}_K) {}_lC^K_{K_3K_2}.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (4), получим

$${}_lC^K_{K_2K_1} \cdot {}_lC^{K_4}_{K_3K} = {}_lC^{K_4}_{KK_1} \cdot {}_lC^K_{K_3K_2}$$

или иначе после перестановки слагаемых и сомножителей

$${}_lC^{K_4}_{KK_1} \cdot {}_lC^K_{K_3K_2} = {}_lC^{K_4}_{K_3K} \cdot {}_lC^K_{K_2K_1} \quad (6)$$

или иначе после перестановки индексов  $K_1$  и  $K_2$

$${}_lC^{K_4}_{KK_2} \cdot {}_lC^K_{K_3K_1} = {}_lC^{K_4}_{K_3K} \cdot {}_lC^K_{K_1K_2}. \quad (7)$$

Сравним это выражение с равенством (4). заключаем, что базисным векторам  ${}_l\mathbf{e}_K$  можно поставить в соответствие структурные матрицы  ${}_lC^{K_4}_{K_1K}$ . При этом  $\circ$  – умножению базисных векторов ставится в соответствие умножение соответствующих матриц в том же порядке. Это соответствие называется *присоединенным (регулярным) представлением* алгебры  ${}_l\mathcal{S}$  и обозначается как

$${}_l\mathbf{e}_K \sim {}_lC^{K_4}_{K_1K}.$$

Номер структурной матрицы  $K$  есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. В частности, числовой единице  $\mathbf{e}_0$  соответствует

$$\mathbf{e}_0 \sim {}_lC^{K_4}_{K_10} = \delta^{K_4}_{K_1}.$$

В присоединенном представлении произвольному вектору алгебры  ${}_l\mathbf{S} = {}_l\mathbf{e}_K S^K$  соответствует матрица

$${}_lS^{K_4}_{K_1} = {}_lC^{K_4}_{K_1K} \cdot S^K \sim {}_l\mathbf{S} = {}_l\mathbf{e}_K S^K.$$

В присоединенном представлении произведению векторов

$$\begin{aligned} {}_l\mathbf{S}_2 \circ {}_l\mathbf{S}_1 &= {}_l\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_1} \cdot (S_2)^{K_2} \cdot (S_1)^{K_1} = \\ &= {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lC^{K}_{K_1K_2} \cdot (S_2)^{K_2} \cdot (S_1)^{K_1} \end{aligned}$$

соответствует матрица

$${}_lC^{K_4}_{K_3K} \cdot {}_lC^{K}_{K_1K_2} \cdot (S_2)^{K_2} \cdot (S_1)^{K_1}.$$

Преобразуем это выражение с помощью равенства (7), получим

$$\begin{aligned} {}_lC^{K_4}_{KK_2} \cdot {}_lC^{K}_{K_3K_1} \cdot (S_2)^{K_2} \cdot (S_1)^{K_1} &= \\ = {}_l(S_2)^{K_4}_K \cdot {}_l(S_1)^K_{K_3}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} {}_l(S_1)^K_{K_3} &= {}_lC^{K}_{K_3K_1} \cdot (S_1)^{K_1}, \\ {}_l(S_2)^{K_4}_K &= {}_lC^{K_4}_{KK_2} \cdot (S_2)^{K_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, умножению векторов в алгебре  ${}_l\mathbf{S}$  в присоединенном представлении соответствует умножение матриц представления векторов-сомножителей в том же порядке

$${}_l\mathbf{S}_2 \circ {}_l\mathbf{S}_1 \sim {}_l(S_2)^{K_4}_K \cdot {}_l(S_1)^K_{K_3}.$$

Отсюда следует, что закон умножения в левой алгебре действия

$${}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} {}_l\mathbf{S}_2 \circ {}_l\mathbf{S}_1$$

в присоединенном представлении принимает вид

$${}_lS^{K_4}_{K_3} = \frac{1}{S_0} {}_l(S_2)^{K_4}_K \cdot {}_l(S_1)^K_{K_3}.$$

Обратному вектору

$${}_l\mathbf{S}^{-1} = {}_l\mathbf{e}_I \cdot (S^{-1})^I$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$${}_l(S^{-1})^M_N = {}_lC^M_{NI} \cdot (S^{-1})^I.$$

Соотношению

$${}_l\mathbf{S} \circ {}_l\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{e}_0$$

в регулярном представлении соответствует матричное соотношение

$${}_lS^M_L \cdot {}_l(S^{-1})^L_N = \delta^M_N.$$

Действительно, имеем

$${}_l\mathbf{S} \circ {}_l\mathbf{S}^{-1} \sim {}_lC^M_{LI} \cdot {}_lC^L_{NK} \cdot S^I \cdot (S^{-1})^K.$$

Преобразуем правую часть с помощью равенства (7). Получим

$$C^M_{NL} \cdot C^L_{IK} \cdot S^K \cdot (S^{-1})^I.$$

Далее воспользуемся формулами (27) и (28) Главы 3.1.

$$\begin{aligned} {}_lC^0_{K_1K_2} \cdot (S^{-1})^{K_1} \cdot S^{K_2} &= 1, \\ {}_lC^\alpha_{K_1K_2} \cdot (S^{-1})^{K_1} \cdot S^{K_2} &= 0. \end{aligned}$$

В результате получим

$$C^M_{N0} \cdot C^0_{KI} \cdot S^K \cdot (S^{-1})^I = \delta^M_N.$$

Скалярному произведению

$${}_l\mathbf{e}_I \cdot {}_l\mathbf{e}_K = \mathbf{e}_0 C^0_{IK}.$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$$G^M_{NIK} = \delta^M_N \cdot g_{IK}.$$

Аналогичные соотношения выполняются для левой контравариантной алгебры пространства-времени  ${}_r\mathbf{X}$ .

### 1.3. Ковариантный метрический тензор

Обратимся к правой контравариантной алгебре действия  ${}_r\mathbf{S}$ . Из условия ассоциативности  ${}_r\mathbf{S}$  следует соотношение (3):

$${}_rC^M_{K_1I} \cdot {}_rC^{K_4}_{MK} = {}_rC^{K_4}_{K_1M} \cdot {}_rC^M_{IK}.$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам  $K_4$  и  $K_1$ . Получим

$${}_rC^M_{LI} \cdot {}_rC^L_{MK} = {}_rC^L_{LM} \cdot {}_rC^M_{IK}. \quad (8)$$

Так как произведение базисного вектора  ${}_r\mathbf{e}_K$  на базисный вектор, отличный от  $\mathbf{e}_0$ , не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением  ${}_rC^M_{L0}$ , являются бесследовыми. Поэтому соотношение (8) имеет вид

$${}_rC^M_{LI} \cdot {}_rC^L_{MK} = {}_rC^L_{L0} \cdot {}_rC^0_{IK}.$$

Отсюда получим выражение для ковариантного метрического тензора

$$g_{IK} = \frac{1}{N} \cdot {}_rC^M_{LI} \cdot {}_rC^L_{MK},$$

где  $N$  – размерность алгебры  ${}_r\mathbf{S}$ .

Аналогичное соотношение получим, обратившись к левой контравариантной алгебре действия  ${}_l\mathbf{S}$ . Из условия ассоциативности  ${}_l\mathbf{S}$  следует соотношение (7)

$${}_lC^{K_4}_{MK} \cdot {}_lC^M_{K_3I} = {}_lC^{K_4}_{K_3M} \cdot {}_lC^M_{IK}.$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам  $K_4$  и  $K_3$ . Получим

$${}_i C^L_{MK} \cdot {}_i C^M_{LI} = {}_i C^L_{LM} \cdot {}_i C^M_{IK}. \quad (9)$$

Так как произведение базисного вектора  ${}_i \mathbf{e}_K$  на базисный вектор, отличный от  $\mathbf{e}_0$ , не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением  ${}_i C^M_{L0}$ , являются бесследовыми. Поэтому соотношение (9) имеет вид

$${}_i C^L_{MK} \cdot {}_i C^M_{LI} = {}_i C^L_{L0} \cdot {}_i C^0_{IK}.$$

Отсюда получим

$$g_{IK} = \frac{1}{N} \cdot {}_i C^L_{MK} \cdot {}_i C^M_{LI},$$

где  $N$ —размерность алгебры  ${}_i \mathcal{S}$ .

## 2. Ковариантные алгебры действия и пространства-времени

### 2.1. Правая ковариантная алгебра

Обратимся к правой ковариантной алгебре действия  ${}_r \mathcal{S}^*$ . Напомним, что закон умножения базисных векторов этой алгебры записывается следующим образом:

$${}_r \mathbf{E}^{K_1} \circ {}_r \mathbf{E}^{K_2} = {}_r C^{K_2 K_1}_K \cdot {}_r \mathbf{E}^K \quad (10)$$

или в других обозначениях

$${}_r \mathbf{E}^{K_2} \circ {}_r \mathbf{E}^{K_3} = {}_r C^{K_3 K_2}_K \cdot {}_r \mathbf{E}^K. \quad (11)$$

Алгебра  ${}_r \mathcal{S}^*$  является ассоциативной, то есть произведение нескольких векторов не зависит от порядка умножения сомножителей. Это условие может быть сведено к условию ассоциативности

$$({}_r \mathbf{S}_1^* \circ {}_r \mathbf{S}_2^*) \circ {}_r \mathbf{S}_3^* = {}_r \mathbf{S}_1^* \circ ({}_r \mathbf{S}_2^* \circ {}_r \mathbf{S}_3^*).$$

Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов

$$({}_r \mathbf{E}^{K_1} \circ {}_r \mathbf{E}^{K_2}) \circ {}_r \mathbf{E}^{K_3} = {}_r \mathbf{E}^{K_1} \circ ({}_r \mathbf{E}^{K_2} \circ {}_r \mathbf{E}^{K_3}).$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (10), (11) получим

$${}_r C^{K_2 K_1}_K ({}_r \mathbf{E}^K \circ {}_r \mathbf{E}^{K_3}) = ({}_r \mathbf{E}^{K_1} \circ {}_r \mathbf{E}^K) {}_r C^{K_3 K_2}_K.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (10), получим

$${}_r C^{K_2 K_1}_K \cdot {}_r C^{K_3 K_2}_K = {}_r C^{K_3 K_2}_K \cdot {}_r C^{K_2 K_1}_K. \quad (12)$$

Сравним это выражение с (11). Заключаем, что базисным векторам  ${}_r \mathbf{E}^K$  можно поставить в соответствие структурные матрицы  ${}_r C^{K K_1}_{K_4}$ . При этом  $\circ$ —

умножению ковариантных базисных векторов ставится в соответствие умножение соответствующих матриц в том же порядке. Это соответствие называется присоединенным (регулярным) представлением алгебры  ${}_r \mathcal{S}^*$  и обозначается как

$${}_r \mathbf{E}^K \sim {}_r C^{K K_1}_{K_4}.$$

Номер структурной матрицы  $K$  есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. В частности, числовой единице  $\mathbf{E}^0$  соответствует

$$\mathbf{E}^0 \sim {}_r C^{0 K_1}_{K_4} = \delta^{K_1}_{K_4}.$$

В присоединенном представлении произвольному вектору алгебры  ${}_r \mathcal{S}^* = S_K \cdot {}_r \mathbf{E}^K$  соответствует матрица

$${}_r S^{K_1}_{K_4} = S_K \cdot {}_r C^{K K_1}_{K_4} \sim {}_r \mathcal{S}^* = S_K \cdot {}_r \mathbf{E}^K.$$

Произведению векторов

$$\begin{aligned} {}_r \mathcal{S}_1^* \circ {}_r \mathcal{S}_2^* &= (S_1)_{K_1} \cdot (S_2)_{K_2} \cdot {}_r \mathbf{E}^{K_1} \circ {}_r \mathbf{E}^{K_2} = \\ &= (S_1)_{K_1} \cdot (S_2)_{K_2} \cdot {}_r C^{K_2 K_1}_K \cdot {}_r \mathbf{E}^K \end{aligned}$$

в присоединенном представлении соответствует матрица

$$(S_1)_{K_1} \cdot (S_2)_{K_2} \cdot {}_r C^{K_2 K_1}_K \cdot {}_r C^{K K_3}_{K_4}.$$

Преобразуем это выражение с помощью равенства (12), которое предварительно преобразуем следующим образом:

$${}_r C^{K_1 K_3}_K \cdot {}_r C^{K_2 K_1}_K = {}_r C^{K_2 K_1}_K \cdot {}_r C^{K K_3}_{K_4}.$$

Получим

$$\begin{aligned} (S_1)_{K_1} \cdot (S_2)_{K_2} \cdot {}_r C^{K_1 K_3}_K \cdot {}_r C^{K_2 K_1}_K &= \\ = {}_r (S_1)^{K_3}_K \cdot {}_r (S_2)^K_{K_4}, \end{aligned}$$

где

$${}_r (S_1)^{K_3}_K = (S_1)_{K_1} \cdot {}_r C^{K_1 K_3}_K,$$

$${}_r (S_2)^K_{K_4} = (S_2)_{K_2} \cdot {}_r C^{K_2 K_1}_K.$$

Таким образом, умножению ковариантных векторов в алгебре  ${}_r \mathcal{S}^*$  в присоединенном представлении соответствует умножение матриц представления векторов-сомножителей в том же порядке

$${}_r \mathcal{S}_1^* \circ {}_r \mathcal{S}_2^* \sim {}_r (S_1)^{K_3}_K \cdot {}_r (S_2)^K_{K_4}.$$

Отсюда следует, что закон умножения в правой ковариантной алгебре действия

$${}_r \mathcal{S}^* = \frac{1}{S_0} {}_r \mathcal{S}_1^* \circ {}_r \mathcal{S}_2^*$$

в присоединенном представлении принимает вид

$${}_r S^{K_3}_{K_4} = \frac{1}{S_0} {}_r (S_1)^{K_3}_K \cdot {}_r (S_2)^K_{K_4}.$$

Обратному вектору

$$({}_r\mathbf{S}^*)^{-1} = (S^{-1})_I \cdot {}_r\mathbf{E}^I$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$$(S^{-1})^M_N = (S^{-1})_I \cdot {}_rC^{IM}_N.$$

Соотношению

$${}_r\mathbf{S}^* \circ ({}_r\mathbf{S}^*)^{-1} = \mathbf{E}^0$$

в регулярном представлении соответствует матричное соотношение

$$S^{K_3}_L \cdot (S^{-1})^L_{K_4} = \delta^{K_3}_{K_4}.$$

Действительно, имеем

$${}_r\mathbf{S}^* \circ ({}_r\mathbf{S}^*)^{-1} \sim S_{K_1} \cdot (S^{-1})_{K_2} \cdot {}_rC^{K_1K_3}_K \cdot {}_rC^{K_2K_4}_{K_4}.$$

Преобразуем правую часть с помощью равенства (12). Получим

$$S_{K_1} \cdot (S^{-1})_{K_2} \cdot {}_rC^{K_2K_1}_K \cdot {}_rC^{KK_3}_{K_4}.$$

Далее воспользуемся определением обратного вектора

$$\begin{aligned} S_{K_1} \cdot (S^{-1})_{K_2} \cdot {}_rC^{K_2K_1}_0 &= 1, \\ S_{K_1} \cdot (S^{-1})_{K_2} \cdot {}_rC^{K_2K_1}_\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha$  – значения индекса  $K$  за исключением  $K = 0$ . В результате получим

$$S_{K_1} \cdot (S^{-1})_{K_2} \cdot {}_rC^{K_2K_1}_0 \cdot {}_rC^{0K_3}_{K_4} = \delta^{K_3}_{K_4}.$$

Скалярному произведению

$${}_r\mathbf{E}^I \cdot {}_r\mathbf{E}^K = {}_rC^{KI}_0 \cdot {}_r\mathbf{E}^0$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$$G^{KIN}_M = \delta^N_M \cdot g^{KI}.$$

Аналогичные соотношения выполняются для правой ковариантной алгебры пространства-времени  ${}_r\mathbb{X}^*$ .

## 2.2. Левая ковариантная алгебра

Обратимся к левой ковариантной алгебре действия  ${}_l\mathbf{S}^*$ . Напомним, что закон умножения базисных векторов этой алгебры записывается следующим образом:

$${}_l\mathbf{E}^{K_2} \circ {}_l\mathbf{E}^{K_1} = {}_lC^{K_2K_1}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^K \quad (13)$$

или в других обозначениях

$${}_l\mathbf{E}^{K_3} \circ {}_l\mathbf{E}^{K_2} = {}_lC^{K_3K_2}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^K. \quad (14)$$

Алгебра  ${}_l\mathbf{S}^*$  является ассоциативной, то есть произведение нескольких векторов не зависит от порядка

умножения сомножителей. Это условие может быть сведено к условию ассоциативности

$$({}_l\mathbf{S}^*_{3} \circ {}_l\mathbf{S}^*_{2}) \circ {}_l\mathbf{S}^*_{1} = {}_l\mathbf{S}^*_{3} \circ ({}_l\mathbf{S}^*_{2} \circ {}_l\mathbf{S}^*_{1}).$$

Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов

$$({}_l\mathbf{E}^{K_3} \circ {}_l\mathbf{E}^{K_2}) \circ {}_l\mathbf{E}^{K_1} = {}_l\mathbf{E}^{K_3} \circ ({}_l\mathbf{E}^{K_2} \circ {}_l\mathbf{E}^{K_1}).$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (13), (14) получим

$${}_lC^{K_3K_2}_K ({}_l\mathbf{E}^K \circ {}_l\mathbf{E}^{K_1}) = ({}_l\mathbf{E}^{K_3} \circ {}_l\mathbf{E}^K) {}_lC^{K_2K_1}_K.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (13), получим

$${}_lC^{K_3K_2}_K \cdot {}_lC^{KK_1}_{K_4} = {}_lC^{K_3K}_{K_4} \cdot {}_lC^{K_2K_1}_K$$

или иначе

$${}_lC^{K_3K}_{K_4} \cdot {}_lC^{K_2K_1}_K = {}_lC^{K_3K_2}_K \cdot {}_lC^{KK_1}_{K_4}. \quad (15)$$

Сравним это выражение с равенством (14). Заключаем, что базисным векторам  ${}_l\mathbf{E}^K$  можно поставить в соответствие структурные матрицы  ${}_lC^{KK_1}_{K_4}$ . При этом  $\circ$  – умножению базисных векторов ставится в соответствие умножение соответствующих матриц в обратном порядке. Это соответствие называется *присоединенным (регулярным) представлением* алгебры  ${}_l\mathbf{S}^*$  и обозначается как

$${}_l\mathbf{E}^K \sim {}_lC^{KK_1}_{K_4}.$$

Номер структурной матрицы  $K$  есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. В частности, числовой единице  $\mathbf{E}^0$  соответствует

$$\mathbf{E}^0 \sim {}_lC^{0K_1}_{K_4} = \delta^{K_1}_{K_4}.$$

В присоединенном представлении произвольному вектору алгебры  ${}_l\mathbf{S}^* = S_K \cdot {}_l\mathbf{E}^K$  соответствует матрица

$${}_lS^{K_1}_{K_4} = S_K \cdot {}_lC^{KK_1}_{K_4} \sim {}_l\mathbf{S}^* = S_K \cdot {}_l\mathbf{E}^K.$$

Произведению векторов

$$\begin{aligned} {}_l\mathbf{S}^*_{2} \circ {}_l\mathbf{S}^*_{1} &= (S_2)_{K_2} \cdot (S_1)_{K_1} \cdot {}_l\mathbf{E}^{K_2} \circ {}_l\mathbf{E}^{K_1} = \\ &= (S_2)_{K_2} \cdot (S_1)_{K_1} \cdot {}_lC^{K_2K_1}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^K \end{aligned}$$

в присоединенном представлении соответствует матрица

$$(S_2)_{K_2} \cdot (S_1)_{K_1} \cdot {}_lC^{K_2K_1}_K \cdot {}_lC^{KK_3}_{K_4}.$$

Преобразуем это выражение с помощью равенства (15), которое предварительно преобразуем следующим образом

$${}_lC^{K_2K}_{K_4} \cdot {}_lC^{K_1K_3}_K = {}_lC^{K_2K_1}_K \cdot {}_lC^{KK_3}_{K_4}.$$

Получим

$$\begin{aligned} (S_1)_{K_1} \cdot (S_2)_{K_2} \cdot {}_l C^{K_2 K}_{K_4} \cdot {}_l C^{K_1 K_3 K} &= \\ = {}_l (S_2)_{K_4}^K \cdot {}_l (S_1)_{K_3}^{K_3}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} {}_l (S_1)_{K_3}^{K_3} &= (S_1)_{K_1} \cdot {}_l C^{K_1 K_3 K}, \\ {}_l (S_2)_{K_4}^K &= (S_2)_{K_2} \cdot {}_l C^{K_2 K}_{K_4}. \end{aligned}$$

Таким образом, умножению ковариантных векторов в алгебре  ${}_l \mathbf{S}^*$  в присоединенном представлении соответствует умножение матриц представления векторов-сомножителей в обратном порядке

$${}_l \tilde{\mathbf{S}}_2 \circ {}_l \tilde{\mathbf{S}}_1 \sim {}_l (S_2)_{K_4}^K \cdot {}_l (S_1)_{K_3}^{K_3}.$$

Отсюда следует, что закон умножения в левой алгебре действия

$${}_l \mathbf{S}^* = \frac{1}{S_0} {}_l \mathbf{S}_2^* \circ {}_l \mathbf{S}_1^*$$

в присоединенном представлении принимает вид

$${}_l S^{K_3}_{K_4} = \frac{1}{S_0} {}_l (S_2)_{K_4}^K \cdot {}_l (S_1)_{K_3}^{K_3}.$$

Обратному вектору

$$({}_l \mathbf{S}^*)^{-1} = (S^{-1})_I \cdot {}_l \mathbf{E}^I$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$$(S^{-1})^M_N = (S^{-1})_I \cdot {}_l C^{IM}_N.$$

Соотношению

$${}_l \mathbf{S}^* \circ ({}_l \mathbf{S}^*)^{-1} = \mathbf{E}^0$$

в регулярном представлении соответствует матричное соотношение

$$(S^{-1})^L_{K_4} \cdot S^{K_3}_L = \delta^{K_3}_{K_4}.$$

Действительно, имеем

$${}_r \mathbf{S}^* \circ ({}_r \mathbf{S}^*)^{-1} \sim (S^{-1})_{K_2} \cdot {}_l C^{K_2 K}_{K_4} \cdot S_{K_1} \cdot {}_l C^{K_1 K_3}_{K_4}.$$

Преобразуем правую часть с помощью равенства (15). Получим

$$(S^{-1})_{K_2} \cdot S_{K_1} \cdot {}_l C^{K_2 K_1}_K \cdot {}_l C^{K K_3}_{K_4}.$$

Далее воспользуемся определением обратного вектора

$$\begin{aligned} (S^{-1})_{K_2} \cdot S_{K_1} \cdot {}_l C^{K_2 K_1}_0 &= 1, \\ (S^{-1})_{K_2} \cdot S_{K_1} \cdot {}_l C^{K_2 K_1}_\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha$  – значения индекса  $K$  за исключением  $K = 0$ . В результате получим

$$(S^{-1})_{K_2} \cdot S_{K_1} \cdot {}_l C^{K_2 K_1}_0 \cdot {}_l C^{0 K_3}_{K_4} = \delta^{K_3}_{K_4}.$$

Скалярному произведению

$${}_l \mathbf{E}^I \cdot {}_l \mathbf{E}^K = {}_l C^{IK}_0 \cdot {}_l \mathbf{E}^0$$

в регулярном представлении соответствует матрица

$$G^{IKN}_M = \delta^N_M \cdot g^{IK}.$$

Аналогичные соотношения выполняются для левой ковариантной алгебры пространства-времени  ${}_l \mathbf{X}^*$ .

### 2.3. Контравариантный метрический тензор

Обратимся к правой ковариантной алгебре действия  ${}_r \mathbf{S}^*$ . Из условия ассоциативности  ${}_r \mathbf{S}^*$  следует соотношение (12)

$${}_r C^{KK_1}_M \cdot {}_r C^{IM}_{K_4} = {}_r C^{IK}_M \cdot {}_r C^{MK_1}_{K_4}.$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам  $K_4$  и  $K_1$ . Получим

$${}_r C^{KL}_M \cdot {}_r C^{IM}_L = {}_r C^{IK}_M \cdot {}_r C^{ML}_L. \quad (16)$$

Так как произведение базисного вектора  ${}_r \mathbf{E}^K$  на базисный вектор, отличный от  $\mathbf{E}^0$ , не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением  ${}_r C^{0M}_L$ , являются бесследовыми. Поэтому соотношение (16) имеет вид

$${}_r C^{KL}_M \cdot {}_r C^{IM}_L = {}_r C^{IK}_0 \cdot {}_r C^{0L}_L.$$

Отсюда получим выражение для ковариантного метрического тензора

$$g^{IK} = \frac{1}{N} \cdot {}_r C^{KL}_M \cdot {}_r C^{IM}_L,$$

где  $N$  – размерность алгебры  ${}_r \mathbf{S}^*$ .

Аналогичное соотношение получим, обратившись к левой ковариантной алгебре действия  ${}_l \mathbf{S}^*$ . Из условия ассоциативности  ${}_l \mathbf{S}^*$  следует соотношение (15)

$${}_l C^{IM}_{K_4} \cdot {}_l C^{KK_1}_M = {}_l C^{IK}_M \cdot {}_l C^{MK_1}_{K_4}.$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам  $K_4$  и  $K_1$ . Получим

$${}_l C^{IM}_L \cdot {}_l C^{KL}_M = {}_l C^{IK}_M \cdot {}_l C^{ML}_L. \quad (17)$$

Так как произведение базисного вектора  ${}_l \mathbf{E}^K$  на базисный вектор, отличный от  $\mathbf{E}^0$ , не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением  ${}_l C^{0M}_L$ , являются бесследовыми. Поэтому соотношение (17) имеет вид

$${}_l C^{IM}_L \cdot {}_l C^{KL}_M = {}_l C^{IK}_0 \cdot {}_l C^{0L}_L.$$

Отсюда получим

$$g^{IK} = \frac{1}{N} \cdot {}_l C^{IM}_L \cdot {}_l C^{KL}_M,$$

где  $N$  – размерность алгебры  ${}_l \mathbf{S}^*$ .

## II. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ МАТРИЦ

Предварительно сделаем следующее замечание. Матрицы Дирака представляют собой структурные матрицы алгебры Клиффорда, которая привлекается



для описания квантовых явлений с участием электронов. Отсюда следует то значение, которое нужно придавать структурным матрицам. Это значение обусловлено тем, что в структурных матрицах отражена информация о законе умножения векторов в алгебре, привлекаемой для описания физических явлений. В этом Разделе укажем алгоритм и условия вычисления структурных матриц подалгебр алгебры действия и пространства-времени фундаментальных частиц.

### 1. Контравариантные алгебры действия и пространства-времени

#### 1.1. Правая контравариантная алгебра

Обратимся к вычислению структурных матриц правой контравариантной алгебры действия  ${}_r\mathcal{S}$ . Напомним, что закон умножения базисных векторов этой алгебры записывается следующим образом:

$${}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_r\mathbf{e}_{K_2} = {}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rC_{K_1 K_2}^K. \quad (18)$$

Присоединенное представление алгебры  ${}_r\mathcal{S}$  устанавливает соответствие между базисными векторами алгебры и ее структурными матрицами

$${}_r\mathbf{e}_K \sim {}_rC_{K_1 K}^{K_4}.$$

Номер структурной матрицы  $K$  есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. Индекс  $K_4$  нумерует строки, а индекс  $K_1$  нумерует столбцы структурной матрицы.

Из выражения (18) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно задать номер структурной матрицы в соответствии с номером базисного вектора ( $K$ ). Затем для вычисления элемента структурной матрицы с номером  $K$ , расположенного в столбце с номером  $K_1$  и в строке с номером  $K_4$ , необходимо базисный вектор, номер которого  $K_1$  совпадает с номером *столбца* матрицы, умножить *справа* на базисный вектор, номер которого  $K$  совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер  $K_4$  указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом необходимо поставить указанное численное значение проекции. Условно этот алгоритм обозначим  ${}_r e$ .

#### 1.2. Левая контравариантная алгебра

Обратимся к вычислению структурных матриц левой контравариантной алгебры действия  ${}_l\mathcal{S}$ . Напомним, что закон умножения базисных векторов этой алгебры записывается следующим образом:

$${}_l\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_1} = {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lC_{K_1 K_2}^K. \quad (19)$$

Присоединенное представление алгебры  ${}_l\mathcal{S}$  устанавливает соответствие между базисными векторами алгебры и ее структурными матрицами

$${}_l\mathbf{e}_K \sim {}_lC_{K_1 K}^{K_4}.$$

Номер структурной матрицы  $K$  есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. Индекс  $K_4$  нумерует строки, а индекс  $K_1$  нумерует столбцы структурной матрицы.

Из выражения (19) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно задать номер структурной матрицы в соответствии с номером базисного вектора ( $K$ ). Затем для вычисления элемента структурной матрицы с номером  $K$ , расположенного в столбце с номером  $K_1$  и в строке с номером  $K_4$ , необходимо базисный вектор, номер которого  $K_1$  совпадает с номером *столбца* матрицы, умножить *слева* на базисный вектор, номер которого  $K$  совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер  $K_4$  указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом необходимо поставить указанное численное значение проекции. Условно этот алгоритм обозначим  ${}_l e$ .

### 2. Ковариантные алгебры действия и пространства-времени

#### 2.1. Правая ковариантная алгебра

Обратимся к вычислению структурных матриц правой ковариантной алгебры действия  ${}_r\mathcal{S}^*$ . Напомним, что закон умножения базисных векторов этой алгебры записывается следующим образом:

$${}_r\mathbf{E}^{K_1} \circ {}_r\mathbf{E}^{K_2} = {}_rC^{K_2 K_1}_K \cdot {}_r\mathbf{E}^K. \quad (20)$$

Присоединенное представление алгебры  ${}_r\mathcal{S}^*$  устанавливает соответствие между базисными векторами алгебры и ее структурными матрицами

$${}_r\mathbf{E}^K \sim {}_rC^{K K_1}_{K_4}.$$

Номер структурной матрицы  $K$  есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. Индекс  $K_1$  нумерует строки, а индекс  $K_4$  нумерует столбцы структурной матрицы.

Из выражения (20) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно задать номер структурной матрицы в соответствии с номером базисного вектора ( $K$ ). Затем для вычисления элемента структурной матрицы с номером  $K$ , расположенного в строке с номером  $K_1$  и в столбце с номером  $K_4$ , необходимо базисный вектор, номер которого  $K_1$  совпадает с номером *строки* матрицы, умножить *справа* на базисный

вектор, номер которого  $K$  совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер  $K_4$  указанного базисного вектора определит номер столбца, на пересечении которого с рассматриваемой строкой необходимо поставить указанное численное значение проекции. Условно этот алгоритм обозначим  ${}_r E$ .

### 2.2. Левая ковариантная алгебра

Обратимся к вычислению структурных матриц левой ковариантной алгебры действия  ${}_l S^*$ . Напомним, что закон умножения базисных векторов этой алгебры записывается следующим образом:

$${}_l E^{K_2} \circ {}_l E^{K_1} = {}_l C^{K_2 K_1 K} \cdot {}_l E^K. \quad (21)$$

Присоединенное представление алгебры  ${}_l S^*$  устанавливает соответствие между базисными векторами алгебры и ее структурными матрицами

$${}_l E^K \sim {}_l C^{K K_1 K_4}.$$

Номер структурной матрицы  $K$  есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. Индекс  $K_1$  нумерует строки, а индекс  $K_4$  нумерует столбцы структурной матрицы.

Из выражения (21) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно задать номер структурной матрицы в соответствии с номером базисного вектора ( $K$ ). Затем для вычисления элемента структурной матрицы с номером  $K$ , расположенного в строке с номером  $K_1$  и в столбце с номером  $K_4$ , необходимо базисный вектор, номер которого  $K_1$  совпадает с номером *строки* матрицы, умножить *слева* на базисный вектор, номер которого  $K$  совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер  $K_4$  указанного базисного вектора определит номер столбца, на пересечении которого с рассматриваемой строкой необходимо поставить указанное численное значение проекции. Условно этот алгоритм обозначим  ${}_l E$ .

## 3. Сравнение структурных матриц

### 3.1. Правые алгебры

Сравнение алгоритмов  ${}_r e$  и  ${}_r E$  показывает, что структурные матрицы правой контравариантной алгебры  ${}_r C^{K K_1 K_2}$  отличаются от структурных матриц правой ковариантной алгебры  ${}_r C^{K_2 K_1 K}$  тем, что строки и столбцы матриц меняются местами, то есть матрицы  ${}_r C^{K_2 K_1 K}$  являются транспонированными по отношению матрицам  ${}_r C^{K K_1 K_2}$ . При этом симметричные матрицы остаются теми же, а антисимметричные

матрицы меняют знак. Поэтому в дальнейшем ограничимся вычислением только структурных матриц правой контравариантной алгебры  ${}_r C^{K K_1 K_2}$ , имея в виду, что по ним можно легко установить структурные матрицы правой ковариантной алгебры  ${}_r C^{K_2 K_1 K}$ .

### 3.2. Левые алгебры

Сравнение алгоритмов  ${}_l E$  и  ${}_l e$  показывает, что структурные матрицы левой ковариантной алгебры  ${}_l C^{K_2 K_1 K}$  отличаются от структурных матриц левой контравариантной алгебры  ${}_l C^{K K_1 K_2}$  тем, что строки и столбцы матриц меняются местами, то есть матрицы  ${}_l C^{K K_1 K_2}$  являются транспонированными по отношению матрицам  ${}_l C^{K_2 K_1 K}$ . При этом симметричные матрицы остаются теми же, а антисимметричные матрицы меняют знак. Поэтому в дальнейшем ограничимся вычислением только структурных матриц левой ковариантной алгебры  ${}_l C^{K_2 K_1 K}$ , имея в виду, что по ним можно легко установить структурные матрицы левой контравариантной алгебры  ${}_l C^{K K_1 K_2}$ .

## 4. Последовательность индексов

### 4.1. Трехмерное образующее пространство

Будем рассматривать базисные векторы и координаты слагаемых компонент вектора алгебры в определенной последовательности. Так вектор  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}_3$  будем записывать следующим образом<sup>1</sup>:

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_{32} S^{32} + \mathbf{e}_{13} S^{13} + \mathbf{e}_{21} S^{21} + \mathbf{e}_0 S^0 + \mathbf{e}_1 S^1 + \mathbf{e}_2 S^2 + \mathbf{e}_3 S^3 + \mathbf{e}_{123} S^{123}. \quad (22)$$

Указанная запись соответствует следующему порядку индексов слагаемых компонент вектора:

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

Если бы мы имели дело с векторным пространством, то порядок индексов не имел бы существенного значения. Но для алгебры это не так. Напомним, что именно для такого порядка индексов мы получили матрицы Дирака. Ни в каком другом случае этот результат был бы невозможен. Попробуем разобраться, в чем тут дело. В указанном порядке выделяется группа базисных векторов

$${}_l \mathbf{e}_{32}, \quad {}_l \mathbf{e}_{13}, \quad {}_l \mathbf{e}_{21}, \quad {}_l \mathbf{e}_0.$$

За этим обстоятельством стоит определенный физический смысл. Векторное пространство, построенное на указанных базисных векторах, является алгеброй. Более того, эта алгебра имеет фундаментальное

<sup>1</sup> Изложенное далее относится как к правой, так и к левой алгебрам действия. Поэтому символы векторов  ${}_r$  и  ${}_l$  не указаны.

значение для элементарных частиц. В ковариантной пространственно-временной модификации эта алгебра есть алгебра нерелятивистского спина.

Два базисных вектора

$$l\mathbf{e}_{21}, \quad l\mathbf{e}_0$$

также выделяются в особый блок, который также определяет алгебру, имеющую фундаментальное значение для элементарных частиц. В ковариантной пространственно-временной модификации эта алгебра есть алгебра третьей компоненты спина.

#### 4.2. Четырехмерное образующее пространство

В общем случае четырехмерного образующего пространства вектор  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}_4$  будем записывать в следующем порядке индексов слагаемых компонент:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \mathbf{e}_{32} S^{32} + \mathbf{e}_{13} S^{13} + \mathbf{e}_{21} S^{21} + \mathbf{e}_0 S^0 + \\ & + \mathbf{e}_{42} S^{42} + \mathbf{e}_{14} S^{14} + \mathbf{e}_{1324} S^{1324} + \mathbf{e}_{34} S^{34} + \\ & + \mathbf{e}_1 S^1 + \mathbf{e}_2 S^2 + \mathbf{e}_3 S^3 + \mathbf{e}_{123} S^{123} + \\ & + \mathbf{e}_{134} S^{134} + \mathbf{e}_{234} S^{234} + \mathbf{e}_4 S^4 + \mathbf{e}_{124} S^{124}. \end{aligned}$$

Указанная запись соответствует следующему порядку индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

В указанном порядке выделяется группа базисных векторов

$$l\mathbf{e}_{32}, \quad l\mathbf{e}_{13}, \quad l\mathbf{e}_{21}, \quad l\mathbf{e}_0, \quad l\mathbf{e}_{42}, \quad l\mathbf{e}_{14}, \quad l\mathbf{e}_{1324}, \quad l\mathbf{e}_{34}.$$

Векторное пространство, построенное на указанных базисных векторах, является алгеброй. Эта алгебра имеет фундаментальное значение для элементарных частиц. В левой модификации эта алгебра есть алгебра релятивистского спина.

### 5. Представление над полем гиперчисел

#### 5.1. Представление над полем двумерных гиперчисел

Вектор  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}_3$  можно записать в виде<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \mathbf{e}_{13} \circ (\mathbf{e}_{21}' S^{32} + \mathbf{e}_0 S^{13}) + \\ & + \mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_{21} S^{21} + \mathbf{e}_0 S^0) + \mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_{21} S^1 + \mathbf{e}_0 S^2) + \\ & + \mathbf{e}_{123} \circ (\mathbf{e}_{21}' S^3 + \mathbf{e}_0 S^{123}). \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Штрих перед координатой означает, что эта координата умножается на знак соответствующей соседней транспозиции. Например,

$$'S^3 = S^3 \cdot \text{sign}(2, 3) \cdot \text{sign}(1, 3).$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{S}_3$  в виде произведения  $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_1$ . Базисными векторами алгебры  $\mathbb{S}_2$  являются  $\mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{123}$ ; базисными векторами алгебры  $\mathbb{S}_1$  являются  $\mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_0$ .

Также вектор  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}_4$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \mathbf{e}_{13} \circ (\mathbf{e}_{21}' S^{32} + \mathbf{e}_0 S^{13}) + \\ & + \mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_{21} S^{21} + \mathbf{e}_0 S^0) + \mathbf{e}_{14} \circ (\mathbf{e}_{21}' S^{42} + \mathbf{e}_0 S^{14}) + \\ & + \mathbf{e}_{34} \circ (\mathbf{e}_{21}' S^{1324} + \mathbf{e}_0 S^{34}) + \mathbf{e}_2 \circ (\mathbf{e}_{21} S^1 + \mathbf{e}_0 S^2) + \\ & + \mathbf{e}_{123} \circ (\mathbf{e}_{21}' S^3 + \mathbf{e}_0 S^{123}) + \mathbf{e}_{234} \circ (\mathbf{e}_{21}' S^{134} + \mathbf{e}_0 S^{234}) + \\ & + \mathbf{e}_{124} \circ (\mathbf{e}_{21}' S^4 + \mathbf{e}_0 S^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{S}_4$  в виде произведения  $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_1$ . Базисными векторами алгебры  $\mathbb{S}_3$  являются  $\mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{123}$ ;  $\mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{34}, \mathbf{e}_{234}, \mathbf{e}_{124}$ ; базисными векторами алгебры  $\mathbb{S}_1$  являются  $\mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_0$ .

Выражения в скобках в этих случаях можно рассматривать как *координаты* вектора  $\mathbf{S}$  над полем гиперчисел размерности два. При этом алгебра  $\mathbb{S}_1$  выступает как множество указанных гиперчисел. Базисный вектор  $\mathbf{e}_0$  представляет собой действительную единицу, а базисный вектор  $\mathbf{e}_{21}$  рассматривается как вторая гиперъединица. В том случае, если  $\text{sign}(1, 2) = -1$  (в этом случае  $(\mathbf{e}_{21})^2 = -1$ ) базисный вектор  $\mathbf{e}_{21}$  рассматриваем как мнимую единицу, алгебра  $\mathbb{S}_1$  выступает как множество комплексных чисел. В результате имеем *комплексное представление* алгебры действия  $\mathbb{S}$ . Именно в таком виде была создана квантовая механика, и поэтому мнимая единица приобрела таинственную, трансцендентную роль в квантовой теории. В действительности с нею связан лишь способ записи соответствующего базисного вектора.

В том случае, если  $\text{sign}(1, 2) = 1$  (в этом случае  $(\mathbf{e}_{21})^2 = 1$ ) базисный вектор  $\mathbf{e}_{21}$  рассматриваем как *a*-единицу, алгебра  $\mathbb{S}_1$  выступает как множество *a*-гиперчисел. В результате имеем *a-представление* алгебры действия  $\mathbb{S}$ .

#### 5.2. Представление над полем четырехмерных гиперчисел

Кроме того, вектор  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}_3$  может быть записан в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_{32} S^{32} + \mathbf{e}_{13} S^{13} + \mathbf{e}_{21} S^{21} + \mathbf{e}_0 S^0) \\ & + \mathbf{e}_{123} \circ (\mathbf{e}_{32}' S^1 + \mathbf{e}_{13}' S^2 + \mathbf{e}_{21}' S^3 + \mathbf{e}_0 S^{123}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{S}_3$  в виде произведения  $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$ . Базисными векторами алгебры  $\mathbb{S}_1$  являются  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_{123}$ ; базисными векторами алгебры  $\mathbb{S}_2$  являются  $\mathbf{e}_{32}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_0$ .

Также вектор  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}_4$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_{32} S^{32} + \mathbf{e}_{13} S^{13} + \mathbf{e}_{21} S^{21} + \mathbf{e}_0 S^0) + \\ & + \mathbf{e}_{34} \circ (\mathbf{e}_{32}' S^{42} + \mathbf{e}_{13}' S^{14} + \mathbf{e}_{21}' S^{1324} + \mathbf{e}_0 S^{34}) + \\ & + \mathbf{e}_{123} \circ (\mathbf{e}_{32} S^1 + \mathbf{e}_{13}' S^2 + \mathbf{e}_{21}' S^3 + \mathbf{e}_0 S^{123}) + \\ & + \mathbf{e}_{124} \circ (\mathbf{e}_{32}' S^{134} + \mathbf{e}_{13}' S^{234} + \mathbf{e}_{21}' S^4 + \mathbf{e}_0 S^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{S}_4$  в виде произведения  $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{S}_2$  являются  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_{123}, \mathbf{e}_{34}, \mathbf{e}_{124}$ ; базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{S}_2$  являются  $\mathbf{e}_{32}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_0$ .

Выражения в скобках в этих случаях можно рассматривать как *координаты* вектора  $\mathbf{S}$  над полем гиперчисел размерности четыре. При этом алгебра  $\mathbb{S}_2$  выступает как множество указанных гиперчисел. Четырем гиперединицам соответствуют базисные векторы  $\mathbf{e}_{32}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_0$ . Базисный вектор  $\mathbf{e}_0$  представляет собой действительную единицу.

В том случае, если<sup>3</sup>

$$\text{sign}(1, 2) = \text{sign}(1, 3) = \text{sign}(3, 2) = -1,$$

алгебра  $\mathbb{S}_2$  выступает как множество кватернионов. В результате мы имеем *кватернионное представление* алгебры действия  $\mathbb{S}_4$ .

### 5.3. Представление над полем восьмимерных гиперчисел

Также вектор  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}_4$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \mathbf{e}_0 \circ (\mathbf{e}_{32} S^{32} + \mathbf{e}_{13} S^{13} + \mathbf{e}_{21} S^{21} + \mathbf{e}_0 S^0 + \\ & + \mathbf{e}_{42} S^{42} + \mathbf{e}_{14} 'S^{14} + \mathbf{e}_{1324} 'S^{1324} + \mathbf{e}_{34} S^{34}) + \\ & + \mathbf{e}_{123} \circ (\mathbf{e}_{32} S^1 + \mathbf{e}_{13} 'S^2 + \mathbf{e}_{21} 'S^3 + \mathbf{e}_0 S^{123}) + \\ & + \mathbf{e}_{42} 'S^{134} + \mathbf{e}_{14} 'S^{234} + \mathbf{e}_{1324} 'S^4 + \mathbf{e}_{34} S^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{S}_4$  в виде произведения  $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_3$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{S}_1$  являются  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_{123}$ ; базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{S}_3$  являются  $\mathbf{e}_{32}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_{42}, \mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{1324}, \mathbf{e}_{34}$ .

Выражения в скобках в этих случаях можно рассматривать как *координаты* вектора  $\mathbf{S}$  над полем гиперчисел размерности восемь. При этом алгебра  $\mathbb{S}_3$  выступает как множество указанных гиперчисел. Четырем гиперединицам соответствуют базисные векторы  $\mathbf{e}_{32}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_{42}, \mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{1324}, \mathbf{e}_{34}$ . Базисный вектор  $\mathbf{e}_0$  представляет собой действительную единицу.

## 6. Сжатое представление контравариантной алгебры

Сжатое представление необходимо ввести уже потому, что матрицы Дирака есть структурные матрицы алгебры Клиффорда в сжатом представлении.

<sup>3</sup> в этом случае

$$(\mathbf{r}\mathbf{e}_{21})^2 = (\mathbf{r}\mathbf{e}_{13})^2 = (\mathbf{r}\mathbf{e}_{32})^2 = -1.$$

*Сжатым* называется регулярное представление алгебры  $\mathbb{S}_n$  в ее подалгебре  $\mathbb{S}_{n-k}$ , где  $k < n$ .

Рассмотрим сжатое представление алгебры  $\mathbb{S}_n$  в ее подалгебре  $\mathbb{S}_{n-1}$ .

Разобьем базисные векторы  $\mathbf{e}_I$  алгебры  $\mathbb{S}_n$  на две группы  $\mathbf{e}_{I_1}$  и  $\mathbf{e}_{I_2}$  с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы  $\mathbf{e}_{I_1}$  образовывали алгебру. В силу симметрий алгебры закон умножения алгебры  $\mathbb{S}_n$  принимает вид

$$\mathbf{e}_{K_1} \circ \mathbf{e}_{I_1} = \mathbf{e}_{L_1} C^{L_1 K_1 I_1}, \quad (23)$$

$$\mathbf{e}_{K_2} \circ \mathbf{e}_{I_1} = \mathbf{e}_{L_2} C^{L_2 K_2 I_1}, \quad (24)$$

$$\mathbf{e}_{K_1} \circ \mathbf{e}_{I_2} = \mathbf{e}_{L_2} C^{L_2 K_1 I_2},$$

$$\mathbf{e}_{K_2} \circ \mathbf{e}_{I_2} = \mathbf{e}_{L_1} C^{L_1 K_2 I_2}.$$

Будем полагать, что приближенно базисные векторы  $\mathbf{e}_{L_2}$  можно заменить на базисные векторы  $\mathbf{e}_{L_1}$  с помощью соотношения

$$\mathbf{e}_{L_2} = \mathbf{e}_{L_1} \cdot P^{L_1 L_2},$$

где  $P^{L_2 L_1}$  есть матрица соответствий. Тогда соотношение (24) принимает вид

$$\mathbf{e}_{K_2} \circ \mathbf{e}_{I_1} = \mathbf{e}_{L_1} \cdot P^{L_1 L_2} \cdot C^{L_2 K_2 I_1}. \quad (25)$$

В сжатом представлении базисные векторы подалгебры  $\mathbb{S}_{n-1}$  представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно. Соотношения (23) и (25) позволяют получить структурные матрицы алгебры  $\mathbb{S}_n$  в ее подалгебре  $\mathbb{S}_{n-1}$ . Аналогичным образом можно рассмотреть сжатое представление алгебры  $\mathbb{S}_n$  в ее подалгебре  $\mathbb{S}_{n-k}$ , где  $k < n$ , путем последовательного выполнения нескольких сжатий.

### 6.1. Первое сжатое представление

Рассмотрим сжатое представление  $\mathbb{S}_4$  в ее подалгебре  $\mathbb{S}_3$ , построенной на базисных векторах  $\mathbf{e}_{32}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{123}$ . Для этого положим, что при вычислении по формуле (25) базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами<sup>4</sup>

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность структурных матриц алгебры  $\mathbb{S}_4$  понижается вдвое и равна  $8 \times 8$  в действительном представлении,  $4 \times 4$  в представлении 2-гиперчислами<sup>5</sup> и  $2 \times 2$  в представлении 4-гиперчислами. Структурные матрицы пространственных базисных векторов алгебры  $\mathbb{S}_4$  в сжатом представлении совпадают с точными матрицами алгебры

<sup>4</sup> При таком сжатии базисный вектор  $\mathbf{e}_4$  отождествляется с базисным вектором  $\mathbf{e}_3$ .

<sup>5</sup> Именно так сформированы матрицы Дирака.

$\mathbb{S}_3$ . Такое представление названо *первым сжатым* и обозначено

$$R_1 : \mathbb{S}_4 \rightarrow \mathbb{S}_3 \{e_{32}, e_{13}, e_{21}, e_0, e_1, e_2, e_3, e_{123}\}.$$

6.2. Второе сжатое представление

Рассмотрим сжатое представление

$$R_2 : \mathbb{S}_4 \rightarrow \mathbb{S}_2 \{e_{32}, e_{13}, e_{21}, e_0\},$$

которое называно *вторым сжатым* представлением. Для этого положим, что при вычислении по формуле (25) базисные векторы с индексами (42, 14, 1324, 34), (134, 234, 4, 124) и (1, 2, 3, 123) отождествляются с базисными векторами с индексами (32, 13, 21, 0) соответственно. Тогда размерность структурных матриц алгебры  $\mathbb{S}_4$  понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна  $4 \times 4$  в действительном представлении,  $2 \times 2$  в представлении 2-гиперчислами и  $1 \times 1$  в представлении 4-гиперчислами.

6.3. Третье сжатое представление

Рассмотрим сжатое представление

$$R_3 : \mathbb{S}_4 \rightarrow \mathbb{S}_1 \{e_{21}, e_0\},$$

которое мы называли *третьим сжатым* представлением. Для этого положим, что базисные векторы с индексами (42, 14), (1324, 34), (134, 234), (4, 124), (1, 2), (3, 123), (32, 13) отождествляются с базисными векторами с индексами (21, 0) соответственно. Тогда размерность структурных матриц алгебры  $\mathbb{S}_4$  понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна  $2 \times 2$  в действительном представлении,  $1 \times 1$  в представлении 2-гиперчислами.

Предварительно заметим, что теория электрона Дирака использует первое сжатое представление алгебры Клиффорда, теория электрона Паули использует второе сжатое представление алгебры Клиффорда, а теория электрона Шредингера использует третье сжатое представление алгебры Клиффорда.

- Присоединенное представление левой контравариантной алгебры действия и пространства-времени фундаментальных частиц ставит в соответствие  $\circ$ -умножению базисных векторов умножение соответствующих левых структурных матриц в том же порядке.
- Присоединенное представление правой ковариантной алгебры действия и пространства-времени фундаментальных частиц ставит в соответствие  $\circ$ -умножению базисных векторов умножение соответствующих правых структурных матриц в том же порядке.
- Присоединенное представление левой ковариантной алгебры действия и пространства-времени фундаментальных частиц ставит в соответствие  $\circ$ -умножению базисных векторов умножение соответствующих левых структурных матриц в обратном порядке.
- Слагаемые векторов алгебр действия и пространства-времени фундаментальных частиц необходимо записывать, используя следующий порядок индексов

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

- Переход от множества действительных чисел к множеству гиперчисел позволяет компактифицировать запись векторов алгебр действия и пространства-времени фундаментальных частиц.
- Сжатое представление позволяет рассматривать векторы алгебр действия и пространства-времени фундаментальных частиц в приближенной форме. Теория электрона Дирака использует первое сжатое представление алгебры Клиффорда, теория электрона Паули использует второе сжатое представление алгебры Клиффорда, а теория электрона Шредингера использует третье сжатое представление алгебры Клиффорда.

### III. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Присоединенное представление алгебры позволяет представить векторы алгебры матрицами, а умножение векторов представить умножением матриц.
- Присоединенное представление правой контравариантной алгебры действия и пространства-времени фундаментальных частиц ставит в соответствие  $\circ$ -умножению базисных векторов умножение соответствующих правых структурных матриц в обратном порядке.

## Глава 4.2 Нерелятивистские лептоны. Алгебры действия и пространства-времени лептонов

### I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Алгебра действия лептонов есть частный случай алгебры действия фундаментальных частиц  $\mathbb{S}$ , соответствующий частному случаю соседней перестановки базисных векторов образующего пространства. Также алгебра пространства-времени лептонов есть частный случай алгебры пространства-времени фундаментальных частиц  $\mathbb{X}$ .

Для того, чтобы очевидно выделить этот случай, для алгебры лептонов (действия и пространства-времени) введем другое обозначение базисных векторов. Вместо обозначения базисных векторов  $\mathbf{e}$  введем обозначение  $\varepsilon$ , а вместо  $\mathbf{E}$  введем обозначение  $\mathcal{E}$ . Кроме того, введем специальное обозначение для алгебры действия лептонов  $\mathbb{C}$  и специальное обозначение для алгебры пространства-времени лептонов  $\mathbb{X}_L$ .

Эта Глава относится к лептонам, которые названы *нерелятивистскими*. Это название *не означает*, что рассматриваются лептоны, движущиеся с скоростью, много меньшей скорости света. Это название означает, что рассматриваются лептоны, в формировании волновой функции которых не участвуют времениподобные компоненты, то есть образующее пространство алгебры действия таких лептонов полагается подобным геометрическому пространству.

### II. КОНТРАВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЛЕПТОНОВ

В этом Разделе рассмотрим контравариантную алгебру действия лептонов с трехмерным образующим пространством<sup>1</sup>  $\mathbb{C}_3$ .

В соответствии с Разделом III.1 Главы 3.4 волновая функция лептонов в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки для образующих базисных векторов алгебры лептонов<sup>2</sup>

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}.$$

<sup>1</sup> Подобным геометрическому пространству.

<sup>2</sup> Приведенные перестановочные соотношения определяют алгебру, которая называется алгеброй Клиффорда, точнее алгебру Клиффорда с трехмерным образующим пространством.

В результате волновая функции лептонов имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_1 \psi^1 + \mathbf{e}_2 \psi^2 + \mathbf{e}_3 \psi^3 + \mathbf{e}_{[21]} \psi^{[21]} + \mathbf{e}_{[13]} \psi^{[13]} + \mathbf{e}_{[32]} \psi^{[32]} + \mathbf{e}_{123} \psi^{[123]}. \quad (1)$$

Перепишем это выражение с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

Получим

$$\psi = \varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_1 \psi^1 + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_3 \psi^3 + \varepsilon_{123} \psi^{123} \quad (2)$$

или в компактной записи

$$\psi = \varepsilon_A \psi^A,$$

где индекс  $A$  принимает значения

$$A \sim (32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

#### 1. Действительное представление алгебры действия лептонов $\mathbb{C}_3$

Записи вектора  $\psi$  (2) соответствует действительное представление алгебры действия лептонов  $\mathbb{C}_3$ . В этом случае структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы

$$C^{A_1}_{A_2 A} \sim \varepsilon_A,$$

имеют действительные коэффициенты, а размерность матриц равна  $8 \times 8$  (см. Раздел III). Помимо действительного представления, будем использовать *комплексное, кватернионное и бикватернионное* представления базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

#### 2. Комплексное представление алгебры действия лептонов $\mathbb{C}_3$

Комплексное представление алгебры действия лептонов  $\mathbb{C}_3$  основано на следующей записи вектора  $\psi$ :

$$\psi = \varepsilon_{13} \circ (\varepsilon_{21} \psi^{32} + \varepsilon_0 \psi^{13}) + \varepsilon_0 \circ (\varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0) + \varepsilon_2 \circ (\varepsilon_{21} \psi^1 + \varepsilon_0 \psi^2) + \varepsilon_{123} \circ (\varepsilon_{21} \psi^3 + \varepsilon_0 \psi^{123}).$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_3$  в виде произведения  $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_1$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_2$  являются

$$\varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_0, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_1$  являются

$$\varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_0.$$

Пространство  $\mathbb{C}_1$  можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору  $\varepsilon_{21}$  алгебры  $\mathbb{C}_1$  поставим в соответствие мнимую единицу  $i$ , имея в виду, что  $(\varepsilon_{21})^2 = -1$ , а базисному вектору  $\varepsilon_0$  алгебры  $\mathbb{C}_1$  поставим в соответствие действительную единицу

$$\varepsilon_{21} \sim i, \quad \varepsilon_0 \sim 1.$$

В результате получим вектор алгебры  $\mathbb{C}_3$  в комплексном представлении

$$\psi = \varepsilon_{13} \circ (i\psi^{32} + \psi^{13}) + \varepsilon_0 \circ (i\psi^{21} + \psi^0) + \varepsilon_2 \circ (i\psi^1 + \psi^2) + \varepsilon_{123} \circ (i\psi^3 + \psi^{123}). \quad (3)$$

Таким образом, в комплексном представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= i\psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= i\psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^2 &= i\psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= i\psi^3 + \psi^{123}. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_{123} \psi^{123} \quad (5)$$

или в компактной записи

$$\psi = \varepsilon_\alpha \psi^\alpha,$$

где индекс  $\alpha$  принимает значения

$$\alpha \sim (13, 0, 2, 123).$$

Отсюда видно, что в комплексном представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\varepsilon_{13}, \varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_{123}$ , то есть волновую функцию можно рассматривать как четырехмерный вектор над полем комплексных чисел.

В комплексном представлении структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы  $\varepsilon_A$ ,

$$C^{\alpha_1}_{\alpha_2 A} \sim \varepsilon_A$$

имеют размерность  $4 \times 4$ . Коэффициенты матриц представлены системой гиперчисел (см. Раздел III).

### 3. Кватернионное представление алгебры действия лептонов $\mathbb{C}_3$

Кватернионное представление алгебры действия лептонов  $\mathbb{C}_3$  основано на следующей записи вектора  $\psi$ :

$$\psi = \varepsilon_0 \circ (\varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0) + \varepsilon_{123} \circ (\varepsilon_{32} \psi^1 + \varepsilon_{13} \psi^2 + \varepsilon_{21} \psi^3 + \varepsilon_0 \psi^{123}) \varepsilon_{123}.$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_3$  в виде произведения  $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2$ . Базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_1$  являются

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_2$  являются

$$\varepsilon_{32}, \quad \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_0.$$

Последняя алгебра является алгеброй кватернионов, так как

$$\begin{aligned} (\varepsilon_0)^2 &= \varepsilon_0, \quad (\varepsilon_{32})^2 = (\varepsilon_{13})^2 = (\varepsilon_{21})^2 = -\varepsilon_0, \\ \varepsilon_0 \circ \varepsilon_{32} &= \varepsilon_{32} \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_{32}, \\ \varepsilon_0 \circ \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{13} \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_{13}, \\ \varepsilon_0 \circ \varepsilon_{21} &= \varepsilon_{21} \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_{21}, \\ \varepsilon_{32} \circ \varepsilon_{13} &= -\varepsilon_{13} \circ \varepsilon_{32} = \varepsilon_{21}, \\ \varepsilon_{13} \circ \varepsilon_{21} &= -\varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{32}, \\ \varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{32} &= -\varepsilon_{32} \circ \varepsilon_{21} = \varepsilon_{13}. \end{aligned}$$

Для базисных кватернионов используем следующие обозначения<sup>3</sup>:

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad q_0.$$

Заменим базисные векторы  $\varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_0$  кватернионами в соответствии

$$\begin{aligned} \varepsilon_{32} &\sim q_1, \\ \varepsilon_{13} &\sim q_2, \\ \varepsilon_{21} &\sim q_3, \\ \varepsilon_0 &\sim q_0. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{C}_3$  в кватернионном представлении

$$\psi = \varepsilon_0 \cdot (q_1 \cdot \psi^{32} + q_2 \psi^{13} + q_3 \psi^{21} + \psi^0) + \varepsilon_{123} \cdot (q_1 \psi^1 + q_2 \psi^2 + q_3 \psi^3 + \psi^{123}).$$

Таким образом, в кватернионном представлении координаты (компоненты) вектора являются кватернионами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= q_1 \psi^{32} + q_2 \psi^{13} + q_3 \psi^{21} + \psi^0, \\ \Psi^{123} &= q_1 \psi^1 + q_2 \psi^2 + q_3 \psi^3 + \psi^{123}. \end{aligned} \quad (6)$$

<sup>3</sup> Напомним, что кватернионы – это числа вида

$$\alpha_0 \cdot q^0 + \alpha_1 \cdot q^1 + \alpha_2 \cdot q^2 + \alpha_3 \cdot q^3,$$

где  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – действительные числа, а  $q^0, q^1, q^2, q^3$  – базисные кватернионы, для которых выполняются следующие правила умножения:

$$\begin{aligned} q^0 \circ q^0 &= q^0, & q^i \circ q^i &= -q^0, \\ q^0 \circ q^i &= q^i \circ q^0 = q^i, & (i = 1, 2, 3), \\ q^1 \circ q^2 &= -q^2 \circ q^1 = q^3, \\ q^2 \circ q^3 &= -q^3 \circ q^2 = q^1, \\ q^3 \circ q^1 &= -q^1 \circ q^3 = q^2. \end{aligned}$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \varepsilon_0 \Psi^0 + \varepsilon_{123} \Psi^{123}$$

или в компактной записи

$$\psi = \varepsilon_a \Psi^a,$$

где индекс  $a$  принимает значения

$$a \sim (0, 123).$$

Отсюда видно, что в кватернионном представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\varepsilon_0, \varepsilon_{123}$ , то есть, волновую функцию можно рассматривать как двумерный вектор над полем кватернионов.

В кватернионном представлении структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы  $\varepsilon_A$ ,

$$C^{a_1}_{a_2 A} \sim \varepsilon_A$$

имеют размерность  $2 \times 2$ . Коэффициенты матриц представлены двумя системами гиперчисел. (см. Раздел III).

#### 4. Бикватернионное представление алгебры действия лептонов $\mathbb{C}_3$

Назовем бикватернионами числа вида

$$b_0 \cdot \alpha^0 + b_1 \cdot \alpha^1 + b_2 \cdot \alpha^2 + b_3 \cdot \alpha^3 + b_4 \cdot \alpha^4 + b_5 \cdot \alpha^5 + b_6 \cdot \alpha^6 + b_7 \cdot \alpha^7,$$

где  $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7$  — действительные числа, а  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$  — базисные бикватернионы, для которых выполняются следующие правила умножения:

$$\begin{aligned} b_i \circ b_i &= b_0, & i &= 0, 4, 5, 6, \\ b_k \circ b_k &= -b_0, & k &= 1, 2, 3, 7, \\ b_i \circ b_k &= -b_k \circ b_i, & i \neq k, i, k &\neq 0, \neq 7, \\ b_i \circ b_k &= b_k \circ b_i, & k &= 0, 7. \end{aligned}$$

Обратимся снова к вектору алгебры  $\mathbb{C}_3$

$$\psi = \varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_1 \psi^1 + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_3 \psi^3 + \varepsilon_{123} \psi^{123}.$$

Базисные векторы

$$\varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{123}$$

можно рассматривать как базисные бикватернионы. Для этого случая будем пользоваться переобозначением

$$\begin{aligned} \varepsilon_{32} &\sim b_{32}, & \varepsilon_{13} &\sim b_{13}, & \varepsilon_{21} &\sim b_{21}, & \varepsilon_0 &\sim b_0, \\ \varepsilon_1 &\sim b_1, & \varepsilon_2 &\sim b_2, & \varepsilon_3 &\sim b_3, & \varepsilon_{123} &\sim b_{123}. \end{aligned}$$

### III. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ КОНТРАВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ ДЕЙСТВИЯ ЛЕПТОНОВ $\mathbb{C}_3$

#### 1. Структурные матрицы правой алгебры действия лептонов ${}_r\mathbb{C}_3$

Приступим к вычислению структурных матриц правой алгебры действия лептонов  ${}_r\mathbb{C}$ . Структурные матрицы будем обозначать теми базисными векторами, которые они представляют

$${}_r\varepsilon_A \sim {}_rC^{A_1}_{A_2 A}.$$

Напомним, что закон умножения базисных векторов в правой алгебре лептонов  ${}_r\mathbb{C}_3$  записывается следующим образом:

$${}_r\varepsilon_{A_2} \circ {}_r\varepsilon_A = {}_r\varepsilon_{A_1} \cdot {}_rC^{A_1}_{A_2 A}. \quad (7)$$

Из выражения (7) следует алгоритм вычисления структурных матриц. Сначала нужно установить номер структурной матрицы ( $A$ ) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы ( $A_2$ ) проделать следующие вычисления. Базисный вектор  ${}_r\varepsilon_{A_2}$ , номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *справа* на базисный вектор  $\varepsilon_A$ , номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор  ${}_r\varepsilon_{A_1}$ , на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер ( $A_1$ ) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом необходимо поставить указанное численное значение проекции.

В результате вычислений получим структурные матрицы размером  $8 \times 8$  с действительными коэффициентами.<sup>4</sup>

При преобразовании матриц  ${}_rC^{A_1}_{A_2 A}$  от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

Алгебра системы чисел  $\{1, a, b, i\}$  представлена законами умножения

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1, & a^2 &= b^2 = 1, & i^2 &= -1, \\ 1 \cdot a &= a \cdot 1 = a, & 1 \cdot b &= b \cdot 1 = b, & 1 \cdot i &= i \cdot 1 = i, \\ ab &= -b \cdot a = i, & a \cdot i &= -i \cdot a = b, & i \cdot b &= -b \cdot i = a. \end{aligned}$$

При преобразовании матриц  ${}_rC^{\alpha_1}_{\alpha_2 A}$  от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

<sup>4</sup> Точнее, коэффициенты матриц принимают значения либо 0, либо 1, либо -1.





Напомним, что закон умножения базисных векторов в левой алгебре лептонов  ${}_l\mathbb{C}_3$  записывается следующим образом:

$${}_l\mathcal{E}_A \circ {}_l\mathcal{E}_{A_2} = {}_l\mathcal{E}_{A_1} \cdot {}_lC^{A_1}_{A_2A}. \quad (9)$$

Из выражения (9) следует алгоритм вычисления структурных матриц. Сначала нужно установить номер структурной матрицы ( $A$ ) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы ( $A_2$ ) проделать следующие вычисления. Базисный вектор  ${}_l\mathcal{E}_{A_2}$ , номер которого совпадает с номером столбца матрицы, нужно умножить слева на базисный вектор  $\mathcal{E}_A$ , номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор  ${}_l\mathcal{E}_{A_1}$ , на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер ( $A_1$ ) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

В результате вычислений получим структурные матрицы размером  $8 \times 8$  с действительными коэффициентами.<sup>5</sup>

При преобразовании матриц  ${}_lC^{A_1}_{A_2A}$  от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения: для блоков  $2 \times 2$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix},$$

что равносильно замене действительных матриц  $2 \times 2$  вида

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

на комплексные числа.

При преобразовании матриц  ${}_lC^{\alpha_1}_{\alpha_2A}$  от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения: для блоков  $2 \times 2$

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} & -i \\ i & \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  представляют собой *матрицы Паули* (с той разницей, что по соображениям симметрии в качестве  $\sigma_3$  взята матрица с противоположным знаком).

$${}_l\mathcal{E}_0 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \end{array}$$

$${}_l\mathcal{E}_1 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$${}_l\mathcal{E}_2 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$${}_l\mathcal{E}_3 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$${}_l\mathcal{E}_{21} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$${}_l\mathcal{E}_{13} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ 13 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

<sup>5</sup> Точнее коэффициенты матриц принимают значения либо 0, либо 1, либо -1.

$$\begin{aligned}
 {}^l \varepsilon_{32} &\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 \\ 32 & 21 & 1 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 32 & 1 \\ 13 & -1 \\ 21 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 123 & \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ & \\ & \\ & \\ & 1 \\ & -1 \\ & 1 \\ & -1 \end{array} \end{array} \\
 &= i \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ 13 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & \\ 1 & \\ & 1 \end{array} & \begin{array}{cc} 13 & \\ 0 & \\ 2 & \\ 123 & \end{array} \end{array} \\
 &= i \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ & \end{array} \\ \begin{array}{cc} \sigma_1 & \\ & \sigma_1 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & \\ 123 & \end{array} \end{array} \\
 \\
 {}^l \varepsilon_{123} &\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 \\ 32 & 21 & 1 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 32 & -1 \\ 13 & -1 \\ 21 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 123 & 1 \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & -1 \\ & -1 \\ & -1 \\ & -1 \end{array} \end{array} \\
 &= 1 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ 13 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & \end{array} & \begin{array}{cc} 13 & \\ 0 & \\ 2 & \\ 123 & \end{array} \end{array} \\
 &= 1 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ & \end{array} \\ \begin{array}{cc} & -1 \\ 1 & \\ 1 & \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & \\ 123 & \end{array} \end{array}
 \end{aligned}$$

### 2.1. Алгебра нерелятивистского спина

Алгебра нерелятивистского спина – это подалгебра левой алгебры действия лептонов, построенная на базисных векторах

$${}^l \varepsilon_{21} = i \sigma_3, \quad {}^l \varepsilon_{13} = i \sigma_2, \quad {}^l \varepsilon_{32} = i \sigma_1. \quad (10)$$

Отсюда вектор

$${}^l \varepsilon_{21} \psi^{21} + {}^l \varepsilon_{13} \psi^{13} + {}^l \varepsilon_{32} \psi^{32}$$

– это часть левого вектора действия лептонов, ответственная за спиновые характеристики лептонов.

### 2.2. Матрицы Дирака

Структурные матрицы, вычисленные в предыдущем Разделе, это восемь из шестнадцати матриц Дирака<sup>6</sup>. Восемь, а не шестнадцать, потому, что в этой Главе рассматривается алгебра действия лептонов с трехмерным образующим пространством, число измерений которой равно восьми.

Таким образом, матрицы Дирака – это не что иное, как структурные матрицы левой алгебры Клиффорда. Именно это обстоятельство побуждает к тому, чтобы отождествить алгебру Клиффорда с алгеброй действия лептонов.

## IV. СИСТЕМООБРАЗУЮЩИЙ ПОСТУЛАТ. ПОКОЛЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Сформулируем постулат, на котором будем основываться в дальнейшем.

Предварительно напомним, что каждой фундаментальной частице можно поставить в соответствие *две аналогичные* фундаментальные частицы. Итого имеем *три аналогичные* фундаментальные частицы. Указанные три аналогичные фундаментальные частицы объединены в одну группу. О трех аналогичных фундаментальных частицах, принадлежащих одной группе, говорят как о трех частицах разных *поколений* этой группы – частице первого поколения, частице второго поколения и частице третьего поколения.

В частности, электрон  $e$  находится в одной группе поколений с мюоном  $\mu$  и тау-лептоном  $\tau$ . Эта группа поколений называется *группой нижних лептонов*. В этой группе

электрон  $e$  – это частица первого поколения,

мюон  $\mu$  – это частица второго поколения,

тау-лептон  $\tau$  – это частица третьего поколения.

Ключевой признак, по которому три частицы относятся к одной группе поколений, состоит в том, что эти частицы обладают одинаковыми свойствами (например, спином и зарядом) за исключением массы. Если исходить из того, что определяющей характеристикой фундаментальных частиц является вектор действия, то общие признаки и различия фундаментальных частиц одной группы поколений следует искать в организации векторной структуры этих фундаментальных частиц. Ясно, что векторные структуры аналогичных фундаментальных частиц должны быть различными, но очень похожими, причем различия в векторной структуре аналогичных фундаментальных частиц должны быть *трехпозиционными*.

Здесь мы постулируем связь между структурой вектора действия фундаментальных частиц и их принадлежностью одной группе поколений. Обратимся к комплексному представлению вектора действия лептона (3) и отнесем этот вектор действия к электрону. Поэтому запишем

$$\begin{aligned}
 \psi_e = & \varepsilon_{13} \circ (i \psi^{32} + \psi^{13}) + \varepsilon_0 \circ (i \psi^{21} + \psi^0) + \\
 & + \varepsilon_2 \circ (i \psi^1 + \psi^2) + \varepsilon_{123} \circ (i \psi^3 + \psi^{123}). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Отметим особенность базисного вектора  $\varepsilon_{21}$ . Он играет ключевую роль в организации комплексного представления вектора действия электрона. Именно базисному вектору  $\varepsilon_{21}$  ставится в соответствие мнимая единица. Имея в виду это соответствие, назовем базисный вектор  $\varepsilon_{21}$  *основным*. Однако с алгебраической точки зрения направления  $\varepsilon_{13}$  и  $\varepsilon_{32}$  эквивалентны направлению  $\varepsilon_{21}$  и также могут быть приняты за основное. Для того, чтобы отличить эти случаи от предыдущего, будем обозначать мнимую единицу через  $j$ , если за основное направление принят вектор  $\varepsilon_{13}$ , и обозначать мнимую единицу через  $k$ , если

<sup>6</sup> Точнее, матрицы Дирака – это структурные матрицы в комплексном и кватернионном представлениях.

за основное направление принят вектор  $\varepsilon_{32}$ . Два вышеприведенных выбора основного вектора поставим в соответствие фундаментальным частицам, аналогичным электрону, то есть мюону  $\mu$  и тау-лептону  $\tau$ . Таким образом, вектор действия мюона записывается так:

$$\psi_\mu = \varepsilon_{32} \circ (j \psi^{21} + \psi^{32}) + \varepsilon_0 \circ (j \psi^{13} + \psi^0) + \varepsilon_{13} \circ (j \psi^3 + \psi^1) + \varepsilon_{312} \circ (j \psi^2 + \psi^{312}), \quad (12)$$

а вектор действия тау-лептона записывается так:

$$\psi_\tau = \varepsilon_{21} \circ (k \psi^{13} + \psi^{21}) + \varepsilon_0 \circ (k \psi^{32} + \psi^0) + \varepsilon_{13} \circ (k \psi^2 + \psi^3) + \varepsilon_{231} \circ (k \psi^1 + \psi^{231}). \quad (13)$$

Алгебры нерелятивистского спина (10) для рассматриваемых аналогичных фундаментальных частиц приобретают вид

для электрона

$$l\varepsilon_{21} = i\sigma_3, \quad l\varepsilon_{13} = i\sigma_2, \quad l\varepsilon_{32} = i\sigma_1,$$

для мюона

$$l\varepsilon_{13} = j\sigma_3, \quad l\varepsilon_{32} = j\sigma_2, \quad l\varepsilon_{21} = j\sigma_1,$$

для тау-лептона

$$l\varepsilon_{32} = k\sigma_3, \quad l\varepsilon_{21} = k\sigma_2, \quad l\varepsilon_{13} = k\sigma_1.$$

Алгебры электрического заряда (8) для рассматриваемых аналогичных фундаментальных частиц приобретают вид

для электрона

$$r\varepsilon_0 = 1, \quad r\varepsilon_{21} = i,$$

для мюона

$$r\varepsilon_0 = 1, \quad r\varepsilon_{13} = j,$$

для тау-лептона

$$r\varepsilon_0 = 1, \quad r\varepsilon_{32} = k.$$

Вышеприведенные алгебры вслед за рассматриваемыми фундаментальными частицами можно назвать *аналогичными*.

Переходя от группы поколений нижних лептонов к общему случаю фундаментальных частиц, постулируем следующую организацию векторов действия фундаментальных частиц, принадлежащих одной группе поколений:

1) векторы действия фундаментальных частиц, принадлежащих одной группе поколений, принадлежат одному векторному пространству (одной подалгебре);

2) фундаментальная частица первого поколения определяется вектором действия, в котором за основное направление принят базисный вектор  $\mathbf{e}_{21}$ ;

3) фундаментальная частица второго поколения определяется вектором действия, в котором за основное направление принят базисный вектор  $\mathbf{e}_{13}$ ;

4) фундаментальная частица третьего поколения определяется вектором действия, в котором за основное направление принят базисный вектор  $\mathbf{e}_{32}$ .

## V. КОВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ЛЕПТОНОВ

К ковариантной алгебре пространства-времени фундаментальных частиц необходимо обращаться потому, что эта алгебра участвует в формировании оператора набла, который, в свою очередь, используется при формулировке обобщенного уравнения Дирака. В этом Разделе рассмотрим ковариантную алгебру пространства-времени лептонов с трехмерным образующим пространством<sup>7</sup>  $(\mathbb{X}_L)_3^*$ .

В соответствии с Разделом III.1. Главы 3.4. вектор пространства лептонов в этом случае определен следующей диаграммой Юнга:

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки для образующих базисных векторов ковариантной алгебры пространства-времени лептонов<sup>8</sup>

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}.$$

В результате вектор ковариантного пространства лептонов имеет вид

$$\mathbf{x}^* = x_0 \mathbf{E}^0 + x_1 \mathbf{E}^1 + x_2 \mathbf{E}^2 + x_3 \mathbf{E}^3 + x_{[21]} \mathbf{E}^{[21]} + x_{[13]} \mathbf{E}^{[13]} + x_{[32]} \mathbf{E}^{[32]} + x_{[123]} \mathbf{E}^{[123]}$$

Перепишем это выражение с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\mathbf{x}^*$

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

Получим

$$\mathbf{x}^* = x_{32} \mathcal{E}^{32} + x_{13} \mathcal{E}^{13} + x_{21} \mathcal{E}^{21} + x_0 \mathcal{E}^0 + x_1 \mathcal{E}^1 + x_2 \mathcal{E}^2 + x_3 \mathcal{E}^3 + x_{123} \mathcal{E}^{123} \quad (15)$$

или в компактной записи

$$\mathbf{x}^* = x_A \mathcal{E}^A,$$

где индекс  $A$  принимает значения

$$A \sim (32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

<sup>7</sup> Геометрическим пространством.

<sup>8</sup> Приведенные условия соседней перестановки определяют алгебру, которая называется алгеброй Клиффорда. Точнее, алгебру Клиффорда с трехмерным образующим пространством.

### 1. Действительное представление ковариантной алгебры пространства-времени лептонов $(\mathbb{X}_L)_3^*$

Записи вектора  $\mathbf{x}^*$  (15) соответствует действительное представление алгебры  $(\mathbb{X}_L)_3^*$ . В этом случае структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы

$$C^{AA_2}_{A_1} \sim \mathcal{E}^A,$$

имеют действительные коэффициенты, а размерность матриц равна  $8 \times 8$  (см. Раздел VI).

Помимо действительного представления, будем использовать *комплексное* и *кватернионное* представления базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

### 2. Комплексное представление ковариантной алгебры пространства-времени лептонов $(\mathbb{X}_L)_3^*$

Комплексное представление алгебры пространства-времени лептонов  $(\mathbb{X}_L)_3^*$  основано на следующей записи вектора  $\mathbf{x}^*$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = & (-x_{32}\mathcal{E}^{21} + x_{13}\mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^{13} + (x_{21}\mathcal{E}^{21} + x_0\mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^0 + \\ & + (-x_1\mathcal{E}^{21} + x_2\mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^2 + (x_3\mathcal{E}^{21} + x_{123}\mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^{123}. \end{aligned} \quad (16)$$

Это представление соответствует записи алгебры  $(\mathbb{X}_L)_3^*$  в виде произведения  $(\mathbb{X}_L)_1^* \times (\mathbb{X}_L)_2^*$ . Базисными векторами алгебры  $(\mathbb{X}_L)_1^*$  являются

$$\mathcal{E}^{21}, \quad \mathcal{E}^0;$$

базисными векторами алгебры  $(\mathbb{X}_L)_2^*$  являются

$$\mathcal{E}^{13}, \quad \mathcal{E}^0, \quad \mathcal{E}^2, \quad \mathcal{E}^{123}.$$

Пространство  $(\mathbb{X}_L)_1^*$  можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору  $\mathcal{E}^{21}$  алгебры  $(\mathbb{X}_L)_1^*$  поставим в соответствие мнимую единицу  $i$  с обратным знаком, имея в виду, что  $(\mathcal{E}^{21})^2 = -1$ , а базисному вектору  $\mathcal{E}^0$  алгебры  $(\mathbb{X}_L)_1^*$  поставим в соответствие действительную единицу. В результате получим вектор алгебры  $(\mathbb{X}_L)_3^*$  в комплексном представлении

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = & (x_{32}i + x_{13}) \circ \mathcal{E}^{13} + (-x_{21}i + x_0) \circ \mathcal{E}^0 + \\ & + (x_1i + x_2) \circ \mathcal{E}^2 + (-x_3i + x_{123}) \circ \mathcal{E}^{123}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, в комплексном представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{13} &= i x_{32} + x_{13}, & \mathbf{x}_0 &= -i x_{21} + x_0, \\ \mathbf{x}_2 &= i x_1 + x_2, & \mathbf{x}_{123} &= -i x_3 + x_{123}. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом этого вектор  $\mathbf{x}^*$  можно записать в виде

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{13} \mathcal{E}^{13} + \mathbf{x}_0 \mathcal{E}^0 + \mathbf{x}_2 \mathcal{E}^2 + \mathbf{x}_{123} \mathcal{E}^{123} \quad (19)$$

или в компактной записи

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_\alpha \mathcal{E}^\alpha,$$

где индекс  $\alpha$  принимает значения

$$\alpha \sim (13, 0, 2, 123).$$

Отсюда видно, что в комплексном представлении вектор  $\mathbf{x}^*$  проецируется на направления  $\mathcal{E}^{13}$ ,  $\mathcal{E}^0$ ,  $\mathcal{E}^2$ ,  $\mathcal{E}^{123}$ .

В комплексном представлении структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы  $\mathcal{E}^A$ ,

$$C^{A\alpha_2}_{\alpha_1} \sim \mathcal{E}^A,$$

имеют размерность  $4 \times 4$ . Коэффициенты матриц представлены системой гиперчисел (см. Раздел VI).

### 3. Кватернионное представление ковариантной алгебры пространства-времени лептонов $(\mathbb{X}_L)_3^*$

Кватернионное представление ковариантной алгебры пространства-времени лептонов  $(\mathbb{X}_L)_3^*$  основано на следующем разложении вектора  $\mathbf{x}^*$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = & (x_{32} \mathcal{E}^{32} + x_{13} \mathcal{E}^{13} + x_{21} \mathcal{E}^{21} + x_0 \mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^0 + \\ & + (x_1 \mathcal{E}^{32} + x_2 \mathcal{E}^{13} + x_3 \mathcal{E}^{21} + x_{123} \mathcal{E}^0) \circ \mathcal{E}^{123}. \end{aligned} \quad (20)$$

Эта запись соответствует записи алгебры  $(\mathbb{X}_L)_3^*$  в виде произведения  $(\mathbb{X}_L)_2^* \times (\mathbb{X}_L)_1^*$ . Базисными векторами алгебры  $(\mathbb{X}_L)_2^*$  являются

$$\mathcal{E}^{32}, \quad \mathcal{E}^{13}, \quad \mathcal{E}^{21}, \quad \mathcal{E}^0,$$

базисными векторами алгебры  $(\mathbb{X}_L)_1^*$  являются

$$\mathcal{E}^0, \quad \mathcal{E}^{123}.$$

Записи алгебры Клиффорда  $(\mathbb{X}_L)_3^*$  в виде произведения  $(\mathbb{X}_L)_1^* \times (\mathbb{X}_L)_2^*$  соответствует представление базисных векторов алгебры  $(\mathbb{X}_L)_3^*$  в пространстве подалгебры  $(\mathbb{X}_L)_1^*$  над полем гиперчисел, составляющих алгебру  $(\mathbb{X}_L)_2^*$ , причем базисные гиперчисла изоморфны базисным векторам  $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^0$ , которые могут рассматриваться как кватернионы, так как

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}^0)^2 &= \mathcal{E}^0, \quad (\mathcal{E}^{32})^2 = (\mathcal{E}^{13})^2 = (\mathcal{E}^{21})^2 = -\mathcal{E}^0, \\ \mathcal{E}^0 \circ \mathcal{E}^{32} &= \mathcal{E}^{32} \circ \mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^{32}, \\ \mathcal{E}^0 \circ \mathcal{E}^{13} &= \mathcal{E}^{13} \circ \mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^{13}, \\ \mathcal{E}^0 \circ \mathcal{E}^{21} &= \mathcal{E}^{21} \circ \mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^{21}, \\ \mathcal{E}^{32} \circ \mathcal{E}^{13} &= -\mathcal{E}^{13} \circ \mathcal{E}^{32} = \mathcal{E}^{21}, \\ \mathcal{E}^{13} \circ \mathcal{E}^{21} &= -\mathcal{E}^{21} \circ \mathcal{E}^{13} = \mathcal{E}^{32}, \\ \mathcal{E}^{21} \circ \mathcal{E}^{32} &= -\mathcal{E}^{32} \circ \mathcal{E}^{21} = \mathcal{E}^{13}. \end{aligned}$$

Для базисных кватернионов используем следующие обозначения:

$$q^1, \quad q^2, \quad q^3, \quad q^0.$$

Заменяем базисные векторы  $\mathcal{E}^{32}, \mathcal{E}^{13}, \mathcal{E}^{21}, \mathcal{E}^0$  кватернионами в соответствии

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{32} &\sim q^1, \\ \mathcal{E}^{13} &\sim q^2, \\ \mathcal{E}^{21} &\sim q^3, \\ \mathcal{E}^0 &\sim q^0. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $(\mathbb{X}_L)_3^*$  в кватернионном представлении

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= (x_{32} \cdot q^1 + x_{13} \cdot q^2 + x_{21} \cdot q^3 + x_0 \cdot q^0) \cdot \mathcal{E}^0 + \\ &+ (x_1 \cdot q^1 + x_2 \cdot q^2 + x_3 \cdot q^3 + x_{123} \cdot q^0) \cdot \mathcal{E}^{123}. \end{aligned}$$

Таким образом, в кватернионном представлении координаты (компоненты) вектора являются кватернионами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= x_{32} \cdot q^1 + x_{13} \cdot q^2 + x_{21} \cdot q^3 + x_0, \\ \mathbf{x}_{123} &= x_1 \cdot q^1 + x_2 \cdot q^2 + x_3 \cdot q^3 + x_{123}. \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом этого вектор  $\mathbf{x}^*$  можно записать в виде

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0 \cdot \mathcal{E}_0 + \mathbf{x}_{123} \cdot \mathcal{E}_{123}$$

или в компактной записи

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_a \cdot \mathcal{E}^a,$$

где индекс  $a$  принимает значения

$$a \sim (0, 123).$$

Отсюда видно, что в кватернионном представлении вектор  $\mathbf{x}^*$  проецируется на направления  $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^{123}$ , то есть вектор ковариантной алгебры пространства-времени лептонов  $(\mathbb{X}_L)_3^*$  можно рассматривать как двумерный вектор над полем кватернионов.

В кватернионном представлении структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы  $\mathcal{E}^A$ ,

$$C^{Aa_1}_{a_2} \sim \mathcal{E}^A$$

имеют размерность  $2 \times 2$ . Коэффициенты матриц представлены двумя системами гиперчисел.

Заметим, что для левой ковариантной алгебры пространства-времени лептонов  $(\mathbb{X}_L)_3^*$  базисные кватернионы выражаются через матрицы Паули<sup>9</sup>

$$q^1 = -i \cdot \sigma^1, \quad q^2 = -i \cdot \sigma^2, \quad q^3 = -i \cdot \sigma^3, \quad q^0 = 1.$$

Для них получим вектор  ${}_l\mathbf{x}^*$  алгебры  ${}_l(\mathbb{X}_L)_3^*$  в кватернионном представлении

$$\begin{aligned} {}_l\mathbf{x}^* &= (-x_{32} \cdot i\sigma^1 - x_{13} \cdot i\sigma^2 - x_{21} \cdot i\sigma^3 + x_0) \circ \mathcal{E}^0 + \\ &+ (-x_1 \cdot i\sigma^1 - x_2 \cdot i\sigma^2 - x_3 \cdot i\sigma^3 + x_{123}) \circ \mathcal{E}^{123}. \end{aligned} \quad (22)$$

Кватернионное представление базисных векторов алгебры  ${}_l(\mathbb{X}_L)_3^*$  дается структурными матрицами  $2 \times 2$ , в которых соответствующие блоки заменены  $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$  (см. Раздел VI).

Кватернионное представление базисных векторов алгебры  ${}_l(\mathbb{X}_L)_3^*$  дается структурными матрицами  $4 \times 4$ , в которых соответствующие блоки заменены  $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$  (см. Раздел VI).

## VI. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ КОВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ЛЕПТОНОВ $(\mathbb{X}_L)_3^*$

### 1. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры пространства-времени лептонов ${}_l(\mathbb{X}_L)_3^*$

Приступим к вычислению структурных матриц левой ковариантной алгебры пространства-времени лептонов  ${}_l(\mathbb{X}_L)_3^*$ . Структурные матрицы будем обозначать теми базисными векторами, которые они представляют

$${}_l\mathcal{E}^A \sim {}_lC^{AA_1}_{A_2}.$$

Номер структурной матрицы  $A$  есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. Индекс  $A_1$  нумерует строки, а индекс  $A_2$  нумерует столбцы структурной матрицы.

Напомним, что закон умножения базисных векторов в ковариантной левой алгебре пространства-времени лептонов  ${}_l(\mathbb{X}_L)_3^*$  записывается следующим образом:

$${}_l\mathcal{E}^A \circ {}_l\mathcal{E}^{A_1} = {}_lC^{AA_1}_{A_2} \cdot {}_l\mathcal{E}^{A_2}. \quad (23)$$

Из выражения (23) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно задать номер структурной матрицы в соответствии с номером базисного вектора ( $A$ ). Затем для вычисления элемента структурной матрицы с номером  $A$ , расположенного в строке с номером  $A_1$  и в столбце с номером  $A_2$ , необходимо базисный вектор, номер которого  $A_1$  совпадает с номером *строки* матрицы, умножить *слева* на базисный вектор, номер которого  $A$  совпадает с номером *структурной* матрицы. Далее нужно определить базисный вектор, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер  $A_2$  указанного базисного вектора определит номер столбца, на пересечении которого с рассматриваемой строкой необходимо поставить указанное численное значение проекции.

<sup>9</sup> обоснование содержится в Разделе V.



- Алгебра электрического заряда лептонов – это подалгебра правой алгебры действия лептонов, построенная на базисных векторах

$$r\epsilon_0 = 1, \quad r\epsilon_{21} = i.$$

- Алгебра нерелятивистского спина – это подалгебра левой алгебры действия лептонов, построенная на базисных векторах

$$l\epsilon_{21} = i\sigma_3, \quad l\epsilon_{13} = i\sigma_2, \quad l\epsilon_{32} = i\sigma_1.$$

- Постулируется следующая организация векторов действия фундаментальных частиц, принадлежащих одной группе поколений:

1) векторы действия фундаментальных частиц, принадлежащих одной группе поколений, принадлежат одному векторному пространству (одной подалгебре);

2) фундаментальная частица первого поколения определяется вектором действия, в котором за основное направление принят базисный вектор  $\mathbf{e}_{21}$ ;

3) фундаментальная частица второго поколения определяется вектором действия, в котором за основное направление принят базисный вектор  $\mathbf{e}_{13}$ ;

4) фундаментальная частица третьего поколения определяется вектором действия, в котором за основное направление принят базисный вектор  $\mathbf{e}_{32}$ .



## Глава 4.3 Белые лептоны. Алгебра действия белых лептонов $\mathbb{C}_w$

### I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Алгебра действия лептонов есть частный случай алгебры действия фундаментальных частиц  $\mathbb{S}$ , соответствующий частному случаю соседней перестановки базисных векторов образующего пространства.

Для того чтобы очевидно выделить этот случай, для алгебры действия лептонов вместо обозначения базисных векторов  $\mathbf{e}$  введем обозначение  $\varepsilon$ . Кроме того, введем специальное обозначение для алгебры действия лептонов  $\mathbb{C}$ .

Эта Глава относится к лептонам, которые названы *релятивистскими*. Это название *не означает*, что рассматриваются лептоны, движущиеся с скоростью, близкой к скорости света. Это название означает, что рассматриваются лептоны, в формировании волновой функции которых участвуют времени-подобные компоненты, то есть образующее пространство алгебры действия таких лептонов полагается четырехмерным, подобным пространству-времени СТО. На этом уровне лептоны разделяются на два типа. Лептоны одного типа названы белыми, а другого типа – черными. В этой Главе рассматривается *контравариантная* алгебра<sup>1</sup> действия белых лептонов. Она обозначена  $\mathbb{C}_w$ .

### II. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ БЕЛЫХ ЛЕПТОНОВ

В этом Разделе рассмотрим алгебру действия белых лептонов  $\mathbb{C}_w$  с четырехмерным образующим пространством.

В соответствии с Разделом III.1. Главы 3.4. волновая функция лептонов в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки для образующих базисных векторов алгебры действия бе-

лых лептонов<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}. \end{aligned}$$

В результате волновая функции лептонов имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_1 \psi^1 + \mathbf{e}_2 \psi^2 + \mathbf{e}_3 \psi^3 + \mathbf{e}_4 \psi^4 + \\ &+ \mathbf{e}_{[21]} \psi^{[21]} + \mathbf{e}_{[13]} \psi^{[13]} + \mathbf{e}_{[32]} \psi^{[32]} + \\ &+ \mathbf{e}_{[14]} \psi^{[14]} + \mathbf{e}_{[42]} \psi^{[42]} + \mathbf{e}_{[34]} \psi^{[34]} + \\ &+ \mathbf{e}_{[123]} \psi^{[123]} + \mathbf{e}_{[134]} \psi^{[134]} + \mathbf{e}_{[234]} \psi^{[234]} + \\ &+ \mathbf{e}_{1324} \psi^{[1324]}. \end{aligned} \quad (1)$$

Перепишем это выражение с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

Получим

$$\begin{aligned} \psi &= \varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0 + \\ &+ \varepsilon_{42} \psi^{42} + \varepsilon_{14} \psi^{14} + \varepsilon_{1324} \psi^{1324} + \varepsilon_{34} \psi^{34} + \\ &+ \varepsilon_1 \psi^1 + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_3 \psi^3 + \varepsilon_{123} \psi^{123} + \\ &+ \varepsilon_{134} \psi^{134} + \varepsilon_{234} \psi^{234} + \varepsilon_4 \psi^4 + \varepsilon_{124} \psi^{124} \end{aligned} \quad (2)$$

или в компактной записи

$$\psi = \varepsilon_K \psi^K,$$

где индекс  $K$  принимает значения

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

#### 1. Действительное представление алгебры действия белых лептонов $\mathbb{C}_w$

Записи вектора  $\psi$  (2) соответствует действительное представление алгебры  $\mathbb{C}_w$ . В этом случае структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы

$$C^{K_1}_{K_2 K} \sim \varepsilon_K,$$

имеют действительные коэффициенты, а размерность матриц равна  $16 \times 16$  (см. Раздел III.). Помимо действительного представления, будем использовать *комплексное*, *кватернионное* и *бикватернионное* представление базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

<sup>1</sup> Для удобства чтения определение *контравариантная* далее опускается.

<sup>2</sup> Приведенные условия соседней перестановки для образующих базисных векторов определяют алгебру, которая называется алгеброй Клиффорда, точнее алгебру Клиффорда с четырехмерным образующим пространством.

## 2. Комплексное представление алгебры действия белых лептонов $\mathbb{C}_w$

Комплексное представление алгебры действия белых лептонов  $\mathbb{C}_w$  основано на следующей записи вектора  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \psi = & \varepsilon_{13} \circ (\varepsilon_{21} \psi^{32} + \varepsilon_0 \psi^{13}) + \varepsilon_0 \circ (\varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0) + \\ & + \varepsilon_{14} \circ (\varepsilon_{21} \psi^{42} + \varepsilon_0 \psi^{14}) + \varepsilon_{34} \circ (\varepsilon_{21} \psi^{1324} + \varepsilon_0 \psi^{34}) + \\ & + \varepsilon_2 \circ (\varepsilon_{21} \psi^1 + \varepsilon_0 \psi^2) + \varepsilon_{123} \circ (\varepsilon_{21} \psi^3 + \varepsilon_0 \psi^{123}) + \\ & + \varepsilon_{234} \circ (\varepsilon_{21} \psi^{134} + \varepsilon_0 \psi^{234}) + \varepsilon_{124} \circ (\varepsilon_{21} \psi^4 + \varepsilon_0 \psi^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_w$  в виде произведения  $\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_1$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_3$  являются

$$\varepsilon_{13}, \varepsilon_0, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{34}, \varepsilon_2, \varepsilon_{123}, \varepsilon_{234}, \varepsilon_{124};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_1$  являются

$$\varepsilon_{21}, \varepsilon_0.$$

Пространство  $\mathbb{C}_1$  можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору  $\varepsilon_{21}$  алгебры  $\mathbb{C}_1$  поставим в соответствие мнимую единицу  $i$ , имея в виду, что  $\text{sign } \varepsilon_{21} = -1$ , а базисному вектору  $\varepsilon_0$  алгебры  $\mathbb{C}_1$  поставим в соответствие действительную единицу:

$$\varepsilon_{21} \sim i, \quad \varepsilon_0 \sim 1.$$

В результате получим вектор алгебры  $\mathbb{C}_w$  в комплексном представлении

$$\begin{aligned} \psi = & \varepsilon_{13} \circ (i \psi^{32} + \psi^{13}) + \varepsilon_0 \circ (i \psi^{21} + \psi^0) + \\ & + \varepsilon_{14} \circ (i \psi^{42} + \psi^{14}) + \varepsilon_{34} \circ (i \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ & + \varepsilon_2 \circ (i \psi^1 + \psi^2) + \varepsilon_{123} \circ (i \psi^3 + \psi^{123}) + \\ & + \varepsilon_{234} \circ (i \psi^{134} + \psi^{234}) + \varepsilon_{124} \circ (i \psi^4 + \psi^{124}). \end{aligned}$$

Таким образом, в комплексном представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= i \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= i \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= i \psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= i \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= i \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= i \psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= i \psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= i \psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi = & \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_{14} \psi^{14} + \varepsilon_{34} \psi^{34} + \\ & + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_{123} \psi^{123} + \varepsilon_{234} \psi^{234} + \varepsilon_{124} \psi^{124} \end{aligned}$$

или в компактной записи

$$\psi = \varepsilon_\alpha \psi^\alpha,$$

где индекс  $\alpha$  принимает значения

$$\alpha \sim (13, 0, 14, 34, 2, 123, 234, 124).$$

Отсюда видно, что в комплексном представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\varepsilon_{13}, \varepsilon_0, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{34}, \varepsilon_2, \varepsilon_{123}, \varepsilon_{234}, \varepsilon_{124}$ , то есть волновую функцию можно рассматривать как восьмимерный вектор над полем комплексных чисел.

В комплексном представлении структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы  $\varepsilon_K$ ,

$$C^{\alpha_1}_{\alpha_2 K} \sim \varepsilon_K$$

имеют размерность  $8 \times 8$ . Коэффициенты матриц представлены системой гиперчисел (см. Раздел III.).

## 3. Кватернионное представление алгебры действия лептонов $\mathbb{C}_w$

Кватернионное представление алгебры действия белых лептонов  $\mathbb{C}_w$  основано на следующей записи вектора  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \psi = & \varepsilon_0 \circ (\varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0) + \\ & + \varepsilon_{34} \circ (\varepsilon_{32} \psi^{42} + \varepsilon_{13} \psi^{14} + \varepsilon_{21} \psi^{1324} + \varepsilon_0 \psi^{34}) + \\ & + \varepsilon_{123} \circ (\varepsilon_{32} \psi^1 + \varepsilon_{13} \psi^2 + \varepsilon_{21} \psi^3 + \varepsilon_0 \psi^{123}) + \\ & + \varepsilon_{124} \circ (\varepsilon_{32} \psi^{134} + \varepsilon_{13} \psi^{234} + \varepsilon_{21} \psi^4 + \varepsilon_0 \psi^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_w$  в виде произведения  $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{C}_2$  являются

$$\varepsilon_0, \varepsilon_{34}, \varepsilon_{123}, \varepsilon_{124};$$

базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{C}_2$  являются

$$\varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_0.$$

Последняя алгебра является алгеброй кватернионов, так как

$$\begin{aligned} (\varepsilon_0)^2 &= \varepsilon_0, \quad (\varepsilon_{32})^2 = (\varepsilon_{13})^2 = (\varepsilon_{21})^2 = -\varepsilon_0, \\ \varepsilon_0 \circ \varepsilon_{32} &= \varepsilon_{32} \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_{32}, \\ \varepsilon_0 \circ \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{13} \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_{13}, \\ \varepsilon_0 \circ \varepsilon_{21} &= \varepsilon_{21} \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_{21}, \\ \varepsilon_{32} \circ \varepsilon_{13} &= -\varepsilon_{13} \circ \varepsilon_{32} = \varepsilon_{21}, \\ \varepsilon_{13} \circ \varepsilon_{21} &= -\varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{32}, \\ \varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{32} &= -\varepsilon_{32} \circ \varepsilon_{21} = \varepsilon_{13}. \end{aligned}$$

Для базисных кватернионов используем следующие обозначения:

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad q_0.$$

Заменяем базисные векторы  $\varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_0$  кватернионами в соответствии

$$\begin{aligned}\varepsilon_{32} &\sim q_1, \\ \varepsilon_{13} &\sim q_2, \\ \varepsilon_{21} &\sim q_3, \\ \varepsilon_0 &\sim q_0.\end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{C}_w$  в кватернионном представлении

$$\begin{aligned}\psi &= \varepsilon_0 \cdot (q_1 \cdot \psi^{32} + q_2 \psi^{13} + q_3 \psi^{21} + \psi^0) + \\ &+ \varepsilon_{34} \cdot (q_1 \cdot \psi^{42} + q_2 \psi^{14} + q_3 \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ &+ \varepsilon_{123} \cdot (q_1 \psi^1 + q_2 \psi^2 + q_3 \psi^3 + \psi^{123}) + \\ &+ \varepsilon_{124} \cdot (q_1 \psi^{134} + q_2 \psi^{234} + q_3 \psi^4 + \psi^{124}).\end{aligned}$$

Таким образом, в кватернионном представлении координаты (компоненты) вектора являются кватернионами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned}\Psi^0 &= q_1 \psi^{32} + q_2 \psi^{13} + q_3 \psi^{21} + \psi^0, \\ \Psi^{34} &= q_1 \psi^{42} + q_2 \psi^{14} + q_3 \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= q_1 \psi^1 + q_2 \psi^2 + q_3 \psi^3 + \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= q_1 \psi^{134} + q_2 \psi^{234} + q_3 \psi^4 + \psi^{124}.\end{aligned}\quad (4)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \varepsilon_0 \Psi^0 + \varepsilon_{34} \Psi^{34} + \varepsilon_{123} \Psi^{123} + \varepsilon_{124} \Psi^{124}$$

или в компактной записи

$$\psi = \varepsilon_a \Psi^a,$$

где индекс  $a$  принимает значения

$$a \sim (0, 34, 123, 124).$$

Отсюда видно, что в кватернионном представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\varepsilon_0, \varepsilon_{34}, \varepsilon_{123}, \varepsilon_{124}$ , то есть волновую функцию можно рассматривать как четырехмерный вектор над полем кватернионов.

В кватернионном представлении структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы  $\varepsilon_A$ ,

$$C^{a_1}_{a_2 K} \sim \varepsilon_K$$

имеют размерность  $4 \times 4$ . Коэффициенты матриц представлены двумя системами гиперчисел (см. Раздел III).

#### 4. Бикватернионное представление алгебры действия белых лептонов $\mathbb{C}_4$

Биватернионное представление алгебры  $\mathbb{C}_w$  основано на разложении вектора

$$\begin{aligned}\psi &= \varepsilon_0 \circ (\varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0 + \\ &+ \varepsilon_1 \psi^1 + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_3 \psi^3 + \varepsilon_{123} \psi^{123}) + \\ &+ \varepsilon_{34} \circ (\varepsilon_{32} \psi^{42} + \varepsilon_{13} \psi^{14} + \varepsilon_{21} \psi^{1324} + \varepsilon_0 \psi^{34} + \\ &+ \varepsilon_1 \psi^{134} + \varepsilon_2 \psi^{234} + \varepsilon_3 \psi^4 + \varepsilon_{123} \psi^{124}).\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_4$  в виде произведения  $\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_3$ . Базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_1$  являются

$$\varepsilon_0, \varepsilon_{34},$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_3$  являются

$$\varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{123}.$$

Заменяя эти базисные векторы базисными бикватернионами, получим вектор алгебры  $\mathbb{C}_3$  в бикватернионном представлении

$$\begin{aligned}\psi &= \varepsilon_0 \circ (b_{32} \psi^{32} + b_{13} \psi^{13} + b_{21} \psi^{21} + b_0 \psi^0 + \\ &+ b_1 \psi^1 + b_2 \psi^2 + b_3 \psi^3 + b_{123} \psi^{123}) + \\ &+ \varepsilon_{34} \circ (b_{32} \psi^{42} + b_{13} \psi^{14} + b_{21} \psi^{1324} + b_0 \psi^{34} + \\ &+ b_1 \psi^{134} + b_2 \psi^{234} + b_3 \psi^4 + b_{123} \psi^{124}).\end{aligned}$$

Таким образом, в бикватернионном представлении координаты (компоненты) вектора являются бикватернионами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}\Psi^0 &= b_{32} \psi^{32} + b_{13} \psi^{13} + b_{21} \psi^{21} + b_0 \psi^0 + \\ &+ b_1 \psi^1 + b_2 \psi^2 + b_3 \psi^3 + b_{123} \psi^{123}, \\ \Psi^{34} &= b_{32} \psi^{42} + b_{13} \psi^{14} + b_{21} \psi^{1324} + b_0 \psi^{34} + \\ &+ b_1 \psi^{134} + b_2 \psi^{234} + b_3 \psi^4 + b_{123} \psi^{124}.\end{aligned}\quad (5)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \varepsilon_0 \Psi^0 + \varepsilon_{34} \Psi^{34}$$

или в компактной записи

$$\psi = \varepsilon_\beta \Psi^\beta,$$

где индекс  $\beta$  принимает значения

$$\beta \sim (0, 34).$$

Отсюда видно, что в бикватернионном представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\varepsilon_0, \varepsilon_{34}$ , то есть волновую функцию можно рассматривать как четырехмерный вектор над полем кватернионов.

В кватернионном представлении структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы  $\varepsilon_K$ ,

$$C^{\beta_1}_{\beta_2 K} \sim \varepsilon_K$$

имеют размерность  $2 \times 2$ . Коэффициенты матриц представлены тремя системами гиперчисел (см. Раздел III).

### III. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ АЛГЕБРЫ ДЕЙСТВИЯ БЕЛЫХ ЛЕПТОНОВ $\mathbb{C}_w$

#### 1. Структурные матрицы правой алгебры действия белых лептонов ${}_r\mathbb{C}_w$

Приступим к вычислению структурных матриц алгебры  ${}_r\mathbb{C}_w$ . Структурные матрицы будем обозначать

теми базисными векторами, которые они представляют

$${}_r\varepsilon_K \sim {}_rC^{K_1}_{K_2K}.$$

Напомним, что закон умножения базисных векторов в правой алгебре лептонов  ${}_r\mathcal{C}_w$  записывается следующим образом:

$${}_r\varepsilon_{K_2} \circ {}_r\varepsilon_K = {}_r\varepsilon_{K_1} \cdot {}_rC^{K_1}_{K_2K}. \quad (6)$$

Из выражения (6) следует алгоритм вычисления структурных матриц. Сначала нужно установить номер структурной матрицы ( $K$ ) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы ( $K_2$ ) проделать следующие вычисления. Базисный вектор  ${}_r\varepsilon_{K_2}$ , номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *справа* на базисный вектор  $\varepsilon_K$ , номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор  ${}_r\varepsilon_{K_1}$ , на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер ( $K_1$ ) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом необходимо поставить указанное численное значение проекции.

В результате вычислений получим структурные матрицы размером  $16 \times 16$  с действительными коэффициентами.<sup>3</sup>

При преобразовании матриц  ${}_rC^{K_1}_{K_2K}$  от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

Алгебра системы чисел  $\{1, a, b, i\}$  представлена законами умножения

$$1^2 = 1, \quad a^2 = b^2 = 1, \quad i^2 = -1,$$

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad 1 \cdot b = b \cdot 1 = b, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \\ a \cdot b = -b \cdot a = i, \quad a \cdot i = -i \cdot a = b, \quad i \cdot b = -b \cdot i = a.$$

При преобразовании матриц  ${}_rC^{\alpha_1}_{\alpha_2 K}$  от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

Алгебра системы чисел  $\{\mathbb{1}, I\}$  представлена законами умножения

$$\mathbb{1}^2 = \mathbb{1}, \quad I^2 = -\mathbb{1}, \quad \mathbb{1} \cdot I = I \cdot \mathbb{1} = I.$$

<sup>3</sup> Точнее, коэффициенты матриц принимают значения либо 0, либо 1, либо -1.

$${}_r\varepsilon_0 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 32 & 1 & & & & & & & \\ 13 & & 1 & & & & & & \\ 21 & & & 1 & & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & & \\ 42 & & & & & 1 & & & \\ 14 & & & & & & 1 & & \\ 1324 & & & & & & & 1 & \\ 34 & & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & & \\ 2 & & & & & & & 1 & \\ 3 & & & & & & & & 1 \\ 123 & & & & & & & & & 1 \\ 134 & & & & & & & & & & 1 \\ 234 & & & & & & & & & & & 1 \\ 4 & & & & & & & & & & & & 1 \\ 124 & & & & & & & & & & & & & 1 \end{array} \end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 234 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{array} \end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 34 & 124 \\ & 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \mathbb{1} & \\ & \mathbb{1} \end{array} \end{array}$$

$${}_r\varepsilon_1 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 32 & & & & & & -1 & & \\ 13 & & & & & & & -1 & \\ 21 & & & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ 42 & & & & & & & & & -1 \\ 14 & & & & & & & & & -1 \\ 1324 & & & & & & & & 1 & \\ 34 & & & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & & & \\ 2 & & & & & & & 1 & & \\ 3 & & & & & & -1 & & & \\ 123 & & & & & & & -1 & & \\ 134 & & & & & & & & 1 & \\ 234 & & & & & & & & & 1 \\ 4 & & & & & & & -1 & & \\ 124 & & & & & & & & -1 & \end{array} \end{array}$$

$$= a \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 234 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \\ 1 & & & & 1 \\ -1 & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & -1 \end{array} \end{array}$$

$$= a \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 34 & 124 \\ & 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & -I \\ I & \\ & -I \\ I & \end{array} \end{array}$$





$$r \in \mathcal{E}_{34} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32			1					
13			1					
21			1					
0			1					
42	1							
14	1							
1324	1							
34			1					
1						1		
2						1		
3						1		
123						1		
134			1					
234			1					
4			1					
124			1					

$$= I$$

	0	34	123	124
13	14	2	234	
				13
				0
				14
				34
				2
				123
				234
				124

$$= I$$

	0	34	123	124
				0
				34
				123
				124

$$r \in \mathcal{E}_{124} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32							1	
13							1	
21							1	
0							1	
42						-1		
14						-1		
1324						-1		
34						-1		
1						-1		
2						-1		
3						-1		
123						-1		
134	1							
234	1							
4	1							
124	1							

$$= I$$

	0	34	123	124
13	14	2	234	
				13
				0
				14
				34
				2
				123
				234
				124

$$= I$$

	0	34	123	124
				0
				34
				123
				124

$$r \in \mathcal{E}_{123} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32						-1		
13						-1		
21						-1		
0						-1		
42						1		
14						1		
1324						1		
34						1		
1	1							
2	1							
3	1							
123	1							
134						-1		
234						-1		
4						-1		
124						-1		

$$= I$$

	0	34	123	124
13	14	2	234	
				13
				0
				14
				34
				2
				123
				234
				124

$$= I$$

	0	34	123	124
				0
				34
				123
				124

$$r \in \mathcal{E}_{134} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32								-1
13								-1
21								1
0								1
42								-1
14								-1
1324								1
34								1
1								1
2								1
3								-1
123								-1
134								1
234								1
4								-1
124								-1

$$= a$$

	0	34	123	124
13	14	2	234	
				13
				0
				14
				34
				2
				123
				234
				124

$$= a$$

	0	34	123	124
				0
				34
				123
				124

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
$r\varepsilon_{234} \sim$	32							1	
	13								-1
	21							-1	
	0							1	
	42					1			
	14						-1		
	1324					-1			
	34						1		
	1				-1				
	2					1			
	3				1				
	123					-1			
134		-1							
234			1						
4	1								
124		-1							

		0	34	123	124
		13	14	2	234
$= b$				-1	13
				1	0
				-1	14
			1		34
		1			2
		-1			123
				234	
	1			124	
	-1				

		0	34	123	124
		13	14	2	234
$= b$				-I	0
				-I	34
			I		123
		I			124

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
$r\varepsilon_{1324} \sim$	32			1					
	13			-1					
	21				1				
	0					-1			
	42	1							
	14	-1							
	1324			1					
	34			-1					
	1							1	
	2								-1
	3								1
	123								-1
134					1				
234					-1				
4						1			
124						-1			

		0	34	123	124
		13	14	2	234
$= i$			1		13
				1	0
		1			14
					34
		1			2
				1	123
				124	
			1		
				1	

		0	34	123	124
		13	14	2	234
$= i$			$\mathbb{1}$		0
			$\mathbb{1}$		34
				$\mathbb{1}$	123
				$\mathbb{1}$	124

### 1.1. Алгебра электрического заряда белых лептонов

Алгебра электрического заряда лептонов – это подалгебра правой алгебры действия белых лептонов, построенная на базисных векторах

$$r\varepsilon_0 = 1, \quad r\varepsilon_{21} = i.$$

Отсюда вектор

$$r\varepsilon_0 \psi^0 + r\varepsilon_{21} \psi^{21}$$

– это часть правого вектора действия белых лептонов, ответственная за электрические характеристики лептонов.

### 1.2. Алгебра слабого заряда белых лептонов

Алгебра слабого заряда лептонов – это подалгебра правой алгебры действия белых лептонов, построенная на базисных векторах

$$r\varepsilon_4, \quad r\varepsilon_{123}, \quad r\varepsilon_{1324}.$$

Отсюда вектор

$$r\varepsilon_4 \psi^4 + r\varepsilon_{123} \psi^{123} + r\varepsilon_{1324} \psi^{1324}$$

– это часть правого вектора действия белых лептонов, ответственная за слабые характеристики лептонов.

## 2. Структурные матрицы левой алгебры действия белых лептонов ${}_l\mathcal{C}_w$

Приступим к вычислению структурных матриц алгебры  ${}_l\mathcal{C}_w$ . Структурные матрицы будем обозначать теми базисными векторами, которые они представляют

$${}_l\varepsilon_K \sim {}_lC^{K_1}_{K_2K}.$$

Напомним, что закон умножения базисных векторов в левой алгебре лептонов  ${}_l\mathcal{C}_w$  записывается следующим образом:

$${}_l\varepsilon_K \circ r\varepsilon_{K_2} = {}_l\varepsilon_{K_1} \cdot {}_lC^{K_1}_{K_2K}. \quad (7)$$

Из выражения (7) следует алгоритм вычисления структурных матриц. Сначала нужно установить номер структурной матрицы ( $K$ ) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы ( $K_2$ ) проделать следующие вычисления. Базисный вектор  ${}_l\varepsilon_{K_2}$ , номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *слева* на базисный вектор  ${}_l\varepsilon_K$ , номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор  ${}_l\varepsilon_{K_1}$ , на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда



номер ( $K_1$ ) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом необходимо поставить указанное численное значение проекции.

В результате вычислений получим структурные матрицы размером  $16 \times 16$  с действительными коэффициентами.<sup>4</sup>

При преобразовании матриц  ${}_l C^{K_1}_{K_2 K}$  от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix},$$

что равносильно замене действительных матриц  $2 \times 2$  вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

на комплексные числа.

При преобразовании матриц  ${}_l C^{\alpha_1}_{\alpha_2 K}$  от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  представляют собой *матрицы Паули* (с той разницей, что по соображениям симметрии в качестве  $\sigma_3$  взята матрица с противоположным знаком).

$${}_l \mathcal{E}_0 \sim \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{matrix} & \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= i \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 234 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{matrix} & \begin{pmatrix} | & | \\ 1 & \\ & 1 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = i \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 34 & 124 \\ & & 123 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{matrix} & \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbb{1} & \\ & \mathbb{1} \\ \hline & & \mathbb{1} & \\ & & & \mathbb{1} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$${}_l \mathcal{E}_1 \sim \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{matrix} & \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ & & -1 & \\ & & 1 & \\ & & -1 & \\ & & 1 & \\ \hline & & & & -1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & -1 & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= i \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 234 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{matrix} & \begin{pmatrix} | & | \\ & -1 & \\ & -1 & \\ & -1 & \\ & 1 & \\ \hline 1 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = i \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 34 & 124 \\ & & 123 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{matrix} & \begin{pmatrix} | & | \\ & -\sigma_1 & \\ & -\sigma_1 & \\ \hline \sigma_1 & \\ & \sigma_1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

<sup>4</sup> Точнее, коэффициенты матриц принимают значения либо 0, либо 1, либо -1.

$$l\mathcal{E}_2 \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32					-1			
13						-1		
21				1				
0					1			
42							-1	
14								-1
1324						1		
34							1	
1	1							
2		1						
3	-1							
123		-1						
134			1					
234				1				
4			-1					
124				-1				

$$= i$$

	0	34	123	124
13	14	2	234	
			$i$	13
			$-i$	0
			$i$	14
			$-i$	34
				2
				123
				234
				124

$$= i$$

	0	34	123	124
				0
			$-\sigma_2$	34
			$-\sigma_2$	123
			$\sigma_2$	124
			$\sigma_2$	

$$l\mathcal{E}_4 \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32							1	
13							-1	
21								1
0								-1
42					1			
14				-1				
1324						1		
34							-1	
1			1					
2			-1					
3				1				
123				-1				
134	1							
234	-1							
4			1					
124			-1					

$$= i$$

	0	34	123	124
13	14	2	234	
			1	13
			1	0
				14
				34
				2
				123
				234
				124

$$= i$$

	0	34	123	124
				0
			$\mathbb{1}$	34
			$\mathbb{1}$	123
			$\mathbb{1}$	124
			$\mathbb{1}$	

$$l\mathcal{E}_3 \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32				1				
13				-1				
21					-1			
0					1			
42							1	
14							-1	
1324								-1
34							1	
1	-1							
2	1							
3		1						
123		-1						
134			-1					
234			1					
4				1				
124				-1				

$$= i$$

	0	34	123	124
13	14	2	234	
			1	13
			-1	0
			1	14
				34
				2
				123
				234
				124

$$= i$$

	0	34	123	124
				0
			$-\sigma_3$	34
			$-\sigma_3$	123
			$\sigma_3$	124
			$\sigma_3$	

$$l\mathcal{E}_{21} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32		-1						
13	1							
21		1						
0		-1						
42			-1					
14			1					
1324				1				
34					-1			
1						-1		
2						1		
3							1	
123						-1		
134							-1	
234							1	
4								1
124								-1

$$= i$$

	0	34	123	124
13	14	2	234	
			-1	13
			1	0
				14
				34
				2
				123
				234
				124

$$= i$$

	0	34	123	124
				0
			$\sigma_3$	34
			$\sigma_3$	123
			$\sigma_3$	124
			$\sigma_3$	



$$l\mathcal{E}_{34} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32			-1					
13			-1					
21			1					
0			1					
42	-1							
14	-1							
1324	1							
34		1						
1						1		
2						1		
3							-1	
123								-1
134				1				
234				1				
4						-1		
124							-1	

$$= I$$

	0	34	123	124
13		-1		13
14		1		0
2	-1			14
234	1			34
2			1	2
123				-1
234			1	234
124			-1	124

$$= I$$

	0	34	123	124
0		$\sigma_3$		0
34	$\sigma_3$			34
123			$-\sigma_3$	123
124			$-\sigma_3$	124

$$l\mathcal{E}_{124} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32							-1	
13							-1	
21							1	
0							1	
42						-1		
14						-1		
1324						1		
34						1		
1						-1		
2						-1		
3						1		
123						1		
134	-1							
234	-1							
4						1		
124						1		

$$= I$$

	0	34	123	124
13		-1		13
14		1		0
2	-1			14
234	1			34
2			1	2
123				-1
234			1	234
124			-1	124

$$= I$$

	0	34	123	124
0		$\sigma_3$		0
34	$\sigma_3$			34
123			$\sigma_3$	123
124			$\sigma_3$	124

$$l\mathcal{E}_{123} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32						-1		
13						-1		
21						-1		
0						-1		
42						-1		
14						-1		
1324						-1		
34						-1		
1	1							
2	1							
3	1							
123	1							
134		1						
234		1						
4		1						
124		1						

$$= I$$

	0	34	123	124
13		-1		13
14		-1		0
2	1			14
234	1			34
2			1	2
123				-1
234			1	234
124			-1	124

$$= I$$

	0	34	123	124
0		$\mathbb{1}$		0
34	$\mathbb{1}$			34
123			$\mathbb{1}$	123
124			$\mathbb{1}$	124

$$l\mathcal{E}_{134} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32							1	
13							-1	
21							-1	
0							1	
42						1		
14						-1		
1324						-1		
34						1		
1						1		
2						-1		
3						-1		
123						1		
134	1							
234	-1							
4	-1							
124	1							

$$= I$$

	0	34	123	124
13		$i$		13
14		$-i$		0
2	$i$			14
234	$-i$			34
2			$i$	2
123				-1
234			$i$	234
124			$-i$	124

$$= (-I)$$

	0	34	123	124
0		$\sigma_2$		0
34	$\sigma_2$			34
123			$\sigma_2$	123
124			$\sigma_2$	124

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & 1 \\
 13 & & & & & & & & 1 \\
 21 & & & & & & & 1 & \\
 0 & & & & & & & & 1 \\
 42 & & & & & 1 & & & \\
 14 & & & & & & 1 & & \\
 1324 & & & & 1 & & & & \\
 34 & & & & & 1 & & & \\
 1 & & & & 1 & & & & \\
 2 & & & & & 1 & & & \\
 3 & & & & 1 & & & & \\
 123 & & & & & 1 & & & \\
 134 & & 1 & & & & & & \\
 234 & & & 1 & & & & & \\
 4 & 1 & & & & & & & \\
 124 & & 1 & & & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & 14 & 2 & 234 & \\
 & & & & 13 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 14 \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 2 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 234 \\
 & & & & 124 \\
 1 & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & & & & \sigma_1 \\
 & & & \sigma_1 & \\
 & \sigma_1 & & & \\
 \sigma_1 & & & & 
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & 1 & & & & & \\
 13 & & & -1 & & & & & \\
 21 & & & & 1 & & & & \\
 0 & & & & & & & -1 & \\
 42 & 1 & & & & & & & \\
 14 & -1 & & & & & & & \\
 1324 & & & 1 & & & & & \\
 34 & & & -1 & & & & & \\
 1 & & & & & & & -1 & \\
 2 & & & & & & & 1 & \\
 3 & & & & & & & & -1 \\
 123 & & & & & & & & 1 \\
 134 & & & & & & -1 & & \\
 234 & & & & & & 1 & & \\
 4 & & & & & & & -1 & \\
 124 & & & & & & & & 1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & 14 & 2 & 234 & \\
 & & & & 13 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 14 \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 2 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 234 \\
 & & & & 124 \\
 i & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & & & & \mathbb{1} \\
 & & & \mathbb{1} & \\
 & \mathbb{1} & & & \\
 \mathbb{1} & & & & \\
 & & & & -\mathbb{1} \\
 & & & & -\mathbb{1} \\
 & & & & -\mathbb{1} \\
 & & & & -\mathbb{1} \\
 & & & & -\mathbb{1} \\
 i & & & & 
 \end{array}
 \end{array}$$

2.1. Алгебра релятивистского спина

Алгебра релятивистского спина – это подалгебра левой алгебры действия лептонов, построенная на базисных векторах

$$i\mathcal{E}_{21}, \quad i\mathcal{E}_{13}, \quad i\mathcal{E}_{32}, \quad i\mathcal{E}_{14}, \quad i\mathcal{E}_{42}, \quad i\mathcal{E}_{34}, \quad i\mathcal{E}_{1324}.$$

Отсюда вектор

$$\begin{aligned}
 & i\mathcal{E}_{21} \psi^{21} + i\mathcal{E}_{13} \psi^{13} + i\mathcal{E}_{32} \psi^{32} + \\
 & + i\mathcal{E}_{14} \psi^{14} + i\mathcal{E}_{42} \psi^{42} + i\mathcal{E}_{34} \psi^{34} + i\mathcal{E}_{1324} \psi^{1324}
 \end{aligned}$$

– это часть левого вектора действия лептонов, ответственная за спиновые характеристики лептонов.

2.2. Матрицы Дирака

Структурные матрицы, вычисленные в предыдущей Главе 4.2. Раздел II.2, это восемь из шестнадцати матриц Дирака<sup>5</sup>. Восемь, а не шестнадцать потому, что в этой Главе рассматривается алгебра действия лептонов  $i\mathbb{C}_3$  с трехмерным образующим пространством, число измерений которой равно восьми.

В настоящем Разделе приведены структурные матрицы алгебры действия лептонов  $i\mathbb{C}_w$  с четырехмерным образующим пространством, число измерений которой равно шестнадцати. Число приведенных структурных матриц равно шестнадцати, как и число матриц Дирака. Однако приведенные структурные матрицы существенно отличаются от шестнадцати матриц Дирака прежде всего тем, что их размерность в комплексном представлении равна  $8 \times 8$ , в то время как размерность шестнадцати матриц Дирака в комплексном представлении равна  $4 \times 4$ . Это обстоятельство требует объяснения. Указанное объяснение будем искать в интерпретации вектора действия алгебры  $\mathbb{C}_w$ , к которой перейдем.

IV. СИСТЕМООБРАЗУЮЩИЙ ПОСТУЛАТ. НИЖНИЕ И ВЕРХНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Сформулируем постулат, который будем развивать в дальнейшем.

Предварительно напомним, что каждой фундаментальной частице сопоставляется *сопутствующая* частица. Одна из них, более тяжелая, называется *нижней*, другая, более легкая, называется *верхней*. Например, электрон  $e$  принят за нижнюю частицу, а сопутствующая электрону фундаментальная частица –

<sup>5</sup> Точнее, матрицы Дирака – это структурные матрицы в комплексном и кватернионном представлениях.

электронное нейтрино  $\nu_e$  – относится к нижней частице. Аналогичные электрону частицы – мюон  $\mu$  и тау-лептон  $\tau$  – также приняты за нижние частицы, а сопутствующие им фундаментальные частицы – соответственно мюонное нейтрино  $\nu_\mu$  и тау-нейтрино  $\nu_\tau$  – относятся к верхним частицам. Важно следующее. Если нижние частицы являются аналогичными, то есть составляют группу поколений, то сопутствующие им нижние частицы также составляют группу поколений, то есть являются аналогичными, то есть они имеют одинаковые свойства (спин, заряд) за исключением массы. Таким образом, электронное нейтрино  $\nu_e$ , мюонное нейтрино  $\nu_\mu$  и тау-нейтрино  $\nu_\tau$  составляют группу аналогичных частиц – группу поколений верхних лептонов. Сказанное удобно проиллюстрировать таблицей

1 поколение	2 поколение	3 поколение	
$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	верхние
$e$	$\mu$	$\tau$	нижние

Таковыми же взаимоотношениями обладают сопутствующие и аналогичные кварки.

Если исходить из того, что определяющей характеристикой фундаментальных частиц является вектор действия, то условия сопутствия фундаментальных частиц следует искать в организации векторной структуры этих частиц, причем условия сопутствия должны быть *двухпозиционными*. Кроме того, условия сопутствия должны быть *одинаковыми* для каждой пары сопутствующих частиц *разных* поколений.

Постулируем связь между структурой вектора действия алгебры  $\mathbb{C}_w$  и принадлежностью двух фундаментальных частиц к сопутствующим. Обратимся к комплексному представлению вектора действия алгебры  $\mathbb{C}_w$  и отнесем его к двум сопутствующим лептонам первого поколения  $e$  и  $\nu_e$ . Поэтому запишем

$$\begin{aligned} \psi_{e, \nu_e} = & \varepsilon_{13} \circ (i \psi^{32} + \psi^{13}) + \varepsilon_0 \circ (i \psi^{21} + \psi^0) + \\ & + \varepsilon_{14} \circ (i \psi^{42} + \psi^{14}) + \varepsilon_{34} \circ (i \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ & + \varepsilon_2 \circ (i \psi^1 + \psi^2) + \varepsilon_{123} \circ (i \psi^3 + \psi^{123}) + \\ & + \varepsilon_{234} \circ (i \psi^{134} + \psi^{234}) + \varepsilon_{124} \circ (i \psi^4 + \psi^{124}). \end{aligned}$$

Пара сопутствующих частиц  $e$  и  $\nu_e$  отнесена к первому поколению, так как в этом случае *основным* направлением является базисный вектор  $\varepsilon_{21}$ .

В случае, когда основным направлением является базисный вектор  $\varepsilon_{13}$ , имеем вектор действия, отнесенный к двум сопутствующим лептонам второго поколения  $\mu$  и  $\nu_\mu$ ,

$$\begin{aligned} \psi_{\mu, \nu_\mu} = & \varepsilon_{32} \circ (j \psi^{21} + \psi^{32}) + \varepsilon_0 \circ (j \psi^{13} + \psi^0) + \\ & + \varepsilon_{34} \circ (j \psi^{41} + \psi^{34}) + \varepsilon_{24} \circ (j \psi^{3214} + \psi^{24}) + \\ & + \varepsilon_1 \circ (j \psi^3 + \psi^1) + \varepsilon_{312} \circ (j \psi^2 + \psi^{312}) + \\ & + \varepsilon_{124} \circ (j \psi^{324} + \psi^{124}) + \varepsilon_{314} \circ (j \psi^4 + \psi^{314}). \end{aligned}$$

В случае, когда основным направлением является базисный вектор  $\varepsilon_{32}$ , имеем вектор действия, отнесен-

ный к двум сопутствующим лептонам третьего поколения  $\tau$  и  $\nu_\tau$ ,

$$\begin{aligned} \psi_{\tau, \nu_\tau} = & \varepsilon_{21} \circ (k \psi^{13} + \psi^{21}) + \varepsilon_0 \circ (k \psi^{32} + \psi^0) + \\ & + \varepsilon_{24} \circ (k \psi^{43} + \psi^{24}) + \varepsilon_{14} \circ (k \psi^{2134} + \psi^{14}) + \\ & + \varepsilon_3 \circ (k \psi^2 + \psi^3) + \varepsilon_{231} \circ (k \psi^1 + \psi^{231}) + \\ & + \varepsilon_{314} \circ (k \psi^{214} + \psi^{314}) + \varepsilon_{234} \circ (k \psi^4 + \psi^{234}). \end{aligned}$$

Переходя от групп поколений сопутствующих нижних и верхних лептонов к общему случаю фундаментальных частиц, постулируем следующую организацию векторов действия сопутствующих нижних и верхних фундаментальных частиц:

1) вектор действия подалгебры  $\mathbb{S}$  относится к двум сопутствующим фундаментальным частицам – нижней и верхней – одного поколения;

2) вектор действия подалгебры  $\mathbb{S}$ , в которой за основное направление принят базисный вектор  $\varepsilon_{21}$ , относится к двум сопутствующим фундаментальным частицам – нижней и верхней – первого поколения;

3) вектор действия подалгебры  $\mathbb{S}$ , в которой за основное направление принят базисный вектор  $\varepsilon_{13}$ , относится к двум сопутствующим фундаментальным частицам – нижней и верхней – второго поколения;

4) вектор действия подалгебры  $\mathbb{S}$ , в которой за основное направление принят базисный вектор  $\varepsilon_{32}$ , относится к двум сопутствующим фундаментальным частицам – нижней и верхней – третьего поколения.

## V. СЖАТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРАВОЙ АЛГЕБРЫ ДЕЙСТВИЯ БЕЛЫХ ЛЕПТОНОВ

### 1. Первое сжатое представление

Предварительно заметим, что первое сжатое представление позволяет рассматривать две сопутствующие фундаментальные частицы – нижнюю и верхнюю – как одну частицу.

Рассмотрим первое сжатое представление

$$R_1 : {}_r\mathbb{C}_w \rightarrow {}_r\mathbb{C}_3 \{ r\varepsilon_{32}, r\varepsilon_{13}, r\varepsilon_{21}, r\varepsilon_0, r\varepsilon_1, r\varepsilon_2, r\varepsilon_3, r\varepsilon_{123} \}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц сжатие определяется тем, что базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность структурных матриц алгебры  ${}_r\mathbb{C}_w$  понижается вдвое и равна  $8 \times 8$  в действительном представлении,  $4 \times 4$  в комплексном представлении и  $2 \times 2$  в кватернионном представлении.



$$\begin{array}{l}
r\mathcal{E}_{34} \sim \\
\begin{array}{c}
42 \quad 32 \\
14 \quad 13 \\
1324 \quad 21 \\
34 \quad 0 \\
134 \quad 1 \\
234 \quad 2 \\
4 \quad 3 \\
124 \quad 123
\end{array}
\begin{array}{|c|c|}
\hline
\begin{array}{c}
32 \quad 13 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 123 \\
1 \\
1 \\
1 \\
1 \\
1 \\
1 \\
1
\end{array} & \\
\hline
\end{array}
= I \begin{array}{c}
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \quad 123 \\
1 \quad 1 \\
1 \\
1 \\
1
\end{array} \\
\begin{array}{c}
0 \quad 123 \\
\mathbb{1} \quad \mathbb{1} \\
123
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
r\mathcal{E}_{1324} \sim \\
\begin{array}{c}
42 \quad 32 \\
14 \quad 13 \\
1324 \quad 21 \\
34 \quad 0 \\
134 \quad 1 \\
234 \quad 2 \\
4 \quad 3 \\
124 \quad 123
\end{array}
\begin{array}{|c|c|}
\hline
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \quad 123 \\
1 \\
-1 \\
1 \\
-1 \\
1 \\
1 \\
-1
\end{array} & \\
\hline
\end{array}
= i \begin{array}{c}
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \quad 123 \\
1 \quad 1 \\
1 \\
1 \\
1
\end{array} \\
\begin{array}{c}
0 \quad 123 \\
\mathbb{1} \quad \mathbb{1} \\
123
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
r\mathcal{E}_{123} \sim \\
\begin{array}{c}
42 \quad 32 \\
14 \quad 13 \\
1324 \quad 21 \\
34 \quad 0 \\
134 \quad 1 \\
234 \quad 2 \\
4 \quad 3 \\
124 \quad 123
\end{array}
\begin{array}{|c|c|}
\hline
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \quad 123 \\
-1 \\
-1 \\
-1 \\
-1 \\
1 \\
1 \\
1
\end{array} & \\
\hline
\end{array}
= I \begin{array}{c}
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \quad 123 \\
1 \quad -1 \\
1 \\
1 \\
1
\end{array} \\
\begin{array}{c}
0 \quad 123 \\
\mathbb{1} \quad -\mathbb{1} \\
123
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
r\mathcal{E}_{124} \sim \\
\begin{array}{c}
42 \quad 32 \\
14 \quad 13 \\
1324 \quad 21 \\
34 \quad 0 \\
134 \quad 1 \\
234 \quad 2 \\
4 \quad 3 \\
124 \quad 123
\end{array}
\begin{array}{|c|c|}
\hline
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \quad 123 \\
-1 \\
-1 \\
-1 \\
-1 \\
1 \\
1 \\
1
\end{array} & \\
\hline
\end{array}
= I \begin{array}{c}
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \quad 123 \\
1 \quad -1 \\
1 \\
1 \\
1
\end{array} \\
\begin{array}{c}
0 \quad 123 \\
\mathbb{1} \quad -\mathbb{1} \\
123
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
r\mathcal{E}_{134} \sim \\
\begin{array}{c}
42 \quad 32 \\
14 \quad 13 \\
1324 \quad 21 \\
34 \quad 0 \\
134 \quad 1 \\
234 \quad 2 \\
4 \quad 3 \\
124 \quad 123
\end{array}
\begin{array}{|c|c|}
\hline
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \quad 123 \\
-1 \\
-1 \\
1 \\
-1 \\
1 \\
-1 \\
-1
\end{array} & \\
\hline
\end{array}
= a \begin{array}{c}
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \quad 123 \\
-1 \\
i \\
-i \\
-1
\end{array} \\
\begin{array}{c}
0 \quad 123 \\
-I \\
I \\
123
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
r\mathcal{E}_{234} \sim \\
\begin{array}{c}
42 \quad 32 \\
14 \quad 13 \\
1324 \quad 21 \\
34 \quad 0 \\
134 \quad 1 \\
234 \quad 2 \\
4 \quad 3 \\
124 \quad 123
\end{array}
\begin{array}{|c|c|}
\hline
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \quad 123 \\
-1 \\
-1 \\
-1 \\
1 \\
1 \\
-1 \\
-1
\end{array} & \\
\hline
\end{array}
= b \begin{array}{c}
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \quad 123 \\
-1 \\
1 \\
-1 \\
-1
\end{array} \\
\begin{array}{c}
0 \quad 123 \\
-I \\
I \\
123
\end{array}
\end{array}$$

Сделаем замечание, которое в Главе 4.4. будет использовано при построении уравнения, обобщающего уравнение Дирака. В первом сжатом представлении восемь структурных матриц алгебры  $r\mathcal{C}_w$ , соответствующих базисным векторам

$$r\mathcal{E}_{34}, r\mathcal{E}_{134}, r\mathcal{E}_{234}, r\mathcal{E}_4, r\mathcal{E}_{1324}, r\mathcal{E}_{14}, r\mathcal{E}_{42}, r\mathcal{E}_{124},$$

отождествляются с матрицами, соответствующими базисным векторам

$$r\mathcal{E}_0, r\mathcal{E}_1, r\mathcal{E}_2, r\mathcal{E}_3, r\mathcal{E}_{21}, r\mathcal{E}_{13}, r\mathcal{E}_{32}, r\mathcal{E}_{123}.$$

Представление первых восьми матриц является неточным вплоть до того, что сигнатура базисных векторов

$$r\mathcal{E}_4, r\mathcal{E}_{14}, r\mathcal{E}_{42}, r\mathcal{E}_{124}$$

меняет знак. В дальнейшем окажется особенно важным то, что в первом сжатом представлении матрица  $rC^L_{K34}$  отождествляется с матрицей  $rC^L_{K0} = \delta^L_K$ .

## 2. Второе сжатое представление

Рассмотрим второе сжатое представление

$$R_2 : r\mathcal{C}_w \rightarrow r\mathcal{C}_2 \{r\mathcal{E}_{32}, r\mathcal{E}_{13}, r\mathcal{E}_{21}, r\mathcal{E}_0\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц сжатие определяется тем, что базисные векторы с индексами (42, 14, 1324, 34), (134, 234, 4, 124) и (1, 2, 3, 123) заменяются на базисные векторы с индексами (32, 13, 21, 0) соответственно. Тогда размерность матриц представления базисных векторов алгебры  $r\mathcal{C}_w$  понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна  $4 \times 4$  в действительном представлении,  $2 \times 2$  в комплексном представлении и  $1 \times 1$  в кватернионном представлении.

Ограничимся тем, что приведем матрицы регулярного представления образующих базисных векторов алгебры  $r\mathcal{C}_w$  в алгебре  $r\mathcal{C}_2$ . Имеем

$$r\mathcal{E}_1 \sim \begin{array}{c}
1 \quad 32 \\
2 \quad 13 \\
3 \quad 21 \\
123 \quad 0
\end{array} \begin{array}{|c|c|}
\hline
\begin{array}{c}
13 \quad 0 \\
1 \\
-1 \\
-1
\end{array} & \begin{array}{c}
0 \\
1 \\
1 \\
-1
\end{array} \\
\hline
\end{array} = a \begin{array}{|c|c|}
\hline
\mathbb{1} & \\
\hline
-1 & 
\end{array} = a I$$



$$r\mathcal{E}_2 \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \\ 32 \quad 21 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \quad 32 \\ 2 \quad 13 \\ 3 \quad 21 \\ 123 \quad 0 \end{array} \end{array} = b \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} = bI$$

$$r\mathcal{E}_3 \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \\ 32 \quad 21 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \quad 32 \\ 2 \quad 13 \\ 3 \quad 21 \\ 123 \quad 0 \end{array} \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = i\mathbb{1}$$

$$r\mathcal{E}_4 \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \\ 32 \quad 21 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{l} 134 \quad 32 \\ 234 \quad 13 \\ 4 \quad 21 \\ 124 \quad 0 \end{array} \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = i\mathbb{1}$$

В результате для базисных векторов алгебры  $r\mathcal{C}_w$  получим

$$\begin{aligned} r\mathcal{E}_{32} &\sim aI, & r\mathcal{E}_{42} &\sim aI, \\ r\mathcal{E}_{13} &\sim bI, & r\mathcal{E}_{14} &\sim bI, \\ r\mathcal{E}_{21} &\sim i\mathbb{1}, & r\mathcal{E}_{1324} &\sim i\mathbb{1}, \\ r\mathcal{E}_0 &\sim 1\mathbb{1}, & r\mathcal{E}_{34} &\sim 1\mathbb{1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r\mathcal{E}_1 &\sim aI, & r\mathcal{E}_{134} &\sim aI, \\ r\mathcal{E}_2 &\sim bI, & r\mathcal{E}_{234} &\sim bI, \\ r\mathcal{E}_3 &\sim i\mathbb{1}, & r\mathcal{E}_4 &\sim i\mathbb{1}, \\ r\mathcal{E}_{123} &\sim 1\mathbb{1}, & r\mathcal{E}_{124} &\sim 1\mathbb{1}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом представлении только базисные векторы  $r\mathcal{E}_{32}$ ,  $r\mathcal{E}_{13}$ ,  $r\mathcal{E}_{21}$ ,  $r\mathcal{E}_0$  представлены точно. Соотношения

$$\begin{aligned} r\mathcal{E}_{32} &\sim aI, \\ r\mathcal{E}_{13} &\sim bI, \\ r\mathcal{E}_{21} &\sim i\mathbb{1}, \\ r\mathcal{E}_0 &\sim 1\mathbb{1} \end{aligned}$$

можно рассматривать как соответствие между указанными базисными векторами и кватернионами.

### 3. Третье сжатое представление

Рассмотрим третье сжатое представление

$$R_3 : r\mathcal{C}_w \rightarrow r\mathcal{C}_1 \{r\mathcal{E}_{21}, r\mathcal{E}_0\}.$$

Для этого положим, что сжатие определяется тем, что базисные векторы с индексами (42, 14), (1324, 34), (134, 234), (4, 124), (1, 2), (3, 123), (32, 13) заменяются на векторы с индексами (21, 0) соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры  $r\mathcal{C}_w$

понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна  $2 \times 2$  в действительном представлении,  $1 \times 1$  в комплексном представлении. В результате для базисных векторов алгебры  $r\mathcal{C}_w$  получим

$$\begin{aligned} r\mathcal{E}_{32} &\sim a, & r\mathcal{E}_1 &\sim a, & r\mathcal{E}_{42} &\sim a, & r\mathcal{E}_{134} &\sim a, \\ r\mathcal{E}_{13} &\sim b, & r\mathcal{E}_2 &\sim b, & r\mathcal{E}_{14} &\sim b, & r\mathcal{E}_{234} &\sim b, \\ r\mathcal{E}_{21} &\sim i, & r\mathcal{E}_3 &\sim i, & r\mathcal{E}_{1324} &\sim i, & r\mathcal{E}_4 &\sim i, \\ r\mathcal{E}_0 &\sim 1, & r\mathcal{E}_{123} &\sim 1, & r\mathcal{E}_{34} &\sim 1, & r\mathcal{E}_{124} &\sim 1. \end{aligned}$$

В рассматриваемом представлении вектор  $r\mathcal{E}_{21}$ , и только он, представляется точно мнимой единицей.

## VI. СЖАТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ДЕЙСТВИЯ БЕЛЫХ ЛЕПТОНОВ

### 1. Первое сжатое представление

Рассмотрим первое сжатое представление

$$R_1 : l\mathcal{C}_w \rightarrow l\mathcal{C}_3 \{l\mathcal{E}_{32}, l\mathcal{E}_{13}, l\mathcal{E}_{21}, l\mathcal{E}_0, l\mathcal{E}_1, l\mathcal{E}_2, l\mathcal{E}_3, l\mathcal{E}_{123}\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц сжатие определяется тем, что базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность структурных матриц алгебры  $l\mathcal{C}_w$  понижается вдвое и равна  $8 \times 8$  в действительном представлении,  $4 \times 4$  в комплексном представлении и  $2 \times 2$  в кватернионном представлении.

В результате получим следующие структурные матрицы, соответствующие первому сжатому представлению базисных векторов правой алгебры действия белых лептонов  $l\mathcal{C}_w$  в алгебре  $l\mathcal{C}_3$ :

$$l\mathcal{E}_0 \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 2 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{l} 42 \quad 32 \\ 14 \quad 13 \\ 1324 \quad 21 \\ 34 \quad 0 \\ 134 \quad 1 \\ 234 \quad 2 \\ 4 \quad 3 \\ 124 \quad 123 \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{l} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{l} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}$$



$${}_l\mathcal{E}_{123} \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \\ \begin{array}{cc|cc} 42 & 32 & & -1 \\ 14 & 13 & & -1 \\ 1324 & 21 & & -1 \\ 34 & 0 & & -1 \\ \hline 134 & 1 & 1 & \\ 234 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 124 & 123 & 1 & \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \\ \begin{array}{cc|c} & & 13 \\ & -1 & 0 \\ 1 & & 2 \\ \hline & & 123 \\ 1 & & \end{array} \end{array} \\
 = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ & & 0 \\ \begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & -\mathbb{1} & \\ \hline & & 123 \\ \mathbb{1} & & \end{array} \end{array}$$

$${}_l\mathcal{E}_{124} \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \\ \begin{array}{cc|cc} 42 & 32 & & -1 \\ 14 & 13 & & -1 \\ 1324 & 21 & & 1 \\ 34 & 0 & & 1 \\ \hline 134 & 1 & -1 & \\ 234 & 2 & -1 & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 124 & 123 & 1 & \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \\ \begin{array}{cc|c} & & 13 \\ & -1 & 0 \\ -1 & & 2 \\ \hline & & 123 \\ 1 & & \end{array} \end{array} \\
 = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ & & 0 \\ \begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & \sigma_3 & \\ \hline & & 123 \\ \sigma_3 & & \end{array} \end{array}$$

$${}_l\mathcal{E}_{134} \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \\ \begin{array}{cc|cc} 42 & 32 & & 1 \\ 14 & 13 & & -1 \\ 1324 & 21 & & -1 \\ 34 & 0 & & 1 \\ \hline 134 & 1 & 1 & \\ 234 & 2 & -1 & \\ 4 & 3 & -1 & \\ 124 & 123 & 1 & \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \\ \begin{array}{cc|c} & & 13 \\ & i & 0 \\ & -i & 2 \\ \hline & & 123 \\ i & & \end{array} \end{array} \\
 = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ & & 0 \\ \begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & \sigma_2 & \\ \hline & & 123 \\ \sigma_2 & & \end{array} \end{array}$$

$${}_l\mathcal{E}_{234} \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \\ \begin{array}{cc|cc} 42 & 32 & & 1 \\ 14 & 13 & & 1 \\ 1324 & 21 & & 1 \\ 34 & 0 & & 1 \\ \hline 134 & 1 & 1 & \\ 234 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 124 & 123 & 1 & \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \\ \begin{array}{cc|c} & & 13 \\ & 1 & 0 \\ 1 & & 2 \\ \hline & & 123 \\ 1 & & \end{array} \end{array} \\
 = I \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ & & 0 \\ \begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & \sigma_1 & \\ \hline & & 123 \\ \sigma_1 & & \end{array} \end{array}$$

$${}_l\mathcal{E}_{1324} \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \\ \begin{array}{cc|cc} 42 & 32 & 1 & \\ 14 & 13 & -1 & \\ 1324 & 21 & & 1 \\ 34 & 0 & & -1 \\ \hline 134 & 1 & & -1 \\ 234 & 2 & & 1 \\ 4 & 3 & & -1 \\ 124 & 123 & & 1 \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \\ \begin{array}{cc|c} & & 13 \\ & 1 & 0 \\ & -1 & 2 \\ \hline & & 123 \\ & & -1 \end{array} \end{array} \\
 = i \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ & & 0 \\ \begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & \mathbb{1} & \\ \hline & & 123 \\ & & -\mathbb{1} \end{array} \end{array}$$

### 1.1. Матрицы Дирака

Полученные матрицы и есть матрицы Дирака. Таким образом, в этом разделе вычислены матрицы Дирака и установлено, что они являются структурными

матрицами левой алгебры белых лептонов в первом сжатом представлении.

## 2. Второе сжатое представление

Рассмотрим второе сжатое представление

$$R_2 : {}_l\mathcal{C}_w \rightarrow {}_l\mathcal{C}_2 \{ {}_l\mathcal{E}_{32}, {}_l\mathcal{E}_{13}, {}_l\mathcal{E}_{21}, {}_l\mathcal{E}_0 \}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц сжатие определяется тем, что базисные векторы с индексами (42, 14, 1324, 34), (134, 234, 4, 124) и (1, 2, 3, 123) заменяются на базисные векторы с индексами (32, 13, 21, 0) соответственно. Тогда размерность матриц представления базисных векторов алгебры  ${}_l\mathcal{C}_w$  понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна  $4 \times 4$  в действительном представлении,  $2 \times 2$  в комплексном представлении и  $1 \times 1$  в кватернионном представлении.

Ограничимся тем, что приведем матрицы регулярного представления образующих базисных векторов алгебры  ${}_l\mathcal{C}_w$  в алгебре  ${}_l\mathcal{C}_2$ . Имеем

$${}_l\mathcal{E}_1 \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \\ 32 \quad 21 \\ \begin{array}{cc|c} 1 & 32 & \\ 2 & 13 & \\ 3 & 21 & \\ 123 & 0 & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{cc|c} & & 1 \\ & & -1 \\ \hline 1 & & \end{array} = i\sigma_1$$

$${}_l\mathcal{E}_2 \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \\ 32 \quad 21 \\ \begin{array}{cc|c} 1 & 32 & \\ 2 & 13 & \\ 3 & 21 & \\ 123 & 0 & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{cc|c} & & -i \\ & & 1 \\ \hline i & & \end{array} = i\sigma_2$$

$${}_l\mathcal{E}_3 \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \\ 32 \quad 21 \\ \begin{array}{cc|c} 1 & 32 & \\ 2 & 13 & \\ 3 & 21 & \\ 123 & 0 & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{cc|c} & & -1 \\ & & 1 \\ \hline -1 & & 1 \end{array} = i\sigma_3$$

$${}_l\mathcal{E}_4 \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \\ 32 \quad 21 \\ \begin{array}{cc|c} 134 & 32 & \\ 234 & 13 & \\ 4 & 21 & \\ 124 & 0 & \end{array} \end{array} = i \begin{array}{cc|c} & & 1 \\ & & 1 \\ \hline 1 & & 1 \end{array} = i\mathbb{1}$$

В результате для базисных векторов алгебры  ${}_l\mathcal{C}_w$

получим

$$\begin{aligned} {}_l\mathcal{E}_{32} &\sim i\sigma_1, & {}_l\mathcal{E}_1 &\sim i\sigma_1, \\ {}_l\mathcal{E}_{13} &\sim i\sigma_2, & {}_l\mathcal{E}_2 &\sim i\sigma_2, \\ {}_l\mathcal{E}_{21} &\sim i\sigma_3, & {}_l\mathcal{E}_3 &\sim i\sigma_3, \\ {}_l\mathcal{E}_0 &\sim 1\mathbb{1}, & {}_l\mathcal{E}_{123} &\sim 1\mathbb{1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_l\mathcal{E}_{14} &\sim \sigma_1, & {}_l\mathcal{E}_{234} &\sim \sigma_1, \\ {}_l\mathcal{E}_{42} &\sim \sigma_2, & {}_l\mathcal{E}_{134} &\sim \sigma_2, \\ {}_l\mathcal{E}_{34} &\sim \sigma_3, & {}_l\mathcal{E}_{124} &\sim \sigma_3, \\ {}_l\mathcal{E}_{1324} &\sim i\mathbb{1}, & {}_l\mathcal{E}_4 &\sim i\mathbb{1}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом представлении только базисные векторы  ${}_l\mathcal{E}_{32}$ ,  ${}_l\mathcal{E}_{13}$ ,  ${}_l\mathcal{E}_{21}$ ,  ${}_l\mathcal{E}_0$  представлены точно. Соотношения

$$\begin{aligned} {}_l\mathcal{E}_{32} &\sim i\sigma_1, \\ {}_l\mathcal{E}_{13} &\sim i\sigma_2, \\ {}_l\mathcal{E}_{21} &\sim i\sigma_3, \\ {}_l\mathcal{E}_0 &\sim 1\mathbb{1} \end{aligned}$$

можно рассматривать как соответствие между указанными базисными векторами и кватернионами.

### 3. Третье сжатое представление

Рассмотрим третье сжатое представление

$$R_3 : {}_l\mathcal{C}_w \rightarrow {}_l\mathcal{C}_1 \{ {}_l\mathcal{E}_{21}, {}_l\mathcal{E}_0 \}.$$

Для этого положим, что сжатие определяется тем, что базисные векторы с индексами (42, 14), (1324, 34), (134, 234), (4, 124), (1, 2), (3, 123), (32, 13) заменяются на векторы с индексами (21, 0) соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры  ${}_l\mathcal{C}_w$  понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна  $2 \times 2$  в действительном представлении,  $1 \times 1$  в комплексном представлении. В результате для базисных векторов алгебры  ${}_l\mathcal{C}_w$  получим

$$\begin{aligned} {}_l\mathcal{E}_{32} &\sim i, & {}_l\mathcal{E}_1 &\sim i, & {}_l\mathcal{E}_{42} &\sim i, & {}_l\mathcal{E}_{134} &\sim i, \\ {}_l\mathcal{E}_{13} &\sim 1, & {}_l\mathcal{E}_2 &\sim 1, & {}_l\mathcal{E}_{14} &\sim 1, & {}_l\mathcal{E}_{234} &\sim 1, \\ {}_l\mathcal{E}_{21} &\sim i, & {}_l\mathcal{E}_3 &\sim i, & {}_l\mathcal{E}_{1324} &\sim i, & {}_l\mathcal{E}_4 &\sim i, \\ {}_l\mathcal{E}_0 &\sim 1, & {}_l\mathcal{E}_{123} &\sim 1, & {}_l\mathcal{E}_{34} &\sim 1, & {}_l\mathcal{E}_{124} &\sim 1. \end{aligned}$$

В рассматриваемом представлении вектор  ${}_l\mathcal{E}_{21}$ , и только он, представляется точно мнимой единицей.

## VII. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ПОДАЛГЕБР ДЕЙСТВИЯ И ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Предварительно напомним следующее<sup>6</sup>. Векторы алгебры действия фундаментальных объектов имеют

вид

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_K S^K = \mathbf{e}_0 S^0 + \mathbf{e}_k S^k + \mathbf{e}_{k_1 k_2} S^{k_1 k_2} + \mathbf{e}_{k_1 k_2 k_3} S^{k_1 k_2 k_3} + \mathbf{e}_{1324} S^{1324}.$$

На указанных векторах действуют левый закон умножения

$${}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1. \quad (8)$$

и правый закон умножения

$${}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2. \quad (9)$$

Здесь коэффициент  $S_0$  имеет размерность действия.

По отношению к координатам вектора действия левый закон умножения приобретает вид

$${}_l S^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_l C^{K}_{K_1 K_2} \cdot S_1^{K_1} \cdot S_2^{K_2}, \quad (10)$$

где  ${}_l C^{K}_{K_1 K_2}$  — это левые структурные матрицы алгебры действия, по отношению к координатам вектора действия правый закон умножения приобретает вид

$${}_r S^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^{K}_{K_1 K_2} \cdot S_1^{K_1} \cdot S_2^{K_2}, \quad (11)$$

где  ${}_r C^{K}_{K_1 K_2}$  — это правые структурные матрицы алгебры действия.

Дифференцирование левого закона умножения приводит к левому уравнению структуры

$$dd_1 {}_l S^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_l C^{K}_{K_1 K_2} \cdot d_1 {}_l S^{K_1} \cdot d_1 {}_l S^{K_2}, \quad (12)$$

которое записывается по отношению к левой волновой функции  ${}_l \psi^K = d_1 {}_l S^K$  следующим образом:

$$d_1 {}_l \psi^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_l C^{K}_{K_1 K_2} \cdot {}_l \psi^{K_1} \cdot d_1 {}_l S^{K_2}. \quad (13)$$

Дифференцирование правого закона умножения приводит к правому уравнению структуры

$$dd_1 {}_r S^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^{K}_{K_1 K_2} \cdot d_1 {}_r S^{K_1} \cdot d_1 {}_r S^{K_2}, \quad (14)$$

которое записывается по отношению к правой волновой функции  ${}_r \psi^K = d_1 {}_r S^K$  следующим образом:

$$d_1 {}_r \psi^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^{K}_{K_1 K_2} \cdot {}_r \psi^{K_1} \cdot d_1 {}_r S^{K_2}, \quad (15)$$

Действие и волновая функция являются функциями вектора пространства-времени

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_K x^K = \mathbf{e}_0 x^0 + \mathbf{e}_k x^k + \mathbf{e}_{k_1 k_2} x^{k_1 k_2} + \mathbf{e}_{k_1 k_2 k_3} x^{k_1 k_2 k_3} + \mathbf{e}_{1324} x^{1324}.$$

<sup>6</sup> См. Разделы III, IV Главы 3.1.

На пространстве-времени задан закон умножения векторов с теми же структурными матрицами, которыми охарактеризована алгебра действия фундаментального объекта. Важно отметить, что указанное пространство-время является *собственным* пространством фундаментального объекта, иначе говоря, пространством, *принадлежащим* этому фундаментальному объекту.

К динамическим параметрам фундаментального объекта, наряду с действием, относятся левый импульс, или просто импульс,

$$p^{K_2 K_3} = -\frac{\partial_l S^{K_2}}{\partial_l x^{K_3}}$$

и правый импульс, или *заряд* фундаментального объекта<sup>7</sup>

$$Q^{K_2 K_3} = -\frac{\partial_r S^{K_2}}{\partial_r x^{K_3}}.$$

Указанные параметры являются *собственными* параметрами фундаментального объекта иначе говоря, параметрами, *принадлежащими* этому фундаментальному объекту.

Используя импульс, можно записать левое уравнение структуры (13) в виде *левого* квантового постулата (задачи на собственные значения)

$$\frac{\partial_l \psi^K}{\partial_l x^{K_3}} = \frac{1}{S_0} \cdot {}_l C^{K}_{K_1 K_2} \cdot {}_l \psi^{K_1} \cdot \frac{\partial_l S^{K_2}}{\partial_l x^{K_3}}, \quad (16)$$

или

$$\frac{\partial_l \psi^K}{\partial_l x^{K_3}} = -\frac{1}{S_0} \cdot {}_l C^{K}_{K_1 K_2} \cdot {}_l \psi^{K_1} \cdot p^{K_2 K_3}, \quad (17)$$

или

$$\frac{\partial_l \psi^K}{\partial_l x^{K_3}} = -\frac{1}{S_0} \cdot p^{K}_{K_1 K_3} \cdot {}_l \psi^{K_1}, \quad (18)$$

где введено обозначение

$$p^{K}_{K_1 K_3} = {}_l C^{K}_{K_1 K_2} \cdot p^{K_2 K_3}.$$

Далее матрицы  $p^{K}_{K_1 K_3}$  будем обозначать  $\hat{p}_{K_3}$  и называть оператором собственного импульса фундаментального объекта. Так как компоненты оператора импульса пропорциональны левым структурным матрицам алгебры действия, то они, в свою очередь, составляют алгебру, изоморфную левой алгебре действия фундаментального объекта. В последующих Разделах мы остановимся на подалгебрах оператора собственного импульса фундаментального объекта.

Используя заряд, можно записать правое уравнение структуры (15) в виде *правого* квантового постулата (задачи на собственные значения)

$$\frac{\partial_r \psi^K}{\partial_r x^{K_3}} = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^{K}_{K_1 K_2} \cdot {}_r \psi^{K_1} \cdot \frac{\partial_r S^{K_2}}{\partial_r x^{K_3}}, \quad (19)$$

или

$$\frac{\partial_r \psi^K}{\partial_r x^{K_3}} = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^{K}_{K_1 K_2} \cdot {}_r \psi^{K_1} \cdot Q^{K_2 K_3}, \quad (20)$$

или

$$\frac{\partial_r \psi^K}{\partial_r x^{K_3}} = -\frac{1}{S_0} \cdot Q^{K}_{K_1 K_3} \cdot {}_r \psi^{K_1}, \quad (21)$$

где введено обозначение

$$Q^{K}_{K_1 K_3} = {}_r C^{K}_{K_1 K_2} \cdot Q^{K_2 K_3}.$$

Далее матрицы  $Q^{K}_{K_1 K_3}$  будем обозначать  $\hat{Q}_{K_3}$  и называть оператором собственного заряда фундаментального объекта. Так как компоненты оператора заряда пропорциональны правым структурным матрицам алгебры действия, то они, в свою очередь, составляют алгебру, изоморфную правой алгебре действия фундаментального объекта. В последующих Разделах мы остановимся на подалгебрах оператора собственного заряда фундаментального объекта.

Далее ограничимся рассмотрением действия и пространства-времени лептонов. А это означает

1. Коэффициент  $S_0$  есть постоянная Планка.

2. Алгебрами действия и пространства-времени является алгебра Клиффорда. Структурные матрицы этой алгебры приведены в Разделах III, V.

Соответственно рассматриваемые далее динамические параметры это динамические параметры лептонов. Однако, следует отметить, что аналогичные выкладки могут быть выполнены и для других фундаментальных частиц с использованием соответствующих им алгебр действия и пространства-времени.

Далее рассмотрим подалгебры алгебры Клиффорда и соответствующие им собственные динамические параметры лептонов.

### 1. Спин – собственный момент левых геометрических поворотов

Спину соответствуют

1) подалгебра левой алгебры действия, построенная на векторах

$${}_l \mathbf{S} = {}_l \mathbf{e}_0 {}_l S^0 + {}_l \mathbf{e}_\alpha {}_l S^\alpha = {}_l \mathbf{e}_0 {}_l S^0 + {}_l \mathbf{e}_{21} {}_l S^{21} + {}_l \mathbf{e}_{13} {}_l S^{13} + {}_l \mathbf{e}_{32} {}_l S^{32}, \text{ и}$$

2) подалгебра левой алгебры пространства-времени, построенная на векторах

$${}_l \mathbf{x} = {}_l \mathbf{e}_0 {}_l x^0 + {}_l \mathbf{e}_\beta {}_l x^\beta = {}_l \mathbf{e}_0 {}_l x^0 + {}_l \mathbf{e}_{21} {}_l x^{21} + {}_l \mathbf{e}_{13} {}_l x^{13} + {}_l \mathbf{e}_{32} {}_l x^{32},$$

<sup>7</sup> Напомним также, что импульс назван внешним динамическим параметром фундаментального объекта, а заряд назван внутренним динамическим параметром фундаментального объекта.

здесь и далее в этом Разделе индексы  $\alpha$  и  $\beta$  пробегают значения 21, 13, 32.

Для рассматриваемых подалгебр динамическим параметром является импульс

$$p_{\beta}^{\alpha} = -\frac{\partial {}_l S^{\alpha}}{\partial {}_l x^{\beta}}. \quad (22)$$

Координаты  $x^{\beta}$  это координаты площадей  $x^{21}$ ,  $x^{13}$ ,  $x^{32}$  в плоскостях 21, 13, 32. От координат  $x^{\beta}$  перейдем к координатам углов  $\varphi^{\beta}$  в указанных плоскостях и, соответственно, от импульса (22) перейдем к собственному моменту левых геометрических поворотов или спину<sup>8</sup>

$$M_{\beta}^{\alpha} = -\frac{\partial {}_l S^{\alpha}}{\partial {}_l \varphi^{\beta}}.$$

Для него левый квантовый постулат (17) записывается так:

$$\frac{\partial {}_l \psi^K}{\partial {}_l \varphi^{\beta}} = -\frac{1}{\hbar} \cdot {}_l C^K_{K_1 \alpha} \cdot M_{\beta}^{\alpha} \cdot {}_l \psi^{K_1}.$$

И, в соответствии с нашим определением,

$$\hat{M}_{\beta} = {}_l C^K_{K_1 \alpha} \cdot M_{\beta}^{\alpha}$$

– это оператор собственного момента или оператор спина лептона.

Полагая

$$M_{\beta}^{\alpha} = \frac{\hbar}{2} \delta^{\alpha}_{\beta},$$

перейдем к оператору спина в следующем виде:

$$\hat{s}_{\beta} \equiv \hat{M}_{\beta} = \frac{\hbar}{2} {}_l C^K_{K_1 \beta}.$$

В соответствии с Разделом VI.2 структурные матрицы  ${}_l C^K_{K_1 \beta}$  во втором сжатом представлении связаны с матрицами Паули  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  следующим образом:

$${}_l C^K_{K_1 32} = i \begin{vmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{vmatrix} = i \sigma_1,$$

$${}_l C^K_{K_1 13} = i \begin{vmatrix} & & -i \\ & & \\ i & & \end{vmatrix} = i \sigma_2,$$

$${}_l C^K_{K_1 21} = i \begin{vmatrix} -1 & & \\ & & \\ & & 1 \end{vmatrix} = i \sigma_3.$$

После использования этих матриц и переобозначения индексов получим выражения для компонент оператора спина

$$\hat{s}_1 = i \frac{\hbar}{2} \sigma_1, \quad \hat{s}_2 = i \frac{\hbar}{2} \sigma_2, \quad \hat{s}_3 = i \frac{\hbar}{2} \sigma_3.$$

Для них выполняются следующие правила умножения:

$$\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 = \frac{\hbar}{2} \hat{s}_3, \quad \hat{s}_3 \cdot \hat{s}_1 = \frac{\hbar}{2} \hat{s}_2, \quad \hat{s}_2 \cdot \hat{s}_3 = \frac{\hbar}{2} \hat{s}_1.$$

## 2. Релятивистский спин

Специальная теория относительности рассматривает четырехмерное пространство, содержащее три геометрические координаты 1, 2, 3 и координату времени 4. Поэтому в специальной теории относительности к трем геометрическим плоскостям 21, 13, 32 добавляются три пространственно-временные плоскости 14, 42, 34. В каждой из указанных плоскостей действует группа поворотов. Повороты в плоскостях 21, 13, 32 составляют группу геометрических поворотов или, другими словами, группу тригонометрических поворотов, а повороты в плоскостях 14, 42, 34 составляют три группы Лоренца или, другими словами, три группы гиперболических поворотов. Вместе указанные повороты составляют релятивистскую группу поворотов.

Момент это динамический параметр, являющийся инвариантом группы поворотов. В предыдущем Разделе рассматривался оператор собственного момента - оператор спина - с компонентами  $\hat{s}_{21}$ ,  $\hat{s}_{13}$ ,  $\hat{s}_{32}$  как инвариант группы геометрических поворотов. Спин с указанными компонентами оператора удобно назвать нерелятивистским (относящимся к геометрическому пространству). Однако, обращение к специальной теории относительности заставляет ввести дополнительные компоненты оператора спина  $\hat{s}_{14}$ ,  $\hat{s}_{42}$ ,  $\hat{s}_{34}$ . Спин, характеризуемый оператором со всеми шестью компонентами, назовем релятивистским.

Релятивистскому спину соответствуют

1) подалгебра левой алгебры действия, построенная на векторах

$$\begin{aligned} {}_l \mathbf{S} &= {}_l \mathbf{e}_0 {}_l S^0 + {}_l \mathbf{e}_{\alpha} {}_l S^{\alpha} + {}_l \mathbf{e}_{1324} {}_l S^{1324} = \\ &= {}_l \mathbf{e}_0 {}_l S^0 + {}_l \mathbf{e}_{21} {}_l S^{21} + {}_l \mathbf{e}_{13} {}_l S^{13} + {}_l \mathbf{e}_{32} {}_l S^{32} + \\ &+ {}_l \mathbf{e}_{14} {}_l S^{14} + {}_l \mathbf{e}_{42} {}_l S^{42} + {}_l \mathbf{e}_{34} {}_l S^{34} + {}_l \mathbf{e}_{1324} {}_l S^{1324}, \text{ и} \end{aligned}$$

2) подалгебра левой алгебры пространства-времени, построенная на векторах

$$\begin{aligned} {}_l \mathbf{x} &= {}_l \mathbf{e}_0 {}_l x^0 + {}_l \mathbf{e}_{\beta} {}_l x^{\beta} + {}_l \mathbf{e}_{1324} {}_l x^{1324} = \\ &= {}_l \mathbf{e}_0 {}_l x^0 + {}_l \mathbf{e}_{21} {}_l x^{21} + {}_l \mathbf{e}_{13} {}_l x^{13} + {}_l \mathbf{e}_{32} {}_l x^{32} + \\ &+ {}_l \mathbf{e}_{14} {}_l x^{14} + {}_l \mathbf{e}_{42} {}_l x^{42} + {}_l \mathbf{e}_{34} {}_l x^{34} + {}_l \mathbf{e}_{1324} {}_l x^{1324}, \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Необходимо отметить, что определение спина как собственного момента импульса представляется неудачным, так как момент импульса это векторное произведение импульса на плечо, которое (произведение) при определении спина не рассматривается.

здесь и далее в этом Разделе индексы  $\alpha$  и  $\beta$  пробегают значения 21, 13, 32, 14, 42, 34.

Для рассматриваемых подалгебр динамическим параметром является импульс с компонентами

$$p^\alpha_\beta = -\frac{\partial_l S^\alpha}{\partial_l x^\beta}. \quad (23)$$

Координаты  $x^\beta$  это координаты площадей  $x^{21}$ ,  $x^{13}$ ,  $x^{32}$  и  $x^{14}$ ,  $x^{42}$ ,  $x^{34}$  в плоскостях 21, 13, 32 и 14, 42, 34. От координат  $x^\beta$  перейдем к координатам тригонометрических и гиперболических углов  $\varphi^\beta$  в указанных плоскостях и, соответственно, от импульса (23) перейдем к релятивистскому моменту левых поворотов или релятивистскому спину

$$M^\alpha_\beta = -\frac{\partial_l S^\alpha}{\partial_l \varphi^\beta}.$$

Для него левый квантовый постулат (17) записывается так:

$$\frac{\partial_l \psi^K}{\partial_l \varphi^\beta} = -\frac{1}{\hbar} \cdot {}_l C^K_{K_1 \alpha} \cdot M^\alpha_\beta \cdot {}_l \psi^{K_1}.$$

И, в соответствии с нашим определением,

$$\hat{M}_\beta = {}_l C^K_{K_1 \alpha} \cdot M^\alpha_\beta$$

– это оператор собственного релятивистского момента или оператор релятивистского спина лептона.

Полагая

$$M^\alpha_\beta = \frac{\hbar}{2} \delta^{\alpha\beta},$$

перейдем к оператору релятивистского спина в следующем виде:

$$\hat{s}_\beta \equiv \hat{M}_\beta = \frac{\hbar}{2} {}_l C^K_{K_1 \beta}.$$

В соответствии с Разделом VI.1 структурные матрицы  ${}_l C^K_{K_1 \beta}$  в первом сжатом представлении связаны с матрицами Паули  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  следующим образом:

$${}_l C^K_{K_1 32} = i \begin{bmatrix} \sigma_1 & \\ & \sigma_1 \end{bmatrix} = i \sigma_1 [1],$$

$${}_l C^K_{K_1 13} = i \begin{bmatrix} \sigma_2 & \\ & \sigma_2 \end{bmatrix} = i \sigma_2 [1],$$

$${}_l C^K_{K_1 21} = i \begin{bmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{bmatrix} = i \sigma_3 [1].$$

$${}_l C^K_{K_1 41} = 1 \begin{bmatrix} -\sigma_1 & \\ & \sigma_1 \end{bmatrix} = 1 \sigma_1 [\sigma_3],$$

$${}_l C^K_{K_1 42} = 1 \begin{bmatrix} -\sigma_2 & \\ & \sigma_2 \end{bmatrix} = 1 \sigma_2 [\sigma_3],$$

$${}_l C^K_{K_1 43} = 1 \begin{bmatrix} -\sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{bmatrix} = 1 \sigma_3 [\sigma_3].$$

После подстановки этих матриц получим выражения для компонент оператора релятивистского спина

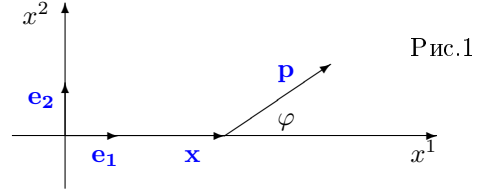
$$\begin{aligned} \hat{s}_{32} &= i \frac{\hbar}{2} \sigma_1 [1], & \hat{s}_{13} &= i \frac{\hbar}{2} \sigma_2 [1], & \hat{s}_{21} &= i \frac{\hbar}{2} \sigma_3 [1], \\ \hat{s}_{41} &= 1 \frac{\hbar}{2} \sigma_1 [\sigma_3], & \hat{s}_{42} &= 1 \frac{\hbar}{2} \sigma_2 [\sigma_3], & \hat{s}_{43} &= 1 \frac{\hbar}{2} \sigma_3 [\sigma_3]. \end{aligned}$$

Для них выполняются следующие правила умножения:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{32} \cdot \hat{s}_{13} &= \frac{\hbar}{2} \hat{s}_{21}, & \hat{s}_{21} \cdot \hat{s}_{32} &= \frac{\hbar}{2} \hat{s}_{13}, & \hat{s}_{13} \cdot \hat{s}_{21} &= \frac{\hbar}{2} \hat{s}_{32}, \\ \hat{s}_{43} \cdot \hat{s}_{32} &= \frac{\hbar}{2} \hat{s}_{42}, & \hat{s}_{41} \cdot \hat{s}_{13} &= \frac{\hbar}{2} \hat{s}_{43}, & \hat{s}_{42} \cdot \hat{s}_{21} &= \frac{\hbar}{2} \hat{s}_{41}, \\ \hat{s}_{21} \cdot \hat{s}_{41} &= \frac{\hbar}{2} \hat{s}_{42}, & \hat{s}_{13} \cdot \hat{s}_{43} &= \frac{\hbar}{2} \hat{s}_{41}, & \hat{s}_{32} \cdot \hat{s}_{42} &= \frac{\hbar}{2} \hat{s}_{32}. \end{aligned}$$

### 2.1. Релятивистский момент импульса

Релятивистский момент импульса включает в себя геометрические компоненты и пространственно-временные компоненты. В отличие от геометрического момента импульса, пространственно-временной момент импульса остается неопределенным. Здесь мы воспользуемся этим пробелом.



Предварительно напомним, что геометрический момент импульса  $\mathbf{M}_\varphi$  это векторное произведение геометрического вектора  $\mathbf{x}$  и вектора импульса  $\mathbf{p}$ , причем геометрический вектор соединяет неподвижную точку и точку приложения вектора импульса. То есть,

$$\mathbf{M}_\varphi = \mathbf{x} \times \mathbf{p}. \quad (24)$$

$\mathbf{M}_\varphi$  является инвариантом группы геометрических поворотов.

Используя Рис. 1, имеем

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \cdot x^1, \quad \mathbf{p} = \mathbf{e}_1 \cdot p \cdot \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \cdot p \cdot \sin \varphi.$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}_\varphi = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \cdot x^1 \cdot p \cdot \sin \varphi = \mathbf{e}_{12} \cdot x^1 \cdot p \cdot \sin \varphi.$$

Отсюда значение компоненты момента импульса, относящейся к плоскости 12, равно

$$M_\varphi = x^1 \cdot p \cdot \sin \varphi = x^1 \cdot m \cdot v_2.$$

Для обратного поворота используем

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_2 \cdot x^2, \quad \mathbf{p} = \mathbf{e}_1 \cdot p \cdot \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cdot p \cdot \cos \varphi.$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}_{-\varphi} = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 \cdot x^2 \cdot p \cdot \sin \varphi = -\mathbf{e}_{12} \cdot x^2 \cdot p \cdot \sin \varphi.$$

Отсюда значение компоненты момента импульса для обратного поворота в плоскости 12, равно

$$M_{-\varphi} = -x^2 \cdot p \cdot \sin \varphi = -x^2 \cdot m \cdot v_1.$$

Пространственно-временной момент импульса определим формулой, аналогичной формуле (24),

$$\mathbf{M}_\psi = \mathbf{x} \times \mathbf{p},$$

но в которой векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{p}$  отнесены к пространственно-временной плоскости.  $\mathbf{M}_\psi$  является инвариантом группы Лоренца.

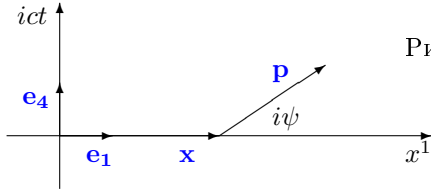


Рис.2

Используя Рис.2, имеем

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \cdot x^1, \quad \mathbf{p} = \mathbf{e}_1 \cdot p \cdot \cos(i\psi) + \mathbf{e}_4 \cdot p \cdot \sin(i\psi).$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}_\psi = (i \cdot \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_4) \cdot x^1 \cdot p \cdot \sinh(\psi) = \mathbf{e}_{14} \cdot x^1 \cdot m \cdot c.$$

Отсюда значение компоненты момента импульса, относящейся к плоскости 14, равно

$$M_\psi = x^1 \cdot p \cdot \sinh(\psi) = x^1 \cdot m \cdot c.$$

Для обратного гиперболического поворота используем

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_4 \cdot ct, \quad \mathbf{p} = \mathbf{e}_1 \cdot p \cdot \sin(i\psi) + \mathbf{e}_4 \cdot p \cdot \cos(i\psi).$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}_{-\psi} = (i \cdot \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_4) \cdot ct \cdot p \cdot \sinh(\psi) = -\mathbf{e}_{14} \cdot ct \cdot p \cdot \sinh(\psi).$$

Отсюда значение компоненты момента импульса для обратного поворота в плоскости 14, равно

$$M_{-\psi} = -ct \cdot p \cdot \sinh(\psi) = -ct \cdot m \cdot v_1.$$

### 3. Электрический заряд – собственный заряд правых геометрических поворотов

Электрическому заряду соответствуют

1) подалгебра правой алгебры действия, построенная на векторах

$${}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{e}_0 {}_rS^0 + {}_r\mathbf{e}_\alpha {}_rS^\alpha = {}_r\mathbf{e}_0 {}_rS^0 + {}_r\mathbf{e}_{21} {}_rS^{21} + {}_r\mathbf{e}_{13} {}_rS^{13} + {}_r\mathbf{e}_{32} {}_rS^{32}, \text{ и}$$

2) подалгебра правой алгебры пространства-времени, построенная на векторах

$${}_r\mathbf{x} = {}_r\mathbf{e}_0 {}_rx^0 + {}_r\mathbf{e}_\beta {}_rx^\beta = {}_r\mathbf{e}_0 {}_rx^0 + {}_r\mathbf{e}_{21} {}_rx^{21} + {}_r\mathbf{e}_{13} {}_rx^{13} + {}_r\mathbf{e}_{32} {}_rx^{32},$$

здесь и далее в этом Разделе индексы  $\alpha$  и  $\beta$  пробегают значения 21, 13, 32.

Для рассматриваемых подалгебр динамическим параметром является заряд

$$Q^\alpha_\beta = -\frac{\partial {}_rS^\alpha}{\partial {}_rx^\beta}. \quad (25)$$

От координат  ${}_rx^\beta$  перейдем к координатам  ${}_r\theta^\beta$  из условия, что такому переходу соответствует переход от заряда (25) к собственному заряду правых геометрических поворотов или к электрическому заряду

$$q^\alpha_\beta = -\frac{\partial {}_rS^\alpha}{\partial {}_r\theta^\beta}.$$

Для него правый квантовый постулат (20) записывается так:

$$\frac{\partial {}_r\psi^K}{\partial {}_r\varphi^\beta} = -\frac{1}{\hbar} \cdot {}_rC^K_{K_1\alpha} \cdot q^\alpha_\beta \cdot {}_r\psi^{K_1}.$$

И, в соответствии с нашим определением,

$$\hat{q}_\beta = {}_rC^K_{K_1\alpha} \cdot q^\alpha_\beta$$

– это оператор электрического заряда лептона.

Полагая

$$q^\alpha_\beta = e \cdot \delta^\alpha_\beta,$$

где  $e$  – физическая постоянная электромагнитного взаимодействия – электрический заряд электрона, перейдем к оператору электрического заряда в следующем виде:

$$\hat{q}_\beta = e \cdot {}_rC^K_{K_1\beta}.$$

В соответствии с Разделом V.2 структурные матрицы  ${}_rC^K_{K_1\beta}$  во втором сжатом представлении выглядят следующим образом:

$${}_rC^K_{K_132} = a \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} = aI,$$



$${}_r C^K_{K_1 13} = b \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = b I,$$

$${}_r C^K_{K_1 21} = i \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = i \mathbb{1}.$$

После использования этих матриц получим выражения для компонент оператора электрического заряда

$$\hat{q}_{32} = e \cdot a I, \quad \hat{q}_{13} = e \cdot b I, \quad \hat{q}_{21} = e \cdot i \mathbb{1}.$$

Для них выполняются следующие правила умножения:

$$\hat{q}_{32} \cdot \hat{q}_{13} = e \cdot \hat{q}_{21}, \quad \hat{q}_{21} \cdot \hat{q}_{32} = e \cdot \hat{q}_{13}, \quad \hat{q}_{13} \cdot \hat{q}_{21} = e \cdot \hat{q}_{32}.$$

#### 4. Слабый заряд – собственный заряд правой подалгебры действия

Слабому заряду соответствуют

1) подалгебра правой алгебры действия, построенная на векторах

$${}_r \mathbf{S} = {}_r \mathbf{e}_0 {}_r S^0 + {}_r \mathbf{e}_\alpha {}_r S^\alpha = {}_r \mathbf{e}_0 {}_r S^0 + {}_r \mathbf{e}_{1324} {}_r S^{1324} + {}_r \mathbf{e}_{123} {}_r S^{123} + {}_r \mathbf{e}_4 {}_r S^4, \text{ и}$$

2) подалгебра правой алгебры пространства-времени, построенная на векторах

$${}_r \mathbf{x} = {}_r \mathbf{e}_0 {}_r x^0 + {}_r \mathbf{e}_\beta {}_r x^\beta = {}_r \mathbf{e}_0 {}_r x^0 + {}_r \mathbf{e}_{1324} {}_r x^{1324} + {}_r \mathbf{e}_{123} {}_r x^{123} + {}_r \mathbf{e}_4 {}_r x^4,$$

здесь и далее в этом Разделе индексы  $\alpha$  и  $\beta$  пробегают значения 1324, 123, 4.

Указанная выше подалгебра алгебры действия играет в нашей теории электрослабого взаимодействия (см. Раздел VI. Главы 5.3) ту же роль, что группа слабого изоспина в теории Салама-Вайнберга-Глэшоу.

Для рассматриваемых подалгебр динамическим параметром является заряд

$$Q^\alpha_\beta = -\frac{\partial {}_r S^\alpha}{\partial {}_r x^\beta}. \quad (26)$$

От координат  ${}_r x^\beta$  перейдем к координатам  ${}_r \theta^\beta$  из условия, что такому переходу соответствует переход от заряда (26) к собственному заряду указанной правой подалгебры действия или к слабому заряду

$$g^\alpha_\beta = -\frac{\partial {}_r S^\alpha}{\partial {}_r \theta^\beta}.$$

Для него правый квантовый постулат (20) записывается так:

$$\frac{\partial {}_r \psi^K}{\partial {}_r \theta^\beta} = -\frac{1}{\hbar} \cdot {}_r C^K_{K_1 \alpha} \cdot g^\alpha_\beta \cdot {}_r \psi^{K_1}.$$

И, в соответствии с нашим определением,

$$\hat{g}_\beta = {}_r C^K_{K_1 \alpha} \cdot g^\alpha_\beta$$

– это оператор слабого заряда лептона.

Полагая, что слабый заряд  $g^\alpha_\beta$  состоит из следующих компонент:

$$g^{1324}_{1324} = g_z \cdot \delta^{1324}_{1324}, \quad g^{123}_{123} = g_w \cdot \delta^{123}_{123}, \quad g^4_4 = g_w \cdot \delta^4_4,$$

где  $g_z$  и  $g_w$  – физические постоянные слабого взаимодействия, перейдем к следующим компонентам оператора слабого заряда лептона

$$\hat{q}_{1324} = g_z \cdot {}_r C^K_{K_1 1324}, \quad \hat{q}_{123} = g_w \cdot {}_r C^K_{K_1 123}, \quad \hat{q}_4 = g_w \cdot {}_r C^K_{K_1 4}.$$

В соответствии с Разделом III.1 структурные матрицы  ${}_r C^K_{K_1 \beta}$  выглядят следующим образом:

$${}_r C^K_{K_1 1324} = i \begin{pmatrix} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \\ & & \mathbb{1} \\ & & & \mathbb{1} \end{pmatrix},$$

$${}_r C^K_{K_1 123} = 1 \begin{pmatrix} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \\ & & \mathbb{1} \\ & & & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

$${}_r C^K_{K_1 4} = i \begin{pmatrix} & & \mathbb{1} \\ & & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & & \\ \mathbb{1} & & \end{pmatrix}.$$

После использования этих матриц получим следующие правила умножения для компонент оператора слабого заряда:

$$\hat{g}_{1324} \cdot \hat{g}_{123} = g_z \cdot \hat{g}_4, \quad \hat{g}_4 \cdot \hat{g}_{1324} = g_z \cdot \hat{g}_{123}, \\ \hat{g}_4 \cdot \hat{g}_{123} = \frac{g_w \cdot g_w}{g_z} \cdot \hat{g}_{1324}.$$

## VIII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Алгеброй действия и пространства-времени релятивистских лептонов является алгебра Клиффорда, образующее пространство которой подобно четырехмерному пространству-времени СТО.
- Алгебра третьей компоненты электрического заряда лептонов – это подалгебра правой алгебры действия белых лептонов, построенная на базисных векторах

$${}_r \varepsilon_0 = 1, \quad {}_r \varepsilon_{21} = i.$$

- Алгебра электрического заряда лептонов – это подалгебра правой алгебры действия белых лептонов, построенная на базисных векторах

$$r\mathcal{E}_0, \quad r\mathcal{E}_{21}, \quad r\mathcal{E}_{13}, \quad r\mathcal{E}_{32}.$$

- Алгебра слабого заряда лептонов – это подалгебра правой алгебры действия белых лептонов, построенная на базисных векторах

$$r\mathcal{E}_0, \quad r\mathcal{E}_4, \quad r\mathcal{E}_{123}, \quad r\mathcal{E}_{1324}.$$

- Алгебра нерелятивистского спина – это подалгебра левой алгебры действия лептонов, построенная на базисных векторах

$$l\mathcal{E}_0, \quad l\mathcal{E}_{21}, \quad l\mathcal{E}_{13}, \quad l\mathcal{E}_{32}.$$

- Алгебра релятивистского спина – это подалгебра левой алгебры действия лептонов, построенная на базисных векторах

$$l\mathcal{E}_0, \quad l\mathcal{E}_{21}, \quad l\mathcal{E}_{13}, \quad l\mathcal{E}_{32}, \\ l\mathcal{E}_{14}, \quad l\mathcal{E}_{42}, \quad l\mathcal{E}_{34}, \quad l\mathcal{E}_{1324}.$$

- Структурные матрицы алгебры действия лептонов  $l\mathbb{C}_w$  с четырехмерным образующим пространством, число измерений которой равно шестнадцати, являются обобщением матриц Дирака. Число указанных структурных матриц равно шестнадцати, как и число матриц Дирака. Однако эти структурные матрицы существенно отличаются от шестнадцати матриц Дирака прежде всего тем, что их размерность в комплексном представлении равна  $8 \times 8$  в то время, как размерность шестнадцати матриц Дирака в комплексном представлении равна  $4 \times 4$ .

- Постулируется следующая организация векторов действия сопутствующих верхних и нижних фундаментальных частиц, принадлежащих одной группе поколений:

1) вектор действия подалгебры  $\mathbb{S}$  относится к двум сопутствующим фундаментальным частицам – нижней и верхней – одного поколения;

2) вектор действия подалгебры  $\mathbb{S}$ , в которой за основное направление принят базисный вектор  $\mathbf{e}_{21}$ , относится к двум сопутствующим фундаментальным частицам – нижней и верхней – первого поколения;

3) вектор действия подалгебры  $\mathbb{S}$ , в которой за основное направление принят базисный вектор  $\mathbf{e}_{13}$ , относится к двум сопутствующим фундаментальным частицам – нижней и верхней – второго поколения;

4) вектор действия подалгебры  $\mathbb{S}$ , в которой за основное направление принят базисный вектор  $\mathbf{e}_{32}$ , относится к двум сопутствующим фундаментальным частицам – нижней и верхней – третьего поколения.

- Первое сжатое представление правой алгебры действия белых лептонов приводит к отождествлению матрицы  $rC_{K34}^L$  с единичной матрицей  $rC_{K0}^L = \delta_K^L$ .

- Структурные матрицы первого сжатого представления левой алгебры действия белых лептонов совпадают с матрицами Дирака.

## Глава 4.4 Белые лептоны. Обобщение уравнения Дирака

### I. ВВЕДЕНИЕ. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Отправной точкой для дальнейших рассуждений будет уравнение Дирака. Стремление соединить это уравнение с изложенным нами алгебраическим подходом к квантовым явлениям заставляет нас поставить в соответствие волновым функциям фундаментальных частиц векторы определенного вида.

Фундаментальные частицы – это такие элементарные частицы, внутренняя структура которых в настоящее время для нас недоступна как в экспериментальном, так и в теоретическом отношении. Выделение частиц по указанному признаку скорее всего не является случайным. А за этим признаком, надо полагать, стоит некая общность фундаментальных частиц. Одной из фундаментальных частиц является электрон.

Начнем с того, что приведем уравнение Дирака, предназначенное прежде всего для описания поведения электрона:

$$\left( \gamma^{i\alpha} \partial_i + \frac{m_e c}{\hbar} \gamma^{0\alpha} \right) \cdot \psi^\beta = 0. \quad (1)$$

Здесь величина  $m_e$  есть масса электрона,  $c$  – скорость света,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $\gamma^0$  – единичная матрица

$$\gamma^0 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array},$$

$\gamma^i$  – четыре образующих матрицы алгебры Дирака

$$\gamma^1 = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \gamma^2 = i \begin{array}{|c|c|} \hline & i \\ \hline & -i \\ \hline i & \\ \hline \end{array},$$

$$\gamma^3 = i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \gamma^4 = -i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}.$$

Волновая функция представлена столбцом из четырех комплексных компонент

$$\psi^\beta \sim \psi = \begin{array}{|c|} \hline \psi^1 \\ \hline \psi^2 \\ \hline \psi^3 \\ \hline \psi^4 \\ \hline \end{array}, \quad (2)$$

где

$$\begin{array}{l} \psi^1 = \varphi^1 + i \chi^1, \quad \psi^2 = \varphi^2 + i \chi^2, \\ \psi^3 = \varphi^3 + i \chi^3, \quad \psi^4 = \varphi^4 + i \chi^4. \end{array} \quad (3)$$

Операторы  $\partial_i$  есть операторы частного дифференцирования по геометрическим координатам  $x^1, x^2, x^3$  и времени  $x^4 = ct$ :

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \sim \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^4} = \frac{\partial}{c \partial t} \right).$$

Приведенные уравнения представляют собой уравнение Дирака в комплексной форме. Индексы  $\alpha, \beta$  принимают значения 1, 2, 3, 4 в соответствии с нумерацией компонент волновой функции. Однако нужно иметь в виду, что используемая здесь нумерация не имеет отношения к той нумерации компонент, которая была введена в алгебре действия.

Кроме комплексной формы, уравнение Дирака может быть записано в *спинорной* форме. Для этого необходимо столбец  $\psi$  из четырех компонент заменить на столбец из двух компонент

$$\psi = \begin{array}{|c|} \hline \xi \\ \hline \eta \\ \hline \end{array}. \quad (4)$$

Каждая из компонент  $\xi$  и  $\eta$  является двухкомпонентной функцией

$$\xi = \begin{array}{|c|} \hline \varphi^1 + i \chi^1 \\ \hline \varphi^2 + i \chi^2 \\ \hline \end{array},$$

$$\eta = \begin{array}{|c|} \hline \varphi^3 + i \chi^3 \\ \hline \varphi^4 + i \chi^4 \\ \hline \end{array}.$$

Каждая из величин  $\xi$  и  $\eta$  определяется как *спинор*. При этом волновая функция выступает как *биспинор*. Спинорной форме уравнения Дирака соответствуют матрицы Дирака размерности  $2 \times 2$ , в которых использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \sigma^1 = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \sigma^2 = \begin{array}{|c|c|} \hline & -i \\ \hline i & \\ \hline \end{array}, \quad \sigma^3 = \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}.$$

После обозначения указанных блоков получим матрицы Дирака в следующем виде:

$$\gamma^0 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array},$$

$\gamma^i$  – четыре образующих матрицы алгебры Дирака

$$\gamma^1 = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^1 \\ \hline \sigma^1 & \\ \hline \end{array}, \quad \gamma^2 = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^2 \\ \hline \sigma^2 & \\ \hline \end{array},$$

$$\gamma^3 = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^3 \\ \hline \sigma^3 & \\ \hline \end{array}, \quad \gamma^4 = -i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}.$$

Спинорная форма уравнения Дирака в матричном виде:

$$\left( -i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \partial_4 + i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^a \\ \hline \sigma^a & \\ \hline \end{array} \partial_a + \frac{m_e c}{\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \right) \left| \xi \right| = 0.$$

Приведенное уравнение Дирака и входящие в него величины, в том числе и волновую функцию  $\psi$ , отнесем к электрону. Далее воспользуемся алгебраическим подходом для того, чтобы раскрыть содержание волновой функции электрона.

## II. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ЭЛЕКТРОНА

Уравнение структуры правой контравариантной алгебры действия  ${}_r\mathcal{S}$  можно свести к уравнению (57) Главы 3.3. Раздел IX.3., которое названо обобщенным уравнением Дирака. Запишем его в следующем виде:

$$\left( {}_l C^{IA_1}_{B_1} \cdot \partial_I + \frac{m c}{\hbar} \cdot {}_l C^{0A_1}_{B_1} \right) \psi^{B_1} = 0.$$

Суммирование по индексу  $I$  ограничим четырехмерным пространством-временем. Получим

$$\left( {}_l C^{iA_1}_{B_1} \cdot \partial_i + \frac{m c}{\hbar} \cdot {}_l C^{0A_1}_{B_1} \right) \psi^{B_1} = 0.$$

Установим структурные матрицы, при которых это уравнение *совпадает* с уравнением Дирака (1).

### 1. Комплексное представление

Уравнение Дирака может быть однозначно переложено на величины, принятые нами в алгебраическом подходе:

$$\left( {}_l C^{iA_1}_{B_1} \partial_i + \frac{m_e c}{\hbar} {}_l C^{0A_1}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0.$$

Здесь  ${}_l C^{0A_1}_{B_1}$  – единичная матрица, а  ${}_l C^{iA_1}_{B_1}$  – образующие структурные матрицы, левой ковариантной алгебры Клиффорда<sup>1</sup> в первом сжатом комплексном представлении.<sup>2</sup> Эти матрицы совпадают с вышеприведенными матрицами Дирака, однако алгебраический подход позволяет установить соответствие строк и столбцов матриц координатам вектора алгебры Клиффорда. В соответствии с Разделом V.1. Главы 4.3. имеем следующие матрицы  ${}_l C^{iA_1}_{B_1}$  и  ${}_l C^{0A_1}_{B_1}$ <sup>3</sup>:

$${}_l C^{0A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \end{array},$$

$${}_l C^{1A_1}_{B_1} = i \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \end{array},$$

$${}_l C^{2A_1}_{B_1} = i \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline & i \\ \hline -i & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \end{array},$$

$${}_l C^{3A_1}_{B_1} = i \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \end{array},$$

$${}_l C^{4A_1}_{B_1} = -i \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \end{array}.$$

Таким образом, индексы  $A_1, B_1$  для комплексного представления принимают значения (13, 0, 2, 123). Этим матрицам соответствует вектор  $\psi$  алгебры  $\mathbb{C}_3$ , на который проецируется вектор алгебры  $\mathbb{C}_4$  в первом сжатом комплексном представлении<sup>4</sup>

$$\psi = \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_{123} \psi^{123}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= i \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^2 &= i \psi^1 + \psi^2, \\ \psi^0 &= i \psi^{21} + \psi^0, & \psi^{123} &= i \psi^3 + \psi^{123}. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом этого столбец из компонент (комплексных координат) вектора  $\psi$  можно записать так:

$$\psi^\beta \sim \psi = \begin{array}{|c|} \hline \psi^{13} \\ \psi^0 \\ \psi^2 \\ \psi^{123} \\ \hline \end{array}. \quad (7)$$

Сравнивая выражения (2) и (7), а также (3) и (6), получим следующее соответствие между действительными координатами волновой функции Дирака и координатами вектора алгебры Клиффорда:

$$\begin{aligned} \psi^{32} &= \varphi^1, & \psi^{21} &= \varphi^2, & \psi^1 &= \varphi^3, & \psi^3 &= \varphi^4, \\ \psi^{13} &= \chi^1, & \psi^0 &= \chi^2, & \psi^2 &= \chi^3, & \psi^{123} &= \chi^4. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Другими словами, левой ковариантной алгебры пространства-времени белых лептонов  ${}_l \mathcal{X}_w^*$

<sup>2</sup> См. Глава 4.3. Раздел V.1.

<sup>3</sup> Матрицы  ${}_l C^{IA_1}_{B_1}$  можно установить, используя матрицы  ${}_l C^{B_1}_{A_1 I}$ , исходя из того, что они связаны операцией транспонирования, поэтому антисимметричные матрицы меняют знак, а симметричные матрицы не меняются.

<sup>4</sup> См. Раздел V Главы 4.3.

## 2. Кватернионное представление

Обратимся теперь к кватернионному представлению левой ковариантной алгебры Клиффорда.<sup>5</sup> Для него единичная матрица  ${}_i C^{0A_1}_{B_1}$  и образующие структурные матрицы  ${}_i C^{iA_1}_{B_1}$  в первом сжатом кватернионном представлении совпадают с вышеприведенными матрицами Дирака в спинорном представлении:

$${}_i C^{0A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 123 \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{1A_1}_{B_1} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ \hline & -\sigma^1 \\ \hline \sigma^1 & \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 123 \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{2A_1}_{B_1} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ \hline & -\sigma^2 \\ \hline \sigma^2 & \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 123 \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{3A_1}_{B_1} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ \hline & -\sigma^3 \\ \hline \sigma^3 & \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 123 \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{4A_1}_{B_1} = -i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 123 \end{array} \end{array} .$$

Таким образом, индексы  $A_1, B_1$  в кватернионном представлении принимают значения  $(0, 123)$ . Этим матрицам соответствует вектор  $\psi$  алгебры  $\mathbb{C}_3$ , на который проецируется вектор алгебры  $\mathbb{C}_4$  в первом сжатом кватернионном представлении

$$\psi = \Psi^0 \varepsilon_0 + \Psi^{123} \varepsilon_{123} ,$$

где кватернионные координаты имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a I \psi^{32} + b I \psi^{13} + i \psi^{21} + \psi^0 , \\ \Psi^{123} &= a I \psi^1 + b I \psi^2 + i \psi^3 + \psi^{123} . \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом этого столбец из кватернионных координат вектора  $\psi$  можно записать так:

$$\psi \sim \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{123} \end{array} . \quad (9)$$

Сравнивая этот столбец с выражением (4), получим следующее соответствие между спинорами и кватернионными координатами вектора алгебры Клиффорда

$$\xi = \Psi^0 , \quad \eta = \Psi^{123} .$$

## 3. Действительное представление

В заключение отметим, что уравнение Дирака может быть записано в действительном представлении алгебры Клиффорда. Эта форма уравнения Дирака, неизвестная ранее, следует из применяемого нами алгебраического подхода:

$$\left( {}_i C^{iA_1}_{B_1} \partial_i + \frac{m_e c}{\hbar} {}_i C^{0A_1}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0 .$$

Для действительного представления индексы  $A_1, B_1$  принимают значения

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123) ,$$

${}_i C^{0A_1}_{B_1}$  – единичная матрица, а  ${}_i C^{iA_1}_{B_1}$  – образующие структурные матрицы, ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом действительном представлении<sup>6</sup>:

$${}_i C^{0A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} 1 & \\ & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & 1 \\ & 1 \\ & 1 \\ & 1 \end{array} \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{1A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & -1 \\ & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & -1 \\ 1 & \\ -1 & \\ 1 & \\ -1 & \end{array} \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{2A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & -1 \\ & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & 1 \\ & 1 \\ 1 & \\ 1 & \\ -1 & \\ -1 & \end{array} \end{array} \end{array} ,$$

<sup>5</sup> См. Раздел VI.1.1. Главы 4.3.

<sup>6</sup> См. Раздел VI.1. Глава 4.3.

$${}_i C^{3A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & & -1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & -1 & & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline 2 & 1 & & & \\ \hline 3 & & 1 & & \\ \hline 123 & & -1 & & \\ \hline \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{4A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 14 & 34 & 234 & 124 \\ & 42 & 1324 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|} \hline & -1 \\ \hline & 1 & & -1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & -1 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline 3 & & -1 & \\ \hline 123 & & 1 & \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

Им соответствует волновая функция электрона

$$\psi = \varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_1 \psi^1 + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_3 \psi^3 + \varepsilon_{123} \psi^{123},$$

которая может быть представлена столбцом из действительных координат

$$\psi = \begin{array}{|c} \psi^{32} \\ \psi^{13} \\ \psi^{21} \\ \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^{123} \end{array}.$$

Действительная форма уравнения Дирака может оказаться полезной при выполнении численных расчетов.

### III. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ МЮОНА И ТАУ-ЛЕПТОНА

Мы определили координаты вектора действия (волновой функции) одной из фундаментальных частиц – электрона. Однако, помимо электрона, известны еще две фундаментальные частицы, ничем не отличающиеся<sup>7</sup> от электрона, за исключением массы, – мюон ( $\mu$ ) и тау-лептон ( $\tau$ ). Считается, что поведение

мюона и тау-лептона, так же как и электрона, описывается уравнением Дирака (1), в котором вместо массы  $m_e$  фигурирует, соответственно, масса мюона  $m_\mu$  или масса тау-лептона  $m_\tau$ . С теоретической точки зрения наличие такого подобия частиц является загадкой. Попробуем рассмотреть эту проблему в рамках нашего алгебраического подхода. Пусть координаты вектора действия электрона известны. Тогда какими должны быть координаты еще двух векторов действия (соответствующих мюону и тау-лептону), отличных друг от друга, но для которых вид уравнения Дирака остается неизменным? Алгебраический подход дает на этот вопрос единственный ответ.

В Разделе IV. Главы 4.2. была отмечена особенность базисного вектора  $\varepsilon_{21}$ . Этот вектор является ключевым в организации комплексного представления. Именно этому вектору ставится в соответствие мнимая единица  $i$ . Имея в виду это соответствие, мы назвали направление  $\varepsilon_{21}$  основным. Однако с алгебраической точки зрения направления  $\varepsilon_{13}$  и  $\varepsilon_{32}$  эквивалентны направлению  $\varepsilon_{21}$  и также могут быть приняты за основное. Для того чтобы отличить эти случаи от предыдущего, мы договорились обозначать мнимую единицу через  $j$ , если за основное направление принят вектор  $\varepsilon_{13}$ , и обозначать мнимую единицу через  $k$ , если за основное направление принят вектор  $\varepsilon_{32}$ . Переход от одного основного направления к другому мы связываем с циклической перестановкой базисных векторов  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

Итак, мы приняли, что порядку базисных векторов  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  соответствует базисный вектор основного направления  $\varepsilon_{21}$ . Этот способ организации вектора алгебры Клиффорда мы поставили в соответствие электрону.

Если же мы изберем иной порядок базисных векторов  $\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ , то базисным вектором основного направления будет  $\varepsilon_{13}$ . Такой способ организации вектора алгебры Клиффорда мы поставим в соответствие мюону.

Алгебру Клиффорда с порядком базисных векторов  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1$  и базисным вектором основного направления  $\varepsilon_{32}$  мы поставим в соответствие тау-лептону.

Рассмотрим два последних случая.

#### 1. Волновая функция и уравнение Дирака для мюона

##### 1.1. Действительное представление

На основании ранее сказанного волновая функция мюона записывается так:

$$\psi = \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_3 \psi^3 + \varepsilon_1 \psi^1 + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_{312} \psi^{312},$$

<sup>7</sup> по сегодняшним представлениям

а также может быть представлена столбцом из действительных координат

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^{21} \\ \psi^{32} \\ \psi^{13} \\ \psi^0 \\ \psi^3 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^{312} \end{pmatrix}.$$

Уравнение Дирака для мюона в действительном представлении алгебры Клиффорда выглядит так:

$$\left( {}_i C^{iA_1}_{B_1} \partial_i + \frac{m_\mu c}{\hbar} {}_i C^{0A_1}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0.$$

Здесь для действительного представления индексы  $A_1, B_1$  принимают значения

$$(21, 32, 13, 0, 3, 1, 2, 312),$$

${}_i C^{0A_1}_{B_1}$  – единичная матрица, а  ${}_i C^{iA_1}_{B_1}$  – образующие структурные матрицы левой ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом действительном представлении, направление 13 принято за основное:

$${}_i C^{0A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 32 \quad 0 \quad 1 \quad 312 \\ 21 \quad 13 \quad 3 \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 21 \\ 32 \\ 13 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 312 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array},$$

$${}_i C^{1A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 32 \quad 0 \quad 1 \quad 312 \\ 21 \quad 13 \quad 3 \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 21 \\ 32 \\ 13 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 312 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & -1 & \\ \hline & -1 & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array},$$

$${}_i C^{2A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 32 \quad 0 \quad 1 \quad 312 \\ 21 \quad 13 \quad 3 \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 21 \\ 32 \\ 13 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 312 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & & -1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & -1 & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array},$$

$${}_i C^{3A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 32 \quad 0 \quad 1 \quad 312 \\ 21 \quad 13 \quad 3 \quad 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 21 \\ 32 \\ 13 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 312 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & -1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 312 & -1 & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array},$$

$${}_i C^{4A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 34 \quad 24 \quad 124 \quad 314 \\ 41 \quad 3214 \quad 324 \quad 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 21 \\ 32 \\ 13 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 312 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline & -1 & \\ \hline 2 & & \\ \hline 312 & 1 & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}.$$

### 1.2. Комплексное представление

Волновая функция мюона в комплексном представлении записывается так:

$$\psi = \varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_1 \psi^1 + \varepsilon_{312} \psi^{312},$$

где

$$\begin{aligned} \psi^{32} &= j \psi^{21} + \psi^{32}, & \psi^0 &= j \psi^{13} + \psi^0, \\ \psi^1 &= j \psi^3 + \psi^1, & \psi^{312} &= j \psi^2 + \psi^{312}. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом этого столбец из комплексных координат вектора  $\psi$  для мюона можно записать так:

$$\psi \sim \begin{pmatrix} \psi^{32} \\ \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^{312} \end{pmatrix}.$$

Уравнение Дирака для мюона в комплексном представлении алгебры Клиффорда выглядит так:

$$\left( {}_i C^{iA_1}_{B_1} \partial_i + \frac{m_\mu c}{\hbar} {}_i C^{0A_1}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0.$$

Здесь для комплексного представления индексы  $A_1, B_1$  принимают значения

$$(32, 0, 1, 312),$$

${}_i C^{0A_1}_{B_1}$  – единичная матрица, а  ${}_i C^{iA_1}_{B_1}$  – образующие структурные матрицы, ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом комплексном представлении, направление 13 принято за основное:

$${}_i C^{0A_1 B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} 0 \\ 32 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 312 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & & \begin{array}{c} 32 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 312 \end{array} \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{1A_1 B_1} = j \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} 0 \\ 32 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 312 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} j \\ -j \end{array} & \begin{array}{c} j \\ -j \end{array} & \begin{array}{c} 32 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} j \\ j \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 312 \end{array} \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{2A_1 B_1} = j \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} 0 \\ 32 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 312 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 32 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 312 \end{array} \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{3A_1 B_1} = j \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} 0 \\ 32 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 312 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 32 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 312 \end{array} \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{4A_1 B_1} = -j \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} 0 \\ 32 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 312 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 32 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 312 \end{array} \end{array} \end{array} .$$

### 1.3. Кватернионное представление

Волновая функция мюона в кватернионном представлении записывается следующим образом:

$$\psi = \Psi^0 \varepsilon_0 + \Psi^{312} \varepsilon_{312} ,$$

где кватернионные координаты имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a J \psi^{21} + b J \psi^{32} + j \psi^{13} + \psi^0 , \\ \Psi^{312} &= a J \psi^3 + b J \psi^1 + j \psi^2 + \psi^{312} . \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом этого столбец из кватернионных координат вектора  $\psi$  можно записать так:

$$\psi \sim \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{312} \end{array} \right| . \end{array} \quad (12)$$

Уравнение Дирака для кватернионных координат имеет вид

$$\left( {}_i C^{iA_1 B_1} \partial_i + \frac{m_\mu c}{\hbar} {}_i C^{0A_1 B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0 .$$

Здесь для кватернионного представления индексы  $A_1, B_1$  принимают значения

$$(0, 312) ,$$

${}_i C^{0A_1 B_1}$  – единичная матрица, а  ${}_i C^{iA_1 B_1}$  – образующие структурные матрицы ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом кватернионном представлении, направление 13 принято за основное:

$${}_i C^{0A_1 B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} 0 \\ 312 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ 312 \end{array} \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{1A_1 B_1} = j \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} 0 \\ 312 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} -\mu^1 \\ \mu^1 \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ 312 \end{array} \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{2A_1 B_1} = j \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} 0 \\ 312 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} -\mu^2 \\ \mu^2 \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ 312 \end{array} \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{3A_1 B_1} = j \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} 0 \\ 312 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} -\mu^3 \\ \mu^3 \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ 312 \end{array} \end{array} \end{array} ,$$

$${}_i C^{4A_1 B_1} = -j \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} 0 \\ 312 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ 312 \end{array} \end{array} \end{array} .$$

Здесь введены переобозначенные матрицы Паули:

$$\mathbb{1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & & \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & & \end{array} \end{array} , \quad \mu^1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} -j \\ j \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} -j \\ j \end{array} & & \end{array} \end{array} , \quad \mu^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & & \end{array} \end{array} , \quad \mu^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & & \end{array} \end{array} .$$

Отсюда уравнение Дирака для мюона в матричном виде выглядит так:

$$\left( -j \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & & \end{array} \end{array} \partial_4 + j \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} -\mu^a \\ \mu^a \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} -\mu^a \\ \mu^a \end{array} & & \end{array} \end{array} \partial_a + \frac{m_\mu c}{\hbar} \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & & \end{array} \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{312} \end{array} \right| = 0 .$$

## 2. Волновая функция и уравнение Дирака для тау-лептона

### 2.1. Действительное представление

Волновая функция для тау-лептона в действительном представлении

$$\psi = \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_3 \psi^3 + \varepsilon_1 \psi^1 + \varepsilon_{231} \psi^{231} ,$$

может быть представлена столбцом из действительных координат

$$\psi = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \psi^{13} \\ \psi^{21} \\ \psi^{32} \\ \psi^0 \\ \psi^2 \\ \psi^2 \\ \psi^1 \\ \psi^{231} \end{array} \right| . \end{array}$$



Уравнение Дирака для тау-лептона в действительном представлении имеет вид:

$$\left( {}_i C^{iA_1}_{B_1} \partial_i + \frac{m_\tau c}{\hbar} {}_i C^{0A_1}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0.$$

Здесь для действительного представления индексы  $A_1, B_1$  принимают значения

$$(13, 21, 32, 0, 2, 3, 1, 231),$$

${}_i C^{0A_1}_{B_1}$  – единичная матрица, а  ${}_i C^{iA_1}_{B_1}$  – образующие структурные матрицы левой ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом действительном представлении, направление 32 принято за основное:

- ${}_i C^{0A}_B$  – единичная матрица

$${}_i C^{0A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 21 & 0 & 3 & 231 \\ & 13 & 32 & 2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 21 \\ 32 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 231 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array},$$

- ${}_i C^{iA_1}_{B_1}$  – образующие матрицы

$${}_i C^{1A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 21 & 0 & 3 & 231 \\ & 13 & 32 & 2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 21 \\ 32 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 231 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{2A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 21 & 0 & 3 & 231 \\ & 13 & 32 & 2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 21 \\ 32 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 231 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & -1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & -1 & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{3A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 21 & 0 & 3 & 231 \\ & 13 & 32 & 2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 21 \\ 32 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 231 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & -1 & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{4A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 24 & 14 & 314 & 234 \\ & 43 & 2134 & 214 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 21 \\ 32 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 231 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & -1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

## 2.2. Комплексное представление

Волновая функция для тау-лептона в комплексном представлении имеет вид

$$\psi = \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_3 \psi^3 + \varepsilon_{231} \psi^{231},$$

где

$$\begin{aligned} \psi^{21} &= k \psi^{13} + \psi^{21}, & \psi^0 &= k \psi^{32} + \psi^0, \\ \psi^3 &= k \psi^2 + \psi^3, & \psi^{231} &= k \psi^1 + \psi^{231}. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение Дирака для тау-лептона в комплексном представлении алгебры Клиффорда выглядит так:

$$\left( {}_i C^{iA_1}_{B_1} \partial_i + \frac{m_\tau c}{\hbar} {}_i C^{0A_1}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0.$$

Здесь для комплексного представления индексы  $A_1, B_1$  принимают значения

$$(21, 0, 3, 231).$$

${}_i C^{0A_1}_{B_1}$  – единичная матрица, а  ${}_i C^{iA_1}_{B_1}$  – образующие структурные матрицы, ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом комплексном представлении, направление 32 принято за основное:

$${}_i C^{0A_1}_{B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 21 & 0 & 231 \\ & 21 & 3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 21 \\ 0 \\ 3 \\ 231 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{1A_1}_{B_1} = k \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 21 & 0 & 231 \\ & 21 & 3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 21 \\ 0 \\ 3 \\ 231 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{2A_1}_{B_1} = k \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 21 & 0 & 231 \\ & 21 & 3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 21 \\ 0 \\ 3 \\ 231 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{3A_1}_{B_1} = k \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 21 \end{array} & \begin{array}{c} 231 \\ 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} k \\ -k \\ k \end{array} & \begin{array}{c} 21 \\ 0 \\ 3 \\ 231 \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{4A_1}_{B_1} = -k \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 21 \end{array} & \begin{array}{c} 231 \\ 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 21 \\ 0 \\ 3 \\ 231 \end{array} \end{array}.$$

### 2.3. Кватернионное представление

Волновая функция тау-лептона в кватернионном представлении записывается следующим образом:

$$\psi = \Psi^0 \varepsilon_0 + \Psi^{231} \varepsilon_{231},$$

где кватернионные координаты имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a K \psi^{13} + b K \psi^{21} + k \psi^{32} + \psi^0, \\ \Psi^{231} &= a K \psi^2 + b K \psi^3 + k \psi^1 + \psi^{231}. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом этого столбец из кватернионных координат вектора  $\psi$  можно записать так:

$$\psi \sim \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{231} \end{array}. \quad (15)$$

Уравнение Дирака для кватернионных координат имеет вид

$$\left( {}_i C^{iA_1}_{B_1} \partial_i + \frac{m_\tau c}{\hbar} {}_i C^{0A_1}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0.$$

Здесь для кватернионного представления индексы  $A_1, B_1$  принимают значения

$$(0, 231),$$

${}_i C^{0A_1}_{B_1}$  – единичная матрица, а  ${}_i C^{iA_1}_{B_1}$  – образующие структурные матрицы в первом сжатом кватернионном представлении, направление 32 принято за основное:

$${}_i C^{0A_1}_{B_1} \sim \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 231 \end{array} & \begin{array}{c} 231 \\ 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 231 \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{1A_1}_{B_1} = k \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 231 \end{array} & \begin{array}{c} 231 \\ 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \tau^1 \\ \tau^1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 231 \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{2A_1}_{B_1} = k \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 231 \end{array} & \begin{array}{c} 231 \\ 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \tau^2 \\ \tau^2 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 231 \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{3A_1}_{B_1} = k \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 231 \end{array} & \begin{array}{c} 231 \\ 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -\tau^3 \\ \tau^3 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 231 \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{4A_1}_{B_1} = -k \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 231 \end{array} & \begin{array}{c} 231 \\ 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 231 \end{array} \end{array}.$$

Здесь введены переобозначенные матрицы Паули:

$$\mathbb{1} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array}, \quad \tau^1 = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array}, \quad \tau^2 = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array}, \quad \tau^3 = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -k \\ k \end{array} \end{array}.$$

Отсюда уравнение Дирака для тау-лептона в матричном виде выглядит так:

$$\left( -k \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{c} \tau^a \\ \tau^a \end{array} \end{array} \partial_4 + k \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \tau^a \\ \tau^a \end{array} & \begin{array}{c} -\tau^a \\ \tau^a \end{array} \end{array} \partial_a + \frac{m_\tau c}{\hbar} \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} \end{array} \right) \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{231} \end{array} = 0.$$

Изложенная точка зрения приводит к интересному и непонятному заключению. Циклическая перестановка базисных векторов  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  описывает волновые функции частиц разной массы, следовательно с энергетической точки зрения эти направления анизотропны.

## IV. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ – ЛЕПТОНЫ

Фундаментальные частицы электрон ( $e$ ), мюон ( $\mu$ ) и тау-лептон ( $\tau$ ) объединены в один класс элементарных частиц, которые называются *лептонами*. Для этого класса частиц характерно их неучастие в сильном взаимодействии. Экспериментально установлен удивительный факт, состоящий в том, что у каждого из указанных лептонов существует партнер, названный сопутствующим нейтрино. У электрона это – электронное нейтрино ( $\nu_e$ ), у мюона это – мюонное нейтрино ( $\nu_\mu$ ), у тау-лептона это – тау-лептонное нейтрино ( $\nu_\tau$ ). Нейтрино также являются лептонами, а связь между нейтрино и сопутствующими им лептонами настолько существенна, что пары сопутствующих лептонов объединены в группы, называемые *поколениями*. Таблица сгруппированных лептонов имеет вид

1 поколение	2 поколение	3 поколение
$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
$e$	$\mu$	$\tau$

Явление, благодаря которому лептон и сопутствующее ему нейтрино объединяются в поколение, состоит в сохранении разности числа лептонов и антилептонов каждого из поколений при взаимодействиях элементарных частиц.

Для нас будет важно следующее обстоятельство. При формулировке теории электрослабого взаимодействия лептонов рассматривается волновая функция

лептонов одного поколения (например,  $e$  и  $\nu_e$ ). Эта функция составляется волевым образом (то есть без существенного обоснования) из волновых функций этих лептонов. Точнее нужно сказать так. Столбец компонент волновой функции лептонов одного поколения складывается из компонент волновых функций каждого из лептонов этого поколения.

И теперь, имея в виду все вышесказанное, зададимся следующим вопросом: можно ли в рамках алгебраического подхода объяснить партнерство между лептонами одного поколения?

### V. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ЛЕПТОНОВ ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ

Обратимся снова к уравнению Дирака. Как указывалось ранее, волновая функция и матрицы, входящие в него, в алгебраическом подходе соответствуют первому сжатому представлению алгебры  $\mathbb{C}_w$  в ее подалгебре  $\mathbb{C}_3$ , построенной на базисных векторах

$$\epsilon_{32}, \epsilon_{13}, \epsilon_{21}, \epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_{123}.$$

При этом базисные векторы

$$\epsilon_{42}, \epsilon_{14}, \epsilon_{1324}, \epsilon_{34}, \epsilon_{134}, \epsilon_{234}, \epsilon_4, \epsilon_{124}$$

приравняются вышеуказанным базисным векторам соответственно, т.е. происходит *вырождение* компонент векторов алгебры Клиффорда. При этом размерность структурных матриц алгебры  $\mathbb{X}_w^*$  понижается вдвое и равна  $8 \times 8$  в действительном представлении,  $4 \times 4$  в комплексном представлении и  $2 \times 2$  в кватернионном представлении, что как раз и свойственно теории Дирака.

Таким образом, используя полноценную алгебру Клиффорда, мы получили нечто большее, нежели формализм Дирака. Волновая функция в общем случае содержит в два раза больше компонент, чем в теории Дирака.

Отсюда возникает вопрос: если теория Дирака при наличии вырождения компонент вектора действия описывает, допустим, электрон, то с чем необходимо связать появление дополнительных компонент при снятии вырождения?

Мы знаем, что согласно электрослабой теории электрон и электронное нейтрино представляют собой взаимосвязанный объект. Его волновая функция представляет собой столбец компонент, в котором к компонентам, относящимся к электрону, добавляются компоненты, относящиеся к нейтрину. Это очень похоже на то, как если бы мы сняли вырождение между компонентами электрона и электронного нейтрино, то есть надо попытаться использовать "лишние" компоненты волновой функции для описания электронного нейтрино, а всю волновую функцию отнести к двум частицам первого поколения – электрону и электронному нейтрину. Обобщенное квантовое уравнение, со-

ответствующее этой концепции, рассмотрим в Разделе VIII. Предварительно можно сказать следующее. При вырождении компонент волновой функции лептонов первого поколения (то есть при первом сжатии) обобщенное уравнение должно сводиться к уравнению Дирака как для электрона, так и для нейтрино. Кроме того, электрослабая теория должна строиться на основании обобщенного уравнения естественным образом, без волевого конструирования, имеющего место в настоящее время.

Принимаем следующее положение: полный вектор алгебры действия  $\mathbb{C}_w$  представляет собой волновую функцию лептонов одного поколения. Далее приведем волновую функцию лептонов первого поколения и соответствующие ей структурные матрицы, обобщающие матрицы Дирака в действительном, комплексном и кватернионном представлениях.

#### 1. Действительное представление

Волновая функция для лептонов первого поколения в действительном представлении есть суперпозиция волновых функций электрона и его нейтрино:

$$\begin{aligned} \psi = & \epsilon_{32} \psi^{32} + \epsilon_{13} \psi^{13} + \epsilon_{21} \psi^{21} + \epsilon_0 \psi^0 + \\ & + \epsilon_{42} \psi^{42} + \epsilon_{14} \psi^{14} + \epsilon_{1324} \psi^{1324} + \epsilon_{34} \psi^{34} + \\ & + \epsilon_1 \psi^1 + \epsilon_2 \psi^2 + \epsilon_3 \psi^3 + \epsilon_{123} \psi^{123} + \\ & + \epsilon_{134} \psi^{134} + \epsilon_{234} \psi^{234} + \epsilon_4 \psi^4 + \epsilon_{124} \psi^{124}, \end{aligned}$$

${}_i C^0 A_B$  – единичная матрица, а  ${}_i C^{iA}_B$  – образующие структурные матрицы в действительном представлении, где индексы  $A, B$  принимают значения

$$32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124.$$

В соответствии с Разделом III.2. Главы 4.3. имеем

$${}_i C^0 A_B = \begin{matrix} & & & & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & & & & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\ \begin{matrix} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{matrix},$$

$${}_l C^{1A}_B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 & \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 32 & & & & & & & & -1 \\ 13 & & & & & & & & 1 \\ 21 & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ \hline 42 & & & & & & & & -1 \\ 14 & & & & & & & & 1 \\ 1324 & & & & & & & & -1 \\ 34 & & & & & & & & 1 \\ \hline 1 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & \\ 123 & & & & & & & & \\ \hline 134 & & & & & & & & \\ 234 & & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & & \\ 124 & & & & & & & & \end{array} \end{array},$$

$${}_l C^{4A}_B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 & \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 32 & & & & & & & & -1 \\ 13 & & & & & & & & 1 \\ 21 & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ \hline 42 & & & & & & & & \\ 14 & & & & & & & & \\ 1324 & & & & & & & & \\ 34 & & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & \\ 123 & & & & & & & & \\ \hline 134 & & & & & & & & \\ 234 & & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & & \\ 124 & & & & & & & & \end{array} \end{array}.$$

$${}_l C^{2A}_B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 & \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 32 & & & & & & & & -1 \\ 13 & & & & & & & & -1 \\ 21 & & & & & & & & 1 \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ \hline 42 & & & & & & & & -1 \\ 14 & & & & & & & & -1 \\ 1324 & & & & & & & & 1 \\ 34 & & & & & & & & 1 \\ \hline 1 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & \\ 123 & & & & & & & & \\ \hline 134 & & & & & & & & \\ 234 & & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & & \\ 124 & & & & & & & & \end{array} \end{array},$$

$${}_l C^{3A}_B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 & \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 32 & & & & & & & & \\ 13 & & & & & & & & \\ 21 & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & \\ \hline 42 & & & & & & & & \\ 14 & & & & & & & & \\ 1324 & & & & & & & & \\ 34 & & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & \\ 123 & & & & & & & & \\ \hline 134 & & & & & & & & \\ 234 & & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & & \\ 124 & & & & & & & & \end{array} \end{array},$$

## 2. Комплексное представление

Волновая функция для лептонов первого поколения в комплексном представлении имеет вид

$$\psi = \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_{14} \psi^{14} + \varepsilon_{34} \psi^{34} + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_{123} \psi^{123} + \varepsilon_{234} \psi^{234} + \varepsilon_{124} \psi^{124},$$

где координаты (компоненты) вектора являются комплексными:

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= i \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= i \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= i \psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= i \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= i \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= i \psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= i \psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= i \psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть  ${}_l C^{0A}_B$  – единичная матрица, а  ${}_l C^{iA}_B$  – образующие структурные матрицы в комплексном представлении, где индексы  $A, B$  для комплексного представления принимают значения

$$13, 0, 14, 34, 2, 123, 234, 124.$$

В соответствии с Разделом III.2. Главы 4.3. имеем

$${}_l C^{0A}_B = 1 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 234 & \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & & & & 13 \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & 14 \\ & & & 1 & 34 \\ \hline & & & & 2 \\ & & & & 123 \\ & & & & 234 \\ & & & & 124 \end{array} \end{array},$$

$${}_i C^{1A}_B = i \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 13 & 14 \end{array} & \begin{array}{cc} 123 & 124 \\ 2 & 234 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} 1 & \\ 1 & \end{array} & \begin{array}{cc} -1 & \\ -1 & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array},$$

$${}_i C^{2A}_B = i \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 13 & 14 \end{array} & \begin{array}{cc} 123 & 124 \\ 2 & 234 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} -i & \\ i & \end{array} & \begin{array}{cc} i & \\ -i & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array},$$

$${}_i C^{3A}_B = i \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 13 & 14 \end{array} & \begin{array}{cc} 123 & 124 \\ 2 & 234 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} -1 & \\ 1 & \end{array} & \begin{array}{cc} 1 & \\ -1 & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array},$$

$${}_i C^{4A}_B = -i \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 13 & 14 \end{array} & \begin{array}{cc} 123 & 124 \\ 2 & 234 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} 1 & \\ 1 & \end{array} & \begin{array}{cc} 1 & \\ 1 & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array}.$$

### 3. Кватернионное представление

Волновая функция для лептонов первого поколения в кватернионном представлении имеет вид

$$\psi = \Psi^0 \varepsilon_0 + \Psi^{34} \varepsilon_{34} + \Psi^{123} \varepsilon_{123} + \Psi^{124} \varepsilon_{124}.$$

Здесь координаты(компоненты) вектора являются кватернионами.

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a I \psi^{32} + b I \psi^{13} + i \psi^{21} + \psi^0, \\ \Psi^{34} &= a I \psi^{42} + b I \psi^{14} + i \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= a I \psi^1 + b I \psi^2 + i \psi^3 + \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= a I \psi^{134} + b I \psi^{234} + i \psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть  ${}_i C^{0A}_B$  – единичная матрица, а  ${}_i C^{iA}_B$  – образующие структурные матрицы алгебры Клиффорда  $\mathbb{X}_w^*$  в кватернионном представлении, где индексы  $A, B$  для кватернионного представления принимают значения

$$0, 34, 123, 124.$$

В соответствии с Разделом III.2. Главы 4.3. имеем

$${}_i C^{0A}_B = I \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 13 & 14 \end{array} & \begin{array}{cc} 123 & 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \mathbb{1} & \\ & \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & \\ 34 & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 123 \\ 124 \end{array},$$

$${}_i C^{1A}_B = i \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 13 & 14 \end{array} & \begin{array}{cc} 123 & 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \sigma^1 & \\ & \sigma^1 \end{array} & \begin{array}{cc} -\sigma^1 & \\ -\sigma^1 & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array},$$

$${}_i C^{2A}_B = i \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 13 & 14 \end{array} & \begin{array}{cc} 123 & 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \sigma^2 & \\ & \sigma^2 \end{array} & \begin{array}{cc} -\sigma^2 & \\ -\sigma^2 & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array},$$

$${}_i C^{3A}_B = i \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 13 & 14 \end{array} & \begin{array}{cc} 123 & 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \sigma^3 & \\ & \sigma^3 \end{array} & \begin{array}{cc} -\sigma^3 & \\ -\sigma^3 & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array},$$

$${}_i C^{4A}_B = -i \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 13 & 14 \end{array} & \begin{array}{cc} 123 & 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \mathbb{1} & \\ & \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & \\ 34 & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 123 \\ 124 \end{array}.$$

## VI. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕПТОНОВ РАЗНЫХ ПОКОЛЕНИЙ

Совершенно аналогично электрону и его нейтрину описываются лептоны других поколений. Для этого нужно рассмотреть векторы алгебры  $\mathbb{C}_w$ , отличающиеся перестановкой базисных векторов  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и соответствующим выбором базисного вектора основного направления. Это либо  $\varepsilon_{21}$ , либо  $\varepsilon_{13}$ , либо  $\varepsilon_{32}$ .

На основании изложенного установим следующее соответствие между компонентами волновой функции и лептонами. Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где индекс  $A$  принимает значения в следующей последовательности

$$32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,$$

поставим в соответствие лептонам первого поколения.

Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где индекс  $A$  принимает значения в следующей последовательности

$$21, 32, 13, 0, 41, 34, 3214, 24, 3, 1, 2, 312, 324, 124, 4, 314,$$

поставим в соответствие лептонам второго поколения.

Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где индекс  $A$  принимает значения в следующей последовательности

$$13, 21, 32, 0, 43, 24, 2134, 14, 2, 3, 1, 231, 214, 314, 4, 234,$$

поставим в соответствие лептонам третьего поколения.

Для каждой из указанных последовательностей индексов должны быть вычислены структурные матрицы подобно тому, как это делалось в Разделе III.<sup>8</sup>

В заключении Главы остановимся на двух вопросах, которые требуют дополнительного исследования.

1. В уравнении Дирака (1) использованы те матрицы, которые получены при вычислении. Поэтому мы сталкиваемся с неустранимым отличием уравнения (1) от общепринятого. Дело в том, что вычисления приводят к матрице  $\gamma^3$ , отличающейся знаком от общепринятой, так как матрица  $\sigma^3$  (и только она) у нас отличается от соответствующей матрицы Паули противоположным знаком. Отсюда возникает *вопрос, над которым стоит подумать*: можно ли путем вычисления каких-либо эффектов выяснить истинный знак  $\gamma^3$ ?

2. Выяснилось, что матрицы Дирака и уравнение Дирака соответствуют сжатому представлению структурных матриц и векторов алгебры Клиффорда  $S_w$ . В Разделе V.1. Главы 4.3. было указано, что при этом часть структурных матриц представляется точно, а другая часть структурных матриц представляется приближенно. Для уравнения Дирака (1) такой приближенно представляемой матрицей является  $\gamma^4$ . Отсюда *вопрос, над которым стоит подумать*: можно ли путем вычисления каких-либо эффектов установить приближенный характер  $\gamma^4$ ?

## VII. ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В ряде случаев для удобства изложения были использованы следующие обозначения для индексов.

В *общем* случае для обозначения компонент векторов используются индексы, обозначаемые большими латинскими буквами  $A, B, I, K$  и так далее без цифры внизу. При этом

для *действительного* представления эти индексы принимают значения

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124),$$

для *комплексного* представления эти индексы принимают значения

$$(13, 0, 14, 34, 2, 123, 234, 124),$$

для *кватернионного* представления эти индексы принимают значения

$$(0, 34, 123, 124).$$

В случае *первого* сжатого представления для обозначения компонент векторов используются индексы, обозначаемые большими латинскими буквами с цифрой 1 внизу ( $A_1, B_1, I_1, K_1$  и так далее). При этом

для *действительного* представления эти индексы принимают значения

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123),$$

для *комплексного* представления эти индексы принимают значения

$$(13, 0, 2, 123),$$

для *кватернионного* представления эти индексы принимают значения

$$(0, 123).$$

В случае *второго* сжатого представления для обозначения компонент векторов используются индексы, обозначаемые большими латинскими буквами с цифрой 2 внизу ( $A_2, B_2, I_2, K_2$  и так далее). При этом

для *действительного* представления эти индексы принимают значения

$$(32, 13, 21, 0),$$

для *комплексного* представления эти индексы принимают значения

$$(13, 0),$$

для *кватернионного* представления эти индексы принимают значения

$$(0).$$

В случае *третьего* сжатого представления для обозначения компонент векторов используются индексы, обозначаемые большими латинскими буквами с цифрой 3 внизу ( $A_3, B_3, I_3, K_3$  и так далее). При этом

для *действительного* представления эти индексы принимают значения

$$(21, 0),$$

<sup>8</sup> Заметим еще раз, что с математической точки зрения выбор последовательности индексов несущественен, однако с физической точки зрения, видимо, это не так. С группировкой индексов в определенной последовательности нужно связывать определенный физический порядок.

для комплексного представления эти индексы принимают значение

$$(0),$$

для кватернионного представления эти индексы принимают значение

$$(0).$$

В этих обозначениях

$$C^{IK}_L, C^{L}_{KI}$$

– это точные структурные матрицы алгебр Клиффорда  $X_w^*$ ,  $C_w$  (соответственно ковариантной алгебры пространства-времени белых лептонов и контравариантной алгебры действия белых лептонов). Соответственно

$$C^{IK_1}_{L_1}, C^{L_1}_{K_1I}$$

– это структурные матрицы тех же алгебр в первом сжатом представлении,

$$C^{IK_2}_{L_2}, C^{L_2}_{K_2I}$$

– это структурные матрицы тех же алгебр во втором сжатом представлении,

$$C^{IK_3}_{L_3}, C^{L_3}_{K_3I}$$

– это структурные матрицы тех же алгебр в третьем сжатом представлении. Первое сжатое представление соответствует теории Дирака, второе сжатое представление соответствует теории Паули, а третье сжатое представление соответствует теории Шредингера. И чем выше сжатие, тем менее точно представлены структурные матрицы.

После указанных замечаний снова перейдем к уравнению Дирака. Оно по-прежнему будет для нас основополагающим. В принятых нами обозначениях оно запишется следующим образом:

$$\left( {}_i C^{iA_1}_{B_1} \partial_i + \frac{m_e c}{\hbar} {}_i C^{0A_1}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0.$$

Итак, уравнение Дирака использует неточные, соответствующие первому сжатию, структурные матрицы. Отсюда возникает естественное стремление переписать уравнение Дирака для точных структурных матриц. Но тогда мы должны перейти от волновой функции  $\psi^{B_1}$  к волновой функции  $\psi^B$ , имеющей в два раза больше компонент, и дополнительным "лишним" компонентам необходимо дать соответствующую интерпретацию. В Разделе IV. Главы 4.3. был высказан постулат о том, что "лишние" компоненты волновой функции необходимы для описания электронного нейтрино, а всю волновую функцию нужно отнести к двум частицам первого поколения – электрону и электронному нейтрино. Далее рассмотрим обобщенное квантовое уравнение, соответствующее переходу к точным структурным матрицам и вернемся к этому предположению.

## VIII. ОБОБЩЕННОЕ КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Обобщить уравнение Дирака можно было бы формально, записав в нем точные структурные матрицы. Однако такой подход может привести к ошибке, так как переход от сжатого представления к точному есть переход от частного к общему и может быть неоднозначным. Поэтому поступим иначе и воспользуемся самыми общими соотношениями, предназначенными для описания квантовых явлений, – уравнениями структуры, а именно воспользуемся соотношением (56) Главы 3.3, записав его в следующем виде:

$$\frac{\partial \psi^L}{\partial x^M} = \frac{1}{\hbar} \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot \frac{\partial S^I}{\partial x^M} \cdot \psi^K. \quad (18)$$

Далее придадим этому соотношению форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные константы  ${}_i C^{MN}_L$ . Получим

$${}_i C^{MN}_L \frac{\partial \psi^L}{\partial x^M} = \frac{1}{\hbar} {}_i C^{MN}_L \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot \frac{\partial S^I}{\partial x^M} \cdot \psi^K$$

(как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Далее учтем, что

$$\frac{\partial S^I}{\partial x^M} = -p^I_M.$$

Получим

$${}_i C^{MN}_L \cdot \partial_M \psi^L(x) = -\frac{1}{\hbar} {}_i C^{MN}_L \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K. \quad (19)$$

С нашей точки зрения, это уравнение и есть квантовое уравнение для фундаментальных объектов в самом общем виде. Отталкиваясь от него, будем искать обобщение уравнения Дирака на точные структурные матрицы. Для этого поставим следующий вопрос: при каких условиях уравнение (19) сводится к уравнению Дирака? Во-первых, дифференцирование в левой части уравнения должно выполняться только по координатам образующего пространства и волновая функция должна зависеть от этих координат. Во-вторых, структурные матрицы должны быть записаны в первом сжатом представлении. С учетом этих двух обстоятельств уравнение (19) принимает вид

$${}_i C^{mN_1}_{L_1} \cdot \partial_m \psi^{L_1}(x) = -\frac{1}{\hbar} {}_i C^{MN_1}_{L_1} \cdot {}_r C^{L_1}_{K_1I} \cdot p^I_M \cdot \psi^{K_1}$$

и третье условие выглядит так:

$${}_i C^{MN_1}_{L_1} \cdot {}_r C^{L_1}_{K_1I} \cdot p^I_M = m \cdot c \cdot \delta^{N_1}_{K_1}.$$

Это условие может быть выполнено только в одном случае: если структурные матрицы являются символами Кронекера. Среди матриц  ${}_i C^{MN_1}_{L_1}$  только

матрица  ${}_l C^{0N_1}_{L_1}$  удовлетворяет этому условию. Среди матриц  ${}_r C^{L_1}_{K_1 I}$  этому условию удовлетворяют две матрицы<sup>9</sup>

$${}_r C^{L_1}_{K_1 0}, \quad {}_r C^{L_1}_{K_1 34}.$$

В результате мы получаем, что третье условие сводится к следующему:

$$p^0_0 + p^{34}_0 = m \cdot c.$$

Это соотношение не представляет собой нечто неожиданное. Из СТО следует, что

$$\frac{\partial S^0}{\partial x^0} = -p^0_0 = -m \cdot c.$$

Поэтому полученное условие – это обобщение соотношения СТО для рассматриваемого случая. Далее будем полагать

$$p^0_0 = p^{34}_0 = \frac{m c}{2}.$$

Подтверждением этого соотношения будет полученный результат.

На основании приведенных соображений уравнение Дирака можно записать следующим образом:

$${}_l C^{mN_1}_{L_1} \cdot \partial_m \psi^{L_1}(x) + \frac{m c}{2 \hbar} ({}_r C^{N_1}_{K_1 0} + {}_r C^{N_1}_{K_1 34}) \cdot \psi^{K_1} = 0.$$

Переходя от приближенных структурных матриц первого сжатия к точным матрицам, получим искомого обобщение уравнения Дирака

$${}_l C^{mN}_{L} \cdot \partial_m \psi^L(x) + \frac{m c}{2 \hbar} ({}_r C^N_{K 0} + {}_r C^N_{K 34}) \cdot \psi^K = 0. \quad (20)$$

Понятно, что здесь также  ${}_r C^N_{K 0} = \delta^N_K$ , но  ${}_r C^N_{K 34} \neq \delta^N_K$ .

Для действительного регулярного представления алгебры Клиффорда  $\mathbb{C}_w$  компоненты волновой функции  $\psi^K(x)$  представляют собой шестнадцать действительных функций. В комплексном представлении волновая функция содержит восемь комплексных компонент вида:

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= i \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= i \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= i \psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= i \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= i \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= i \psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= i \psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= i \psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (21)$$

В кватернионном представлении компонентами волновой функции являются четыре кватерниона вида

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a I \psi^{32} + b I \psi^{13} + i \psi^{21} + \psi^0, \\ \Psi^{34} &= a I \psi^{42} + b I \psi^{14} + i \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= a I \psi^1 + b I \psi^2 + i \psi^3 + \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= a I \psi^{134} + b I \psi^{234} + i \psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (22)$$

Приведем квантовое уравнение по отношению к кватернионным компонентам:

$$\left( -i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \partial_4 + i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^a \\ \hline \sigma^a & \\ \hline \end{array} \partial_a + \frac{m c}{2 \hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right) \begin{array}{|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \end{array} = 0$$

или

$$\begin{aligned} i \partial_4 \Psi^{124} + i \sigma^a \partial_a \Psi^{123} &= \frac{m c}{2 \hbar} (\Psi^0 + \Psi^{34}), \\ i \partial_4 \Psi^{123} + i \sigma^a \partial_a \Psi^{124} &= \frac{m c}{2 \hbar} (\Psi^0 + \Psi^{34}), \\ i \partial_4 \Psi^{34} - i \sigma^a \partial_a \Psi^0 &= \frac{m c}{2 \hbar} (\Psi^{123} + \Psi^{124}), \\ i \partial_4 \Psi^0 - i \sigma^a \partial_a \Psi^{34} &= \frac{m c}{2 \hbar} (\Psi^{123} + \Psi^{124}). \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь необходимо выяснить назначение компонент волновой функции, число которых в два раза больше, чем в теории Дирака. Для этого обратимся к стандартному представлению квантового уравнения.

## IX. СТАНДАРТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

### 1. Стандартное представление уравнения Дирака

Сначала напомним, как записывается уравнение Дирака в стандартном представлении, а затем применим тот же прием к полученному нами квантовому уравнению.

Воспользуемся уравнением Дирака в кватернионном представлении, приведенном в Разделе I:

$$\left( -i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \partial_4 + i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^a \\ \hline \sigma^a & \\ \hline \end{array} \partial_a + \frac{m c}{\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \right) \begin{array}{|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \end{array} = 0$$

или

$$\begin{aligned} i \partial_4 \Psi^{123} + i \sigma^a \partial_a \Psi^{123} &= \frac{m c}{\hbar} \Psi^0, \\ i \partial_4 \Psi^0 - i \sigma^a \partial_a \Psi^0 &= \frac{m c}{\hbar} \Psi^{123}. \end{aligned} \quad (24)$$

Преобразуем эти уравнения следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым, а затем вычтем из первого второе. Получим

$$\begin{aligned} i \partial_4 \varphi_1 - i \sigma^a \partial_a \varphi_2 &= \frac{m c}{\hbar} \varphi_1, \\ -i \partial_4 \varphi_2 + i \sigma^a \partial_a \varphi_1 &= \frac{m c}{\hbar} \varphi_2, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{123}$  и  $\varphi_2 = \Psi^0 - \Psi^{123}$ . Такая запись уравнения Дирака называется стандартным представлением. Оно особенно удобно для перехода к второму

<sup>9</sup> См. Раздел 4.1 Главы 4.3.



сжато представлению, то есть к теории Паули, когда  $\Psi^{123} \rightarrow \Psi^0$  и второе уравнение становится тривиальным. Действительно, выполняя замену

$$\Psi \rightarrow \Psi \cdot \exp\left(-i \frac{m c^2}{\hbar} t\right), \quad \varphi \rightarrow \varphi \cdot \exp\left(-i \frac{m c^2}{\hbar} t\right),$$

получим<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} i \partial_4 \varphi_1 - i \sigma^a \partial_a \varphi_2 &= 0, \\ i \sigma^a \partial_a \varphi_1 &= \frac{2 m c}{\hbar} \varphi_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Откуда следует уравнение Паули<sup>11</sup>

$$i \partial_4 \varphi_1 + \frac{\hbar}{2 m c} g^{ab} \partial^2_{ab} \varphi_1 = 0.$$

Далее воспользуемся аналогичным приемом для обобщенного квантового уравнения. Полученную форму записи уравнения также будем называть стандартным представлением.

## 2. Стандартное представление обобщенного квантового уравнения

Преобразуем уравнения (23) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$\begin{aligned} i \partial_4 \varphi_2 + i \sigma^a \partial_a \varphi_2 &= \frac{m c}{\hbar} \varphi_1, \\ i \partial_4 \varphi_1 - i \sigma^a \partial_a \varphi_1 &= \frac{m c}{\hbar} \varphi_2, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и  $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ . Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{aligned} i \partial_4 \chi_2 + i \sigma^a \partial_a \chi_2 &= 0, \\ i \partial_4 \chi_1 - i \sigma^a \partial_a \chi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$  и  $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$ . Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы (27) и (28) из двух уравнений каждая. Одна из систем – (27) – представляет уравнение Дирака для частицы с массой, отличной от нуля, а другая – (28) – представляет уравнение Дирака для частицы с массой, равной нулю. Отсюда вытекает изложенная ниже интерпретация компонент волновой функции.

## X. КОМПОНЕНТЫ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ЛЕПТОНЫ

В этом разделе дадим интерпретацию компонентам  $\Psi^0 + \Psi^{34}$ ,  $\Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\Psi^{123} - \Psi^{124}$ ,  $\Psi^0 - \Psi^{34}$  волновой функции как волновым функциям разных частиц.

Интерпретация опирается на следующие соображения.

1. Полученное квантовое уравнение можно представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относится к двухкомпонентной волновой функции.
2. Независимость указанных двух систем уравнений друг от друга позволяет отнести эти системы уравнений к разным частицам, причем одна из этих частиц имеет массу, отличную от нуля, а другая имеет массу, равную нулю.
3. При переходе от обобщенных уравнений (23) к уравнениям Дирака, когда составляющие квартернионные компоненты  $\Psi^{34}$  и  $\Psi^{124}$  приравниваются  $\Psi^0$  и  $\Psi^{123}$  соответственно, компонента  $\Psi^0$  переходит в *левую* компоненту волновой функции Дирака, а компонента  $\Psi^{123}$  переходит в *правую* компоненту волновой функции Дирака.

Указанные обстоятельства позволяют представить ситуацию следующим образом. Полученное квантовое уравнение относится к двум частицам, волновые функции которых имеют две компоненты. Этими частицами являются лептоны одного поколения, то есть частицы одной из пар: электрон и его нейтрино  $\{e, \nu_e\}$ , мюон и его нейтрино  $\{\mu, \nu_\mu\}$ ,  $\tau$ -лептон и его нейтрино  $\{\tau, \nu_\tau\}$ . В нашем случае нейтрино рассматривается как двухкомпонентная частица. Однако наблюдается только левое нейтрино. Это обстоятельство можно объяснить тем, что взаимодействия, в которых участвует правое нейтрино, ослаблено в сравнении с левым нейтрино. В Главе 5.2. Раздел VII. показано, что такое ослабление имеет место.

Вопрос о том, чем отличаются волновые функции (и квантовые уравнения) для частиц каждого из поколений, был рассмотрен в Разделе VI. Напомним, что эти отличия мы связали с особенностями комплексного представления пространства действия  $\mathbb{C}_w$ . Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_w$  в виде произведения  $\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_1$ , причем любой из векторов  $\varepsilon_{21}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{32}$  может быть выбран в качестве *основного* базисного вектора алгебры  $\mathbb{C}_1$ . Первый случай был поставлен в соответствие волновым функциям частиц первого поколения  $\{e, \nu_e\}$ , второй случай поставлен в соответствие волновым функциям частиц второго поколения  $\{\mu, \nu_\mu\}$ , третий случай поставлен в соответствие волновым функциям частиц третьего поколения  $\{\tau, \nu_\tau\}$ . Компоненты волновой функции одной частицы, как принято, будем называть *правой* и *левой* и обозначать нижним индексом, соответственно  $R$  и  $L$ .

<sup>10</sup> Во втором уравнении пренебрегаем слагаемым  $-i \partial_4 \varphi_2$  по отношению к  $-\frac{m c}{\hbar} \varphi_2$ .

<sup>11</sup> Оно отличается от уравнения Шредингера тем, что волновая функция  $\varphi_1$  включает две комплексные компоненты.

На основании изложенного установим следующее соответствие между компонентами волновой функции и лептонами. Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где  $A$  принимает значения

$$32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,$$

разбиваются на четыре части:

левая компонента электрона

$$e_L = \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) + \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}),$$

правая компонента электрона

$$e_R = \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) + \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}),$$

левая компонента  $e$ -нейтрино

$$\nu_{eL} = \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) - \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}),$$

правая компонента  $e$ -нейтрино

$$\nu_{eR} = \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) - \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}).$$

Компоненты волновых функций лептонов второго и третьего поколений отличаются от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов:

$$\begin{array}{ll} \text{для мюона и } \mu\text{-нейтрино} & 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3; \\ \text{для } \tau\text{-лептона и } \tau\text{-нейтрино} & 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2. \end{array}$$

## XI. ЛЕВЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Уравнение Дирака является следствием правого уравнения структуры и с этой точки зрения оно должно быть записано следующим образом:

$$\left( {}_l C^{iA_1}_{B_1} \partial_i + \frac{m_e c}{\hbar} {}_l C^{0A_1}_{B_1} \right) \cdot {}_r \psi^{B_1} = 0.$$

Право-левая симметрия заставляет записать левый аналог уравнения Дирака, в котором используются левое уравнение структуры алгебры Клиффорда

$$\left( {}_r C^{iA_1}_{B_1} \partial_i + \frac{m_e c}{\hbar} {}_r C^{0A_1}_{B_1} \right) \cdot {}_l \psi^{B_1} = 0.$$

Из Раздела V.1. Главы 4.3. следует вид правых структурных матриц

$${}_r \mathcal{E}^1 \sim {}_r C^{1I}_K = a \begin{array}{c|c} 0 & 123 \\ \hline & -I \\ \hline I & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array},$$

$${}_r \mathcal{E}^2 \sim {}_r C^{2I}_K = b \begin{array}{c|c} 0 & 123 \\ \hline & -I \\ \hline I & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array},$$

$${}_r \mathcal{E}^3 \sim {}_r C^{3I}_K = i \begin{array}{c|c} 0 & 123 \\ \hline & -I \\ \hline I & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array},$$

$${}_r \mathcal{E}^4 \sim {}_r C^{4I}_K = i \begin{array}{c|c} 0 & 123 \\ \hline & -I \\ \hline I & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array}.$$

Используя указанные матрицы, запишем уравнение, являющееся левым аналогом уравнения Дирака,

$$\left( i \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline -1 & \end{array} \partial_4 + \begin{array}{c|c} & -I \\ \hline I & \end{array} (a \partial_1 + b \partial_2 + i \partial_3) + \frac{m c}{\hbar} \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{123} \end{array} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (i \partial_4 - I(a \partial_1 + b \partial_2 + i \partial_3)) \Psi^{123} &= \frac{m c}{\hbar} \Psi^0, \\ -(i \partial_4 - I(a \partial_1 + b \partial_2 + i \partial_3)) \Psi^0 &= \frac{m c}{\hbar} \Psi^{123}. \end{aligned} \quad (29)$$

## XII. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ – КВАРКИ

Помимо лептонов, существуют фундаментальные частицы, называемые *кварками*, которые объединены в другой класс элементарных частиц. Для этого класса частиц характерно их участие в сильном взаимодействии. Возникает естественный вопрос: нельзя ли, основываясь на векторах алгебры Клиффорда, построить и волновую функцию кварков? Известно, что попытка использовать уравнение Дирака для описания движения кварков наталкивается на серьезные трудности. Кроме того, ресурс алгебры Клиффорда уже исчерпан лептонами. Отсюда общий вывод: кварки требуют привлечения другой алгебры действия. Об этой алгебре здесь мы скажем лишь несколько общих слов.

1. Концепция общности – стремление рассмотреть оба класса фундаментальных частиц с единых позиций – заставляет предположить, что алгебра лептонов, то есть алгебра Клиффорда, и неизвестная алгебра кварков должны допускать нетривиальное объединение. Иначе говоря, они должны представлять собой два частных случая некой единой алгебры.
2. Так как и лептоны, и кварки имеют общие свойства – обладают спином и электрическим зарядом – то составляющие вектора действия, ответственные за эти характеристики, должны присутствовать как в алгебре Клиффорда, так и в неизвестной алгебре кварков.
3. Как лептоны, так и кварки имеют общие свойства, позволяющие группировать их одинаковым образом. Так каждому кварку сопоставляется *сопутствующий* кварк. Один из них называется *нижним*, другой, называется *верхним*.

Например,  $d$ -кварк принят за нижнюю частицу, а сопутствующий ему  $u$ -кварк относится к верхней частице. Аналогичные  $d$ -кварку –  $s$ -кварк и  $b$ -кварк – также приняты за нижние частицы. А сопутствующие им фундаментальные частицы – соответственно  $c$ -кварк и  $t$ -кварк – относятся к верхним частицам. Важно следующее. Если нижние частицы являются аналогичными, то есть имеют одинаковые свойства (спин, заряд) за исключением массы и поэтому объединены в одну группу – группу поколений, то сопутствующие им нижние частицы также составляют группу поколений, то есть являются аналогичными, то есть, они имеют одинаковые свойства (спин, заряд) за исключением массы. Таким образом,  $d$ -кварк,  $s$ -кварк и  $b$ -кварк составляют группу аналогичных частиц – группу поколений нижних кварков, а  $u$ -кварк,  $c$ -кварк и  $t$ -кварк составляют группу аналогичных частиц – группу поколений верхних кварков.

Сказанное удобно проиллюстрировать таблицей

1 поколение	2 поколение	3 поколение	
$u$	$c$	$t$	верхние
$d$	$s$	$b$	нижние

Таковыми же взаимоотношениями обладают сопутствующие и аналогичные лептоны. Таким образом, для кварков, как и для лептонов, нужно исходить из того, что определяющей характеристикой фундаментальных частиц является вектор действия. Поэтому условия *сопутствия* кварков, как и лептонов, следует искать в организации векторной структуры этих частиц, причем условия сопутствия должны быть *двухпозиционными*. Кроме того, условия сопутствия должны быть *одинаковыми* для каждой пары сопутствующих частиц *разных* поколений. Кроме того, векторные структуры аналогичных кварков должны быть различными, но очень похожими, причем различия в векторной структуре аналогичных кварков должны быть *трехпозиционными*.

Указанные соображения явились отправной точкой при формулировке алгебры кварков как модернизированной алгебры Клиффорда, рассмотренной в Главе 3.4.

### XIII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Волновая функция нижнего лептона есть вектор алгебры Клиффорда  $\mathbb{C}_3$ .
- Волновая функция нижнего и верхнего белых лептонов одного поколения есть вектор алгебры Клиффорда  $\mathbb{C}_w$ .

- Волновые функции белых лептонов разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех образующих базисных векторов.
- Компоненты волновой функции  $\Psi^0 + \Psi^{34}$ ,  $\Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\Psi^{123} - \Psi^{124}$ ,  $\Psi^0 - \Psi^{34}$  относятся к разным фундаментальным частицам – белым лептонам. Этот вывод опирается на следующие соображения.

1. Полученные квантовые уравнения для белых лептонов в стандартном представлении можно представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относится к двухкомпонентной волновой функции.
2. Независимость указанных двух систем уравнений друг от друга позволяет отнести эти системы уравнений к разным частицам, причем одна из этих частиц имеет массу, отличную от нуля, а другая имеет массу, равную нулю.
3. При переходе от обобщенных уравнений (23) к уравнениям Дирака, когда составляющие кватернионные компоненты  $\Psi^{34}$  и  $\Psi^{124}$  приравниваются  $\Psi^0$  и  $\Psi^{123}$  соответственно, компонента  $\Psi^0$  переходит в *левую* компоненту волновой функции Дирака, а компонента  $\Psi^{123}$  переходит в *правую* компоненту волновой функции Дирака.

- Установлено следующее соответствие между компонентами волновой функции и белыми лептонами первого поколения. Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где  $A$  принимает значения

32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,

разбиваются на четыре части:

$$\begin{aligned}
 & \text{левая компонента белого электрона} \\
 e_L &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) + \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}), \\
 & \text{правая компонента белого электрона} \\
 e_R &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) + \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\
 & \text{левая компонента белого } e\text{-нейтрино} \\
 \nu_{eL} &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) - \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\
 & \text{правая компонента белого } e\text{-нейтрино} \\
 \nu_{eR} &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) - \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}).
 \end{aligned}$$

- Компоненты волновых функций белых лептонов второго и третьего поколений отличаются от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов:

$$\begin{aligned}
 & \text{для мюона и } \mu\text{-нейтрино} && 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3; \\
 & \text{для } \tau\text{-лептона и } \tau\text{-нейтрино} && 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2.
 \end{aligned}$$

- Для описания кварков необходимо использовать алгебру действия, отличную от алгебры Клиффорда.

## Глава 4.5 Черные лептоны. Алгебра действия черных лептонов $\mathbb{C}_b$

### I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Алгебра действия лептонов есть частный случай алгебры действия фундаментальных частиц  $\mathbb{S}$ , соответствующий частному случаю соседней перестановки.

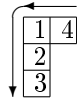
Для того чтобы очевидно выделить этот случай, для алгебры действия лептонов введем другое обозначение базисных векторов. Вместо обозначения базисных векторов  $\mathbf{e}$  введем обозначение  $\varepsilon$ . Кроме того, введем специальное обозначение для алгебры действия лептонов  $\mathbb{C}$ . Для алгебры пространства-времени лептонов введем специальное обозначение:  $\mathbb{X}_L$ .

В этой Главе рассматривается четырехмерное представление алгебры лептонов, когда размерность образующего пространства алгебры действия лептонов и алгебры пространства-времени лептонов увеличивается до четырех. На уровне четырехмерного представления лептоны разделяются на два типа. Лептоны одного типа названы белыми, а другого типа - черными. В этой Главе рассматривается алгебра действия черных лептонов. Она обозначена  $\mathbb{C}_b$ . Алгебра пространства-времени черных лептонов обозначена  $\mathbb{X}_{Lb}$ .

### II. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ ЧЕРНЫХ ЛЕПТОНОВ

В этом Разделе рассмотрим алгебру действия черных лептонов  $\mathbb{C}_b$  с четырехмерным образующим пространством.

В соответствии с Разделом III.1. Главы 3.4. волновая функция лептонов в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки для образующих базисных векторов алгебры действия черных лептонов

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}. \end{aligned}$$

Отсюда пространство действия черных лептонов  $\mathbb{C}_b$  есть множество векторов вида

$$\begin{aligned} \psi &= \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_i \psi^i + \mathbf{e}_{[ab]} \psi^{[ab]} + \\ &+ \mathbf{e}_{(14)} \psi^{(14)} + \mathbf{e}_{[42]} \psi^{[42]} + \mathbf{e}_{[34]} \psi^{[34]} + \\ &+ \mathbf{e}_{[123]} \psi^{[123]} + \mathbf{e}_{(124)_2} \psi^{(124)_2} + \mathbf{e}_{(134)_2} \psi^{(134)_2} + \\ &+ \mathbf{e}_{[234]} \psi^{[234]} + \mathbf{e}_{(1324)_2} \psi^{(1324)_2}. \end{aligned}$$

Перепишем это выражение с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

Кроме того, для удобства записи будем опускать указание на симметрию индексов базисных векторов и координат. Например,

$$\mathbf{e}_{(14)} \equiv \varepsilon_{14}, \text{ или } \psi^{(1324)_2} \equiv \psi^{1324}.$$

Получим

$$\begin{aligned} \psi &= \varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0 + \\ &+ \varepsilon_{42} \psi^{42} + \varepsilon_{14} \psi^{14} + \varepsilon_{1324} \psi^{1324} + \varepsilon_{34} \psi^{34} + \\ &+ \varepsilon_1 \psi^1 + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_3 \psi^3 + \varepsilon_{123} \psi^{123} + \\ &+ \varepsilon_{134} \psi^{134} + \varepsilon_{234} \psi^{234} + \varepsilon_4 \psi^4 + \varepsilon_{124} \psi^{124} \end{aligned} \quad (1)$$

или в компактной записи

$$\psi = \varepsilon_K \psi^K,$$

где индекс  $K$  принимает значения

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

Если пространство с базисными векторами  $\varepsilon_{i_1 \dots i_p}$  обозначить  $(\mathbb{C}_b)^p$  то пространство алгебры черных лептонов  $\mathbb{C}_b$  представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_b = \mathbb{C}_b^0 + \mathbb{C}_b^1 + (\mathbb{C}_b)^2 + (\mathbb{C}_b)^3 + (\mathbb{C}_b)^4.$$

#### 1. Действительное представление алгебры действия черных лептонов $\mathbb{C}_b$

Записи вектора  $\psi$  (1) соответствует действительное представление алгебры  $\mathbb{C}_b$ . В этом случае структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы

$$C^{K_1 K_2 K} \sim \varepsilon_K,$$

имеют действительные коэффициенты, а размерность матриц равна  $16 \times 16$  (см. Раздел III.). Помимо действительного представления будем использовать  $iab$ -представление и  $IAB$ -представление базисных векторов алгебры действия и алгебры пространства-времени черных лептонов, удобные в силу своей компактности.

## 2. $iab$ -представление алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$

$iab$ -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned} \psi = & \varepsilon_{13} \circ (\varepsilon_{21} \psi^{32} + \varepsilon_0 \psi^{13}) + \varepsilon_0 \circ (\varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0) + \\ & + \varepsilon_{14} \circ (\varepsilon_{21} \psi^{42} + \varepsilon_0 \psi^{14}) + \varepsilon_{34} \circ (\varepsilon_{21} \psi^{1324} + \varepsilon_0 \psi^{34}) + \\ & + \varepsilon_2 \circ (\varepsilon_{21} \psi^1 + \varepsilon_0 \psi^2) + \varepsilon_{123} \circ (\varepsilon_{21} \psi^3 + \varepsilon_0 \psi^{123}) + \\ & + \varepsilon_{234} \circ (\varepsilon_{21} \psi^{134} + \varepsilon_0 \psi^{234}) + \varepsilon_{124} \circ (\varepsilon_{21} \psi^4 + \varepsilon_0 \psi^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_b$  в виде произведения  $\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_1$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_3$  являются

$$\varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{14}, \quad \varepsilon_{34}, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{123}, \quad \varepsilon_{234}, \quad \varepsilon_{124};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_1$  являются

$$\varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_0.$$

Как и прежде поставим в соответствие базисному вектору  $\varepsilon_{21}$  алгебры  $\mathbb{C}_1$  мнимую единицу, а базисному вектору  $\varepsilon_0$  действительную единицу. В результате получим вектор алгебры  $\mathbb{C}_b$  в  $iab$ -представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = & \varepsilon_{13} \circ (i \psi^{32} + \psi^{13}) + \varepsilon_0 \circ (i \psi^{21} + \psi^0) + \\ & + \varepsilon_{14} \circ (i \psi^{42} + \psi^{14}) + \varepsilon_{34} \circ (i \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ & + \varepsilon_2 \circ (i \psi^1 + \psi^2) + \varepsilon_{123} \circ (i \psi^3 + \psi^{123}) + \\ & + \varepsilon_{234} \circ (i \psi^{134} + \psi^{234}) + \varepsilon_{124} \circ (i \psi^4 + \psi^{124}). \end{aligned}$$

Таким образом, в  $iab$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными числами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= i \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= i \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= i \psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= i \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= i \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= i \psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= i \psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= i \psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать как

$$\begin{aligned} \psi = & \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_0 \psi^0 + \varepsilon_{14} \psi^{14} + \varepsilon_{34} \psi^{34} + \\ & + \varepsilon_2 \psi^2 + \varepsilon_{123} \psi^{123} + \varepsilon_{234} \psi^{234} + \varepsilon_{124} \psi^{124}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в  $iab$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления

$$\varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{14}, \quad \varepsilon_{34}, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{123}, \quad \varepsilon_{234}, \quad \varepsilon_{124}.$$

В  $iab$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $8 \times 8$  (см. Раздел III.).

## 3. $IAB$ -представление алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$

$IAB$ -представление алгебры  $\mathbb{C}_b$  основано на разложении вектора:

$$\begin{aligned} \psi = & (\varepsilon_{32} \psi^{32} + \varepsilon_{13} \psi^{13} + \varepsilon_{21} \psi^{21} + \varepsilon_0 \psi^0) \circ \varepsilon_0 + \\ & + (\varepsilon_{32} \psi^{42} + \varepsilon_{13} \psi^{14} + \varepsilon_{21} \psi^{1324} + \varepsilon_0 \psi^{34}) \circ \varepsilon_{34} + \\ & + (\varepsilon_{32} \psi^1 + \varepsilon_{13} \psi^2 + \varepsilon_{21} \psi^3 + \varepsilon_0 \psi^{123}) \circ \varepsilon_{123} + \\ & + (\varepsilon_{32} \psi^{134} + \varepsilon_{13} \psi^{234} + \varepsilon_{21} \psi^4 + \varepsilon_0 \psi^{124}) \circ \varepsilon_{124}. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_b$  в виде произведения  $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{C}_2$  являются

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_{34}, \quad \varepsilon_{123}, \quad \varepsilon_{124};$$

базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{C}_2$  являются

$$\varepsilon_{32}, \quad \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_0.$$

Последнюю алгебру мы назвали  $IAB$ -алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц  $IAB$ -алгебры используем следующие обозначения:

$$a \cdot I, \quad b \cdot I, \quad i \cdot \mathbb{1}, \quad \mathbb{1}.$$

Заменим базисные векторы  $\varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_0$  приведенными гиперчислами в соответствии

$$\begin{aligned} \varepsilon_{32} &\sim a I, \\ \varepsilon_{13} &\sim b I, \\ \varepsilon_{21} &\sim i \mathbb{1}, \\ \varepsilon_0 &\sim 1 \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{C}_b$  в  $IAB$ -представлении

$$\begin{aligned} \psi = & (a \cdot I \psi^{32} + b \cdot I \psi^{13} + i \cdot \mathbb{1} \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0) \circ \varepsilon_0 + \\ & + (a \cdot I \psi^{42} + b \cdot I \psi^{14} + i \cdot \mathbb{1} \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}) \circ \varepsilon_{34} + \\ & + (a \cdot I \psi^1 + b \cdot I \psi^2 + i \cdot \mathbb{1} \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \varepsilon_{123} + \\ & + (a \cdot I \psi^{134} + b \cdot I \psi^{234} + i \cdot \mathbb{1} \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}) \circ \varepsilon_{124}. \end{aligned}$$

Таким образом, в  $IAB$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a I \psi^{32} + b I \psi^{13} + i \mathbb{1} \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{34} &= a I \psi^{42} + b I \psi^{14} + i \mathbb{1} \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= a I \psi^1 + b I \psi^2 + i \mathbb{1} \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= a I \psi^{134} + b I \psi^{234} + i \mathbb{1} \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать как

$$\psi = \Psi^0 \varepsilon_0 + \Psi^{34} \varepsilon_{34} + \Psi^{123} \varepsilon_{123} + \Psi^{124} \varepsilon_{124}.$$

Отсюда видно, что в  $IAB$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\varepsilon_0, \varepsilon_{34}, \varepsilon_{123}, \varepsilon_{124}$ .

В  $IAB$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$  (см. Раздел III.).

#### 4. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры черных лептонов  $\mathbb{C}_b$  и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\varepsilon_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\varepsilon_0$  имеет место правило умножения

$$\varepsilon_0 \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

- Образующие векторы  $\varepsilon_i$ , где индекс  $i$  пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов  $\varepsilon_i$  равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \circ \varepsilon_i = \varepsilon_i,$$

$$(\varepsilon_1)^2 = (\varepsilon_2)^2 = (\varepsilon_3)^2 = \varepsilon_0, \quad (\varepsilon_4)^2 = -\varepsilon_0.$$

- Векторы

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_k \circ \varepsilon_i.$$

Здесь  $i \neq k$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6.$$

В соответствии с Разделом III.1. Главы 3.4. для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (условия соседней перестановки)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21} = -\varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{13} = -\varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_{32} = -\varepsilon_{23}, \\ \varepsilon_{14} = \varepsilon_{41}, \quad \varepsilon_{24} = -\varepsilon_{42}, \quad \varepsilon_{34} = -\varepsilon_{43}. \end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{21} = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_{42} \circ \varepsilon_{42} = \varepsilon_0, \\ \varepsilon_{32} \circ \varepsilon_{32} = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_{14} \circ \varepsilon_{14} = -\varepsilon_0, \\ \varepsilon_{13} \circ \varepsilon_{13} = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_{34} \circ \varepsilon_{34} = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

- Векторы

$$\varepsilon_{ikl} = \varepsilon_l \circ \varepsilon_k \circ \varepsilon_i.$$

Здесь  $i \neq k, i \neq l, k \neq l$ . Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из условия ассоциативности и условий соседней перестановки,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{321} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132}, \\ \varepsilon_{124} = -\varepsilon_{214} = -\varepsilon_{241} = \varepsilon_{421} = -\varepsilon_{412} = -\varepsilon_{142}, \\ \varepsilon_{134} = -\varepsilon_{314} = -\varepsilon_{341} = \varepsilon_{431} = -\varepsilon_{413} = -\varepsilon_{143}, \\ \varepsilon_{234} = -\varepsilon_{324} = \varepsilon_{342} = -\varepsilon_{432} = \varepsilon_{423} = -\varepsilon_{243}. \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} \circ \varepsilon_{123} = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_{124} \circ \varepsilon_{124} = -\varepsilon_0, \\ \varepsilon_{134} \circ \varepsilon_{134} = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_{234} \circ \varepsilon_{234} = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

- Вектор

$$\varepsilon_{1324} = \varepsilon_1 \circ \varepsilon_3 \circ \varepsilon_2 \circ \varepsilon_4.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1234} = -\varepsilon_{2134} = \varepsilon_{2314} = -\varepsilon_{3214} = \\ = \varepsilon_{3124} = -\varepsilon_{1324} = -\varepsilon_{1243} = \varepsilon_{2143} = \\ = \varepsilon_{2413} = -\varepsilon_{4213} = \varepsilon_{4123} = \varepsilon_{1423} = \\ = \varepsilon_{1342} = -\varepsilon_{3142} = -\varepsilon_{3412} = \varepsilon_{4312} = \\ = -\varepsilon_{4132} = -\varepsilon_{1432} = \varepsilon_{2341} = -\varepsilon_{3241} = \\ = \varepsilon_{3421} = -\varepsilon_{4321} = \varepsilon_{4231} = -\varepsilon_{2431}. \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\varepsilon_{1324} \circ \varepsilon_{1324} = \varepsilon_0.$$

### III. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ АЛГЕБР ДЕЙСТВИЯ И ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ЧЕРНЫХ ЛЕПТОНОВ

Вычисление структурных матриц алгебр действия и пространства-времени черных лептонов построено на применении условий соседней перестановки для этих алгебр

$$\begin{aligned} \mathbf{12} = -\mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} = \mathbf{41}, \quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}, \quad \mathbf{34} = -\mathbf{43}. \end{aligned}$$

Компоненты векторов и матриц рассматриваются в следующей последовательности индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

Переход от действительного представления к компактным представлениям осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц  $C_{KI}^L$  и  $C_{KL}^{IK}$  от действительного представления к  $iab$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix},$$

$$a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

При преобразовании матриц  $C^{L_{KI}}$  и  $C^{IK_L}$  от  $iab$ -представления к  $IAB$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

Приведем структурные матрицы правой контравариантной алгебры действия черных лептонов  $\mathbb{C}_b$  и левой ковариантной алгебры пространства-времени черных лептонов  $X_{L_b}^*$ .

**1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры действия черных лептонов  ${}_r\mathbb{C}_b$**

$${}_r\mathcal{E}_0 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array}$$

$$= I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 & 124 \\ & 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} \end{array}$$

$${}_r\mathcal{E}_1 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array}$$

$$= a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 & 124 \\ & 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} -I \\ I \\ -I \\ I \end{array} \end{array}$$

$${}_r\mathcal{E}_2 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array}$$

$$= b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \end{array} = b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 & 124 \\ & 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} -I \\ I \\ -I \\ I \end{array} \end{array}$$









$$r\mathcal{E}_{1324} \sim \begin{matrix} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & & & & & & & & \\ 13 & & & & & & & & \\ 21 & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & \\ 42 & & & & & & & & \\ 14 & & & & & & & & \\ 1324 & & & & & & & & \\ 34 & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & \\ 123 & & & & & & & & \\ 134 & & & & & & & & \\ 234 & & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & & \\ 124 & & & & & & & & \end{matrix}$$

$$= i \begin{matrix} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & & & & \\ 14 & & & & \\ 2 & & & & \\ 134 & & & & \\ 13 & & & & \\ 0 & & & & \\ 14 & & & & \\ 34 & & & & \\ 2 & & & & \\ 123 & & & & \\ 234 & & & & \\ 124 & & & & \end{matrix} = i \begin{matrix} & 34 & 124 \\ 0 & & \\ 123 & & \\ 0 & & \\ 34 & & \\ 123 & & \\ 124 & & \end{matrix}$$

2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры пространства-времени черных лептонов  $i\mathbb{X}_{Lb}^*$

$$i\mathcal{E}^0 \sim \begin{matrix} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & & & & & & & & \\ 13 & & & & & & & & \\ 21 & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & \\ 42 & & & & & & & & \\ 14 & & & & & & & & \\ 1324 & & & & & & & & \\ 34 & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & \\ 123 & & & & & & & & \\ 134 & & & & & & & & \\ 234 & & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & & \\ 124 & & & & & & & & \end{matrix}$$

$$= I \begin{matrix} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & & & & \\ 14 & & & & \\ 2 & & & & \\ 134 & & & & \\ 13 & & & & \\ 0 & & & & \\ 14 & & & & \\ 34 & & & & \\ 2 & & & & \\ 123 & & & & \\ 234 & & & & \\ 124 & & & & \end{matrix} = I \begin{matrix} & 34 & 124 \\ 0 & & \\ 123 & & \\ 0 & & \\ 34 & & \\ 123 & & \\ 124 & & \end{matrix}$$





$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c}
 13 \ 0 \ 14 \ 34 \ 2 \ 123 \ 234 \ 124 \\
 32 \ 21 \ 42 \ 1324 \ 1 \ 3 \ 134 \ 4
 \end{array} \\
 & \begin{array}{c}
 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & 1 \\
 \hline
 & & 1 & \\
 \hline
 & & 1 & \\
 \hline
 & & 1 & \\
 \hline
 1 & & & 1 \\
 \hline
 2 & & & 1 \\
 \hline
 3 & & & 1 \\
 \hline
 123 & & & 1 \\
 \hline
 134 & & & 1 \\
 \hline
 234 & & & 1 \\
 \hline
 4 & & & 1 \\
 \hline
 124 & & & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 i\mathcal{E}^{42} \sim \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c}
 0 \ 34 \ 123 \ 124 \\
 13 \ 14 \ 2 \ 134
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 1 & \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124
 \end{array}
 = a
 \begin{array}{c}
 0 \ 34 \ 123 \ 124 \\
 13 \ 14 \ 2 \ 134
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & A \\
 \hline
 A & A \\
 \hline
 & A \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124
 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c}
 13 \ 0 \ 14 \ 34 \ 2 \ 123 \ 234 \ 124 \\
 32 \ 21 \ 42 \ 1324 \ 1 \ 3 \ 134 \ 4
 \end{array} \\
 & \begin{array}{c}
 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & 1 \\
 \hline
 & & 1 & \\
 \hline
 & & 1 & \\
 \hline
 & & 1 & \\
 \hline
 1 & -1 & & \\
 \hline
 2 & -1 & & \\
 \hline
 3 & & -1 & \\
 \hline
 123 & & -1 & \\
 \hline
 134 & & -1 & \\
 \hline
 234 & & & -1 \\
 \hline
 4 & & & -1 \\
 \hline
 124 & & & -1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 i\mathcal{E}^{123} \sim \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c}
 0 \ 34 \ 123 \ 124 \\
 13 \ 14 \ 2 \ 134
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 -1 & 1 \\
 \hline
 -1 & \\
 \hline
 -1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124
 \end{array}
 = I
 \begin{array}{c}
 0 \ 34 \ 123 \ 124 \\
 13 \ 14 \ 2 \ 134
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & \mathbb{1} \\
 \hline
 \mathbb{1} & \mathbb{1} \\
 \hline
 -\mathbb{1} & \\
 \hline
 -\mathbb{1} & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124
 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c}
 13 \ 0 \ 14 \ 34 \ 2 \ 123 \ 234 \ 124 \\
 32 \ 21 \ 42 \ 1324 \ 1 \ 3 \ 134 \ 4
 \end{array} \\
 & \begin{array}{c}
 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & -1 & \\
 \hline
 & & 1 & \\
 \hline
 & & -1 & \\
 \hline
 & & 1 & \\
 \hline
 42 & -1 & & \\
 \hline
 14 & 1 & & \\
 \hline
 1324 & & -1 & \\
 \hline
 34 & & 1 & \\
 \hline
 1 & & & -1 \\
 \hline
 2 & & & 1 \\
 \hline
 3 & & & -1 \\
 \hline
 123 & & & 1 \\
 \hline
 134 & & & -1 \\
 \hline
 234 & & & 1 \\
 \hline
 4 & & & -1 \\
 \hline
 124 & & & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 i\mathcal{E}^{34} \sim \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c}
 0 \ 34 \ 123 \ 124 \\
 13 \ 14 \ 2 \ 134
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 1 & \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124
 \end{array}
 = b
 \begin{array}{c}
 0 \ 34 \ 123 \ 124 \\
 13 \ 14 \ 2 \ 134
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & \mathbb{1} \\
 \hline
 \mathbb{1} & \mathbb{1} \\
 \hline
 & \\
 \hline
 & \mathbb{1} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124
 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c}
 13 \ 0 \ 14 \ 34 \ 2 \ 123 \ 234 \ 124 \\
 32 \ 21 \ 42 \ 1324 \ 1 \ 3 \ 134 \ 4
 \end{array} \\
 & \begin{array}{c}
 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & -1 \\
 \hline
 & & & 1 \\
 \hline
 & & & -1 \\
 \hline
 & & & 1 \\
 \hline
 42 & & -1 & \\
 \hline
 14 & & 1 & \\
 \hline
 1324 & & & -1 \\
 \hline
 34 & & & 1 \\
 \hline
 1 & & 1 & \\
 \hline
 2 & & -1 & \\
 \hline
 3 & & & 1 \\
 \hline
 123 & & & -1 \\
 \hline
 134 & 1 & & \\
 \hline
 234 & -1 & & \\
 \hline
 4 & & 1 & \\
 \hline
 124 & & & -1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 i\mathcal{E}^{124} \sim \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c}
 0 \ 34 \ 123 \ 124 \\
 13 \ 14 \ 2 \ 134
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 -1 & 1 \\
 \hline
 -1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124
 \end{array}
 = b
 \begin{array}{c}
 0 \ 34 \ 123 \ 124 \\
 13 \ 14 \ 2 \ 134
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 & \mathbb{1} \\
 \hline
 \mathbb{1} & \mathbb{1} \\
 \hline
 -\mathbb{1} & \\
 \hline
 -\mathbb{1} & \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124
 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & 1 \\
 13 & & & & & & & & 1 \\
 21 & & & & & & & & 1 \\
 0 & & & & & & & & 1 \\
 42 & & & & & & 1 & & \\
 14 & & & & & & 1 & & \\
 1324 & & & & & & 1 & & \\
 34 & & & & & 1 & & & \\
 1 & & & & & -1 & & & \\
 2 & & & & & -1 & & & \\
 3 & & & & & -1 & & & \\
 123 & & & -1 & & & & & \\
 134 & & -1 & & & & & & \\
 234 & & -1 & & & & & & \\
 4 & & -1 & & & & & & \\
 124 & -1 & & & & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 13 & 14 & 2 & 134 \\
 & & & & 13 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 14 \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 2 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 234 \\
 & & & & 124 \\
 0 & & & & 13 \\
 34 & & & & 123 \\
 124 & & & & 0 \\
 1 & & & & 34 \\
 -1 & & & & 123 \\
 -1 & & & & 234 \\
 -1 & & & & 124
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 34 & 123 & & 0 \\
 & & & & A \\
 & & & & A \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 124
 \end{array} \\
 \\
 & \begin{array}{cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 34 & 123 & & 0 \\
 & & & & A \\
 & & & & -A \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 124
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & \\
 13 & & & & & & & & \\
 21 & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & \\
 42 & & & & & & & & \\
 14 & & & & & & & & \\
 1324 & & & & & & & & \\
 34 & & & & & & & & \\
 1 & & & & & & & & -1 \\
 2 & & & & & & & & -1 \\
 3 & & & & & & & & 1 \\
 123 & & & & & & & & 1 \\
 134 & & & & & & & & -1 \\
 234 & & & & & & & & -1 \\
 4 & & & & & & & & 1 \\
 124 & & & & & & & & 1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 13 & 14 & 2 & 134 \\
 & & & & 13 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 14 \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 2 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 234 \\
 & & & & 124 \\
 0 & & & & 13 \\
 34 & & & & 123 \\
 124 & & & & 0 \\
 1 & & & & 34 \\
 -1 & & & & 123 \\
 -1 & & & & 234 \\
 -1 & & & & 124
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 34 & 123 & & 0 \\
 & & & & B \\
 & & & & B \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 124
 \end{array} \\
 \\
 & \begin{array}{cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 34 & 123 & & 0 \\
 & & & & B \\
 & & & & -B \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 124
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & 1 \\
 13 & & & & & & & & -1 \\
 21 & & & & & & & & -1 \\
 0 & & & & & & & & 1 \\
 42 & & & & & & 1 & & \\
 14 & & & & & & -1 & & \\
 1324 & & & & & & -1 & & \\
 34 & & & & & & 1 & & \\
 1 & & & & & & -1 & & \\
 2 & & & & & & 1 & & \\
 3 & & & & & & 1 & & \\
 123 & & & & & & -1 & & \\
 134 & & & & & & -1 & & \\
 234 & & & & & & 1 & & \\
 4 & & & & & & 1 & & \\
 124 & & & & & & -1 & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 13 & 14 & 2 & 134 \\
 & & & & 13 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 14 \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 2 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 234 \\
 & & & & 124 \\
 0 & & & & 13 \\
 34 & & & & 123 \\
 124 & & & & 0 \\
 1 & & & & 34 \\
 -1 & & & & 123 \\
 -1 & & & & 234 \\
 -1 & & & & 124
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 34 & 123 & & 0 \\
 & & & & -I \\
 & & & & -I \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 124
 \end{array} \\
 \\
 & \begin{array}{cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 34 & 123 & & 0 \\
 & & & & I \\
 & & & & I \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 124
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

#### IV. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ЧЕРНЫЕ ЛЕПТОНЫ

Предварительно напомним, что, согласно Главе 3.3, если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи квантовые явления, а уравнения структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовые постулаты. Квантовые постулаты для произвольной алгебры действия в Разделе VIII. Главы 4.4. были записаны следующим образом:

$$\frac{\partial \psi^L}{\partial x^M} = \frac{1}{\hbar} \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot \frac{\partial S^I}{\partial x^M} \cdot \psi^K. \quad (4)$$

Далее придадим этому соотношению форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные константы  ${}_i C^{MN}_L$  и учтем, что

$$\frac{\partial S^I}{\partial x^M} = -p^I_M.$$

Кроме того, учтем, что дифференцирование в левой части уравнения должно выполняться только по координатам образующего пространства и волновая функция должна зависеть от этих координат. Получим

$${}_i C^{mN}_L \frac{\partial \psi^L}{\partial x^m} = -\frac{1}{\hbar} {}_i C^{MN}_L \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K. \quad (5)$$



Обратимся к первому сжатому представлению этого уравнения. По замыслу оно должно совпадать с уравнением Дирака для нижней фундаментальной частицы. В том случае, если, так же как для белых лептонов, при переходе с сжатому представлению, помимо матрицы  ${}_r C^{L_1 K_1 0} = \delta^{L_1 K_1}$ , еще и

$${}_r C^{L_1 K_1 34} = \delta^{L_1 K_1},$$

уравнение (5) в первом сжатом представлении приобретает вид

$${}_l C^{m N_1 L_1} \frac{\partial \psi^{L_1}}{\partial x^m} = -\frac{1}{\hbar} ({}_l C^{0 N_1 L_1} \cdot {}_r C^{L_1 K_1 0} \cdot p_0^0 + {}_l C^{0 N_1 L_1} \cdot {}_r C^{L_1 K_1 34} \cdot p_0^{34}) \cdot \psi^{K_1}$$

или

$${}_l C^{m N_1 L} \frac{\partial \psi^{L_1}}{\partial x^m} = -\frac{1}{\hbar} (p_0^0 + p_0^{34}) \cdot \psi^{N_1}.$$

При этом должно выполняться

$$p_0^0 + p_0^{34} = m_d c. \quad (6)$$

Здесь  $m_d$  – масса нижней частицы. Разобьем величину  $(m_d c)$  между импульсами  $p_0^0$  и  $p_0^{34}$  в некоторой пропорции. Для этого положим

$$p_0^0 = \frac{m_d c}{2} \alpha, \quad p_0^{34} = \frac{m_d c}{2} \beta.$$

Из выражения (6) имеем

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1. \quad (7)$$

Выполним обратный переход от уравнения Дирака (квантового уравнения в первом сжатом представлении) к обобщенному квантовому уравнению для свободной фундаментальной частицы

$${}_l C^{m N L} \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{m_d c}{2 \hbar} (\alpha \cdot {}_r C^{N K_0} + \beta \cdot {}_r C^{N K_{34}}) \cdot \psi^K. \quad (8)$$

Понятно, что здесь  ${}_r C^{N K_0} = \delta^{N K}$  в отличие от  ${}_r C^{N K_{34}}$ . Таким образом, для того, чтобы записать квантовое уравнение для конкретной фундаментальной частицы, необходимо знать следующие структурные матрицы:

$${}_l C^{4N L}, \quad {}_l C^{1N L}, \quad {}_l C^{2N L}, \quad {}_l C^{3N L}, \quad {}_r C^{N K_{34}}$$

алгебры этой частицы.

Имея в виду сказанное, перейдем к алгебре черных лептонов и составлению квантовых уравнений для этих частиц.

### 1. Структурные матрицы алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$

Используя результаты Разделов III.1 и III.2, приведем структурные матрицы алгебр черных лептонов, необходимые для построения квантового уравнения для этих частиц.

$${}_l C^{4N L} = a \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & B & 0 \\ \hline \begin{array}{c} -B \\ -B \end{array} & & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array}, \quad {}_l C^{1N L} = i \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & -A & 0 \\ \hline \begin{array}{c} A \\ A \end{array} & & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array},$$

$${}_l C^{2N L} = 1 \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & -I & 0 \\ \hline \begin{array}{c} I \\ I \end{array} & & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array}, \quad {}_l C^{3N L} = i \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & -B & 0 \\ \hline \begin{array}{c} B \\ B \end{array} & & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array},$$

$${}_r C^{N K_0} = 1 \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & & 0 \\ \hline & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{c} 123 \\ 124 \end{array} \end{array}, \quad {}_r C^{N K_{34}} = 1 \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & & 0 \\ \hline & & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} \end{array}.$$

Далее, используя приведенные матрицы, запишем квантовое уравнение для черных лептонов.

### 2. Квантовое уравнение для свободных черных лептонов

Квантовое уравнение для свободных черных лептонов получим, подставив в уравнение (8) вышеприведенные структурные матрицы. Для действительного регулярного представления алгебры черных лептонов  $\mathbb{C}_b$  компоненты волновой функции  $\psi^K(x)$  представляют собой шестнадцать действительных функций. В  $iab$ -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (2). И в  $IAB$ -представлении компонентами волновой функции являются четыре  $IAB$ -функции вида (3). Приведем квантовое уравнение по отношению к  $IAB$ -компонентам волновой функции черных лептонов:

$$\left( a \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} B \\ B \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline & -B & 0 \\ \hline \begin{array}{c} -B \\ -B \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \partial_4 + i \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} -A \\ -A \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline & A & 0 \\ \hline \begin{array}{c} A \\ A \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \partial_1 + \right. \\ \left. + \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} -I \\ -I \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline & I & 0 \\ \hline \begin{array}{c} I \\ I \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \partial_2 + i \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} -B \\ -B \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline & B & 0 \\ \hline \begin{array}{c} B \\ B \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \partial_3 \right) \begin{array}{l} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \Bigg\| = \\ = -\frac{m_d c}{2 \hbar} \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} \alpha \beta \\ \beta \alpha \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} \alpha \beta \\ \beta \alpha \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline & & \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \end{array} \Bigg\|$$

или

$$\begin{aligned}
-a B \partial_4 \Psi^{124} + (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \Psi^{123} &= \\
&= \frac{m_d c}{2 \hbar} (\alpha \cdot \Psi^0 + \beta \cdot \Psi^{34}), \\
-a B \partial_4 \Psi^{123} + (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \Psi^{124} &= \\
&= \frac{m_d c}{2 \hbar} (\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34}), \\
a B \partial_4 \Psi^{34} - (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \Psi^0 &= \\
&= \frac{m_d c}{2 \hbar} (\alpha \cdot \Psi^{123} + \beta \cdot \Psi^{124}), \\
a B \partial_4 \Psi^0 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \Psi^{34} &= \\
&= \frac{m_d c}{2 \hbar} (\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124}).
\end{aligned} \tag{9}$$

### 3. Стандартное представление квантового уравнения для свободных черных лептонов

Преобразуем уравнения (9) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым, а третье с четвертым. Получим

$$\begin{aligned}
-a B \partial_4 \varphi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \varphi_2 &= \frac{m_d c}{2 \hbar} (\alpha + \beta) \varphi_1, \\
a B \partial_4 \varphi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \varphi_1 &= \frac{m_d c}{2 \hbar} (\alpha + \beta) \varphi_2,
\end{aligned} \tag{10}$$

где  $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и  $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ .

Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{aligned}
a B \partial_4 \chi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \chi_2 &= \frac{m_d c}{2 \hbar} (\beta - \alpha) \chi_1, \\
-a B \partial_4 \chi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \chi_1 &= \frac{m_d c}{2 \hbar} (\beta - \alpha) \chi_2,
\end{aligned} \tag{11}$$

где  $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$  и  $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$ .

Для лептонов мы полагаем

$$\alpha = \beta = 1.$$

Поэтому получим следующие две системы уравнений

$$\begin{aligned}
-a B \partial_4 \varphi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \varphi_2 &= \frac{m_d c}{\hbar} \varphi_1, \\
a B \partial_4 \varphi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \varphi_1 &= \frac{m_d c}{\hbar} \varphi_2
\end{aligned} \tag{12}$$

и

$$\begin{aligned}
a B \partial_4 \chi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \chi_2 &= 0, \\
-a B \partial_4 \chi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + i B \partial_3) \chi_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Первая система относится к нижнему черному лептону (например электрону). Вторая система относится к соответствующему верхнему черному лептону (например электронному нейтрино) с массой, равной нулю. Из сравнения полученных уравнений с аналогичными уравнениями для белых лептонов (см. формулы (27), (28) Глава 4.4.) следует, что эти уравнения отличаются коэффициентами при производной по времени. Как указанное отличие отражается на движении разноцветных лептонов, доступном для экспериментальной проверки, предстоит выяснить.

## V. ТАБЛИЦА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ – ЛЕПТОНОВ

В Главе 4.3. и настоящей Главе показано, что волновая функция белых и черных лептонов в стандартном представлении распадается на две двухкомпонентные волновые функции, то есть эти лептоны представлены верхней и нижней частицами. Отсюда имеем следующую таблицу лептонов.

### 1. Лептоны первого поколения

лептоны	белые	черные
верхние	$\nu_{e_w}$	$\nu_{e_b}$
нижние	$e_w$	$e_b$

### 2. Лептоны второго поколения

лептоны	белые	черные
верхние	$\nu_{\mu_w}$	$\nu_{\mu_b}$
нижние	$\mu_w$	$\mu_b$

### 3. Лептоны третьего поколения

лептоны	белые	черные
верхние	$\nu_{\tau_w}$	$\nu_{\tau_b}$
нижние	$\tau_w$	$\tau_b$

## VI. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Волновая функция нерелятивистского лептона есть вектор алгебры Клиффорда  $\mathbb{C}_3$ .
- Волновая функция нижнего и верхнего черного лептонов одного поколения есть вектор алгебры Клиффорда  $\mathbb{C}_b$ .
- Волновые функции черных лептонов разных поколений отличаются друг от друга циклической

перестановкой трех образующих базисных векторов.

- Компоненты волновой функции  $\Psi^0 + \Psi^{34}$ ,  $\Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\Psi^{123} - \Psi^{124}$ ,  $\Psi^0 - \Psi^{34}$  относятся к разным фундаментальным частицам – черным лептонам. Этот вывод опирается на следующие соображения.

1. Полученные квантовые уравнения для черных лептонов в стандартном представлении можно представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относится к двухкомпонентной волновой функции.
2. Независимость указанных двух систем уравнений друг от друга позволяет отнести эти системы уравнений к разным частицам, причем одна из этих частиц имеет массу, отличную от нуля, а другая имеет массу, равную нулю.
3. При переходе от обобщенных уравнений (9) к уравнениям Дирака, когда составляющие кватернионные компоненты  $\Psi^{34}$  и  $\Psi^{124}$  приравниваются  $\Psi^0$  и  $\Psi^{123}$  соответственно, компонента  $\Psi^0$  переходит в *левую* компоненту волновой функции Дирака, а компонента  $\Psi^{123}$  переходит в *правую* компоненту волновой функции Дирака.

- Установлено следующее соответствие между компонентами волновой функции и черными лептонами первого поколения. Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где  $A$  принимает значения

32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,

разбиваются на четыре части:

$$\begin{aligned}
 & \text{левая компонента черного электрона} \\
 e_L &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) + \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}), \\
 & \text{правая компонента черного электрона} \\
 e_R &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) + \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\
 & \text{левая компонента черного } e\text{-нейтрино} \\
 \nu_{eL} &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) - \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\
 & \text{правая компонента черного } e\text{-нейтрино} \\
 \nu_{eR} &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) - \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}).
 \end{aligned}$$

- Компоненты волновых функций черных лептонов второго и третьего поколений отличаются от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов:

$$\begin{aligned}
 & \text{для мюона и } \mu\text{-нейтрино} && 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3; \\
 & \text{для } \tau\text{-лептона и } \tau\text{-нейтрино} && 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2.
 \end{aligned}$$

## Глава 4.6 Цветовое взаимодействие электронов

### I. ЦВЕТОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ

В этой Главе мы рассматриваем короткодействующее притяжение между электронами, необходимость введения которого вытекает из анализа симметрий волновых функций фундаментальных частиц.

В Главе 3.4. в качестве алгебраической основы для описания фундаментальных частиц, прежде всего лептонов и кварков, рассматривались симметрии компонент волновой функции. На нерелятивистском уровне для частиц со спином имеем два типа волновых функций, одна из которых является вектором алгебры Клиффорда и соответствует лептону. Естественно второй тип волновой функции отождествить с кварками. На релятивистском уровне волновая функция кварков разделяется на три разновидности, которые также естественно отождествить с кварками трёх цветов. Однако на этом же уровне волновая функция лептонов разделяется на две разновидности, и ничего не остается, как предположить, что лептоны (в частности электрон) двухцветны.

Таким образом, математическая природа волновых функций электронов двух видов и волновых функций кварков трех видов одинакова. Но с кварками трех видов – синим, красным и желтым – мы связываем сильное взаимодействие (или цветовое притяжение), превосходящее силы электромагнитного взаимодействия. Отсюда следует, что электроны двух видов – белые и черные – нужно наделять силами цветового притяжения. Нет оснований считать силы цветового притяжения между электронами соизмеримыми с силами цветового притяжения между кварками, но можно предположить, что силы цветового притяжения между электронами являются короткодействующими и на некотором расстоянии превосходят кулоновские силы отталкивания. Так, как это имеет место для цветового взаимодействия кварков.

Квантовая механика фактически в неявном виде описывает притяжение электронов, используя понятие *обменной энергии*. Однако, с нашей точки зрения, *непосредственное* введение короткодействующего притяжения между электронами сообщит нашим представлениям ясность и определенность.

Возможно, что изучение цветового взаимодействия электронов поможет при реконструкции цветового взаимодействия кварков.

Представление о цветовом притяжении электронов активно воспринято В. Б. Щербатским и его сотрудниками<sup>1</sup>. Далее мы будем широко использовать высказанные ими соображения.

<sup>1</sup> Хорошавин Л. Б., Щербатский В. Б., Якушина Е. В. *Мультиэлектрон – основа сверхпроводимости*. Объединенный

### II. МУЛЬТИЭЛЕКТРОН

На рис. 1. показаны силы, действующие на разноцветные электроны, в зависимости от расстояния между ними. Среди них сила отталкивания – сила Кулона  $f_k$  (1), сила цветового притяжения  $f_{ц}$  (2) и результирующая сила  $f_p = f_k + f_{ц}$  (3).

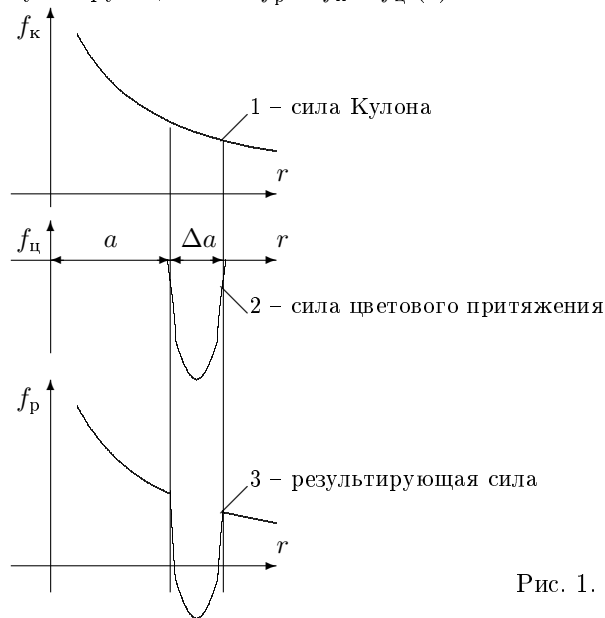


Рис. 1.

Из рисунка видно, что два электрона разного цвета – белый и черный, – оказавшись на определенном расстоянии друг от друга, притягиваются друг к другу и образуют единый объект – электронную пару. Символически она показана на рис. 2.



Рис. 2.  
2-электрон



Рис. 3.  
4-электрон

Указанное расстояние назовем *характерным* и обозначим  $a$ . Диапазон расстояний, в пределах которых сила цветового притяжения больше кулоновской силы отталкивания

$$-f_{ц} > f_k,$$

обозначим  $\Delta a$ . При расстоянии между электронами

меньше  $a$  кулоновская сила отталкивания больше силы цветового притяжения

$$f_k > -f_c$$

и электроны удаляются друг от друга. При увеличении расстояния между электронами больше  $a + \Delta a$  кулоновская сила отталкивания также становится больше силы цветового притяжения и электронная пара распадается.

Существует несколько явлений, исследуя которые физики столкнулись с необходимостью введения электронной пары. Это

- порядок заполнения электронами орбиталей атомов;
- химическая связь при соединении атомов в молекулы;
- кристаллическая структура вещества;
- явление сверхпроводимости.

Представление о цветовом притяжении электронов дает опору для введения такого объекта, как электронная пара. И, наоборот, существование электронной пары является косвенным подтверждением существования электронов двух типов.

Используя потенциал Юкавы для описания короткодействующего цветового взаимодействия электронов, В. Б. Щербатский с сотрудниками получили следующее значение для характерного расстояния электронной пары:

$$a \approx 15 \cdot 10^{-12} \text{ м} \quad \text{и} \quad \Delta a \approx 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Далее они справедливо указали, что в общем случае под действием цветового притяжения любое число пар разноцветных электронов может образовать единый объект. Они назвали его *мультиэлектрон*. В частности, две электронные пары, оказавшись вблизи друг друга, соединяются силами цветового притяжения в единый объект, содержащий четыре электрона – два белых и два черных (рис. 3).



Рис. 4.  
6-электрон

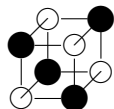


Рис. 5.  
8-электрон

Из условия симметрии можно предположить, что 6-электрон состоит из электронов, находящихся в углах шестиугольника (рис. 4), а 8-электрон можно представить состоящим из электронов, находящихся в углах куба (рис. 5). Можно предположить, что электроны в мультиэлектроне могут располагаться вдоль линии (в частности, вдоль замкнутой линии) или вдоль поверхности.

Мультиэлектрон *бесцветен*, то есть содержит одинаковое число белых и черных электронов.

Характерный размер мультиэлектрона может меняться в зависимости от конфигурации и величины цветовых, электрических и магнитных полей как собственных, так и внешних, а также от движения мультиэлектрона. Возбуждение мультиэлектрона или электронной пары, то есть сообщение им кинетической энергии, может привести к разрушению мультиэлектрона или электронной пары. И, наоборот, уменьшение кинетической энергии электронов приводит к образованию электронных пар и мультиэлектронов.

### 1. Энергия цветовой связи

Энергия цветовой связи или *энергия связи цветового взаимодействия электронов*, которую обозначим  $W_c$ , численно равна энергии отталкивания электронов, находящихся на характерном расстоянии друг от друга

$$W_c = e \cdot \varphi(a).$$

Здесь  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$  – электрический заряд электрона,  $\varphi$  – электрический потенциал на характерном расстоянии от заряда

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \frac{e}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} = \\ &= \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \text{ Кл} \cdot \text{ В} \cdot \text{ м}}{4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \text{ Кл} \cdot 15 \cdot 10^{-12} \cdot \text{ м}} = 96 \text{ В}. \end{aligned}$$

( $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{ Кл}}{\text{ В} \cdot \text{ м}}$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.)

Отсюда энергия цветовой связи равна

$$W_c \approx 96 \text{ эВ}.$$

Для сравнения напомним, что энергия химической связи равна

$$W_x \approx 5 \text{ эВ}.$$

## III. ЭЛЕКТРОННАЯ СТРУКТУРА АТОМОВ. ПРИНЦИП ПАУЛИ. ПРАВИЛО ХУНДА

Электронная структура атомов определяется

- квантовыми условиями, накладываемыми на действие электронов;
- принципом Паули;
- правилом Хунда.

Цветовое притяжение электронов позволяет представить механизм, приводящий к выполнению принципа Паули. Разноцветные электроны, оказавшиеся

силу квантовых условий на характерном расстоянии друг от друга, притягиваются друг к другу. Магнитные моменты электронов вступают в магнитное взаимодействие и разворачиваются друг по отношению к другу. Вследствие этого спины электронов приобретают противоположное направление. Указанный механизм приводит к тому, что электронная пара и мультиэлектрон являются бозонами с нулевым спином.

Рассмотрим последовательность заполнения электронами орбиталей некоторого, условно первого, атомного энергетического подуровня. Первый электрон располагается на *внутренней* (первой) орбитали подуровня, следующий электрон располагается на второй орбитали и так далее, пока последний электрон не займет *внешнюю* (последнюю) орбиталь подуровня.

Появление электрона на следующем, условно втором, подуровне приводит к сжатию пространственной области, занимаемой первым подуровнем. В результате первая и последующая орбитали сближаются настолько, что расстояние между первым и вторым электронами уменьшается до характерного. Второй электрон притягивается к первому и перескакивает на первую орбиталь. Вторая орбиталь освобождается, и все неспаренные электроны смещаются на одну орбиталь внутрь первого подуровня. При этом электрон второго подуровня оказывается на внешней орбитали первого подуровня. При новом появлении электрона на втором подуровне по этому же алгоритму происходит заполнение второй орбитали двумя электронами, связанными между собой силой цветового притяжения. И так далее, пока последняя орбиталь не заполнится двумя электронами. Рассмотренный здесь процесс соответствует *правилу Хунда* – правилу заполнения электронами орбиталей энергетического подуровня.

При возбуждении атома и сообщении внешней электронной паре кинетической энергии электроны этой пары удаляются друг от друга настолько, что выходят из зоны цветового притяжения. Один из электронов, отталкиваясь от другого, переходит на соседнюю внешнюю орбиталь. При этом все неспаренные электроны смещаются на одну внешнюю орбиталь.

#### IV. ОРГАНИЗАЦИЯ МОЛЕКУЛ

Атомы притягиваются друг к другу и образуют молекулы. Механизм образования молекул таков. Разноцветные электроны разных атомов притягиваются друг к другу и образуют центральный мультиэлектрон – отрицательно заряженный центр, к которому притягиваются положительные ионы атомов. Таким образом, в основе химической связи лежит цветовое притяжение между электронами. Цветовое притяжение электронов не только удерживает электроны друг около друга, но и преодолевает кулоновские силы отталкивания между ионами атомов. Цветовое притяжение осуществляется между электронами, находя-

щимися на внешних орбиталях атомов. Число электронов, отдаваемых атомом в мультиэлектрон (или несколько мультиэлектронов), есть валентность атома.

#### 1. Двухатомные молекулы

Здесь полезно вспомнить, что различают два вида молекулярной химической связи:

- гетерополярную, осуществляющуюся, например, в молекуле поваренной соли  $NaCl$ , и
- гомеополярную, или ковалентную, осуществляющуюся, например, в молекуле  $H_2$ .

Эти связи имеют разное объяснение. В первом случае связь вызвана *отдачей* электрона щелочным металлом и *захват* его галогеном, в результате чего образуется два разных по знаку иона, которые затем притягиваются благодаря силе Кулона и образуют молекулу. Ковалентная связь не может быть объяснена иначе, чем образованием электронной пары, когда каждый электрон пары атомов принадлежит обоим атомам. Указанные два объяснения противоречат той точке зрения, что химическая связь должна иметь универсальное объяснение. Противоречие снимается, если считать, что электронная пара или мультиэлектрон образуются в любом случае, но гетерополярная связь отличается от ковалентной тем, что электронная пара или мультиэлектрон смещены к одному из атомов. Величина смещения определяет молекулярную связь, занимающую промежуточное положение между гетерополярной и гомеополярной связями.

##### 1.1. Молекула водорода $H_2$

При сближении атомов водорода с электронами разного цвета электроны притягиваются друг к другу и образуют электронную пару, к которой, в свою очередь, притягиваются ядра атомов (рис. 6). В результате образуется молекула водорода  $H_2$ .

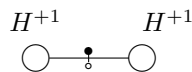


Рис. 6.  
Молекула водорода  $H_2$

Можно попытаться представить себе последовательность событий, в результате которых два атома водорода преобразуются в молекулу водорода.

В соответствии с боровской моделью каждый атом водорода содержит ядро (протон) – положительно заряженный центр  $H^{+1}$  и электрон, вращающийся вокруг ядра по орбите – окружности радиуса  $r_e$  со скоростью  $v_e$ . Момент импульса электрона

$$L_e = m_e \cdot v_e \cdot r_e .$$

Электромагнитное излучение атома водорода сопровождается уменьшением радиуса орбиты электрона.

Рассматривая объединение двух атомов водорода в молекулу, нужно разделить два случая.

Первый случай. Электроны обоих атомов вращаются в одну сторону (например, по часовой стрелке). В этом случае момент импульса электронов обоих атомов равен  $2 \cdot L_e$ .

После того, как атомы сближаются настолько, что электроны попадают в зону притяжения друг друга, их вращательное движение относительно ядер прекращается. В силу закона сохранения момента импульса после этого начинается вращение ядер атомов по орбите относительно электронной пары (рис. 6.1). Эта орбита представляет собой окружность радиуса

$$r_p \approx r_e.$$

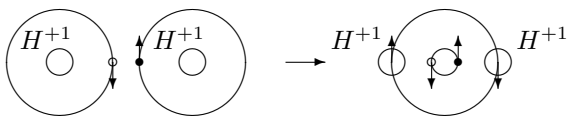


Рис. 6.1.  
Образование молекулы водорода  $H_2$

Если пренебречь моментом импульса электронной пары, то получим момент импульса ядра

$$L_p \approx L_e.$$

Отсюда для скорости движения ядра по орбите имеем

$$v_p \approx v_e \cdot \frac{m_e}{m_p}.$$

Электромагнитное излучение молекулы водорода сопровождается уменьшением радиуса орбиты ядра.

Электроны в электронной паре вращаются против часовой стрелки. Момент импульса электронной пары равен

$$L_{2e} = -m_e \cdot v_e \cdot a.$$

Можно представить себе, что после объединения атомов водорода электроны в электронной паре вращаются по часовой стрелке. Это произойдет, если орбиты электронов объединяющихся атомов пересекаются (рис. 6.2).

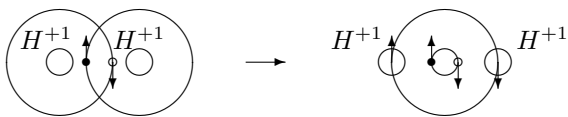


Рис. 6.2.

Положительный момент импульса электронной пары.

Второй случай. Электроны обоих атомов вращаются в разные стороны. В этом случае момент импульса электронов обоих атомов равен нулю. Суммарный импульс обоих атомов также равен нулю.

После того, как атомы сближаются настолько, что электроны попадают в зону притяжения друг друга, их вращательное движение относительно ядер прекращается и переходит в поступательное движение электронной пары. При этом импульс электронной пары равен

$$p_{2e} = 2 \cdot m_e \cdot v_e.$$

В силу закона сохранения импульса после этого начинается поступательное движение ядер атомов в сторону, противоположную движению электронной пары (рис. 6.3). Скорость поступательного движения ядер равна

$$v_p = -v_e \cdot \frac{m_e}{m_p}.$$

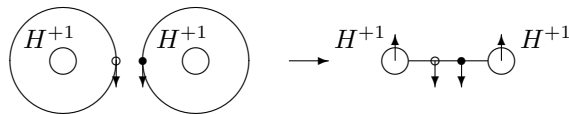


Рис. 6.3.  
Образование молекулы водорода  $H_2$

Таким образом, электронная пара, с одной стороны, и ядра атомов, с другой стороны, совершают колебательное движение в противофазе друг относительно друга.

При нагревании молекулярного водорода, благодаря тепловому движению электронов, расстояние между электронами в электронной паре увеличивается. Когда расстояние между электронами в электронной паре становится больше, чем  $a + \Delta a$ , электронная пара распадается и молекулярный водород превращается в атомарный

$$H_2 = 2 \cdot H.$$

Энергия, необходимая для разложения молекулярного водорода, составляет

$$W = 436 \frac{\text{кДж}}{\text{моль}}.$$

Если учесть, что в одном моле содержится

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$$

молекул, то энергия, необходимая для распада электронной пары, равна

$$W_1 = \frac{W}{N_A} = \frac{436 \cdot 10^3 \cdot \text{Дж}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 72,4 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

Воспользуемся этой энергией для оценки диапазона расстояний  $\Delta a$ , в пределах которых сила цветового притяжения больше кулоновской силы отталкивания. Таким образом, для расстояний  $a < r < a + \Delta a$  имеем

$$-f_{ц} > f_{к}.$$

Отсюда следует, что для диапазона расстояний  $\Delta a$  работа силы цветового притяжения  $A_{ц}$  и работа кулоновской силы отталкивания  $A_{к}$  связаны соотношением

$$-A_{ц} > A_{к}.$$

Так как энергия  $W_1$  направлена на компенсацию работы силы цветового притяжения  $A_{ц}$ , то должно выполняться

$$W_1 = -A_{ц}.$$

Отсюда имеем соотношение

$$W_1 > A_{к},$$

пользуясь которым оценим величину диапазона  $\Delta a$ . Таким образом, исходим из соотношения

$$W_1 > e \cdot (\varphi(a) - \varphi(a + \Delta a)),$$

или

$$W_1 > e \cdot \varphi(a) \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Отсюда получим соотношение

$$\begin{aligned} \Delta a &< \frac{W_1 \cdot a}{e \cdot \varphi(a)} = \\ &= \frac{72,4 \cdot 10^{-20} \text{ Кл} \cdot \text{В} \cdot 15 \cdot 10^{-12} \text{ м}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \text{ Кл} \cdot 96 \cdot \text{В}} = 0,7 \cdot 10^{-12} \text{ м}. \end{aligned}$$

Таким образом, полученное значение  $\Delta a$  на порядок меньше значения, указанного в Разделе II.

Атом водорода в молекуле  $H_2$ , отдав электрон, превращается в положительно заряженный ион  $H^+$ . Поэтому со стороны иона  $H^+$  молекула водорода содержит положительный заряд. Этот заряд при достаточно низких кинетических энергиях может притягиваться к электронной паре соседней молекулы водорода. При этом возникает новая связь между молекулами, которую можно назвать *водородной*. Эта связь определяет кристаллические свойства водорода при низких температурах.

### 1.2. Молекула кислорода $O_2$

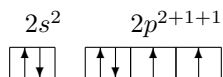


Рис. 7. Внешний энергетический уровень атома кислорода

Электронная структура внешнего уровня атома кислорода показана на рис. 7. Из нее видно, что в образовании молекулы  $O_2$  участвуют два неспаренных электрона  $2p^{1+1}$ , которые каждый атом кислорода отдает в центральный мультиэлектрон. В результате в центре молекулы  $O_2$  находится 4-электрон, состоящий из двух электронных пар (рис. 8).

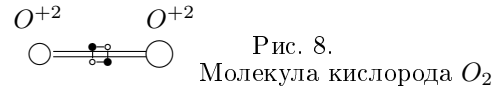


Рис. 8. Молекула кислорода  $O_2$

Из того факта, что газ  $O_2$  парамагнитен, то есть молекулы  $O_2$  содержат неспаренные электроны, следует, что после того, как два электрона  $2p^{1+1}$  отданы атомом кислорода в 4-электрон, внешняя электронная пара  $2p^2$  разваливается, что и вызывает парамагнетизм кислорода.

### 1.3. Молекула азота $N_2$

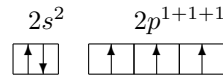


Рис. 9. Внешний энергетический уровень атома азота

Электронная структура внешнего уровня атома азота показана на рис. 9. При соединении в молекулу  $N_2$  каждый атом азота отдает в центральный мультиэлектрон три электрона. В результате ионы азота группируются около 6-электрона (рис. 10).

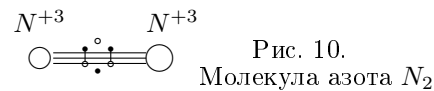


Рис. 10. Молекула азота  $N_2$

Нужно заметить, что притяжение между положительным ионом, входящим в состав одной молекулы, и мультиэлектроном другой молекулы особенно ярко проявляется по отношению к иону водорода, так как он не содержит остаточной электронной оболочки. Для других ионов, например  $N^{+3}$  в рассматриваемом случае, положительный заряд закрыт (экранирован) зарядами внутренней (остаточной) электронной оболочки. Поэтому следует считать, что указанная связь, которую мы назовем *ионной*, слабее водородной связи.



## 2. Трехатомные молекулы

### 2.1. Молекула воды $H_2O$

Установлено, что в молекуле воды атом кислорода находится в вершине, а атомы водорода находятся в углах равнобедренного треугольника. Уже этот факт доказывает существование мультиэлектрона, в этом случае 4-электрона. Действительно, если бы молекулярная связь в  $H_2O$  обеспечивалась бы двумя не связанными между собой электронными парами, то геометрическая структура молекулы  $H_2O$  была бы другой. Все три атома находились бы на одной прямой. В 4-электрон молекулы воды атом кислорода отдает два неспаренных электрона, а атомы водорода соответственно по одному.

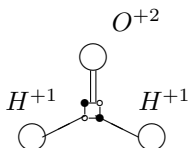


Рис. 11.  
Молекула воды

Ионы кислорода и водорода окружают центральный 4-электрон, притягиваясь к нему и отталкиваясь друг от друга (рис. 11). Именно этим объясняется вышеуказанная конфигурация молекулы воды.

Ионы водорода одной молекулы воды могут притягиваться к 4-электрону другой молекулы воды. Кроме того, оказавшись достаточно близко к остаточной электронной оболочке иона кислорода другой молекулы воды, ион водорода притягивается к ней. Так проявляется водородная связь в молекулах воды. Эта связь определяет свойства воды и ее кристаллов.

### 2.2. Молекула окиси серы $SO_2$

Электронная структура внешнего энергетического уровня атома серы в молекуле  $SO_2$  показана на рис. 12.

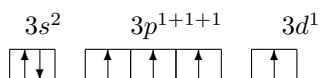


Рис. 12. Внешний энергетический уровень атома серы

При соединении в молекулу атом серы отдает в центральный мультиэлектрон четыре неспаренных электрона. Атомы кислорода отдают в центральный мультиэлектрон по два неспаренных электрона. Таким образом, в центре молекулы  $SO_2$  находится 8-электрон

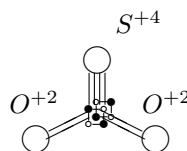


Рис. 13.  
Молекула окиси серы

Ионы серы и кислорода окружают центральный 8-электрон, притягиваясь к нему и отталкиваясь друг от друга (рис. 13). Указанное обстоятельство соответствует установленному факту, что в молекуле  $SO_2$  атом серы находится в вершине, а атомы кислорода в углах равнобедренного треугольника. В свою очередь, этот факт доказывает существование 8-электрона.

Таким образом, представление о мультиэлектроне позволяет объяснить планиметрию трехатомных молекул.

## 3. Четырехатомные молекулы

Четырехатомную молекулу рассмотрим на примере молекулы аммиака  $NH_3$ .

Электронная структура внешнего энергетического уровня атома азота показана на рис. 9. При соединении в молекулу аммиака  $NH_3$  атом азота отдает в центральный мультиэлектрон три неспаренных электрона. Атомы водорода отдают в центральный мультиэлектрон по одному электрону. Таким образом, в центре молекулы  $NH_3$  находится 6-электрон. Ионы азота и водорода окружают центральный 6-электрон, притягиваясь к нему и отталкиваясь друг от друга (рис. 14).

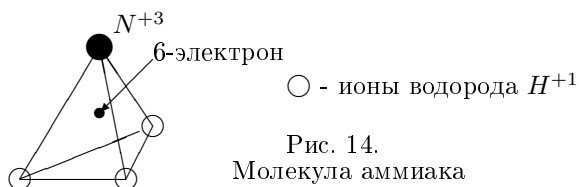


Рис. 14.  
Молекула аммиака

Указанное обстоятельство соответствует установленному факту, что в молекуле  $NH_3$  атом азота находится в вершине, а атомы водорода в углах основания пирамиды. Представление о мультиэлектроне (в настоящем случае о 6-электроне) позволяет объяснить стереометрию четырехатомных молекул.

## 4. Пятиатомные молекулы

Пятиатомную молекулу рассмотрим на примере молекулы метана  $CH_4$ . Электронная структура внешнего энергетического уровня атома углерода в этом соединении показана на рис. 15. Из нее видно, что атом углерода отдает в связующие мультиэлектроны четыре неспаренных электрона.

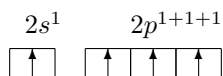


Рис. 15. Внешний энергетический уровень атома углерода

Установлено, что в молекуле метана атомы водорода расположены в вершинах тетраэдра, а атом углерода в центре тетраэдра (рис. 16). Это означает, что химическая связь в молекуле метана обеспечивается четырьмя электронными парами, в которые атом углерода отдает четыре электрона, а атомы водорода по одному.

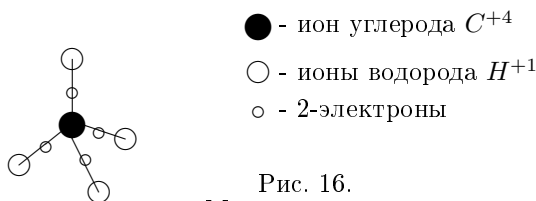


Рис. 16.  
Молекула метана

Можно представить себе другую модель молекулы метана (рис. 17), когда атом углерода отдает четыре электрона в центральный мультиэлектрон. Атомы водорода отдают в центральный мультиэлектрон по одному электрону. Таким образом, в этой модели в центре молекулы находится 8-электрон.

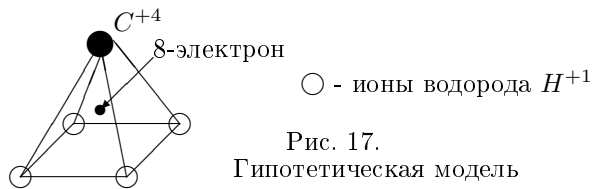


Рис. 17.  
Гипотетическая модель молекулы метана

Ионы углерода и водорода, притягиваясь к центральному 8-электрону и отталкиваясь друг от друга, располагаются в углах пирамиды с квадратным основанием. Остается неясным, почему эта модель молекулы метана не реализуется в природе.

### 5. Молекула бензола

Цветовое притяжение электронов позволяет представить молекулу бензола  $C_6H_6$  следующим образом (рис. 18). В ее организации участвуют четыре электрона внешнего уровня каждого из атомов углерода (рис. 15) и один электрон каждого атома водорода. Все атомы лежат в одной плоскости. Электроны каждого атома углерода распределены по связующим мультиэлектронам следующим образом. Один электрон направляется в центральный 6-электрон. Ионы углерода притягиваются к центральному 6-электрону

и располагаются в углах шестигранника. Два электрона направляются в два 2-электрона между соседними ионами углерода. И четвертый электрон участвует в 2-электроне вместе с электроном атома водорода.

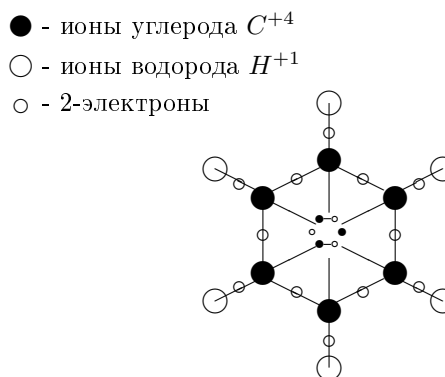


Рис. 18.  
Молекула бензола

Построенная таким образом молекула бензола обосновывает модель молекулы бензола, предложенную Л. Полингом.

Можно представить себе другую – объемную – модель молекулы бензола, когда каждый атом углерода отдает три электрона в центральный 18-электрон. Ионы углерода, притягиваясь к центральному 18-электрону и отталкиваясь друг от друга, располагаются в углах октаэдра. Как и прежде, четвертый электрон углерода и электрон водорода образуют связующий 2-электрон между ионом углерода и ионом водорода. Остается неясным, почему эта модель молекулы бензола не реализуется в природе.

## V. КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА

Прочность и устойчивость кристаллической решетки, а также ее конфигурация определяются тремя факторами:

- 1) притяжением разноцветных электронов, расположенных вдоль ребер решетки;
- 2) квантовыми условиями, накладываемыми на действие электронов, ионов атомов и атомов, участвующих в формировании кристалла;
- 3) силами Кулона между электронными парами и ионами атомов, расположенными в узлах кристаллической решетки.

### 1. Поваренная соль $NaCl$

Электронная структура внешних энергетических уровней атома натрия в этом соединении показана на рис. 19.

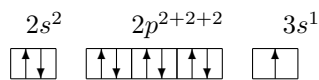


Рис. 19. Внешние энергетические уровни атома натрия

В формировании кристалла поваренной соли участвуют семь электронов атома натрия  $2p^{2+2+2}3s^1$ . Электронная структура внешнего энергетического уровня атома хлора в этом соединении показана на рис. 20.

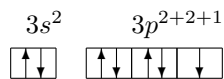


Рис. 20. Внешний энергетический уровень атома хлора

В формировании кристалла поваренной соли участвуют пять электронов атома хлора  $3p^{2+2+1}$ . В кубической решетке поваренной соли каждый атом натрия связан с шестью атомами хлора, и, напротив, каждый атом хлора связан с шестью атомами натрия. Каждая связь соответствует двум электронам, объединенным в электронную пару силами цветового притяжения. Общее число электронов, участвующих в образовании кристаллической решетки, приходящихся на два атома, равно двенадцати. Семь из них предоставляет атом натрия ( $2p^{2+2+2}3s^1$ ), пять – атом хлора ( $3p^{2+2+1}$ ).

## 2. Металлическая связь

Внешние электроны в кристаллической решетке металлов можно разделить на две группы. Электроны первой группы объединяются в электронные пары, которые располагаются на ребрах решетки и обеспечивают прочность и устойчивость решетки. Эти электроны не перемещаются под действием внешнего электрического поля и обеспечивают устойчивость решетки до температуры плавления металла. Электроны другой группы – электроны проводимости – имеют возможность перемещаться под действием внешнего электрического поля и обеспечивают электропроводность металла. Они составляют так называемый электронный газ.

### 2.1. Натрий

Натрий имеет объемноцентрированную кристаллическую решетку, то есть атомы натрия располагаются в углах и центре элементарного куба. Отсюда формирование кристаллической решетки натрия можно представить себе следующим образом. Шесть электронов подуровня  $2p^{2+2+2}$  каждого атома натрия,

находящегося в углах куба, принимают участие в организации кристаллической решетки. Атомы натрия, расположенные в центре кубов, попадают туда благодаря квантовым условиям, накладываемым на действие электронов, ионов атомов и атомов, участвующих в формировании решетки. Неспаренные внешние электроны ( $3s^1$ ) всех атомов натрия образуют электронный газ, обеспечивающий электропроводность натрия. Движение электронного газа под действием внешнего поля не разрушает кристаллическую решетку. И вообще кристаллическая решетка не разрушается до тех пор, пока не разрушены электронные пары ребер кубов.

### 2.2. Литий

Особенно интересно представить формирование кристаллической решетки лития. Дело в том, что кристаллическая решетка лития, как и решетка натрия, является объемноцентрированной. Но число электронов в атоме лития равно трем (рис. 21).

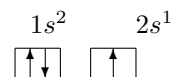


Рис. 21. Энергетические уровни атома лития

Из сравнения с вышерассмотренным случаем кристаллической решетки натрия следует, что количества электронов лития не хватает для формирования кристаллической решетки и электронного газа. Отсюда порядок формирования кристаллической решетки лития представляется следующим образом. Восемь атомов лития участвуют в формировании элементарного куба. Они располагаются по углам куба и предоставляют для этого все электроны. Их число  $8 \cdot 3 = 24$ . Эти электроны образуют двенадцать электронных пар, расположенных на ребрах куба и обеспечивающих его прочность и устойчивость. Такие кубы обеспечивают прочность и устойчивость кристаллической решетки в целом.

Квантовые условия, накладываемые на действие электронов, ионов атомов и атомов, участвующих в формировании решетки, приводят к

- 1) дискретному расположению кубов друг относительно друга (рис. 22);
- 2) расположению атомов лития в центрах кубов и между ними.

Вышеуказанные факторы в результате приводят к формированию объемноцентрированной кристаллической решетки лития<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Следует считать, что квантовые условия, приводящие к дискретному расположению кубов друг относительно друга и

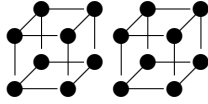


Рис. 22.  
К образованию кристаллической решетки лития

Таким образом, следует считать, что, в отличие от натрия, электроны атомов лития, находящихся в узлах кристаллической решетки (углах кубов), не участвуют в электропроводности лития. Назначение этих электронов состоит в строительстве кристаллической решетки, а электропроводность лития обеспечивается внешними электронами  $1p^1$  центральных атомов. Движение электронного газа под действием внешнего поля не разрушает кристаллическую решетку.

### 3. Графит

Кристаллическую решетку графита можно представить состоящей из плоских элементов двух видов. Первый элемент состоит из двух слоев – условно верхнего и нижнего. Один из слоев, например верхний, показан на рис. 23. Он состоит из шестигранников, в углах которых располагаются ионы углерода. Каждый атом углерода отдает по одному электрону в электронную пару с каждым из трех соседних атомов. В результате вдоль ребер шестигранников располагаются электронные пары, в которых электроны связаны цветовым притяжением и которые обеспечивают жесткость слоя в целом. Второй слой, например нижний, выполнен точно так же. Слои располагаются параллельно друг другу, причем над каждым атомом углерода нижнего слоя располагается атом углерода верхнего слоя. Эти атомы отдают последний валентный электрон в связывающую их электронную пару. В следствие этого слои жестко соединены между собой и образуют самостоятельную единицу кристаллической решетки графита.

расположению атомов в центре кубов, имеют место и для других металлов (например, натрия) с объемноцентрированной кристаллической решеткой.

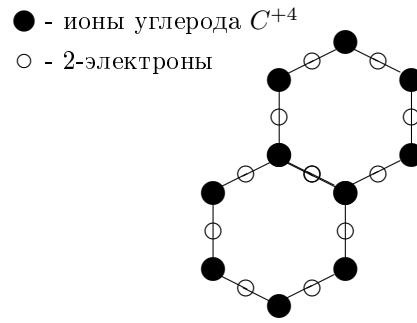


Рис. 23.  
Верхний слой первого элемента решетки графита

Второй элемент кристаллической решетки графита является однослойным. Он показан на рис. 24. Он состоит из шестигранников, в углах которых располагаются 6-электроны. Вдоль ребер шестигранников располагаются атомы углерода, они отдают по два электрона в соседние 6-электроны.

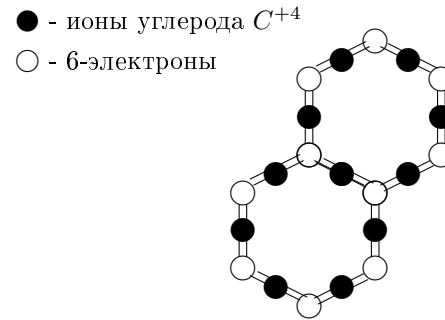


Рис. 24.  
Второй элемент решетки графита

Вышеуказанные элементы – двухслойный и однослойный – располагаются параллельно и удерживаются друг около друга силами Кулона. Ионы углерода двухслойного элемента притягиваются к 6-электронам однослойного элемента, а ионы углерода однослойного элемента притягиваются к электронным парам двухслойного элемента. В результате графит представляет собой своего рода многослойный пирог из перемежающихся между собой элементов первого и второго рода.

## VI. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

Условие сверхпроводимости состоит в том, что электроны проводимости должны быть объединены в коллектив, а квантовые условия должны запрещать отбирать от этого коллектива (рассеивать) энергию. Тогда такой коллективный носитель заряда движется беспрепятственно, без сопротивления, обеспечивая явление сверхпроводимости.

Представление о существовании электронов двух видов и о короткодействующем притяжении между ними заставляет отказаться от электрон-фононового

механизма притяжения между электронами. При этом нужно считать, что расстояние между взаимодействующими электронами равно характерному расстоянию  $\sim 15 \cdot 10^{-12}$  м, а не длине когерентности  $\sim 10^{-9} \div 10^{-6}$  м.

Силы цветового притяжения не только приводят к образованию электронных пар, но и объединяют их в гигантский мультиэлектрон – тот самый коллектив электронов, о котором шла речь выше. А длина когерентности, по-видимому, является линейным размером этого мультиэлектрона. Мультиэлектрон представляет собой коллективное когерентное состояние электронов, вводимое в теории Бардина-Купера-Шриффера.

Диамagnetизм сверхпроводника вызван тем, что под действием внешнего магнитного поля в сверхпроводнике в соответствии с правилом Ленца возникает вращающийся кольцевой мультиэлектрон, который и представляет собой мейснеровский ток.

## VII. ШАРОВАЯ МОЛНИЯ

Основываясь на представлении о цветовом притяжении электронов, можно построить модель шаровой молнии – модель, которая достаточно разумно отвечает на вопросы, возникающие при анализе свидетельств очевидцев природной шаровой молнии.

Ниже приведены эти свидетельства.

- Молния имеет, как правило, форму шара диаметром от нескольких сантиметров до метра. Наиболее часто встречаются шаровые молнии диаметром от десяти до тридцати сантиметров. Отсюда возникает вопрос: чем обеспечивается шаровая форма молнии. По-видимому, должно существовать достаточно сильное поверхностное натяжение на границе, отделяющей шаровую молнию от окружающей среды. Природа такого натяжения остается неясной, если учесть, что оно должно существовать в газовой среде.
- Время существования шаровой молнии составляет от одной секунды до двух минут. Если предположить, что шаровая молния состоит из вещества, находящегося в состоянии плазмы, то для столь долгого ее существования необходима внешняя энергетическая подпитка, которая, по-видимому, отсутствует.
- Шаровая молния имеет холодную поверхность, не излучает теплоту.
- Шаровая молния светится. Мощность свечения составляет 100–200 Вт.
- Движение шаровой молнии сопровождается шипением и потрескиванием.

- Шаровая молния может двигаться вдоль металлических предметов и прилипать к ним. По некоторым оценкам, шаровая молния либо нейтральна, либо имеет небольшой положительный заряд.
- Шаровая молния способна проходить сквозь вещество, например стекло.
- Шаровая молния заканчивает свое существование либо взрывом, либо постепенно угасает, уменьшаясь в диаметре, издавая шипение и потрескивание.
- Шаровая молния взрывается либо при прикосновении к предметам, либо самопроизвольно. По некоторым оценкам, энергия взрыва составляет от нескольких десятков до нескольких сотен килоджоулей.
- При взрыве шаровой молнии повреждаются и выгорают металлические предметы, диэлектрические части остаются целыми.

Предлагаемая модель шаровой молнии выглядит следующим образом. Основополагающей частью шаровой молнии является сферическая оболочка, подобная оболочке надувного шарика. Эта оболочка состоит из разноцветных электронов, уложенных на сферической поверхности в шахматном порядке. Силы, разрывающие шарик, – это силы Кулона, действующие на каждый из электронов со стороны остальных электронов. Силы "натяжения", удерживающие оболочку шарика от разрыва, – это силы цветового притяжения между соседними разноцветными электронами. Иначе говоря, основополагающей частью шаровой молнии является гигантский мультиэлектрон. Внешне оболочка шарика проявляет себя как отрицательно заряженная сфера. Поэтому к ней притягиваются положительные ионы атмосферных газов, прежде всего азота и кислорода, образуя внешнюю положительно заряженную сферу. В результате образуется объект, который можно идентифицировать как шаровую молнию.

Таким образом, шаровую молнию можно представить как сферический конденсатор, внутренняя оболочка которого заряжена отрицательно, а внешняя положительно. После того, как шаровая молния возникла, она не требует энергетической подпитки для своей сохранности. Энергия, сосредоточенная в шаровой молнии, есть энергия электрического поля, заключенного между оболочками. Подобно конденсатору, шаровая молния не излучает теплоту. Вместе с тем можно представить, что разноименные заряды динамически рекомбинируют. Отсюда свечение шаровой молнии и звуковые эффекты (шипение и потрескивание).

Шаровая молния движется в атмосфере подобно надувному шару. При встрече с препятствием натяжение внутренней оболочки нарушается и электроны

разлетаются под действием сил Кулона. Они соединяются с окружающими ионами, образуя сначала атомы, а затем молекулы азота и кислорода. Такие соединения сопровождаются выделением тепловой энергии, сжигающей само препятствие и его окружение.

Рассматривая шаровую молнию как сферический конденсатор, вычислим энергию, сосредоточенную в шаровой молнии, предполагая, что вся эта энергия при взрыве преобразуется в теплоту.

- Пусть радиус шаровой молнии

$$R = 0,1 \text{ м},$$

а характерное расстояние цветового притяжения электронов  $a = 2 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ .

- Отсюда площадь внутренней оболочки шаровой молнии  $S = 4\pi R^2$ , а площадь, приходящаяся на один электрон,

$$s = \frac{\pi a^2}{4}.$$

- Число электронов на внутренней оболочке

$$n = \frac{16\pi R^2}{\pi a^2} = 4 \cdot 10^{20}.$$

- Если учесть, что заряд электрона

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$$

то заряд, сосредоточенный на внутренней оболочке,

$$q = n \cdot e = 64 \text{ Кл}.$$

- Емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{\Delta},$$

где  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}},$$

$\Delta$  – это расстояние между сферическими оболочками шаровой молнии. Примем  $\Delta$  равным радиусу Бора:

$$\Delta = 53 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

- Вычислим величину, обратную емкости сферического конденсатора

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 47 \frac{\text{В}}{\text{Кл}}.$$

- Далее вычислим напряжение между обкладками сферического конденсатора

$$U = \frac{q}{C} = 3000 \text{ В}.$$

- И, наконец, вычислим энергию электрического поля, сосредоточенного между обкладками сферического конденсатора. Эту энергию отождествим с энергией шаровой молнии.

$$W = \frac{Uq}{2} = 96 \text{ кДж}.$$

Эта величина вполне согласуется с существующими оценками энергии шаровой молнии.

Так как заряды оболочек шаровой молнии противоположны по знаку и одинаковы по величине, то изда- лека шаровая молния нейтральна. Вблизи она имеет слабый положительный заряд, так как внешняя оболочка заряжена положительно. При приближении к проводнику шаровая молния своим внешним положительным зарядом наводит в проводнике отрицательный заряд, к которому притягивается.

Приближаясь к диэлектрику, шаровая молния поляризует его. Можно представить, что при соприкосновении шаровой молнии и диэлектрика отрицательный заряд поляризованного слоя диэлектрика компенсирует положительный заряд участка внешней оболочки шаровой молнии и разрушает его. Однако дефектный участок шаровой молнии закрывается положительными зарядами поляризованного слоя диэлектрика. В результате шаровая молния сохраняет свою устойчивость и продвигается внутрь диэлектрика. Также отрицательные заряды поляризованного слоя диэлектрика служат заплатой разрушенного участка внутренней оболочки шаровой молнии. Аналогично можно объяснить выход шаровой молнии из диэлектрика и прохождение шаровой молнии через препятствия, например через стекло.

Постепенное угасание шаровой молнии означает, что компенсация зарядов оболочек происходит постепенно. При этом раздается характерное потрескивание. Притяжение оставшихся разноцветных электронов обеспечивает шаровую форму молнии, но меньшего диаметра. Укрошенная шаровая молния может представлять собой источник энергии более эффективный, чем аккумуляторная батарея. Термин “Укрошенная” означает, что использование электрической энергии шаровой молнии, сопровождающееся разрывом цветовых связей между разноцветными электронами, не должно сопровождаться взрывным уничтожением шаровой молнии, а только уменьшением ее размеров.

### 1. Искусственная шаровая молния

В 2001 году Г. Д. Шабанов и А. И. Егоров на созданной ими установке получили долгоживущий плазмо-

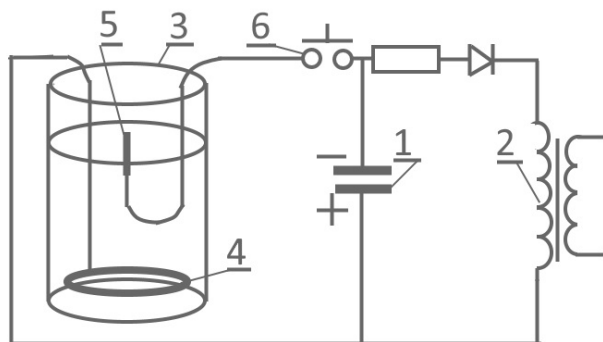


Рис. 25

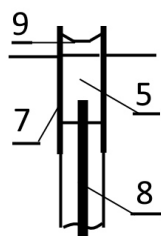


Рис. 26

ид<sup>3</sup>, который может быть отождествлен с природной шаровой молнией.

Схема установки показана на рис. 25 и рис. 26. Установка (рис. 25) содержит конденсатор (1), который запитывается от источника постоянного тока (2), и полиэтиленовую емкость (3) с водой. В емкости (3) установлены два электрода: кольцевой (4), находящийся на дне емкости (3), и центральный (5), расположенный над поверхностью воды. Центральный электрод (5) в отличие от кольцевого электрода (4) изолирован от воды. Кольцевой электрод (4) соединен с положительно заряженной обкладкой конденсатора (1), центральный электрод (5) через разрядник (6) соединен с отрицательно заряженной обкладкой конденсатора (1).

Отметим следующие параметры установки: диаметр полиэтиленовой емкости составляет 0,2 м; конденсатор имеет емкость 600 мкФ и напряжение на обкладках до 5000 В. На рис. 26 показано устройство, сопровождающее центральный электрод (5). Центральный электрод (5) установлен в кварцевой трубке (7) и соединен с медной шиной (8), изолированной от воды и соединенной с разрядником (6).

Кварцевая трубка (7) возвышается над поверхностью воды на несколько миллиметров, центральный электрод расположен на уровне воды. Внутри кварцевой трубки (7) над поверхностью центрального электрода (5) установлена капля воды или водного электролита (9).

Установка работает следующим образом. При замыкании разрядника (6) конденсатор (1) разряжается на кольцевой и центральный электроды. Над центральным электродом возникает плазменная струя, от которой отделяется и плавает в воздухе шаровая молния (шаровой плазмод). Она существует несколько секунд. Диаметр шаровой молнии составляет 0,2 м.

Представление о цветовом притяжении электронов позволяет объяснить указанный опыт.

Предварительно отметим, что капля воды или водного электролита на центральном электроде является строительным материалом для шаровой молнии. Для того, чтобы пояснить это соображение, определим массу воды, которая необходима для создания сферической мультиэлектронной оболочки шаровой молнии, рассмотренной в предыдущем Разделе. Эта оболочка содержит

$$n = 4 \cdot 10^{20}$$

электронов. Это количество набирается из

$$n_{4э} = \frac{n}{4} = 10^{20}$$

4-электронов молекул воды. Следовательно, для создания сферической мультиэлектронной оболочки шаровой молнии необходимо

$$n_{H_2O} = 10^{20}$$

молекул воды. Далее учтем, что в одном моле воды, то есть в 18 граммах воды, содержится число молекул, равное числу Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ . Поэтому масса воды, необходимая для создания сферической мультиэлектронной оболочки шаровой молнии, составляет

$$m_{H_2O} = 18 \text{ г} \frac{n_{H_2O}}{N_A} = 18 \text{ г} \frac{10^{20}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ г}.$$

Это масса капли воды, находящейся на центральном электроде.

При разряде конденсатора в пространстве между поверхностью воды в полиэтиленовой емкости и центральным электродом возникает электрическое поле. Силовые линии напряженности этого поля заполняют область, которую можно рассматривать как часть тора (рис. 27).

Электрическое поле сконцентрировано в "воронке" торовидной части, как раз там, где находится капля воды (9) – строительный материал для оболочки шаровой молнии. Пусть величина указанного электрического поля такова, что приводит к отрыву ионов

<sup>3</sup> Шабанов Г. Д. *Оптические свойства долгоживущих светящихся образований*. 3-я междунар. конф. «Естественные и антропогенные аэрозоли». СПб. 24-27 сентября 2001. с.368-370. Сокр. вариант в Письмах в ЖТФ 2002, т.28, В4, с.81-86.

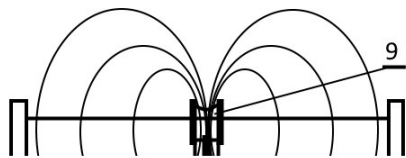


Рис. 27

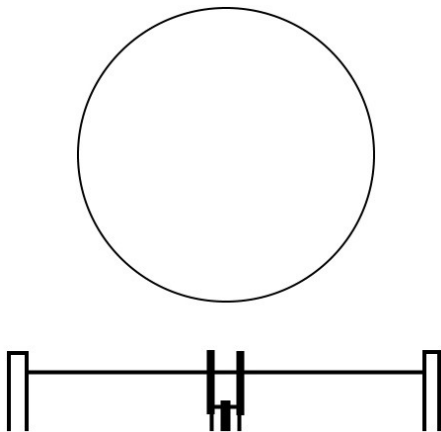


Рис. 28

водорода и кислорода от связующих их 4-электронов, с одной стороны, но при этом 4-электроны сохраняют свою конфигурацию, с другой стороны. Иначе говоря, пусть энергия указанного электрического поля больше энергии химической связи и меньше энергии цветовой связи. В результате освобожденные 4-электроны соединяются между собой силами цветового притяжения в замкнутую оболочку. Эта оболочка раздувается в сферу под действием сил Кулона. Отрицательный заряд центрального электрода выталкивает оболочку сферического мультиэлектрона вверх (рис. 28). Вместе с этим процессом сферический мультиэлектрон участвует в процессе обрастания его ионами водорода и кислорода – процессе, который сопровождается свечением шаровой молнии.

В заключение отметим параметры установки, которые следует считать ключевыми для получения шаровой молнии:

- 1) диаметр емкости 0,2 м и соответственно диаметр торовидной части электрического поля коррелируют с диаметром шаровой молнии;
- 2) напряжение конденсатора до 5000 В коррелирует с напряжением между сферическими оболочками шаровой молнии (см. предыдущий Раздел).

### VIII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- В основе формирования электронной структуры атомов лежит цветовое притяжение электронов

внутренних орбиталей энергетических подуровней, приводящее к выполнению принципа Паули и правила Хунда.

- В основе химической связи лежит цветовое притяжение электронов.
- В основе кристаллической структуры вещества лежит цветовое притяжение электронов, обеспечивающее прочность и устойчивость кристаллической решетки.
- Сверхпроводимость объясняется тем, что силы цветового притяжения не только приводят к образованию электронных пар, но и объединяют их в гигантский мультиэлектрон, представляющий собой коллективное когерентное состояние электронов, вводимое в теории Бардина-Купера-Шриффера.
- Явление *шаровая молния* объясняется цветовым притяжением электронов, объединяющим электроны атмосферных газов в гигантскую сферу.
- Следует согласиться с В. Б. Щербатским, прогнозирующим новую двухцветную электронику и новый источник энергии, использующий энергию мультиэлектрона. Не исключено, что таким источником будет своего рода укрошенная шаровая молния.



# Глава 4.7 Нерелятивистские кварки. Алгебры действия и пространства-времени кварков

## I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Для описания фундаментальных частиц, отличных от лептонов, мы модернизировали алгебру Клиффорда, отказавшись от антикоммутируемости умножения всех базисных векторов образующего пространства.

Теперь, следуя исходному предположению, мы рассматриваем алгебру действия кварков как частный случай алгебры действия фундаментальных частиц  $\mathbb{S}$ , для которого одна часть произведений базисных векторов образующего пространства антикоммутирует, а другая часть – коммутативна. Также алгебра пространства-времени кварков есть частный случай алгебры пространства-времени фундаментальных частиц  $\mathbb{X}$ .

Для того чтобы очевидно выделить этот случай, для алгебры кварков (действия и пространства-времени) вместо обозначения базисных векторов  $\mathbf{e}$  введем обозначение  $\lambda$ , а вместо  $\mathbf{E}$  введем обозначение  $\Lambda$ . Кроме того, введем специальное обозначение для алгебры действия кварков  $\mathbb{Q}$  и специальное обозначение для алгебры пространства-времени кварков  $\mathbb{X}_{\mathbb{Q}}$ .

Эта Глава относится к кваркам, которые названы *нерелятивистскими*. Это название *не означает*, что рассматриваются кварки, движущиеся с скоростью, много меньшей скорости света. Это название означает, что рассматриваются кварки, в формировании волновой функции которых не участвуют времениподобные компоненты, то есть образующее пространство алгебры действия таких кварков полагается подобным геометрическому пространству.

## II. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ КВАРКОВ. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Настоящая Глава посвящена алгебре действия нерелятивистских кварков  $\mathbb{Q}_3$ , образующим пространством которой является пространство, подобное геометрическому, с базисными векторами

$$\lambda_1 \equiv \mathbf{e}_1, \quad \lambda_2 \equiv \mathbf{e}_2, \quad \lambda_3 \equiv \mathbf{e}_3.$$

Предварительно напомним, что кварки объединены в три группы поколений и две группы нижних и верхних кварков:

1 поколение	2 поколение	3 поколение	
$u$	$c$	$t$	верхние
$d$	$s$	$b$	нижние

## 1. Алгебра действия и поколения кварков

Алгебра действия нерелятивистских кварков включает в себя три алгебры, отличающиеся правилами перестановки сомножителей в произведениях базисных векторов образующего пространства.

### 1.1. Алгебра действия кварков первого поколения

В соответствии с Разделом IV.2 Главы 3.4 волновая функция кварков первого поколения определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры кварков

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_2 \circ \lambda_1 &= -\lambda_1 \circ \lambda_2, \\ \lambda_1 \circ \lambda_3 &= \lambda_3 \circ \lambda_1, \\ \lambda_3 \circ \lambda_2 &= -\lambda_2 \circ \lambda_3. \end{aligned} \tag{1}$$

В результате пространственная часть волновой функции кварков имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_a \psi^a + \mathbf{e}_{[21]} \psi^{[21]} + \mathbf{e}_{(13)} \psi^{(13)} + \mathbf{e}_{[32]} \psi^{[32]} + \\ &\quad + \mathbf{e}_{(123)_2} \psi^{(123)_2}. \end{aligned}$$

Перепишем это выражение с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

Получим

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0 + \\ &\quad + \lambda_1 \psi^1 + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_3 \psi^3 + \lambda_{123} \psi^{123} \end{aligned} \tag{2}$$

или в компактной записи

$$\psi = \lambda_A \psi^A,$$

где индекс  $A$  принимает значения

$$A \sim (32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

Алгебру, включающую перестановочные соотношения (1), поставим в соответствие кваркам первого поколения, то есть  $u$  и  $d$  кваркам, и будем обозначать  $\mathbb{Q}(1)$ .

## 1.2. Алгебра действия кварков второго поколения

В соответствии с Разделом IV.2 Главы 3.4 волновая функция кварков второго поколения определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры кварков

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_2 \circ \lambda_1 &= -\lambda_1 \circ \lambda_2, \\ \lambda_1 \circ \lambda_3 &= -\lambda_3 \circ \lambda_1, \\ \lambda_3 \circ \lambda_2 &= \lambda_2 \circ \lambda_3. \end{aligned} \quad (3)$$

В результате пространственная часть волновой функции кварков имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_a \psi^a + \mathbf{e}_{[13]} \psi^{[13]} + \mathbf{e}_{(32)} \psi^{(32)} + \mathbf{e}_{[21]} \psi^{[21]} + \mathbf{e}_{(312)_2} \psi^{(312)_2}.$$

Перепишем это выражение с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(21, 32, 13, 0, 3, 1, 2, 312).$$

Получим

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_0 \psi^0 + \\ &+ \lambda_3 \psi^3 + \lambda_1 \psi^1 + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_{312} \psi^{312} \end{aligned} \quad (4)$$

или в компактной записи

$$\psi = \lambda_A \psi^A,$$

где индекс  $A$  принимает значения

$$A \sim (21, 32, 13, 0, 3, 1, 2, 312).$$

Алгебру, включающую перестановочные соотношения (3), поставим в соответствие кваркам второго поколения, то есть  $s$  и  $\bar{s}$  кваркам, и будем обозначать  $\mathbb{Q}(2)$ .

## 1.3. Алгебра действия кварков третьего поколения

В соответствии с Разделом IV.2 Главы 3.4 волновая функция кварков третьего поколения определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры кварков

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_2 \circ \lambda_1 &= \lambda_1 \circ \lambda_2, \\ \lambda_1 \circ \lambda_3 &= -\lambda_3 \circ \lambda_1, \\ \lambda_3 \circ \lambda_2 &= -\lambda_2 \circ \lambda_3. \end{aligned} \quad (5)$$

В результате пространственная часть волновой функции кварков имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_a \psi^a + \mathbf{e}_{[32]} \psi^{[32]} + \mathbf{e}_{(21)} \psi^{(21)} + \mathbf{e}_{[13]} \psi^{[13]} + \mathbf{e}_{(231)_2} \psi^{(231)_2}.$$

Перепишем это выражение с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(13, 21, 32, 0, 2, 3, 1, 231).$$

Получим

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_0 \psi^0 + \\ &+ \lambda_2 \psi^2 + \lambda_3 \psi^3 + \lambda_1 \psi^1 + \lambda_{231} \psi^{231} \end{aligned} \quad (6)$$

или в компактной записи

$$\psi = \lambda_A \psi^A,$$

где индекс  $A$  принимает значения

$$A \sim (13, 21, 32, 0, 2, 3, 1, 231).$$

Алгебру, включающую перестановочные соотношения (5), поставим в соответствие кваркам третьего поколения, то есть  $t$  и  $b$  кваркам, и будем обозначать  $\mathbb{Q}(3)$ .

Алгебры  $\mathbb{Q}(1)$ ,  $\mathbb{Q}(2)$ ,  $\mathbb{Q}(3)$ , поставленные в соответствие трем поколениям кварков, содержат по двум антикоммутирующим и одному коммутативному соотношениям. Следует ожидать, что это совпадение приведет к совпадению ряда динамических характеристик поколений кварков.

От алгебры  $\mathbb{Q}(1)$ , можно перейти к алгебре  $\mathbb{Q}(2)$  и затем к алгебре  $\mathbb{Q}(3)$ , выполняя циклическую перестановку индексов 1, 2, 3, нумерующих компоненты геометрического вектора. В частности, переход от волновых функций кварков одного поколения к волновым функциям кварков других поколений осуществляется циклической перестановкой индексов, нумерующих компоненты геометрического вектора. При этом само число поколений кварков равно размерности геометрического пространства, то есть трем. Здесь необходимо вспомнить, что в Главе 4.2 Раздел IV. было показано, что переход от волновых функций лептонов одного поколения к волновым функциям лептонов других поколений осуществляется циклической перестановкой

индексов, нумерующих компоненты геометрического вектора, а само число поколений лептонов равно размерности геометрического пространства. Таким образом, мы имеем единую точку зрения, объясняющую как существование поколений фундаментальных частиц, так и их число. Наличие такой точки зрения является необходимым условием построения единой теории взаимодействий.

## 2. Алгебра действия нижних и верхних кварков

Здесь необходимо вспомнить ситуацию, с которой мы столкнулись при описании лептонов. В Главе 4.2. Раздел IV. было установлено, что алгебра Клиффорда  $\mathbb{C}_3$  является алгеброй действия лептонов одного поколения. Наши рассуждения включали два этапа. Сначала мы обобщили алгебру  $\mathbb{C}_3$  до алгебры релятивистских лептонов  $\mathbb{C}_4$ , а затем записали уравнения квантовой механики для этой алгебры. Оказалось, что уравнения распадаются на две независимые системы уравнений, одна из которых относится к верхнему, а другая к нижнему лептонам одного поколения. Если допустить единую точку зрения на алгебраическую структуру лептонов и кварков, то нужно считать, что алгебра кварков  $\mathbb{Q}_3$  является алгеброй действия кварков одного поколения (например  $u$  и  $d$ ). Причем после того, как алгебра  $\mathbb{Q}_3$  будет обобщена до алгебры релятивистских кварков  $\mathbb{Q}_4$  и для нее будут записаны уравнения квантовой механики, эти уравнения должны допустить возможность их записи в виде двух независимых систем уравнений. Одна из этих систем должна относиться к верхнему кварку (например  $u$ ), а другая к нижнему кварку (например  $d$ ) одного поколения. Наличие такой точки зрения на алгебраическую структуру фундаментальных частиц одного поколения является весьма желательным с позиции *единого* подхода к фундаментальным частицам. Именно эту точку зрения мы проводим, постулируя вышеуказанное соответствие алгебр и поколений кварков.

## III. АЛГЕБРА НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ КВАРКОВ. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

### 1. Базисные векторы

В соответствии с выдвинутым предположением алгебра  $\mathbb{Q}_3$  есть алгебра действия кварков. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\lambda_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Этот базисный вектор ничем не отличается от соответствующего вектора  $\varepsilon_0$  алгебры  $\mathbb{C}$ . Однако мы используем другое обозначение для того, чтобы подчеркнуть принадлежность этого век-

тора другой алгебре. Для  $\lambda_0$  имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0.$$

- Образующие векторы  $\lambda_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3. Нужно иметь в виду, что образующее пространство для алгебр  $\mathbb{Q}_3$  и  $\mathbb{C}_3$  одинаково. Поэтому векторы  $\lambda_a$  эквивалентны векторами  $\varepsilon_a$ , пока не рассматривается умножение базисных векторов. Число векторов  $\lambda_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_a = \lambda_a,$$

$$\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_0.$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_a \circ \lambda_b.$$

Здесь  $a \neq b$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из трех элементов по два

$$C_3^2 = 3.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей (условия соседней перестановки), указанные в Разделе I.

- Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_3.$$

Для этих векторов выполняются правила умножения, вытекающие из условия ассоциативности и условий соседней перестановки.

## 2. Умножение базисных векторов

### 2.1. Контравариантная алгебра

Здесь мы отталкиваемся от следующих общих соображений. Базисные векторы  $e_I$  участвуют в построении как контравариантной алгебры действия фундаментальных частиц  $\mathbb{S}$ , так и контравариантной алгебры пространства-времени фундаментальных частиц  $\mathbb{X}$ . Принадлежность вектора или алгебре действия или алгебре пространства-времени определяется размерностью координат вектора. Поэтому, если не рассматривать размерность вектора или считать вектор безразмерным, то можно говорить вообще о *контравариантной алгебре фундаментальных частиц*. Обозначим безразмерную алгебру фундаментальных частиц следующим образом:  $(\mathbb{S}, \mathbb{X})$ . Необходимо отметить, что умножение в контравариантной алгебре

$(\mathbb{S}, \mathbb{X})$  является некоммутативным, поэтому алгебра  $(\mathbb{S}, \mathbb{X})$  существует в двух модификациях: правой  ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})$  и левой  ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})$ . Для правой контравариантной алгебры фундаментальных частиц  ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_I = {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_r C^L_{KI}.$$

Для левой контравариантной алгебры фундаментальных частиц  ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{e}_K = {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_l C^L_{KI}.$$

Кроме того, необходимо отметить, что структурные постоянные

$$C^L_{KI} \sim {}_r C^L_{KI}, \quad {}_l C^L_{KI}$$

участвуют в формировании оператора набла фундаментальной античастицы. Структурные постоянные  ${}_r C^L_{KI}$  участвуют в формировании левого оператора набла, а структурные постоянные  ${}_l C^L_{KI}$  участвуют в формировании правого оператора набла.

Отталкиваясь от вышесказанного, обратимся к алгебре кварков. Базисные векторы  $\lambda_I$  участвуют в построении как контравариантной алгебры действия кварков  $\mathbb{Q}$ , так и контравариантной алгебры пространства-времени кварков  $\mathbb{X}_{\mathbb{Q}}$ . Принадлежность вектора или алгебре действия, или алгебре пространства-времени определяется размерностью координат вектора. Поэтому, если не рассматривать размерность вектора или считать вектор безразмерным, то можно говорить вообще о *контравариантной алгебре кварков*. Обозначим безразмерную алгебру кварков следующим образом:  $(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})$ . Необходимо отметить, что умножение в контравариантной алгебре кварков  $(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})$  является некоммутативным, поэтому алгебра  $(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})$  существует в двух модификациях: правой  ${}_r(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})$  и левой  ${}_l(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})$ . Для правой контравариантной алгебры кварков  ${}_r(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_r\lambda_K \circ {}_r\lambda_I = {}_r\lambda_L \cdot {}_r C^L_{KI}. \quad (7)$$

Для левой контравариантной алгебры кварков  ${}_l(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_l\lambda_I \circ {}_l\lambda_K = {}_l\lambda_L \cdot {}_l C^L_{KI}. \quad (8)$$

Кроме того, необходимо отметить, что структурные постоянные

$$C^L_{KI} \sim {}_r C^L_{KI}, \quad {}_l C^L_{KI}$$

участвуют в формировании оператора набла антикварка. Структурные постоянные  ${}_r C^L_{KI}$  участвуют в формировании левого оператора набла, а структурные постоянные  ${}_l C^L_{KI}$  участвуют в формировании правого оператора набла.

## 2.2. Ковариантная алгебра

Здесь также будем отталкиваться от следующих общих соображений. Базисные векторы  $\mathbf{E}^I$  участвуют в построении как ковариантной алгебры действия фундаментальных античастиц  $\mathbb{S}^*$ , так и ковариантной алгебры пространства-времени фундаментальных античастиц  $\mathbb{X}^*$ . Принадлежность вектора или алгебре действия или алгебре пространства-времени фундаментальных античастиц определяется размерностью вектора. Поэтому, если не рассматривать размерность вектора или считать вектор безразмерным, то можно говорить вообще о *ковариантной алгебре фундаментальных античастиц*. Обозначим безразмерную алгебру фундаментальных античастиц следующим образом:  $(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$ . Необходимо отметить, что умножение в ковариантной алгебре  $(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$  является некоммутативным, поэтому алгебра  $(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$  существует в двух модификациях: правой  ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$  и левой  ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$ . Для правой ковариантной алгебры фундаментальных античастиц  ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_r\mathbf{E}^K \circ {}_r\mathbf{E}^I = {}_r C^{IK}_L \cdot {}_r\mathbf{E}^L.$$

Для левой ковариантной алгебры фундаментальных античастиц  ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_l\mathbf{E}^I \circ {}_l\mathbf{E}^K = {}_l C^{IK}_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L.$$

Кроме того, необходимо отметить, что структурные постоянные

$$C^{IK}_L \sim {}_r C^{IK}_L, \quad {}_l C^{IK}_L$$

участвуют в формировании оператора набла фундаментальной частицы. Структурные постоянные  ${}_r C^{IK}_L$  участвуют в формировании левого оператора набла, а структурные постоянные  ${}_l C^{IK}_L$  участвуют в формировании правого оператора набла.

Отталкиваясь от вышесказанного, обратимся к алгебре антикварков. Базисные векторы  $\Lambda^I$  участвуют в построении как ковариантной алгебры действия антикварков  $\mathbb{Q}^*$ , так и ковариантной алгебры пространства-времени антикварков  $\mathbb{X}_{\mathbb{Q}^*}$ . Принадлежность вектора или алгебре действия или алгебре пространства-времени антикварков определяется размерностью вектора. Поэтому, если не рассматривать размерность вектора или считать вектор безразмерным, то можно говорить вообще о *ковариантной алгебре антикварков*. Обозначим безразмерную алгебру антикварков следующим образом:  $(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})^*$ . Необходимо отметить, что умножение в ковариантной алгебре  $(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})^*$  является некоммутативным, поэтому алгебра  $(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})^*$  существует в двух модификациях: правой  ${}_r(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})^*$  и левой  ${}_l(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})^*$ . Для правой ковариантной алгебры антикварков  ${}_r(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})^*$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_r\Lambda^K \circ {}_r\Lambda^I = {}_r C^{IK}_L \cdot {}_r\Lambda^L. \quad (9)$$

Для левой ковариантной алгебры антикварков  ${}_l(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})^*$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_l\Lambda^I \circ {}_l\Lambda^K = {}_lC^{IK}_L {}_l\Lambda^L. \quad (10)$$

Кроме того, необходимо отметить, что структурные постоянные

$$C^{IK}_L \sim {}_rC^{IK}_L, \quad {}_lC^{IK}_L$$

участвуют в формировании оператора набла кварка. Структурные постоянные  ${}_rC^{IK}_L$  участвуют в формировании левого оператора набла, а структурные постоянные  ${}_lC^{IK}_L$  участвуют в формировании правого оператора набла.

#### IV. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ КВАРКОВ ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}(1)$

В соответствии с выдвинутым нами предположением коммутативно-антикоммутативная алгебра  $\mathbb{Q}(1)$  есть алгебра действия кварков первого поколения. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\lambda_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\lambda_0$  имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0.$$

- Образующие базисные векторы  $\lambda_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3, есть базисные векторы геометрического пространства. Число векторов  $\lambda_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_a = \lambda_a,$$

$$\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_0.$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_b \circ \lambda_a.$$

Здесь  $a \neq b$ .

В соответствии с Разделом I для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей – условия соседней перестановки

$$\lambda_{12} = -\lambda_{21},$$

$$\lambda_{13} = \lambda_{31},$$

$$\lambda_{32} = -\lambda_{23}.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности,

$$\lambda_{21} \circ \lambda_{21} = -\lambda_0,$$

$$\lambda_{13} \circ \lambda_{13} = \lambda_0,$$

$$\lambda_{32} \circ \lambda_{32} = -\lambda_0.$$

- Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_1.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей

$$\lambda_{123} = -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132}.$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0.$$

##### 1. Действительное представление алгебры действия кварков $\mathbb{Q}(1)$

Записи вектора  $\psi$

$$\psi = \lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0 + \lambda_1 \psi^1 + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_3 \psi^3 + \lambda_{123} \psi^{123}$$

соответствует действительное представление алгебры действия кварков  $\mathbb{Q}_3$ . В этом случае структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы

$$C^{L}_{KI} \sim \lambda_I,$$

имеют действительные коэффициенты, а размерность матриц равна  $8 \times 8$  (см. Раздел V). Помимо действительного представления, будем использовать  $iab$ -представление и  $IAB$ -представление, удобные в силу своей компактности.

##### 2. $iab$ -представление алгебры действия кварков $\mathbb{Q}(1)$

$iab$ -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \lambda_{13} \circ (\lambda_{21} \psi^{32} + \lambda_0 \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (\lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) + \lambda_2 \circ (\lambda_{21} \psi^1 + \lambda_0 \psi^2) + \lambda_{123} \circ (\lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}).$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_3$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_1$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_{13}, \quad \lambda_0, \quad \lambda_2, \quad \lambda_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1$  являются

$$\lambda_{21}, \quad \lambda_0.$$

Пространство  $\mathbb{Q}_1$  можно рассматривать как пространство  $iab$ -чисел. Для этого базисному вектору

$\lambda_{21}$  алгебры  $\mathbb{Q}_1$  поставим в соответствие мнимую единицу, учитывая, что  $(\lambda_{21})^2 = -1$ , а базисному вектору  $\lambda_0$  этой алгебры поставим в соответствие действительную единицу:

$$\lambda_{21} \sim i, \quad \lambda_0 \sim 1.$$

В результате получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3$  в  $iab$ -представлении

$$\psi = \lambda_{13} \circ (i \psi^{32} + \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (i \psi^{21} + \psi^0) + \lambda_2 \circ (i \psi^1 + \psi^2) + \lambda_{123} \circ (i \psi^3 + \psi^{123}). \quad (11)$$

Таким образом, в  $iab$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными числами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= i \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= i \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^2 &= i \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= i \psi^3 + \psi^{123}. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_0 \psi^0 + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_{123} \psi^{123}. \quad (13)$$

Отсюда видно, что в  $iab$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\lambda_{13}, \lambda_0, \lambda_2, \lambda_{123}$ .

В  $iab$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$ . От  $iab$ -представления перейдем к  $IAB$ -представлению.

### 3. $IAB$ -представление алгебры действия кварков $\mathbb{Q}(1)$

$IAB$ -представление алгебры  $\mathbb{Q}_3$  основано на разложении вектора:

$$\psi = (\lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) \circ \lambda_0 + (\lambda_{32} \psi^1 + \lambda_{13} \psi^2 + \lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}) \circ \lambda_{123}.$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_3$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$ . Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1$  являются

$$\lambda_0, \quad \lambda_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_{32}, \quad \lambda_{13}, \quad \lambda_{21}, \quad \lambda_0.$$

$$(\lambda_{32})^2 = (\lambda_{21})^2 = -1, \quad (\lambda_{13})^2 = (\lambda_0)^2 = 1.$$

Последнюю алгебру назовем  $IAB$ -алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц  $IAB$ -алгебры используем следующие обозначения:

$$a \cdot I, \quad b \cdot A, \quad i \cdot B, \quad \mathbb{1}.$$

Заменяем базисные векторы  $\lambda_{32}, \lambda_{13}, \lambda_{21}, \lambda_0$  приведенными гиперчислами

$$\begin{aligned} \lambda_{32} &\sim a I, \\ \lambda_{13} &\sim b A, \\ \lambda_{21} &\sim i B, \\ \lambda_0 &\sim \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3$  в  $IAB$ -представлении<sup>1</sup>

$$\psi = (a \cdot I \psi^{32} + b \cdot A \psi^{13} + i \cdot B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0) \circ \lambda_0 + (a \cdot I \psi^1 + b \cdot A \psi^2 + i \cdot B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \lambda_{123}.$$

Таким образом, в  $IAB$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a I \psi^{32} + b A \psi^{13} + i B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{123} &= a I \psi^1 + b A \psi^2 + i B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \Psi^0 \lambda_0 + \Psi^{123} \lambda_{123}.$$

Отсюда видно, что в  $IAB$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\lambda_0, \lambda_{123}$ .

В  $IAB$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $2 \times 2$  (см. Раздел V).

## V. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ КОНТРАВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ ДЕЙСТВИЯ КВАРКОВ $\mathbb{Q}_3$

В этом Разделе рассмотрим вычисление структурных матриц алгебры кварков  $\mathbb{Q}_3$ . При этом будем пользоваться опытом, полученным при выводе матриц Дирака. Обращение к матрицам Дирака научило нас следующему.

1. Компоненты векторов и матриц необходимо рассматривать в следующей последовательности индексов

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

2. Переход от действительного представления к компактному представлению осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц  ${}_r C^L_{KI}$  и  ${}_i C^L_{KI}$  от действительного представления к  $iab$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$(a \cdot I) \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot (I \cdot A) = -i \cdot B.$$

<sup>1</sup> Заметим, что при умножении базисных единиц первые и вторые сомножители умножаются отдельно. Например,

$$i = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

$$a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

При преобразовании матриц  ${}_r C^L_{KI}$  и  ${}_l C^L_{KI}$  от  $iab$ -представления к  $IAB$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2^2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

3. При переходе к частным случаям квантовой теории целесообразно пользоваться процедурой сжатия, или вырождения, слагаемых компонент вектора.

Итак, в соответствии с нашим общим подходом мы должны, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре  $\mathbb{Q}_3$ , найти структурные матрицы этой алгебры. Затем, анализируя свойства этих матриц, сделать заключение относительно свойств кварков.

### 1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры действия кварков первого поколения ${}_r \mathbb{Q}_3(1)$

Далее приступим к вычислению структурных матриц правой алгебры действия кварков  ${}_r \mathbb{Q}_3$ . Структурные матрицы будем обозначать теми базисными векторами, которые они представляют:

$${}_r \lambda_I \sim {}_r C^L_{KI}.$$

Напомним, что закон умножения базисных векторов в правой алгебре кварков  ${}_r \mathbb{Q}_3$  записывается следующим образом:

$${}_r \lambda_K \circ {}_r \lambda_I = {}_r \lambda_L \cdot {}_r C^L_{KI} \quad (15)$$

<sup>2</sup> Напомним (см. Глава 4.2. Раздел III.), что для матриц  $i, a, b$  и соответствующих гиперчисел выполняются правила умножения

$$a^2 = b^2 = 1, \quad i^2 = -1, \quad ab = -ba = i,$$

$$ai = -ia = b, \quad ib = -bi = a.$$

Аналогично для матриц  $I, A, B$  и соответствующих гиперчисел выполняются правила умножения

$$A^2 = B^2 = \mathbb{1}, \quad I^2 = -\mathbb{1}, \quad AB = -BA = I,$$

$$AI = -IA = B, \quad IB = -BI = A.$$

Из выражения (15) следует алгоритм вычисления структурных матриц правой алгебры действия кварков  ${}_r \mathbb{Q}_3$ . Эти матрицы соответствуют базисным векторам  ${}_r \lambda_I$ . Сначала нужно установить номер структурной матрицы ( $I$ ) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы ( $K$ ) проделать следующие вычисления. Базисный вектор  ${}_r \lambda_K$ , номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *справа* на базисный вектор  ${}_r \lambda_I$ , номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор  ${}_r \lambda_L$ , на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер ( $L$ ) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом необходимо поставить указанное численное значение проекции.

$${}_r \lambda_0 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 32 & 13 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$${}_r \lambda_1 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 32 & 13 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & A \\ \hline & & A \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$${}_r \lambda_2 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 32 & 13 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & & -1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} = b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & -1 & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ = b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline & & I \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$${}_r \lambda_3 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 32 & 13 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & -1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & & -1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & -\mathbb{1} \\ \hline & & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 52 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \sim \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \sim \\
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ \\ 1 \\ -1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\
 = i \\
 \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline B & \\ \hline & -B \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \sim \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline 1 & 1 \\ & -1 \\ \hline & 1 \\ & -1 \\ \hline \end{array} \\
 \sim \\
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \\ -1 \\ -1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\
 = b \\
 \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline A & \\ \hline & -A \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \sim \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline -1 & 1 \\ & 1 \\ \hline & -1 \\ & -1 \\ \hline \end{array} \\
 \sim \\
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ \\ 1 \\ -1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\
 = a \\
 \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline & I \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \sim \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ & 1 \\ \hline -1 & \\ -1 & \\ \hline 1 & \\ 1 & \\ \hline \end{array} \\
 \sim \\
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ \\ 1 \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\
 = I \\
 \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & B \\ \hline & B \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}
 \end{array}$$

## 2. Структурные матрицы левой контравариантной алгебры действия кварков первого поколения ${}_i\mathbb{Q}(1)$

Далее приступим к вычислению структурных матриц левой алгебры действия кварков  ${}_i\mathbb{Q}$ . Структурные матрицы будем обозначать теми базисными векторами, которые они представляют:

$${}_i\lambda_I \sim {}_iC^L_{KI}.$$

Напомним, что закон умножения базисных векторов в левой алгебре кварков  ${}_i\mathbb{Q}(u, d)$  записывается следующим образом:

$${}_i\lambda_I \circ {}_i\lambda_K = {}_i\lambda_L \cdot {}_iC^L_{KI}. \quad (16)$$

Из (16) следует алгоритм вычисления структурных матриц алгебры  ${}_i\mathbb{Q}$ . Эти матрицы соответствуют базисным векторам  ${}_i\lambda_I$ . Сначала нужно установить номер структурной матрицы ( $I$ ) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы ( $K$ ) проделать следующие вычисления. Базисный вектор  ${}_i\lambda_K$ , номер которого совпадает с номером столбца матрицы, нужно умножить слева на базисный вектор  ${}_i\lambda_I$ , номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор  ${}_i\lambda_L$ , на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер ( $L$ ) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом необходимо поставить указанное численное значение проекции.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \sim \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \sim \\
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\
 = I \\
 \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \sim \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ & 1 \\ \hline 1 & \\ -1 & \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \\
 \sim \\
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ \\ 1 \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\
 = i \\
 \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & -A \\ \hline A & \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \sim \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ & 1 \\ \hline 1 & \\ -1 & \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \\
 \sim \\
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ \\ 1 \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\
 = I \\
 \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} \sim \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ & 1 \\ \hline 1 & \\ 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\
 \sim \\
 \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} \\
 = a \\
 \begin{array}{c} 0 \quad 123 \\ 13 \quad 2 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array}
 \end{array}$$



$$i\lambda_{21} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|cc} \hline 32 & -1 & & \\ 13 & 1 & & \\ 21 & & 1 & \\ 0 & & -1 & \\ \hline 1 & & & -1 \\ 2 & & & 1 \\ 3 & & & 1 \\ 123 & & & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 123 \\ & 13 & 2 & \\ \hline & -1 & & 13 \\ & 1 & & 0 \\ \hline & & -1 & 2 \\ & & 1 & 123 \\ \hline \end{array} \\ = i \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 0 & 123 \\ & B & \\ \hline & & B \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$i\lambda_{13} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|cc} \hline 32 & -1 & & \\ 13 & & 1 & \\ 21 & -1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline 1 & & & 1 \\ 2 & & & -1 \\ 3 & & 1 & \\ 123 & & -1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = b \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 123 \\ & 13 & 2 & \\ \hline & 1 & & 13 \\ & 1 & & 0 \\ \hline & & -1 & 2 \\ & & -1 & 123 \\ \hline \end{array} \\ = b \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 0 & 123 \\ & A & \\ \hline & & -A \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$i\lambda_{32} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|cc} \hline 32 & & 1 & \\ 13 & & 1 & \\ 21 & & -1 & \\ 0 & -1 & & \\ \hline 1 & & & -1 \\ 2 & & & -1 \\ 3 & & 1 & \\ 123 & & 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 123 \\ & 13 & 2 & \\ \hline & 1 & & 13 \\ & -1 & & 0 \\ \hline & & -1 & 2 \\ & & 1 & 123 \\ \hline \end{array} \\ = a \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 0 & 123 \\ & I & \\ \hline & & -I \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$i\lambda_{123} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|cc} \hline 32 & & & 1 \\ 13 & & & -1 \\ 21 & & & -1 \\ 0 & & & 1 \\ \hline 1 & 1 & & \\ 2 & -1 & & \\ 3 & -1 & & \\ 123 & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = b \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 123 \\ & 13 & 2 & \\ \hline & & -1 & 13 \\ & & 1 & 0 \\ \hline & -1 & & 2 \\ & 1 & & 123 \\ \hline \end{array} \\ = b \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 0 & 123 \\ & B & \\ \hline & & B \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

## VI. АЛГЕБРА КВАРКОВ ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}(2)$

В соответствии с выдвинутым нами предположением коммутативно-антикоммутативная алгебра  $\mathbb{Q}(2)$  есть алгебра действия фундаментальных частиц  $c$  и  $s$  кварков. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\lambda_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\lambda_0$  имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0.$$

- Образующие базисные векторы  $\lambda_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3, есть базисные век-

торы геометрического пространства. Число векторов  $\lambda_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_a = \lambda_a.$$

$$\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_0.$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_a \circ \lambda_b.$$

Здесь  $a \neq b$ . Число этих векторов равно трем. В соответствии с Разделом I для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей – условия соседней перестановки

$$\lambda_{12} = -\lambda_{21},$$

$$\lambda_{13} = -\lambda_{31},$$

$$\lambda_{32} = \lambda_{23}.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности,

$$\lambda_{21} \circ \lambda_{21} = -\lambda_0,$$

$$\lambda_{13} \circ \lambda_{13} = -\lambda_0,$$

$$\lambda_{32} \circ \lambda_{32} = \lambda_0.$$

- Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_3.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей

$$\lambda_{123} = -\lambda_{213} = \lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = \lambda_{132}.$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0.$$

## VII. АЛГЕБРА КВАРКОВ ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}(3)$

В соответствии с выдвинутым нами предположением коммутативно-антикоммутативная алгебра  $\mathbb{Q}(3)$  есть алгебра действия фундаментальных частиц  $t$  и  $b$  кварков. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\lambda_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\lambda_0$  имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0.$$

- Образующие базисные векторы  $\lambda_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3, есть базисные векторы геометрического пространства. Число векторов  $\lambda_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_a = \lambda_a.$$

$$\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_0.$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_a \circ \lambda_b.$$

Здесь  $a \neq b$ . Число этих векторов равно трем. В соответствии с Разделом I для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей – условий соседней перестановки

$$\begin{aligned}\lambda_{12} &= \lambda_{21}, \\ \lambda_{13} &= -\lambda_{31}, \\ \lambda_{32} &= -\lambda_{23}.\end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности,

$$\begin{aligned}\lambda_{21} \circ \lambda_{21} &= \lambda_0, \\ \lambda_{13} \circ \lambda_{13} &= -\lambda_0, \\ \lambda_{32} \circ \lambda_{32} &= -\lambda_0.\end{aligned}$$

- Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_3.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей

$$\lambda_{123} = \lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = \lambda_{312} = -\lambda_{132}.$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0.$$

### VIII. ГЕНЕРАТОРЫ АРОМАТИЧЕСКОЙ $SU(3)$ ГРУППЫ

В этом Разделе мы попытаемся вычислить матрицы Гелл-Манна. Напомним следующее. Если каждый из кварков  $u, d, s$  характеризовать комплексной волновой функцией и построить на этих функциях трехмерное комплексное пространство, то на этом пространстве действует ароматическая  $SU(3)$  группа. Генераторами этой группы являются матрицы Гелл-Манна

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\sim \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}, & \lambda_2 &\sim \begin{pmatrix} & -i & \\ i & & \\ & & \end{pmatrix}, & \lambda_3 &\sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &\sim \begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix}, & \lambda_5 &\sim \begin{pmatrix} & & \\ & & -i \\ & i & \end{pmatrix}, & \lambda_6 &\sim \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &\sim \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix}, & \lambda_8 &\sim \begin{pmatrix} & & -i \\ & & \\ i & & \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Попробуем вычислить матрицы Гелл-Манна, рассматривая их как структурные матрицы некоторой алгебры, объединяющей алгебры пространств  $u, d$  и  $s$  кварков. Эту задачу будем решать при ряде допущений. Во-первых, положим, что указанные алгебры являются алгебрами Клиффорда. Запишем векторы в каждой из алгебр

$$x^u = \lambda_0^u x^0 + \lambda_a^u x^a + \lambda_{ab}^u x^{ab} + \lambda_{123}^u x^{123},$$

$$y^d = \lambda_0^d y^0 + \lambda_a^d y^a + \lambda_{ab}^d y^{ab} + \lambda_{123}^d y^{123},$$

$$z^s = \lambda_0^s z^0 + \lambda_a^s z^a + \lambda_{ab}^s z^{ab} + \lambda_{123}^s z^{123}.$$

Здесь в силу нашего допущения

$$\lambda_{ab} = -\lambda_{ba}.$$

Во-вторых, будем рассматривать не полные векторы, а их частные случаи

$$x^u = \lambda_0^u x^0 + \lambda_{ab}^u x^{ab},$$

$$y^d = \lambda_0^d y^0 + \lambda_{ab}^d y^{ab},$$

$$z^s = \lambda_0^s z^0 + \lambda_{ab}^s z^{ab}.$$

Каждый из этих векторов определяет подалгебру соответственно в алгебрах пространств  $u, d$  и  $s$  кварков. Теперь объединим полученные подалгебры в общую алгебру, представляя ее вектором

$$w = x^u + y^d + z^s.$$

Эту алгебру обозначим  $\mathbb{Q}(u, d, s)$ . Далее выполним процедуру сжатия алгебры  $\mathbb{Q}(u, d, s)$  путем отождествления следующих базисных векторов:

$$\begin{aligned}\lambda_{32}^u &\equiv \lambda_{21}^s, & \lambda_{13}^u &\equiv \lambda_0^s, \\ \lambda_{21}^u &\equiv \lambda_{32}^d, & \lambda_0^u &\equiv \lambda_{13}^d, \\ \lambda_{21}^d &\equiv \lambda_{32}^s, & \lambda_0^d &\equiv \lambda_{13}^s.\end{aligned}$$

Наконец, вычислим структурные матрицы  $\lambda_{ab}$  алгебры  $\mathbb{Q}(u, d, s)$  в сжатом представлении. Вычисления выполним в соответствии с алгоритмом, указанным в Разделе V.2. Получим

$$\lambda_{32}^u \sim \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \\ 21 & 32 & & & & & \\ 0 & 13 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \end{array} = i \begin{array}{ccc} & & 1 \\ 1 & & \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\lambda_{32}^s \sim \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \\ 21 & 32 & & & & & \\ 0 & 13 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \end{array} = i \begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \\ & & \end{array}$$

$$\lambda_{13}^u \sim \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \\ 21 & 32 & & & & & \\ 0 & 13 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \end{array} = i \begin{array}{ccc} & & -i \\ i & & \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\lambda_{13}^s \sim \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \\ 21 & 32 & & & & & \\ 0 & 13 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \end{array} = i \begin{array}{ccc} & & i \\ & & \\ -i & & \\ & & \end{array}$$

$$\lambda_{21}^u \sim \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \\ 21 & 32 & & & & & \\ 0 & 13 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \end{array} = i \begin{array}{ccc} -1 & & \\ & & 1 \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\lambda_{21}^s \sim \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \\ 21 & 32 & & & & & \\ 0 & 13 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \end{array} = i \begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & \\ & & -1 \\ & & \end{array}$$

$$\lambda_{32}^d \sim \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \\ 21 & 32 & & & & & \\ 0 & 13 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \end{array} = i \begin{array}{ccc} & & \\ & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{array}$$

Число приведенных матриц равно девяти, однако матрицы  $\lambda_{21}^u$ ,  $\lambda_{21}^d$ ,  $\lambda_{21}^s$  связаны между собой тождеством

$$\lambda_{21}^u + \lambda_{21}^d + \lambda_{21}^s = 0.$$

Следовательно, только две из указанных матриц являются линейно независимыми или две линейные комбинации с их участием. В частности, в качестве линейно независимых матриц могут быть выбраны  $\lambda_{21}^u$  и

$$\lambda_{13}^d \sim \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \\ 21 & 32 & & & & & \\ 0 & 13 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \end{array} = i \begin{array}{ccc} & & \\ & & -i \\ & & \\ i & & \end{array}$$

$$\lambda_6 = \lambda_{21}^s - \lambda_{21}^d \sim \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{array}.$$

Поэтому общее число линейно независимых матриц  $\lambda_{ab}$  равно восьми и эти матрицы есть матрицы Гелл-Манна с точностью до постоянного множителя.

## IX. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Над геометрическим пространством можно построить три алгебры, содержащих два антикоммутирующих и одно коммутативное перестановочные соотношения. Эти алгебры ставятся в соответствие трем поколениям кваркам.

$$\lambda_{21}^d \sim \begin{array}{cccc} s & 21 & 0 & 32 & 13 \\ d & & & 32 & 13 & 21 & 0 \\ s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 \\ 21 & 32 & & & & & \\ 0 & 13 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \\ 32 & 21 & & & & & \\ 13 & 0 & & & & & \end{array} = i \begin{array}{ccc} & & \\ & & -1 \\ & & \\ & & 1 \end{array}$$

- Волновые функции кварков разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех базисных векторов образующего геометрического пространства. Это правило совпадает с правилом, установленным для волновых функций лептонов разных поколений.
- Введены структурные матрицы алгебры кварков  $Q_3$  по такому же алгоритму, по которому в Главе 4.2. Раздел III.2 были выведены матрицы Дирака. Это обстоятельство является свидетельством в пользу того, что предлагаемый подход к описанию фундаментальных частиц содержит элементы *единой* теории.
- Матрицы Гелл-Манна являются структурными матрицами алгебры, охватывающей алгебры  $u$ ,  $d$ ,  $s$  кварков.

## Глава 4.8 Красные кварки. Алгебра действия красных кварков $\mathbb{Q}_r$

### I. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ КВАРКИ И ЦВЕТ

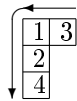
В этой Главе продолжаем рассматривать алгебру кварков как модернизированную алгебру Клиффорда. Цветовым разновидностям кварков ставятся в соответствие разновидности условий соседней перестановки с участием базисного вектора времени. Квантовые уравнения для релятивистских кварков устанавливаются на основании того же алгоритма, из которого ранее было получено обобщение уравнения Дирака для лептонов. Эти уравнения относятся к кваркам одного поколения и в стандартном представлении разделяются на две независимые системы уравнений, одна из которых относится к верхнему кварку, а другая к нижнему.

Прежде чем обратиться к алгебре релятивистских кварков  $\mathbb{Q}_4$  напомним следующее. Установлено, что каждый из кварков  $u, d, c, s, t, b$  существует в трех разновидностях. Отличительное свойство этих разновидностей названо *цветом*, а кварки в указанных разновидностях обозначены как *красный*, *желтый* и *синий*. Было бы странно, если бы цветовая симметрия не имела под собой алгебраической основы. Скорее всего, искомая алгебра релятивистских кварков  $\mathbb{Q}_4$  будет представлена тремя вариантами, каждый из которых базируется на одной и той же алгебре  $\mathbb{Q}_3$ . Для того, чтобы получить релятивистскую алгебру  $\mathbb{Q}_4$ , нам предстоит расширить образующее пространство, заменив геометрическое пространство на пространство-время СТО. Иными словами, необходимо ввести координату времени, базисный вектор  $\lambda_4$  и записать условия соседней перестановки этого базисного вектора с геометрическими базисными векторами  $\lambda_a$ . Именно с разновидностями указанных условий соседней перестановки в дальнейшем будут связаны цветовые разновидности кварков.

Начнем с алгебры цветных кварков первого поколения  $\mathbb{Q}(1)$ .

Алгебра красных  $u$ - и  $d$ -кварков  $\mathbb{Q}(1)_r$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием

базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3. \end{aligned}$$

Алгебра желтых  $u$ - и  $d$ -кварков  $\mathbb{Q}(1)_y$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

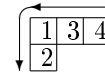
$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3. \end{aligned}$$

Алгебра синих  $u$ - и  $d$ -кварков  $\mathbb{Q}(1)_b$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

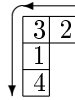
$$\begin{aligned} \lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3. \end{aligned}$$

Для того, чтобы перейти к алгебрам цветных кварков второго и третьего поколений, необходимо (в соответствии с общим подходом) использовать условия соседней перестановки, отличающиеся от предыдущих циклической перестановкой геометрических базисных векторов.

Тогда для алгебры цветных кварков второго поколения  $\mathbb{Q}(2)$  получим следующее.

Алгебра красных  $c$ - и  $s$ -кварков  $\mathbb{Q}(2)_r$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{34} &= -\mathbf{43}, & \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2. \end{aligned}$$

Алгебра желтых  $s$ - и  $s$ -кварков  $\mathbb{Q}(2)_y$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

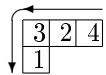
$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{34} &= \mathbf{43}, & \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2. \end{aligned}$$

Алгебра синих  $s$ - и  $s$ -кварков  $\mathbb{Q}(2)_b$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{34} &= \mathbf{43}, & \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}. \end{aligned}$$

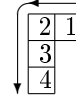
Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2. \end{aligned}$$

Для алгебры цветных кварков третьего поколения  $\mathbb{Q}(3)$  получим следующее.

Алгебра красных  $t$ - и  $b$ -кварков  $\mathbb{Q}(3)_r$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}, & \mathbf{14} &= -\mathbf{41}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1. \end{aligned}$$

Алгебра желтых  $t$ - и  $b$ -кварков  $\mathbb{Q}(3)_y$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

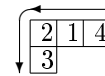
$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}, & \mathbf{14} &= -\mathbf{41}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1. \end{aligned}$$

Алгебра синих  $t$ - и  $b$ -кварков  $\mathbb{Q}(3)_b$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}, & \mathbf{14} &= \mathbf{41}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned}\lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1.\end{aligned}$$

Далее в этой Главе рассматривается только алгебра красных кварков первого поколения  $\mathbb{Q}(1)_r$ . Имеется в виду, что переход к алгебрам красных кварков других поколений очевиден. Алгебра желтых кварков первого поколения  $\mathbb{Q}(1)_y$  рассматривается в Главе 4.9. Алгебра синих кварков первого поколения  $\mathbb{Q}(1)_b$  рассматривается в Главе 4.10.

## II. АЛГЕБРА КРАСНЫХ $u$ - И $d$ -КВАРКОВ $\mathbb{Q}(1)_r$

### 1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры  $\mathbb{Q}(1)_r$  и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\lambda_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\lambda_0$  имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0.$$

- Образующие векторы  $\lambda_i$ , где индекс  $i$  пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов  $\lambda_i$  равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_i \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_i = \lambda_i.$$

$$\lambda_i \circ \lambda_i = \text{sign}(\lambda_i)^2 \cdot \lambda_0,$$

где

$$\text{sign}(\lambda_1)^2 = \text{sign}(\lambda_2)^2 = \text{sign}(\lambda_3)^2 = -\text{sign}(\lambda_4)^2 = 1.$$

- Векторы

$$\lambda_{ik} = \lambda_k \circ \lambda_i.$$

Здесь  $i \neq k$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6.$$

В соответствии с Разделом I для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и соответственно сомножителей (условия соседней перестановки)

$$\begin{aligned}\lambda_{21} &= -\lambda_{21}, & \lambda_{13} &= \lambda_{31}, & \lambda_{32} &= -\lambda_{23}, \\ \lambda_{14} &= -\lambda_{41}, & \lambda_{24} &= -\lambda_{42}, & \lambda_{34} &= -\lambda_{43}.\end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности,

$$\begin{aligned}\lambda_{21} \circ \lambda_{21} &= -\lambda_0, & \lambda_{42} \circ \lambda_{42} &= \lambda_0, \\ \lambda_{32} \circ \lambda_{32} &= -\lambda_0, & \lambda_{14} \circ \lambda_{14} &= \lambda_0, \\ \lambda_{13} \circ \lambda_{13} &= \lambda_0, & \lambda_{34} \circ \lambda_{34} &= \lambda_0.\end{aligned}$$

- Векторы

$$\lambda_{ikl} = \lambda_i \circ \lambda_k \circ \lambda_l.$$

Здесь  $i \neq k, i \neq l, k \neq l$ . Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки:

$$\begin{aligned}\lambda_{123} &= -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132}, \\ \lambda_{124} &= -\lambda_{214} = \lambda_{241} = -\lambda_{421} = \lambda_{412} = -\lambda_{142}, \\ \lambda_{134} &= \lambda_{314} = -\lambda_{341} = \lambda_{431} = \lambda_{413} = -\lambda_{143}, \\ \lambda_{234} &= -\lambda_{324} = \lambda_{342} = -\lambda_{432} = \lambda_{423} = -\lambda_{243}.\end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\begin{aligned}\lambda_{123} \circ \lambda_{123} &= \lambda_0, & \lambda_{124} \circ \lambda_{124} &= \lambda_0, \\ \lambda_{134} \circ \lambda_{134} &= -\lambda_0, & \lambda_{234} \circ \lambda_{234} &= \lambda_0.\end{aligned}$$

- Вектор

$$\lambda_{1324} = \lambda_1 \circ \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_4.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки:

$$\begin{aligned}\lambda_{1234} &= -\lambda_{2134} = -\lambda_{2314} = \lambda_{3214} = \\ &= -\lambda_{3124} = -\lambda_{1324} = \lambda_{1243} = -\lambda_{2143} = \\ &= \lambda_{2413} = -\lambda_{4213} = \lambda_{4123} = -\lambda_{1423} = \\ &= \lambda_{1342} = \lambda_{3142} = -\lambda_{3412} = \lambda_{4312} = \\ &= \lambda_{4132} = -\lambda_{1432} = \lambda_{2341} = -\lambda_{3241} = \\ &= \lambda_{3421} = -\lambda_{4321} = \lambda_{4231} = -\lambda_{2431}.\end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\lambda_{1324} \circ \lambda_{1324} = \lambda_0.$$

**2. Структурные матрицы алгебры красных кварков**

Приведем структурные матрицы двух алгебр: правой контравариантной алгебры красных кварков первого поколения  ${}_r(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})_r$  и левой ковариантной алгебры красных кварков первого поколения  ${}_l(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})_r^*$ . С использованием таких матриц записываются квантовые уравнения для рассматриваемых кварков. Компоненты векторов и матриц рассматриваются в следующей последовательности индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

Переход от действительного представления к компактному представлению осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C_{KL}^{IK}$  от действительного представления к  $iab$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

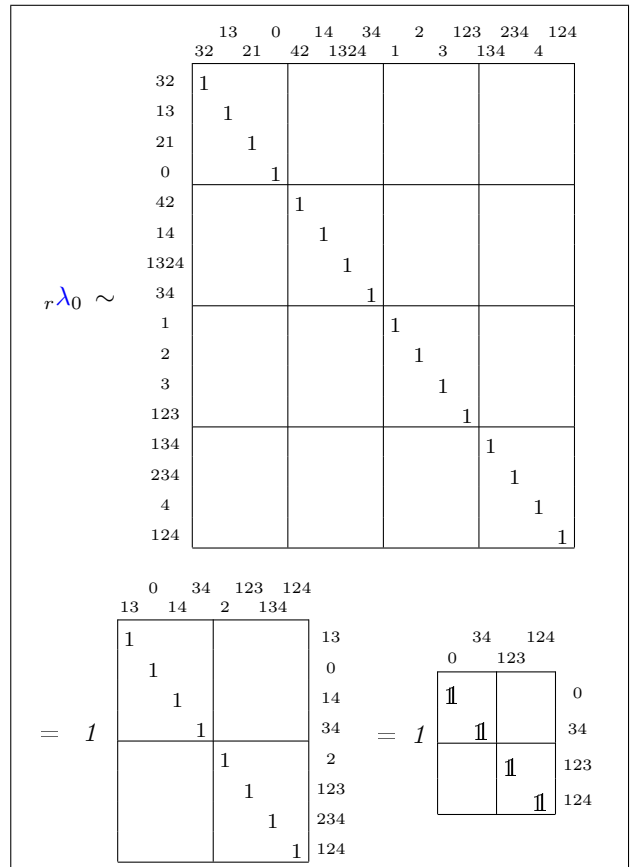
$$a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C_{KL}^{IK}$  от  $iab$ -представления к  $IAB$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

*2.1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры красных кварков первого поколения  ${}_r(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})_r$*























### 3. Действительное представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

Структурные матрицы  ${}_r C^L_{KI}$  в действительном представлении вычислены по алгоритму, приведенному в Разделе II. Главы 4.1, для принятого ранее порядка индексов. При этом слагаемые вектора  $\psi$  записываются в следующей последовательности:

$$\begin{aligned} \psi = & \lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0 + \\ & + \lambda_{42} \psi^{42} + \lambda_{14} \psi^{14} + \lambda_{1324} \psi^{1324} + \lambda_{34} \psi^{34} + \\ & + \lambda_1 \psi^1 + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_3 \psi^3 + \lambda_{123} \psi^{123} + \\ & + \lambda_{134} \psi^{134} + \lambda_{234} \psi^{234} + \lambda_4 \psi^4 + \lambda_{124} \psi^{124}. \end{aligned}$$

В результате получены действительные структурные матрицы

$${}_r C^L_{KI} \sim {}_r \lambda_I$$

размерности  $16 \times 16$  (см. Раздел II.2). Помимо действительного представления мы использовали  $iab$ -представление.

#### 4. $iab$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

$iab$ -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned} \psi = & \lambda_{13} \circ (\lambda_{21} \psi^{32} + \lambda_0 \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (\lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) + \\ & + \lambda_{14} \circ (\lambda_{21} \psi^{42} + \lambda_0 \psi^{14}) + \lambda_{34} \circ (\lambda_{21} \psi^{1324} + \lambda_0 \psi^{34}) + \\ & + \lambda_2 \circ (\lambda_{21} \psi^1 + \lambda_0 \psi^2) + \lambda_{123} \circ (\lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}) + \\ & + \lambda_{234} \circ (\lambda_{21} \psi^{134} + \lambda_0 \psi^{234}) + \lambda_{124} \circ (\lambda_{21} \psi^4 + \lambda_0 \psi^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_3 \times \mathbb{Q}_1$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_3$  являются

$$\lambda_{13}, \lambda_0, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_2, \lambda_{123}, \lambda_{234}, \lambda_{124};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1$  являются

$$\lambda_{21}, \lambda_0.$$

Как и прежде поставим в соответствие базисному вектору  $\lambda_{21}$  алгебры  $\mathbb{Q}_1$  мнимую единицу, а базисному вектору  $\lambda_0$  действительную единицу. В результате получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в  $iab$ -представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = & \lambda_{13} \circ (i \psi^{32} + \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (i \psi^{21} + \psi^0) + \\ & + \lambda_{14} \circ (i \psi^{42} + \psi^{14}) + \lambda_{34} \circ (i \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ & + \lambda_2 \circ (i \psi^1 + \psi^2) + \lambda_{123} \circ (i \psi^3 + \psi^{123}) + \\ & + \lambda_{234} \circ (i \psi^{134} + \psi^{234}) + \lambda_{124} \circ (i \psi^4 + \psi^{124}). \end{aligned}$$

Таким образом, в  $iab$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными числами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= i \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= i \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= i \psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= i \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= i \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= i \psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= i \psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= i \psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi = & \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_0 \psi^0 + \lambda_{14} \psi^{14} + \lambda_{34} \psi^{34} + \\ & + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_{123} \psi^{123} + \lambda_{234} \psi^{234} + \lambda_{124} \psi^{124}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в  $iab$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\lambda_{13}, \lambda_0, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_2, \lambda_{123}, \lambda_{234}, \lambda_{124}$ .

В  $iab$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $8 \times 8$  (см. Раздел II.2).

#### 5. $IAB$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

$IAB$ -представление алгебры  $\mathbb{Q}_4$  основано на разложении вектора:

$$\begin{aligned} \psi = & (\lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) \circ \lambda_0 + \\ & + (\lambda_{32} \psi^{42} + \lambda_{13} \psi^{14} + \lambda_{21} \psi^{1324} + \lambda_0 \psi^{34}) \circ \lambda_{34} + \\ & + (\lambda_{32} \psi^1 + \lambda_{13} \psi^2 + \lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}) \circ \lambda_{123} + \\ & + (\lambda_{32} \psi^{134} + \lambda_{13} \psi^{234} + \lambda_{21} \psi^4 + \lambda_0 \psi^{124}) \circ \lambda_{124}. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_2$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_0, \lambda_{34}, \lambda_{123}, \lambda_{124};$$

базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_{32}, \lambda_{13}, \lambda_{21}, \lambda_0.$$

Последнюю алгебру мы назвали  $IAB$ -алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц  $IAB$ -алгебры используем следующие обозначения:

$$a \cdot I, \quad b \cdot A, \quad i \cdot B, \quad \mathbb{1}.$$

Заменим базисные векторы  $\lambda_{32}, \lambda_{13}, \lambda_{21}, \lambda_0$  приведенными гиперчислами

$$\begin{aligned} \lambda_{32} &\sim a I, \\ \lambda_{13} &\sim b A, \\ \lambda_{21} &\sim i B, \\ \lambda_0 &\sim 1 \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в  $IAB$ -представлении

$$\begin{aligned} \psi = & (a \cdot I \psi^{32} + b \cdot A \psi^{13} + i \cdot B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0) \circ \lambda_0 + \\ & + (a \cdot I \psi^{42} + b \cdot A \psi^{14} + i \cdot B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}) \circ \lambda_{34} + \\ & + (a \cdot I \psi^1 + b \cdot A \psi^2 + i \cdot B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \lambda_{123} + \\ & + (a \cdot I \psi^{134} + b \cdot A \psi^{234} + i \cdot B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}) \circ \lambda_{124}. \end{aligned}$$

Таким образом, в  $IAB$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned}\Psi^0 &= a I \psi^{32} + b A \psi^{13} + i B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{34} &= a I \psi^{42} + b A \psi^{14} + i B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= a I \psi^1 + b A \psi^2 + i B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= a I \psi^{134} + b A \psi^{234} + i B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}.\end{aligned}\quad (2)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \Psi^0 \lambda_0 + \Psi^{34} \lambda_{34} + \Psi^{123} \lambda_{123} + \Psi^{124} \lambda_{124}.$$

Отсюда видно, что в  $IAB$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\lambda_0, \lambda_{34}, \lambda_{123}, \lambda_{124}$ .

В  $IAB$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$  (см. Раздел II.2).

### III. КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВОБОДНЫХ КРАСНЫХ КВАРКОВ

Мы вычислили структурные матрицы алгебры кварков и теперь вернемся к результатам Главы 3.3. Согласно этой Главе, если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи квантовые явления, а уравнение структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовый постулат. Обратимся к уравнению структуры для произвольной правой алгебры действия (формула (35) Главы 3.3.). Запишем его следующим образом:

$$d_2 d_1 S^L = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot d_1 S^K \cdot d_2 S^I.$$

В этом уравнении введем обозначение

$$d_1 S^L = \psi^L.$$

Вектор  $\psi^L$  назван *волновой функцией* фундаментального объекта и отождествлен с волновой функцией, вводимой в квантовой теории фундаментального объекта. Кроме того, введем обозначение  $d$  для дифференциала  $d_2$ . Получим

$$d\psi^L = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot \psi^K \cdot dS^I.$$

Это соотношение представляет собой квантовый постулат в самом общем виде. Перепишем его иначе:

$$\frac{\partial \psi^L}{\partial x^M} = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot \frac{\partial S^I}{\partial x^M} \cdot \psi^K.$$

Далее учтем, что

$$\frac{\partial S^I}{\partial x^M} = -p^I_M.$$

Получим

$$\frac{\partial \psi^L}{\partial x^M} = -\frac{1}{S_0} {}_r C^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K. \quad (3)$$

Здесь  $p^I_M$  – координаты обобщенного импульса,  ${}_r C^L_{KI}$  – структурные постоянные правой алгебры действия,  $S_0$  – действительная постоянная величина, имеющая размерность действия. В Главе 4.3. мы ввели алгебру Клиффорда как алгебру действия и связали ее с лептонами. При этом постоянную величину  $S_0$  мы отождествили с постоянной Планка. Если бы удалось найти несколько алгебр действия, то мы имели бы несколько объектов, подчиняющихся квантовым явлениям разного типа.

Теперь мы ввели новый объект – кварки, которым сопоставили свою алгебру действия и алгебру пространства-времени. Согласно предыдущему, кварки подчиняются своей квантовой теории. Уравнения (3) будут квантовыми постулатами для кварков, если в них положить постоянные  ${}_r C^L_{KI}$  равными структурным постоянным алгебры кварков и установить значение  $S_0$ . При этом возникает вопрос: нужно ли связывать постоянную Планка только с лептонами и соответственно с алгеброй Клиффорда, а для алгебры кварков вводить другую постоянную с размерностью действия, или постоянная Планка является универсальной? А priori ответить на этот вопрос нельзя. Поэтому для кварков мы введем свою постоянную действия, значение которой предстоит установить, и обозначим ее через  $q$ .

Придадим соотношению (3) форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные постоянные  ${}_i C^{MN}_L$ . Получим

$${}_i C^{MN}_L \cdot \partial_M \psi^L(x) = -\frac{1}{q} {}_i C^{MN}_L \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K. \quad (4)$$

С нашей точки зрения это уравнение и есть квантовое уравнение для кварков в самом общем виде. Далее, повторяя рассуждения Раздела IV. Главы 4.5, запишем это уравнение при следующих ограничениях: дифференцирование выполняется только по координатам образующего пространства и при условии, что в первом сжатом представлении коэффициент при волновой функции в правой части принимает вид

$$-\frac{m_d c}{q}.$$

Здесь  $m_d$  есть масса  $d$ -кварка. В результате получим следующее уравнение:

$${}_i C^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{1}{q} ({}_r C^N_{K0} p^0_0 + {}_r C^N_{K34} p^{34}_0) \cdot \psi^K. \quad (5)$$

При этом имеет место условие<sup>1</sup>

$$p^0_0 + p^{34}_0 = m_d c. \quad (6)$$

Разобьем величину  $(m_d c)$  между импульсами  $p^0_0$  и  $p^{34}_0$  в некоторой пропорции. Для этого положим

$$p^0_0 = \frac{m_d c}{2} \alpha, \quad p^{34}_0 = \frac{m_d c}{2} \beta.$$

<sup>1</sup> См. Раздел IV. Главы 4.5.

Из выражения (6) имеем

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1. \quad (7)$$

Кроме того, положим

$$m_d \frac{\alpha - \beta}{2} = m_u. \quad (8)$$

Здесь  $m_u$  – масса  $u$ -кварка. После подстановки импульсов получим уравнение, аналогичное уравнению (8) Главы 4.5.

$$i C^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot r C^N_{K0} + \beta \cdot r C^N_{K34}) \cdot \psi^K. \quad (9)$$

Понятно, что здесь  $r C^N_{K0} = \delta^N_K$  в отличие от  $r C^N_{K34}$ .

### 1. Квантовое уравнение для красных кварков первого поколения

Квантовое уравнение для свободных красных кварков первого поколения получим, подставив в уравнение (9) структурные матрицы, выведенные в Разделе II. Для действительного регулярного представления алгебры кварков  $\mathbb{Q}(u, d)$  компоненты волновой функции  $\psi^K(x)$  представляют собой шестнадцать действительных функций. В  $iab$ -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (1). И в  $IAB$ -представлении компонентами волновой функции являются четыре  $IAB$ -функции вида (2). Приведем квантовое уравнение по отношению к  $IAB$ -компонентам волновой функции кварков:

$$\begin{aligned} & \left( -i \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \partial_4 + i \begin{array}{|c|c|} \hline -A & \\ \hline A & -A \\ \hline A & \\ \hline \end{array} \partial_1 + \right. \\ & \left. + \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & -I \\ \hline \end{array} \partial_2 + a \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \partial_3 \right) \begin{array}{l} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} = \\ & = -\frac{m_d c}{2q} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & \beta & \\ \hline \beta & \alpha & \\ \hline & & \alpha & \beta \\ \hline & & \beta & \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} i \partial_4 \Psi^{124} &+ (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{123} \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^0 + \beta \cdot \Psi^{34}), \\ i \partial_4 \Psi^{123} &+ (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{124} \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34}), \\ i \partial_4 \Psi^{34} &-(i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^0 \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^{123} + \beta \cdot \Psi^{124}), \\ i \partial_4 \Psi^0 &-(i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{34} \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124}). \end{aligned} \quad (10)$$

### 2. Стандартное представление квантового уравнения для красных $u$ - и $d$ -кварков

Преобразуем уравнения (9) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$i \partial_4 \varphi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \varphi_2 = \frac{m_d c}{2q} (\alpha + \beta) \varphi_1,$$

$$i \partial_4 \varphi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \varphi_1 = \frac{m_d c}{2q} (\alpha + \beta) \varphi_2, \quad (11)$$

где  $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и  $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ . Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$i \partial_4 \chi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \chi_2 = \frac{m_d c}{2q} (\beta - \alpha) \chi_1,$$

$$i \partial_4 \chi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \chi_1 = \frac{m_d c}{2q} (\beta - \alpha) \chi_2, \quad (12)$$

где  $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$  и  $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$   
или с учетом выражений (7) и (8)

$$i \partial_4 \varphi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \varphi_2 = \frac{m_d c}{q} \varphi_1,$$

$$i \partial_4 \varphi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \varphi_1 = \frac{m_d c}{q} \varphi_2, \quad (13)$$

$$i \partial_4 \chi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \chi_2 = \frac{m_u c}{q} \chi_1,$$

$$i \partial_4 \chi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \chi_1 = \frac{m_u c}{q} \chi_2. \quad (14)$$

Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений. Одна из систем представляет уравнение для частицы с массой  $m_d$ , а другая представляет уравнение для частицы

с массой  $m_u$ . Отсюда вытекает следующая интерпретация компонент волновой функции. Для красного  $d$  кварка левая компонента  $d_L = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и правая компонента  $d_R = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ , а для красного  $u$  кварка  $u_L = \Psi^{123} - \Psi^{124}$  и  $u_R = \Psi^0 - \Psi^{34}$ .

#### IV. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Волновая функция нерелятивистского кварка есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3$ .
- Волновая функция нижнего и верхнего красных кварков одного поколения есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_r$ .
- Волновые функции красных кварков разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех образующих базисных векторов.
- Компоненты волновой функции  $\Psi^0 + \Psi^{34}$ ,  $\Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\Psi^{123} - \Psi^{124}$ ,  $\Psi^0 - \Psi^{34}$  относятся к разным фундаментальным частицам – красным кваркам. Этот вывод опирается на следующие соображения.
  1. Полученные квантовые уравнения для красных кварков в стандартном представлении можно представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относится к двухкомпонентной волновой функции.
  2. Независимость указанных двух систем уравнений друг от друга позволяет отнести эти системы уравнений к разным частицам, причем одна из этих частиц имеет массу  $m_d$ , а другая имеет массу  $m_u$ .
- Установлено следующее соответствие между компонентами волновой функции и красными кварками первого поколения. Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где  $A$  принимает значения

32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,

разбиваются на четыре части:

$$\begin{aligned}
 & \text{левая компонента красного } d\text{-кварка} \\
 d_L &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) + \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}), \\
 & \text{правая компонента красного } d\text{-кварка} \\
 d_R &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) + \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\
 & \text{левая компонента красного } u\text{-кварка} \\
 u_L &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) - \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\
 & \text{правая компонента красного } u\text{-кварка} \\
 u_R &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) - \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}).
 \end{aligned}$$

- Компоненты волновых функций красных кварков второго и третьего поколений отличаются

от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов:

для красных кварков второго поколения

$$3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3;$$

для красных кварков третьего поколения

$$3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2.$$

## Глава 4.9 Желтые кварки. Алгебра действия желтых кварков $\mathbb{Q}_y$

### I. ЖЕЛТЫЕ КВАРКИ ТРЕХ ПОКОЛЕНИЙ

Рассмотрим алгебру желтых кварков  $\mathbb{Q}_y$ .

Начнем с алгебры желтых кварков первого поколения  $\mathbb{Q}(1)_y$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3. \end{aligned}$$

Для того чтобы перейти к алгебрам желтых кварков второго и третьего поколений, необходимо использовать условия соседней перестановки, отличающиеся от предыдущих циклической перестановкой геометрических базисных векторов.

Тогда для алгебры желтых кварков второго поколения  $\mathbb{Q}(2)_y$  имеем следующее.

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{34} &= \mathbf{43}, & \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2. \end{aligned}$$

Алгебра желтых  $t$ - и  $b$ -кварков  $\mathbb{Q}(3)_y$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}, & \mathbf{14} &= -\mathbf{41}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1. \end{aligned}$$

Далее в этой Главе рассматривается только алгебра желтых кварков первого поколения  $\mathbb{Q}(1)_y$ . Переход к алгебрам желтых кварков других поколений очевиден.

### II. АЛГЕБРА ЖЕЛТЫХ $u$ - И $d$ -КВАРКОВ $\mathbb{Q}(1)_y$

#### 1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры  $\mathbb{Q}(1)_y$  и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\lambda_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\lambda_0$  имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0.$$

- Образующие векторы  $\lambda_i$ , где индекс  $i$  пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_i \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_i = \lambda_i,$$

$$\lambda_i \circ \lambda_i = \text{sign}(\lambda_i)^2 \cdot \lambda_0,$$

где

$$\text{sign}(\lambda_1)^2 = \text{sign}(\lambda_2)^2 = \text{sign}(\lambda_3)^2 = -\text{sign}(\lambda_4)^2 = 1.$$

- Векторы

$$\lambda_{ik} = \lambda_k \circ \lambda_i.$$

Здесь  $i \neq k$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6.$$

В соответствии с Разделом I. настоящей Главы для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей (условия соседней перестановки)

$$\begin{aligned}\lambda_{21} &= -\lambda_{21}, & \lambda_{13} &= \lambda_{31}, & \lambda_{32} &= -\lambda_{23}, \\ \lambda_{14} &= \lambda_{41}, & \lambda_{24} &= -\lambda_{42}, & \lambda_{34} &= -\lambda_{43}.\end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности, имеем

$$\begin{aligned}\lambda_{21} \circ \lambda_{21} &= -\lambda_0, & \lambda_{42} \circ \lambda_{42} &= \lambda_0, \\ \lambda_{32} \circ \lambda_{32} &= -\lambda_0, & \lambda_{14} \circ \lambda_{14} &= -\lambda_0, \\ \lambda_{13} \circ \lambda_{13} &= \lambda_0, & \lambda_{34} \circ \lambda_{34} &= \lambda_0.\end{aligned}$$

- Векторы

$$\lambda_{ikl} = \lambda_i \circ \lambda_k \circ \lambda_l.$$

Здесь

$$i \neq k, i \neq l, k \neq l.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки:

$$\begin{aligned}\lambda_{123} &= -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132}, \\ \lambda_{124} &= -\lambda_{214} = -\lambda_{241} = \lambda_{421} = -\lambda_{412} = -\lambda_{142}, \\ \lambda_{134} &= \lambda_{314} = \lambda_{341} = -\lambda_{431} = -\lambda_{413} = -\lambda_{143}, \\ \lambda_{234} &= -\lambda_{324} = \lambda_{342} = -\lambda_{432} = \lambda_{423} = -\lambda_{243}.\end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\begin{aligned}\lambda_{123} \circ \lambda_{123} &= \lambda_0, & \lambda_{124} \circ \lambda_{124} &= -\lambda_0, \\ \lambda_{134} \circ \lambda_{134} &= -\lambda_0, & \lambda_{234} \circ \lambda_{234} &= \lambda_0.\end{aligned}$$

- Вектор

$$\lambda_{1324} = \lambda_1 \circ \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_4.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки:

$$\begin{aligned}\lambda_{1234} &= -\lambda_{2134} = -\lambda_{2314} = \lambda_{3214} = \\ &= -\lambda_{3124} = -\lambda_{1324} = -\lambda_{1243} = \lambda_{2143} = \\ &= \lambda_{2413} = -\lambda_{4213} = \lambda_{4123} = \lambda_{1423} = \\ &= -\lambda_{1342} = -\lambda_{3142} = -\lambda_{3412} = \lambda_{4312} = \\ &= \lambda_{4132} = -\lambda_{1432} = \lambda_{2341} = -\lambda_{3241} = \\ &= \lambda_{3421} = -\lambda_{4321} = \lambda_{4231} = -\lambda_{2431}.\end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки законов также следует

$$\lambda_{1324} \circ \lambda_{1324} = \lambda_0.$$

## 2. Структурные матрицы алгебры желтых кварков

Приведем структурные матрицы двух алгебр: правой контравариантной алгебры желтых кварков первого поколения  ${}_r(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_\mathbb{Q})_y$  и левой ковариантной алгебры желтых кварков первого поколения  ${}_l(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_\mathbb{Q})_y^*$ . С использованием таких матриц записываются квантовые уравнения для рассматриваемых кварков. Компоненты векторов и матриц рассматриваются в следующей последовательности индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

Переход от действительного представления к компактным представлениям осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C^{IK}_L$  от действительного представления к  $iab$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

$$a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C^{IK}_L$  от  $iab$ -представления к  $IAB$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры желтых кварков первого поколения  $r(\mathbb{Q}, X_{\mathbb{Q}})_y$

$$\begin{aligned}
 r\lambda_0 \sim & \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 & = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \\
 & = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r\lambda_1 \sim & \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 & = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \\
 & = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 0 & 34 & 123 \\ & 13 & 14 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ A \end{array} \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r\lambda_2 \sim & \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 & = b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \end{array} \\
 & = b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 0 & 34 & 123 \\ & 13 & 14 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} -I \\ -I \end{array} \end{array}
 \end{aligned}$$

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4

  
 $r\lambda_3 \sim$ 

32						-1		
13				1				
21						-1		
0						1		
42							1	
14							-1	
1324								1
34								-1
1	1							
2	-1							
3		1						
123		-1						
134			-1					
234			1					
4				-1				
124					1			

		0	34	123	124
13	14	2	134		

	-1			13
	-1			0
		1		14
			1	34
1				2
1				123
	1			234
	-1			124

 $= i$ 

		0	34	123	124

		-1		0
		-1		34
1			1	123
1				124

 $= i$

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4

  
 $r\lambda_{21} \sim$ 

32		-1						
13	1							
21		1						
0		-1						
42			-1					
14			1					
1324				1				
34				-1				
1					1			
2					-1			
3						-1		
123						1		
134							1	
234							-1	
4								-1
124								1

		0	34	123	124
13	14	2	134		

-1				13
1				0
	-1			14
		1		34
			1	2
				123
			-1	234
			1	124

 $= i$ 

		0	34	123	124

		<i>B</i>		0
		<i>B</i>		34
			- <i>B</i>	123
			- <i>B</i>	124

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4

  
 $r\lambda_4 \sim$ 

32							1	
13							-1	
21								1
0								-1
42						-1		
14				1				
1324							-1	
34						1		
1			-1					
2			1					
3				-1				
123				1				
134	1							
234	-1							
4					1			
124			-1					

		0	34	123	124
13	14	2	134		

	1			13
			1	0
	-1			14
		-1		34
				2
	-1			123
1				234
1				124

 $= i$ 

		0	34	123	124

			1	0
			-1	34
				123
			-1	124

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4

  
 $r\lambda_{13} \sim$ 

32		-1						
13		1						
21	-1							
0		1						
42			1					
14				-1				
1324				1				
34				-1				
1					1			
2						-1		
3						1		
123						-1		
134							-1	
234								1
4							-1	
124								1

		0	34	123	124
13	14	2	134		

1				13
1				0
	-1			14
		-1		34
			-1	2
				123
			-1	234
			1	124

 $= b$ 

		0	34	123	124

		<i>A</i>		0
		- <i>A</i>		34
			- <i>A</i>	123
			<i>A</i>	124







$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 32 & & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & -1 & & & & & \\
 13 & & & 1 & & & & & \\
 21 & & & & & & & & 1 \\
 0 & & & & & & & & -1 \\
 42 & -1 & & & & & & & \\
 14 & 1 & & & & & & & \\
 1324 & & & 1 & & & & & \\
 34 & & & -1 & & & & & \\
 1 & & & & & & & & 1 \\
 2 & & & & & & & & -1 \\
 3 & & & & & & & & -1 \\
 123 & & & & & & & & 1 \\
 134 & & & & & & & & 1 \\
 234 & & & & & & & & -1 \\
 4 & & & & & & & & -1 \\
 124 & & & & & & & & 1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & & 14 & 2 & 134 \\
 \begin{array}{cc|cc}
 & -1 & & \\
 -1 & & 1 & \\
 \hline
 & 1 & & \\
 & & & 1 \\
 & & & -1 \\
 & & & 1 \\
 & & & -1
 \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \\
 = i & & & = i
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 124 \\
 & & & 123 \\
 \begin{array}{cc|c}
 & B & \\
 B & & \\
 \hline
 & & -B \\
 & & -B
 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры желтых кварков первого поколения  ${}_i(\mathbb{Q}, X_{\mathbb{Q}})^*$

Напомним, что эти матрицы необходимы для формирования правых операторов набла.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 32 & & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & 1 & & & & & & & \\
 13 & & & 1 & & & & & \\
 21 & & & & & & & & 1 \\
 0 & & & & & & & & 1 \\
 42 & & & & & & 1 & & \\
 14 & & & & & & & & 1 \\
 1324 & & & & & & & & 1 \\
 34 & & & & & & & & 1 \\
 1 & & & & & & & & 1 \\
 2 & & & & & & & & 1 \\
 3 & & & & & & & & 1 \\
 123 & & & & & & & & 1 \\
 134 & & & & & & & & 1 \\
 234 & & & & & & & & 1 \\
 4 & & & & & & & & 1 \\
 124 & & & & & & & & 1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & & 14 & 2 & 134 \\
 \begin{array}{cc|cc}
 1 & & & \\
 & 1 & & \\
 & & 1 & \\
 & & & 1 \\
 \hline
 & & & 1 \\
 & & & 1 \\
 & & & 1 \\
 & & & 1
 \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \\
 = I & & & = I
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 124 \\
 & & & 123 \\
 \begin{array}{cc|c}
 \mathbb{1} & & \\
 & \mathbb{1} & \\
 \hline
 & & \mathbb{1} \\
 & & \mathbb{1}
 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$







		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
32									1
13									-1
21									-1
0									1
42						1			
14							-1		
1324							-1		
34						1			
1							1		
2								-1	
3								-1	
123							1		
134									1
234									-1
4									-1
124									1

$i\Lambda^{134} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
				1	13
				-1	0
				1	14
				-1	34
				1	2
				-1	123
				1	234
				-1	124
				1	
				-1	
				1	
				-1	

		0	34	123	124
13	14	2	134		
				$I$	0
				$I$	34
				$I$	123
				$I$	124

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
32									
13									
21									
0									
42									
14									
1324									
34									
1									
2									
3									
123									
134									
234									
4									
124									

$i\Lambda^{1324} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
				$I$	13
				-1	0
				$I$	14
				-1	34
				$I$	2
				-1	123
				$I$	234
				-1	124
				$I$	
				-1	
				$I$	
				-1	

		0	34	123	124
13	14	2	134		
				$I$	13
				-1	0
				$I$	14
				-1	34
				$I$	2
				-1	123
				$I$	234
				-1	124
				$I$	
				-1	
				$I$	
				-1	

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
32									1
13									1
21									1
0									1
42									
14									
1324									
34									
1									
2									
3									
123									
134									
234									
4									
124									

$i\Lambda^{234} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
				1	13
				1	0
				1	14
				1	34
				1	2
				1	123
				1	234
				1	124
				1	
				1	
				1	
				1	

		0	34	123	124
13	14	2	134		
				$A$	0
				$A$	34
				$A$	123
				$A$	124

### 3. Действительное представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

Структурные матрицы  ${}_r C_{KI}^L$  в действительном представлении вычислены по алгоритму, приведенному в Разделе II. Главы 4.1, для принятого ранее порядка индексов. При этом слагаемые вектора  $\psi$  записываются в следующей последовательности:

$$\begin{aligned} \psi = & \lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0 + \\ & + \lambda_{42} \psi^{42} + \lambda_{14} \psi^{14} + \lambda_{1324} \psi^{1324} + \lambda_{34} \psi^{34} + \\ & + \lambda_1 \psi^1 + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_3 \psi^3 + \lambda_{123} \psi^{123} + \\ & + \lambda_{134} \psi^{134} + \lambda_{234} \psi^{234} + \lambda_4 \psi^4 + \lambda_{124} \psi^{124}. \end{aligned}$$

В результате получим действительные структурные матрицы

$${}_r C_{KI}^L \sim \lambda_I$$

размерности  $16 \times 16$ . Помимо действительного представления использовано  $iab$ -представление.

#### 4. $iab$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

$iab$ -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda_{13} \circ (\lambda_{21} \psi^{32} + \lambda_0 \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (\lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) + \\ &+ \lambda_{14} \circ (\lambda_{21} \psi^{42} + \lambda_0 \psi^{14}) + \lambda_{34} \circ (\lambda_{21} \psi^{1324} + \lambda_0 \psi^{34}) + \\ &+ \lambda_2 \circ (\lambda_{21} \psi^1 + \lambda_0 \psi^2) + \lambda_{123} \circ (\lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}) + \\ &+ \lambda_{234} \circ (\lambda_{21} \psi^{134} + \lambda_0 \psi^{234}) + \lambda_{124} \circ (\lambda_{21} \psi^4 + \lambda_0 \psi^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_3 \times \mathbb{Q}_1$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_3$  являются

$$\lambda_{13}, \lambda_0, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_2, \lambda_{123}, \lambda_{234}, \lambda_{124};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1$  являются

$$\lambda_{21}, \lambda_0.$$

Как и прежде, поставим в соответствие базисному вектору  $\lambda_{21}$  алгебры  $\mathbb{Q}_1$  мнимую единицу, а базисному вектору  $\lambda_0$  действительную единицу. В результате получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в  $iab$ -представлении, который имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda_{13} \circ (i \psi^{32} + \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (i \psi^{21} + \psi^0) + \\ &+ \lambda_{14} \circ (i \psi^{42} + \psi^{14}) + \lambda_{34} \circ (i \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ &+ \lambda_2 \circ (i \psi^1 + \psi^2) + \lambda_{123} \circ (i \psi^3 + \psi^{123}) + \\ &+ \lambda_{234} \circ (i \psi^{134} + \psi^{234}) + \lambda_{124} \circ (i \psi^4 + \psi^{124}). \end{aligned}$$

Таким образом, в  $iab$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными числами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= i \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= i \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= i \psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= i \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= i \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= i \psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= i \psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= i \psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_0 \psi^0 + \lambda_{14} \psi^{14} + \lambda_{34} \psi^{34} + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_{123} \psi^{123} + \lambda_{234} \psi^{234} + \lambda_{124} \psi^{124}.$$

Отсюда видно, что в  $iab$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\lambda_{13}, \lambda_0, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_2, \lambda_{123}, \lambda_{234}, \lambda_{124}$ .

В  $iab$ -представлении структурные матрицы  $8 \times 8$  имеют размерность (см. Раздел II.2).

#### 5. $IAB$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

$IAB$ -представление алгебры  $\mathbb{Q}_4$  основано на разложении вектора

$$\begin{aligned} \psi &= (\lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) \circ \lambda_0 + \\ &+ (\lambda_{32} \psi^{42} + \lambda_{13} \psi^{14} + \lambda_{21} \psi^{1324} + \lambda_0 \psi^{34}) \circ \lambda_{34} + \\ &+ (\lambda_{32} \psi^1 + \lambda_{13} \psi^2 + \lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}) \circ \lambda_{123} + \\ &+ (\lambda_{32} \psi^{134} + \lambda_{13} \psi^{234} + \lambda_{21} \psi^4 + \lambda_0 \psi^{124}) \circ \lambda_{124}. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_2$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_0, \lambda_{34}, \lambda_{123}, \lambda_{124};$$

базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_{32}, \lambda_{13}, \lambda_{21}, \lambda_0.$$

Последнюю алгебру мы назвали  $IAB$ -алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц  $IAB$ -алгебры используем следующие обозначения:

$$a \cdot I, \quad b \cdot A, \quad i \cdot B, \quad \mathbb{1}.$$

Заменим базисные векторы  $\lambda_{32}, \lambda_{13}, \lambda_{21}, \lambda_0$  приведенными гиперчислами:

$$\begin{aligned} \lambda_{32} &\sim a I, \\ \lambda_{13} &\sim b A, \\ \lambda_{21} &\sim i B, \\ \lambda_0 &\sim \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в  $IAB$ -представлении

$$\begin{aligned} \psi &= (a \cdot I \psi^{32} + b \cdot A \psi^{13} + i \cdot B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0) \circ \lambda_0 + \\ &+ (a \cdot I \psi^{42} + b \cdot A \psi^{14} + i \cdot B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}) \circ \lambda_{34} + \\ &+ (a \cdot I \psi^1 + b \cdot A \psi^2 + i \cdot B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \lambda_{123} + \\ &+ (a \cdot I \psi^{134} + b \cdot A \psi^{234} + i \cdot B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}) \circ \lambda_{124}. \end{aligned}$$

Таким образом, в  $IAB$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a I \psi^{32} + b A \psi^{13} + i B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{34} &= a I \psi^{42} + b A \psi^{14} + i B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= a I \psi^1 + b A \psi^2 + i B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= a I \psi^{134} + b A \psi^{234} + i B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \Psi^0 \lambda_0 + \Psi^{34} \lambda_{34} + \Psi^{123} \lambda_{123} + \Psi^{124} \lambda_{124}.$$

Отсюда видно, что в  $IAB$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\lambda_0, \lambda_{34}, \lambda_{123}, \lambda_{124}$ .

В  $IAB$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$  (см. Раздел II.2).

### III. КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ЖЕЛТЫХ КВАРКОВ

Мы вычислили структурные матрицы алгебры кварков и теперь вернемся к результатам Главы 3.3. Согласно этой Главе, если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи квантовые явления, а уравнение структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовый постулат. В



Разделе III. Главы 4.8 уравнение структуры алгебры действия общего вида преобразовано в квантовое уравнение для свободных кварков, которым воспользуемся далее. Указанное уравнение имеет вид

$$iC^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot r C^N_{K0} + \beta \cdot r C^N_{K34}) \cdot \psi^K. \quad (3)$$

Здесь  $m_d$  есть масса  $d$ -кварка,  $q$  – постоянная величина, имеющая размерность действия, аналогичная постоянной Планка,  $\alpha$  и  $\beta$  – действительные положительные числа, на которые наложено условие

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1. \quad (4)$$

Масса верхнего кварка  $m_u$  выражается через массу нижнего кварка  $m_d$  следующим образом:

$$m_u = m_d \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (5)$$

### 1. Квантовое уравнение для желтых кварков первого поколения

Квантовое уравнение для свободных желтых кварков первого поколения получим, подставив в уравнение (3) структурные матрицы, выведенные в Разделе II. Для действительного регулярного представления алгебры кварков  $\mathbb{Q}(u, d)$  компоненты волновой функции  $\psi^K(x)$  представляют собой шестнадцать действительных функций. В  $iab$ -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (1), в  $IAB$ -представлении компонентами волновой функции являются четыре  $IAB$ -функции вида (2). Приведем квантовое уравнение по отношению к  $IAB$ -компонентам волновой функции кварков:

$$\begin{aligned} & \left( a \begin{array}{|c|c|} \hline & B \\ \hline -B & \\ \hline \end{array} \partial_4 + i \begin{array}{|c|c|} \hline -A & \\ \hline A & \\ \hline \end{array} \partial_1 + \right. \\ & \left. + \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array} \partial_2 + a \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \partial_3 \right) \begin{array}{l} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} = \\ & = -\frac{m_d c}{2q} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & \beta & \\ \hline \beta & \alpha & \\ \hline & & \alpha & \beta \\ \hline & & \beta & \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -a B \partial_4 \Psi^{124} + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{123} &= \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^0 + \beta \cdot \Psi^{34}), \\ -a B \partial_4 \Psi^{123} + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{124} &= \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34}), \\ a B \partial_4 \Psi^{34} - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^0 &= \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^{123} + \beta \cdot \Psi^{124}), \\ a B \partial_4 \Psi^0 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{34} &= \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124}). \end{aligned} \quad (6)$$

### 2. Стандартное представление квантового уравнения для желтых $u$ - и $d$ -варков

Преобразуем уравнения (6) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым, а третье с четвертым. Получим

$$-a B \partial_4 \varphi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \varphi_2 = \frac{m_d c}{2q} (\alpha + \beta) \varphi_1,$$

$$a B \partial_4 \varphi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \varphi_1 = \frac{m_d c}{2q} (\alpha + \beta) \varphi_2, \quad (7)$$

где  $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и  $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ . Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$a B \partial_4 \chi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \chi_2 = \frac{m_d c}{2q} (\beta - \alpha) \chi_1,$$

$$-a B \partial_4 \chi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \chi_1 = \frac{m_d c}{2q} (\beta - \alpha) \chi_2, \quad (8)$$

где  $\chi_1 = \Psi^0 - \Psi^{34}$  и  $\chi_2 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ , или с учетом выражений (4) и (5)

$$\begin{aligned} -a B \partial_4 \varphi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \varphi_2 &= \frac{m_d c}{q} \varphi_1, \\ a B \partial_4 \varphi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \varphi_1 &= \frac{m_d c}{q} \varphi_2 \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} a B \partial_4 \chi_2 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \chi_2 &= \frac{m_u c}{q} \chi_1, \\ -a B \partial_4 \chi_1 - (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \chi_1 &= \frac{m_u c}{q} \chi_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений. Одна из систем представляет уравнение для частицы с массой  $m_d$ , а другая представляет уравнение для частицы с массой  $m_u$ . Отсюда вытекает следующая интерпретация компонент волновой функции. Для желтого  $d$  кварка левая компонента  $d_L = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и правая компонента  $d_R = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ , а для желтого  $u$  кварка  $u_L = \Psi^{123} - \Psi^{124}$  и  $u_R = \Psi^0 - \Psi^{34}$ .

#### IV. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Цветовые разновидности кварков ставятся в соответствие перестановочным соотношениям с участием базисного вектора времени и геометрических базисных векторов.
- В принятом понимании цвета кварки имеют три цветовые разновидности: красные, желтые, синие.
- Из алгебраической структуры векторов действия кварков следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений этих частиц. В общем случае нет оснований считать, что квантовые явления с участием кварков определяются постоянной Планка, а не другой постоянной величиной, имеющей размерность действия.
- Структура квантовых уравнений для свободных желтых кварков такова, что они разделяются на две системы уравнений. Таким образом, имеем две частицы, одна из которых – это верхний кварк, а другая – нижний кварк.
- Уравнения для верхних и нижних желтых кварков отличаются не только массами частиц, но и знаком одной из компонент оператора импульса. Таким образом, в отличие от лептонов, движение в пространстве нижних кварков отличается от движения верхних кварков.
- Структура квантовых уравнений для свободных кварков такова, что волновые функции кварков разделяются на две компоненты: правую и левую, – подобно тому как это имеет место для лептонов. Такое разделение необходимо для описания электрослабого взаимодействия кварков.
- Волновая функция нерелятивистского кварка есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3$ .
- Волновая функция нижнего и верхнего желтых кварков одного поколения есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_y$ .
- Волновые функции желтых кварков разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех образующих базисных векторов.

- Компоненты волновой функции  $\Psi^0 + \Psi^{34}$ ,  $\Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\Psi^{123} - \Psi^{124}$ ,  $\Psi^0 - \Psi^{34}$  относятся к разным желтым кваркам. Этот вывод опирается на следующие соображения.

1. Полученные квантовые уравнения для желтых кварков в стандартном представлении можно представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относится к двухкомпонентной волновой функции.
2. Независимость указанных двух систем уравнений друг от друга позволяет отнести эти системы уравнений к разным частицам, причем одна из этих частиц имеет массу  $m_d$ , а другая имеет массу  $m_u$ .

- Установлено следующее соответствие между компонентами волновой функции и желтыми кварками первого поколения. Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где  $A$  принимает значения

32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,

разбиваются на четыре части:

$$\begin{aligned} & \text{левая компонента желтого } d\text{-кварка} \\ d_L &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) + \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}), \\ & \text{правая компонента желтого } d\text{-кварка} \\ d_R &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) + \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\ & \text{левая компонента желтого } u\text{-кварка} \\ u_L &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) - \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\ & \text{правая компонента желтого } u\text{-кварка} \\ u_R &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) - \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}). \end{aligned}$$

- Компоненты волновых функций желтых кварков второго и третьего поколений отличаются от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов:

для желтых кварков второго поколения

$$3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3;$$

для желтых кварков третьего поколения

$$3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2.$$

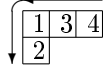
## Глава 4.10 Синие кварки. Алгебра действия синих кварков $\mathbb{Q}_b$

### I. СИННИЕ КВАРКИ ТРЕХ ПОКОЛЕНИЙ

Рассмотрим алгебру синих кварков  $\mathbb{Q}_b$ .

Начнем с алгебры синих кварков первого поколения  $\mathbb{Q}(1)_b$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}. \end{aligned}$$

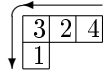
Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3. \end{aligned}$$

Для того чтобы перейти к алгебрам синих кварков второго и третьего поколений, необходимо использовать условия соседней перестановки, отличающиеся от предыдущих циклической перестановкой геометрических базисных векторов.

Тогда для алгебры синих кварков второго поколения  $\mathbb{Q}(2)_b$  имеем следующее.

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

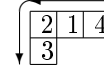
$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{34} &= \mathbf{43}, & \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_3 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_1, \\ \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2. \end{aligned}$$

Алгебра синих кварков третьего поколения  $\mathbb{Q}(3)_b$ .

В соответствии с Разделом IV.2. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}, & \mathbf{14} &= \mathbf{41}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде

$$\begin{aligned} \lambda_2 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_2, \\ \lambda_3 \circ \lambda_4 &= -\lambda_4 \circ \lambda_3, \\ \lambda_1 \circ \lambda_4 &= \lambda_4 \circ \lambda_1. \end{aligned}$$

Далее в этой Главе рассматривается только алгебра синих кварков первого поколения  $\mathbb{Q}(1)_b$ . Переход к алгебрам синих кварков других поколений очевиден.

### II. АЛГЕБРА СИННИХ КВАРКОВ ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}(1)_b$

#### 1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры  $\mathbb{Q}(1)_b$  и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\lambda_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\lambda_0$  имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0.$$

- Образующие векторы  $\lambda_i$ , где индекс  $i$  пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_i \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_i = \lambda_i,$$

$$\lambda_i \circ \lambda_i = \text{sign}(\lambda_i)^2 \cdot \lambda_0,$$

где

$$\text{sign}(\lambda_1)^2 = \text{sign}(\lambda_2)^2 = \text{sign}(\lambda_3)^2 = -\text{sign}(\lambda_4)^2 = 1.$$

- Векторы

$$\lambda_{ik} = \lambda_i \circ \lambda_k.$$

Здесь  $i \neq k$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6.$$

В соответствии с Разделом I. настоящей Главы для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей (условия соседней перестановки)

$$\begin{aligned}\lambda_{21} &= -\lambda_{21}, & \lambda_{13} &= \lambda_{31}, & \lambda_{32} &= -\lambda_{23}, \\ \lambda_{14} &= \lambda_{41}, & \lambda_{24} &= -\lambda_{42}, & \lambda_{34} &= \lambda_{43}.\end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности, имеем

$$\begin{aligned}\lambda_{21} \circ \lambda_{21} &= -\lambda_0, & \lambda_{42} \circ \lambda_{42} &= \lambda_0, \\ \lambda_{32} \circ \lambda_{32} &= -\lambda_0, & \lambda_{14} \circ \lambda_{14} &= -\lambda_0, \\ \lambda_{13} \circ \lambda_{13} &= \lambda_0, & \lambda_{34} \circ \lambda_{34} &= -\lambda_0.\end{aligned}$$

- Векторы

$$\lambda_{ikl} = \lambda_i \circ \lambda_k \circ \lambda_l.$$

Здесь

$$i \neq k, i \neq l, k \neq l.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки,

$$\begin{aligned}\lambda_{123} &= -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132}, \\ \lambda_{124} &= -\lambda_{214} = -\lambda_{241} = \lambda_{421} = -\lambda_{412} = -\lambda_{142}, \\ \lambda_{134} &= \lambda_{314} = \lambda_{341} = \lambda_{431} = \lambda_{413} = \lambda_{143}, \\ \lambda_{234} &= -\lambda_{324} = \lambda_{342} = \lambda_{432} = -\lambda_{423} = \lambda_{243}.\end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\begin{aligned}\lambda_{123} \circ \lambda_{123} &= \lambda_0, & \lambda_{124} \circ \lambda_{124} &= -\lambda_0, \\ \lambda_{134} \circ \lambda_{134} &= -\lambda_0, & \lambda_{234} \circ \lambda_{234} &= -\lambda_0.\end{aligned}$$

- Вектор

$$\lambda_{1324} = \lambda_1 \circ \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_4.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки,

$$\begin{aligned}\lambda_{1234} &= -\lambda_{2134} = -\lambda_{2314} = \lambda_{3214} = \\ &= -\lambda_{3124} = -\lambda_{1324} = \lambda_{1243} = -\lambda_{2143} = \\ &= -\lambda_{2413} = \lambda_{4213} = -\lambda_{4123} = -\lambda_{1423} = \\ &= \lambda_{1342} = \lambda_{3142} = \lambda_{3412} = \lambda_{4312} = \\ &= \lambda_{4132} = \lambda_{1432} = -\lambda_{2341} = \lambda_{3241} = \\ &= -\lambda_{3421} = -\lambda_{4321} = \lambda_{4231} = -\lambda_{2431}.\end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\lambda_{1324} \circ \lambda_{1324} = \lambda_0.$$

## 2. Структурные матрицы алгебры синих кварков

Приведем структурные матрицы двух алгебр: правой контравариантной алгебры синих кварков первого поколения  ${}_r(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})_b$  и левой ковариантной алгебры синих кварков первого поколения  ${}_l(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})_b^*$ . С использованием таких матриц записываются квантовые уравнения для рассматриваемых кварков. Компоненты векторов и матриц рассматриваются в следующей последовательности индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

Переход от действительного представления к компактным представлениям осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C_{KI}^{IK}$  от действительного представления к  $iab$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

$$a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C_{KI}^{IK}$  от  $iab$ -представления к  $IAB$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$





$$r\lambda_{32} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
32	32	21	42	1324	1	3	134	4
13		1						
21		-1						
0		-1						
42			1					
14			1					
1324			-1					
34			-1					
1				1				
2				1				
3				-1				
123				-1				
134						1		
234							1	
4							-1	
124								-1

$$= a$$

	0	34	123	124
13	13	14	2	134
	1			
	-1			
		1		
		-1		
			1	
			-1	
				1
				-1

$$= a$$

	0	34	123	124	
	<i>I</i>			0	
		<i>I</i>		34	
			<i>I</i>	123	
				<i>I</i>	124

$$r\lambda_{42} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
32	32	21	42	1324	1	3	134	4
13			-1					
21			1					
0			1					
42			1					
14			1					
1324			-1					
34			-1					
1								-1
2								-1
3								1
123								1
134							1	
234							1	
4							-1	
124							-1	

$$= a$$

	0	34	123	124
13	13	14	2	134
	-1			
	1			
	-1			
		-1		
			1	
			1	
				-1

$$= a$$

	0	34	123	124	
	<i>I</i>			0	
		<i>I</i>		34	
			<i>I</i>	123	
				<i>I</i>	124

$$r\lambda_{14} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
32	32	21	42	1324	1	3	134	4
13			1					
21			1					
0			-1					
42			-1					
14			1					
1324			-1					
34			1					
1								-1
2								1
3								-1
123								1
134							1	
234							-1	
4							1	
124							-1	

$$= b$$

	0	34	123	124
13	13	14	2	134
	-1			
	-1			
	1			
	1			
		1		
			1	
			-1	
			-1	

$$= b$$

	0	34	123	124	
	<i>A</i>			0	
		<i>A</i>		34	
			<i>A</i>	123	
				<i>A</i>	124

$$r\lambda_{34} \sim$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
32	32	21	42	1324	1	3	134	4
13			-1					
21			-1					
0			-1					
42			1					
14			1					
1324			1					
34			1					
1								-1
2								-1
3								-1
123								-1
134							1	
234							1	
4							1	
124							1	

$$= I$$

	0	34	123	124
13	13	14	2	134
	-1			
	-1			
	1			
	1			
		-1		
			-1	
			1	
			1	

$$= I$$

	0	34	123	124	
	<i>I</i>			0	
		<i>I</i>		34	
			<i>I</i>	123	
				<i>I</i>	124





$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & \\
 13 & & & & & & & & \\
 21 & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & \\
 42 & & & & & & & & \\
 14 & & & & & & & & \\
 1324 & & & & & & & & \\
 34 & & & & & & & & \\
 1 & & & & & & & & \\
 2 & & & & & & & & \\
 3 & & & & & & & & \\
 123 & & & & & & & & \\
 134 & & & & & & & & \\
 234 & & & & & & & & \\
 4 & & & & & & & & \\
 124 & & & & & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & 14 & 2 & 134 & \\
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ \\ \end{array} \\
 \begin{array}{c} \\ \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \\ -1 \\ 1 \end{array}
 \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \\
 = i & & \\
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 124 \\
 & 0 & 123 & \\
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} -B \\ B \end{array} & \begin{array}{c} \\ B \end{array} \\
 \begin{array}{c} B \\ -B \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}
 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\
 = i & & 
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & \\
 13 & & & & & & & & \\
 21 & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & \\
 42 & & & & & & & & \\
 14 & & & & & & & & \\
 1324 & & & & & & & & \\
 34 & & & & & & & & \\
 1 & & & & & & & & \\
 2 & & & & & & & & \\
 3 & & & & & & & & \\
 123 & & & & & & & & \\
 134 & & & & & & & & \\
 234 & & & & & & & & \\
 4 & & & & & & & & \\
 124 & & & & & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & 14 & 2 & 134 & \\
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \\ \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \\ 1 \\ 1 \end{array}
 \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \\
 = 1 & & \\
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 124 \\
 & 0 & 123 & \\
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{c} \\ \mathbb{1} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \\ \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array}
 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\
 = 1 & & 
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & \\
 13 & & & & & & & & \\
 21 & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & \\
 42 & & & & & & & & \\
 14 & & & & & & & & \\
 1324 & & & & & & & & \\
 34 & & & & & & & & \\
 1 & & & & & & & & \\
 2 & & & & & & & & \\
 3 & & & & & & & & \\
 123 & & & & & & & & \\
 134 & & & & & & & & \\
 234 & & & & & & & & \\
 4 & & & & & & & & \\
 124 & & & & & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & 14 & 2 & 134 & \\
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \\ \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}
 \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \\
 = i & & \\
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 124 \\
 & 0 & 123 & \\
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \\ A \end{array} & \begin{array}{c} -A \\ -A \end{array} \\
 \begin{array}{c} A \\ A \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}
 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\
 = i & & 
 \end{array}
 \end{array}$$

2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры синих кварков первого поколения  ${}_i(\mathbb{Q}, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}})_b^*$

Напомним, что эти матрицы необходимы для формирования оператора набла.





		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
32				1					
13				1					
21				1					
0				1					
42	-1								
14	-1								
1324	-1								
34	-1								
1						1			
2						1			
3						1			
123						1			
134				-1					
234				-1					
4				-1					
124				-1					

$i\Lambda^{34} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
	1				13
-1					0
-1					14
				1	34
				1	2
				1	123
				1	234
				-1	124
				-1	

		0	34	123	124
13	14	2	134		
	1				0
-1					34
-1					0
				1	123
				1	34
				-1	123
				-1	124

$= 1$

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
32								1	
13								-1	
21								-1	
0								1	
42				-1					
14				1					
1324				1					
34				-1					
1			1						
2			-1						
3			-1						
123			1						
134	-1								
234	1								
4		1							
124		-1							

$i\Lambda^{124} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
					13
					0
					14
					34
					2
					123
					234
					124
					-1

		0	34	123	124
13	14	2	134		
					13
					0
					14
					34
					2
					123
					234
					124
					-1

$= b$

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
32				1					
13				-1					
21				-1					
0				1					
42						1			
14						-1			
1324						-1			
34						1			
1	1								
2	-1								
3	-1								
123	1								
134		1							
234		-1							
4		-1							
124				1					

$i\Lambda^{123} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
					13
					0
					14
					34
					2
					123
					234
					124
					1

		0	34	123	124
13	14	2	134		
					0
					34
					0
					123
					34
					123
					124

$= b$

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
32								-1	
13								1	
21								-1	
0								1	
42						1			
14						-1			
1324						1			
34						-1			
1					1				
2					-1				
3					1				
123					-1				
134		-1							
234		1							
4		-1							
124		1							

$i\Lambda^{134} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
					13
					0
					14
					34
					2
					123
					234
					124
					-1

		0	34	123	124
13	14	2	134		
					13
					0
					14
					34
					2
					123
					234
					124
					-1

$= i$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & -1 \\
 13 & & & & & & & & -1 \\
 21 & & & & & & & 1 & \\
 0 & & & & & & & 1 & \\
 42 & & & & & 1 & & & \\
 14 & & & & & & 1 & & \\
 1324 & & & & & -1 & & & \\
 34 & & & & & & -1 & & \\
 1 & & & 1 & & & & & \\
 2 & & & & 1 & & & & \\
 3 & & & -1 & & & & & \\
 123 & & & & -1 & & & & \\
 134 & & -1 & & & & & & \\
 234 & & & -1 & & & & & \\
 4 & 1 & & & & & & & \\
 124 & & 1 & & & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 13 & 14 & 2 & 134 \\
 & & & -1 & 13 \\
 & & & 1 & 0 \\
 & & & 1 & 14 \\
 & & -1 & & 34 \\
 & 1 & & & 2 \\
 & -1 & & & 123 \\
 & -1 & & & 234 \\
 & 1 & & & 124
 \end{array} \\
 = I \\
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 123 \\
 & & & -I \\
 & & & I \\
 & -I & & 
 \end{array} \\
 = I
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & 1 & & & & & \\
 13 & & & -1 & & & & & \\
 21 & & & & -1 & & & & \\
 0 & & & & 1 & & & & \\
 42 & -1 & & & & & & & \\
 14 & 1 & & & & & & & \\
 1324 & & & 1 & & & & & \\
 34 & & & -1 & & & & & \\
 1 & & & & & & & 1 & \\
 2 & & & & & & & -1 & \\
 3 & & & & & & & & -1 \\
 123 & & & & & & & 1 & \\
 134 & & & & & -1 & & & \\
 234 & & & & & 1 & & & \\
 4 & & & & & & 1 & & \\
 124 & & & & & & -1 & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 13 & 14 & 2 & 134 \\
 & & & 1 & -1 \\
 & & & -1 & 1 \\
 & & & 1 & -1 \\
 & & & -1 & 1 \\
 & & & 1 & -1 \\
 & & & -1 & 1
 \end{array} \\
 = i \\
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 123 \\
 & & & -B \\
 & & & B \\
 & B & & -B \\
 & & & B
 \end{array} \\
 = i
 \end{array}$$

### 3. Действительное представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

Структурные матрицы  ${}_r C^L_{KI}$  в действительном представлении вычислены по алгоритму, приведенному в Разделе II. Главы 4.1, для принятого ранее порядка индексов. При этом слагаемые вектора  $\psi$  записываются в следующей последовательности:

$$\begin{aligned}
 \psi = & \lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0 + \\
 & + \lambda_{42} \psi^{42} + \lambda_{14} \psi^{14} + \lambda_{1324} \psi^{1324} + \lambda_{34} \psi^{34} + \\
 & + \lambda_1 \psi^1 + \lambda_2 \psi^2 + \lambda_3 \psi^3 + \lambda_{123} \psi^{123} + \\
 & + \lambda_{134} \psi^{134} + \lambda_{234} \psi^{234} + \lambda_4 \psi^4 + \lambda_{124} \psi^{124}.
 \end{aligned}$$

В результате получим действительные структурные матрицы

$${}_r C^L_{KI} \sim {}_r \lambda_I$$

размерности  $16 \times 16$ . Помимо действительного представления мы использовали  $iab$ -представление.

### 4. $iab$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

$iab$ -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned}
 \psi = & \lambda_{13} \circ (\lambda_{21} \psi^{32} + \lambda_0 \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (\lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) + \\
 & + \lambda_{14} \circ (\lambda_{21} \psi^{42} + \lambda_0 \psi^{14}) + \lambda_{34} \circ (\lambda_{21} \psi^{1324} + \lambda_0 \psi^{34}) + \\
 & + \lambda_2 \circ (\lambda_{21} \psi^1 + \lambda_0 \psi^2) + \lambda_{123} \circ (\lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}) + \\
 & + \lambda_{234} \circ (\lambda_{21} \psi^{134} + \lambda_0 \psi^{234}) + \lambda_{124} \circ (\lambda_{21} \psi^4 + \lambda_0 \psi^{124}).
 \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_3 \times \mathbb{Q}_1$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_3$  являются

$$\lambda_{13}, \lambda_0, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_2, \lambda_{123}, \lambda_{234}, \lambda_{124};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1$  являются

$$\lambda_{21}, \lambda_0.$$

Как и прежде, поставим в соответствие базисному вектору  $\lambda_{21}$  алгебры  $\mathbb{Q}_1$  мнимую единицу, а базисному вектору  $\lambda_0$  действительную единицу. В результате получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в  $iab$ -представлении, который имеет вид

$$\begin{aligned}
 \psi = & \lambda_{13} \circ (i \psi^{32} + \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (i \psi^{21} + \psi^0) + \\
 & + \lambda_{14} \circ (i \psi^{42} + \psi^{14}) + \lambda_{34} \circ (i \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\
 & + \lambda_2 \circ (i \psi^1 + \psi^2) + \lambda_{123} \circ (i \psi^3 + \psi^{123}) + \\
 & + \lambda_{234} \circ (i \psi^{134} + \psi^{234}) + \lambda_{124} \circ (i \psi^4 + \psi^{124}).
 \end{aligned}$$

Таким образом, в  $iab$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными чис-

лами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= i\psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= i\psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= i\psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= i\psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= i\psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= i\psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= i\psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= i\psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_0 \psi^0 + \lambda_{14} \psi^{14} + \lambda_{34} \psi^{34} + \\ &+ \lambda_2 \psi^2 + \lambda_{123} \psi^{123} + \lambda_{234} \psi^{234} + \lambda_{124} \psi^{124}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в  $iab$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\lambda_{13}$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_{14}$ ,  $\lambda_{34}$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_{123}$ ,  $\lambda_{234}$ ,  $\lambda_{124}$ .

В  $iab$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $8 \times 8$  (см. Раздел II.2.).

### 5. $IAB$ -представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_4$

$IAB$ -представление алгебры  $\mathbb{Q}_4$  основано на разложении вектора

$$\begin{aligned} \psi &= (\lambda_{32} \psi^{32} + \lambda_{13} \psi^{13} + \lambda_{21} \psi^{21} + \lambda_0 \psi^0) \circ \lambda_0 + \\ &+ (\lambda_{32} \psi^{42} + \lambda_{13} \psi^{14} + \lambda_{21} \psi^{1324} + \lambda_0 \psi^{34}) \circ \lambda_{34} + \\ &+ (\lambda_{32} \psi^1 + \lambda_{13} \psi^2 + \lambda_{21} \psi^3 + \lambda_0 \psi^{123}) \circ \lambda_{123} + \\ &+ (\lambda_{32} \psi^{134} + \lambda_{13} \psi^{234} + \lambda_{21} \psi^4 + \lambda_0 \psi^{124}) \circ \lambda_{124}. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_2$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_0, \quad \lambda_{34}, \quad \lambda_{123}, \quad \lambda_{124};$$

базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{Q}_2$  являются

$$\lambda_{32}, \quad \lambda_{13}, \quad \lambda_{21}, \quad \lambda_0.$$

Последнюю алгебру мы назвали  $IAB$ -алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц  $IAB$ -алгебры используем следующие обозначения:

$$a \cdot I, \quad b \cdot A, \quad i \cdot B, \quad \mathbb{1}.$$

Заменим базисные векторы  $\lambda_{32}$ ,  $\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{21}$ ,  $\lambda_0$  приведенными гиперчислами

$$\begin{aligned} \lambda_{32} &\sim aI, \\ \lambda_{13} &\sim bA, \\ \lambda_{21} &\sim iB, \\ \lambda_0 &\sim I\mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4$  в  $IAB$ -представлении

$$\begin{aligned} \psi &= (a \cdot I \psi^{32} + b \cdot A \psi^{13} + i \cdot B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0) \circ \lambda_0 + \\ &+ (a \cdot I \psi^{42} + b \cdot A \psi^{14} + i \cdot B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}) \circ \lambda_{34} + \\ &+ (a \cdot I \psi^1 + b \cdot A \psi^2 + i \cdot B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \lambda_{123} + \\ &+ (a \cdot I \psi^{134} + b \cdot A \psi^{234} + i \cdot B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}) \circ \lambda_{124}. \end{aligned}$$

Таким образом, в  $IAB$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= aI \psi^{32} + bA \psi^{13} + iB \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{34} &= aI \psi^{42} + bA \psi^{14} + iB \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= aI \psi^1 + bA \psi^2 + iB \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= aI \psi^{134} + bA \psi^{234} + iB \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \Psi^0 \lambda_0 + \Psi^{34} \lambda_{34} + \Psi^{123} \lambda_{123} + \Psi^{124} \lambda_{124}.$$

Отсюда видно, что в  $IAB$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\lambda_0$ ,  $\lambda_{34}$ ,  $\lambda_{123}$ ,  $\lambda_{124}$ .

В  $IAB$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$  (см. Раздел II.2.).

## III. КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВОБОДНЫХ СИНИХ КВАРКОВ

Мы вычислили структурные матрицы алгебры кварков и теперь вернемся к результатам Главы 3.3. Согласно этой Главе, если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи квантовые явления, а уравнение структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовый постулат. В Разделе III. Главы 4.8 уравнение структуры алгебры действия общего вида преобразовано в квантовое уравнение для свободных кварков, которым воспользуемся далее. Указанное уравнение имеет вид

$$iC^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot r C^N_{K0} + \beta \cdot r C^N_{K34}) \cdot \psi^K. \quad (3)$$

Здесь  $m_d$  есть масса  $d$ -кварка,  $q$  – постоянная величина, имеющая размерность действия, аналогичная постоянной Планка,  $\alpha$  и  $\beta$  – действительные, положительные числа, на которые наложено условие

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1. \quad (4)$$

Масса верхнего кварка  $m_u$  выражается через массу нижнего кварка  $m_d$  следующим образом

$$m_u = m_d \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (5)$$

### 1. Квантовое уравнение для синих кварков первого поколения

Квантовое уравнение для свободных синих кварков первого поколения получим, подставив в уравнение (3) структурные матрицы, выведенные в Разделе II. Для действительного регулярного представления алгебры кварков  $\mathbb{Q}(u, d)$  компоненты волновой функции  $\psi^K(x)$  представляют собой шестнадцать

действительных функций. В  $iab$ -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (1), в  $IAB$ -представлении компонентами волновой функции являются четыре  $IAB$ -функции вида (2). Приведем квантовое уравнение по отношению к  $IAB$ -компонентам волновой функции кварков:

$$\begin{aligned} & \left( a \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline -1 & & \\ \hline \end{array} \partial_4 + i \begin{array}{|c|c|} \hline & -A \\ \hline A & \\ \hline & A \\ \hline \end{array} \partial_1 + \right. \\ & \left. + \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array} \partial_2 + a \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \partial_3 \right) \begin{array}{|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \end{array} = \\ & = -\frac{m_d c}{2q} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & -\beta & \\ \hline \beta & \alpha & \\ \hline & & \alpha & -\beta \\ \hline & & \beta & \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -a \partial_4 \Psi^{124} + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{123} &= \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^0 - \beta \cdot \Psi^{34}), \\ a \partial_4 \Psi^{123} + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \Psi^{124} &= \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34}), \\ -a \partial_4 \Psi^{34} - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^0 &= \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\alpha \cdot \Psi^{123} - \beta \cdot \Psi^{124}), \\ a \partial_4 \Psi^0 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{34} &= \\ &= \frac{m_d c}{2q} (\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124}). \end{aligned} \quad (6)$$

## 2. Стандартное представление квантовое уравнение для синих $u$ и $d$ кварков

Преобразуем уравнения (6) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым, а третье с четвертым. Получим

$$a \partial_4 \chi_1 + (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \varphi_2 = \frac{m_1 c}{2q} \varphi_1 + \frac{m_2 c}{2q} \chi_2,$$

$$a \partial_4 \chi_2 - (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \varphi_1 = \frac{m_1 c}{2q} \varphi_2 + \frac{m_2 c}{2q} \chi_1, \quad (7)$$

где  $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и  $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\chi_1 = \Psi^0 - \Psi^{34}$  и  $\chi_2 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ ,  $m_1 = m_d \alpha$ ,  $m_2 = m_d \beta$ .

Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$a \partial_4 \varphi_1 + (i A \partial_1 + I \partial_2 + a \partial_3) \chi_2 = -\frac{m_1 c}{2q} \chi_1 + \frac{m_2 c}{2q} \varphi_2,$$

$$a \partial_4 \varphi_2 - (i A \partial_1 + I \partial_2 - a \partial_3) \chi_1 = -\frac{m_1 c}{2q} \chi_2 + \frac{m_2 c}{2q} \varphi_1. \quad (8)$$

Мы столкнулись со странным обстоятельством: система уравнений для синих кварков не разделяется на две системы, которые относились бы к разным частицам – верхней и нижней. Отметим этот вопрос и оставим его открытым.

## IV. ТАБЛИЦА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ – КВАРКОВ

В Главах 4.8. и 4.9. показано, что волновая функция красного и желтого кварков в стандартном представлении распадается на две двухкомпонентные волновые функции, то есть эти кварки представлены верхней и нижней частицами. В Главе 4.10. показано, что, в отличие от красных и желтых кварков, волновая функция синих кварков в стандартном представлении остается четырехкомпонентной, то есть, синий кварк представлен одной частицей в каждом поколении. Отсюда имеем следующую таблицу кварков.

### 1. Кварки первого поколения

кварки	красные	желтые	синие
верхние	$u_r$	$u_y$	$d_b$
нижние	$d_r$	$d_y$	

### 2. Кварки второго поколения

кварки	красные	желтые	синие
верхние	$c_r$	$c_y$	$s_b$
нижние	$s_r$	$s_y$	

### 3. Кварки третьего поколения

кварки	красные	желтые	синие
верхние	$t_r$	$t_y$	$b_b$
нижние	$b_r$	$b_y$	

## V. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Волновая функция нерелятивистского синего кварка есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3$ .
- Волновая функция синего кварка одного поколения есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_b$ .
- Волновые функции синих кварков разных поколений отличаются друг от друга циклической

перестановкой трех образующих базисных векторов.

- Компоненты волновой функции  $\Psi^0 + \Psi^{34}$ ,  $\Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\Psi^{123} - \Psi^{124}$ ,  $\Psi^0 - \Psi^{34}$  относятся к одному синему кварку. Этот вывод следует из того, что полученные квантовые уравнения для синих кварков в стандартном представлении нельзя представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относилась бы к двухкомпонентной волновой функции.
- Установлена следующая организация волновой функции синего кварка первого поколения. Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где  $A$  принимает значения

32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,

разбиваются на четыре части:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) + \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}), \\ \varphi_2 &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) + \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\ \chi_1 &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) - \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}), \\ \chi_2 &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) - \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}).\end{aligned}$$

- Компоненты волновых функций синих кварков второго и третьего поколений отличаются от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов:

для синего кварка второго поколения

$$3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3;$$

для синего кварка третьего поколения

$$3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2.$$

- Цветовые разновидности кварков ставятся в соответствие перестановочным соотношениям с участием базисного вектора времени и геометрических базисных векторов.
- В принятом понимании цвета кварки имеют три цветовые разновидности: красные, желтые, синие.
- Из алгебраической структуры векторов действия кварков следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений этих частиц. В общем случае нет оснований считать, что квантовые явления с участием кварков определяются постоянной Планка, а не другой постоянной величиной, имеющей размерность действия.
- Структура квантовых уравнений для свободных красных и желтых кварков такова, что они разделяются на две системы уравнений. Таким образом, мы имеем две частицы, одна из которых – это верхний кварк, а другая – нижний кварк.

- Уравнения для верхних и нижних красных и желтых кварков отличаются не только массами частиц, но и знаком одной из компонент оператора импульса. Таким образом, в отличие от лептонов, движение в пространстве нижних красных и желтых кварков отличается от движения верхних красных и желтых кварков кварков.
- Структура квантовых уравнений для свободных красных и желтых кварков такова, что волновые функции кварков разделяются на две компоненты: правую и левую, – подобно тому как это имеет место для лептонов. Такое разделение необходимо для описания электрослабого взаимодействия кварков.
- Правила формирования правых и левых компонент волновой функции для красных и желтых частиц отличаются от аналогичных правил для синих частиц. В первом случае для нижних частиц  $\Psi_L = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и  $\Psi_R = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ , а для верхних частиц  $\Psi_R = \Psi^0 - \Psi^{34}$  и  $\Psi_L = \Psi^{123} - \Psi^{124}$ , во втором случае указанные компоненты не относятся к разным частицам.



# Глава 4.11 Нерелятивистские кваркино. Алгебры действия и пространства-времени кваркино

## I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Логика диаграмм Юнга заставляет ввести в рассмотрение гипотетические фундаментальные частицы, суперсимметричные кваркам, названные *кваркино*.

Алгебра действия кваркино является частным случаем алгебры действия фундаментальных частиц  $\mathbb{S}$ , для которого одна часть произведений базисных векторов образующего пространства антикоммумутативна, а другая часть – коммутативна. Также алгебра пространства-времени кваркино есть частный случай алгебры пространства-времени фундаментальных частиц  $\mathbb{X}$ .

Для того чтобы очевидно выделить этот случай, для алгебры кваркино (действия и пространства-времени) введем другое обозначение базисных векторов. Вместо обозначения базисных векторов  $\mathbf{e}$  введем обозначение  $\rho$ , а вместо  $\mathbf{E}$  введем обозначение  $\mathbf{R}$ . Кроме того, введем специальное обозначение для алгебры действия кваркино  $\mathbb{Q}^s$  и специальное обозначение для алгебры пространства-времени кваркино  $\mathbb{X}_Q^s$ .

Эта Глава относится к кваркино, которые названы *нерелятивистскими*. Это название *не означает*, что рассматриваются кваркино, движущиеся с скоростью, много меньшей скорости света. Это название означает, что рассматриваются кваркино, в формировании волновой функции которых не участвуют времениподобные компоненты, то есть образующее пространство алгебры действия таких кваркино полагается подобным геометрическому пространству.

## II. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ КВАРКИНО. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Настоящая Глава посвящена алгебре действия нерелятивистских кваркино  $\mathbb{Q}_3^s$ , образующим пространством которой является пространство, подобное геометрическому, с базисными векторами

$$\rho_1 \equiv \mathbf{e}_1, \quad \rho_2 \equiv \mathbf{e}_2, \quad \rho_3 \equiv \mathbf{e}_3.$$

На кваркино распространяется системообразующий постулат, изложенный в Главе 4.2. Раздел IV., согласно которому каждой фундаментальной частице можно поставить в соответствие *две аналогичные* фундаментальные частицы. Итого имеем *три аналогичные* фундаментальные частицы. Указанные три аналогичные фундаментальные частицы объединены в одну группу. О трех аналогичных фундаментальных частицах, принадлежащих одной группе, говорят как о трех частицах разных *поколений* этой группы: частице пер-

вого поколения, частице второго поколения и частице третьего поколения,

### 1. Алгебра действия и поколения кваркино

Алгебра действия нерелятивистских кваркино включает в себя три алгебры, отличающиеся правилами перестановки сомножителей в произведениях базисных векторов образующего пространства и определенным порядком индексов. Каждая из трех алгебр ставится в соответствие поколению лептино.

#### 1.1. Алгебра действия кваркино первого поколения

В соответствии с Разделом IV.3 Главы 3.4 волновая функция кваркино первого поколения определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры кваркино

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}.$$

В результате пространственная часть волновой функции кваркино имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_a \psi^a + \mathbf{e}_{\langle 21 \rangle} \psi^{\langle 21 \rangle} + \mathbf{e}_{[13]} \psi^{[13]} + \mathbf{e}_{\langle 32 \rangle} \psi^{\langle 32 \rangle} + \mathbf{e}_{(123)_3} \psi^{(123)_3}.$$

В развернутом виде условия соседней перестановки для принятого обозначения геометрических базисных векторов записываются так

$$\begin{aligned} \rho_2 \circ \rho_1 &= \rho_1 \circ \rho_2, \\ \rho_1 \circ \rho_3 &= -\rho_3 \circ \rho_1, \\ \rho_3 \circ \rho_2 &= \rho_2 \circ \rho_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Перепишем волновую функцию кваркино с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

Получим

$$\psi = \rho_{32} \psi^{32} + \rho_{13} \psi^{13} + \rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0 + \rho_1 \psi^1 + \rho_2 \psi^2 + \rho_3 \psi^3 + \rho_{123} \psi^{123} \tag{2}$$

или в компактной записи

$$\psi = \rho_A \psi^A,$$

где индекс  $A$  принимает значения

$$A \sim (32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

Алгебру, включающую условия соседней перестановки (1) и указанный порядок индексов, поставим в соответствие кваркино первого поколения и будем обозначать  $\mathbb{Q}^s(1)$ .

### 1.2. Алгебра действия кваркино второго поколения

В соответствии с Разделом IV.3 Главы 3.4 волновая функция кваркино второго поколения определена следующей диаграммой Юнга:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры кваркино

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}.$$

В результате пространственная часть волновой функции кваркино имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_a \psi^a + \mathbf{e}_{\langle 13 \rangle} \psi^{\langle 13 \rangle} + \mathbf{e}_{[32]} \psi^{[32]} + \mathbf{e}_{\langle 21 \rangle} \psi^{\langle 21 \rangle} + \mathbf{e}_{(312)_3} \psi^{(312)_3}.$$

В развернутом виде условия соседней перестановки для принятого обозначения геометрических базисных векторов записываются так:

$$\begin{aligned} \rho_2 \circ \rho_1 &= \rho_1 \circ \rho_2, \\ \rho_1 \circ \rho_3 &= \rho_3 \circ \rho_1, \\ \rho_3 \circ \rho_2 &= -\rho_2 \circ \rho_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Перепишем волновую функцию кваркино с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(21, 32, 13, 0, 3, 1, 2, 312).$$

Получим

$$\psi = \rho_{21} \psi^{21} + \rho_{32} \psi^{32} + \rho_{13} \psi^{13} + \rho_0 \psi^0 + \rho_3 \psi^3 + \rho_1 \psi^1 + \rho_2 \psi^2 + \rho_{312} \psi^{312} \quad (4)$$

или в компактной записи

$$\psi = \rho_A \psi^A,$$

где индекс  $A$  принимает значения

$$A \sim (21, 32, 13, 0, 3, 1, 2, 312).$$

Алгебру, включающую условия соседней перестановки (3) и указанный порядок индексов, поставим в соответствие кваркино второго поколения и будем обозначать  $\mathbb{Q}^s(2)$ .

### 1.3. Алгебра действия кваркино третьего поколения

В соответствии с Разделом IV.3 Главы 3.4 волновая функция кваркино третьего поколения определена следующей диаграммой Юнга:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры кваркино

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}.$$

В результате пространственная часть волновой функции кваркино имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_a \psi^a + \mathbf{e}_{\langle 32 \rangle} \psi^{\langle 32 \rangle} + \mathbf{e}_{[21]} \psi^{[21]} + \mathbf{e}_{\langle 13 \rangle} \psi^{\langle 13 \rangle} + \mathbf{e}_{(231)_3} \psi^{(231)_3}.$$

В развернутом виде условия соседней перестановки для принятого обозначения геометрических базисных векторов записываются так:

$$\begin{aligned} \rho_2 \circ \rho_1 &= -\rho_1 \circ \rho_2, \\ \rho_1 \circ \rho_3 &= \rho_3 \circ \rho_1, \\ \rho_3 \circ \rho_2 &= \rho_2 \circ \rho_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Перепишем волновую функцию кваркино с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(13, 21, 32, 0, 2, 3, 1, 231).$$

Получим

$$\psi = \rho_{13} \psi^{13} + \rho_{21} \psi^{21} + \rho_{32} \psi^{32} + \rho_0 \psi^0 + \rho_2 \psi^2 + \rho_3 \psi^3 + \rho_1 \psi^1 + \rho_{231} \psi^{231} \quad (6)$$

или в компактной записи

$$\psi = \rho_A \psi^A,$$

где индекс  $A$  принимает значения

$$A \sim (13, 21, 32, 0, 2, 3, 1, 231).$$

Алгебру, включающую условия соседней перестановки (5) и указанный порядок индексов, поставим в соответствие кваркино третьего поколения и будем обозначать  $\mathbb{Q}^s(3)$ .

Алгебры  $\mathbb{Q}^s(1)$ ,  $\mathbb{Q}^s(2)$ ,  $\mathbb{Q}^s(3)$ , поставленные в соответствие трем поколениям кваркино, содержат по двум коммутативным и одному антикоммутативному соотношениям. Следует ожидать, что это совпадение приведет к совпадению ряда динамических характеристик поколений кваркино.

От алгебры  $\mathbb{Q}^s(1)$ , можно перейти к алгебре  $\mathbb{Q}^s(2)$  и затем к алгебре  $\mathbb{Q}^s(3)$ , выполняя циклическую перестановку индексов 1, 2, 3, нумерующих компоненты геометрического вектора. Таким образом, переход от волновых функций кваркино одного поколения к волновым функциям кваркино других поколений осуществляется циклической перестановкой индексов, нумерующих компоненты геометрического вектора. При этом само число поколений кваркино равно размерности геометрического пространства, то есть трем. Здесь необходимо вспомнить, что в Главе 4.7 Раздел II. было показано, что переход от волновых функций кварков одного поколения к волновым функциям кварков других поколений осуществляется циклической перестановкой индексов, нумерующих компоненты геометрического вектора, а само число поколений кварков равно размерности геометрического пространства. Таким образом, мы имеем единую точку зрения, объясняющую как существование поколений фундаментальных частиц, так и их число. Наличие такой точки зрения является необходимым условием построения единой теории взаимодействий.

## 2. Алгебра действия нижних и верхних кваркино

Здесь необходимо вспомнить ситуацию, с которой мы столкнулись при описании лептонов. В Главе 4.4. Раздел X. установлено, что алгебра Клиффорда  $\mathbb{C}_3$  является алгеброй действия лептонов одного поколения. Наши рассуждения включали два этапа. Сначала мы обобщили алгебру  $\mathbb{C}_3$  до алгебры релятивистских лептонов  $\mathbb{C}_4$ , а затем записали квантовое уравнение для этой алгебры. Оказалось, что уравнения распадаются на две независимые системы уравнений, одна из которых относится к верхнему, а другая к нижнему лептонам одного поколения. Если допустить единую точку зрения на алгебраическую структуру фундаментальных частиц, то нужно считать, что алгебра кваркино  $\mathbb{Q}_3^s$  является алгеброй действия кваркино одного поколения (например, первого), причем после того, как алгебра  $\mathbb{Q}_3^s$  будет обобщена до алгебры релятивистских кваркино  $\mathbb{Q}_4^s$  и для нее будут записаны квантовые уравнения, возможны два варианта указанных уравнений.

Первый – эти уравнения распадаются на две независимых системы уравнений. В этом случае одна из систем относится к верхней фундаментальной частице рассматриваемого поколения, а другая к нижней частице этого поколения.

Второй – квантовые уравнения не распадаются на две независимых системы уравнений. В этом случае поколение представлено одной частицей.

Наличие такой точки зрения на алгебраическую структуру фундаментальных частиц одного поколения является весьма желательным с позиции *единого* подхода к фундаментальным частицам. Именно эту

точку зрения мы проводим, постулируя вышеуказанное соответствие алгебр и поколений кваркино.

## III. АЛГЕБРА НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ КВАРКИНО. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

### 1. Базисные векторы

В соответствии с выдвинутым нами предположением алгебра  $\mathbb{Q}_3^s$  есть алгебра действия кваркино. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\rho_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Этот базисный вектор ничем не отличается от соответствующего вектора  $\lambda_0$  алгебры  $\mathbb{Q}$ . Однако мы используем другое обозначение для того, чтобы подчеркнуть принадлежность этого вектора другой алгебре. Для  $\rho_0$  имеет место правило умножения

$$\rho_0 \circ \rho_0 = \rho_0 .$$

- Образующие векторы  $\rho_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3. Нужно иметь в виду, что образующее пространство для алгебр  $\mathbb{Q}_3^s$  и  $\mathbb{Q}_3$  одинаково. Поэтому векторы  $\rho_a$  не отличаются от векторов  $\lambda_a$  пока не рассматривается умножение базисных векторов. Число векторов  $\rho_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\rho_a \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho_a = \rho_a .$$

$$\rho_a \circ \rho_a = \rho_0 .$$

- Векторы

$$\rho_{ab} = \rho_a \circ \rho_b .$$

Здесь  $a \neq b$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из трех элементов по два

$$C_3^2 = 3 .$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей (условия соседней перестановки), указанные в Разделе I.

- Вектор

$$\rho_{123} = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 .$$

Для этих векторов выполняются правила умножения, вытекающие из условия ассоциативности и условий соседней перестановки.

## 2. Умножение базисных векторов

### 2.1. Контравариантная алгебра

Здесь мы отталкиваемся от следующих общих соображений. Базисные векторы  $\mathbf{e}_I$  участвуют в построении как контравариантной алгебры действия фундаментальных частиц  $\mathbb{S}$ , так и контравариантной алгебры пространства-времени фундаментальных частиц  $\mathbb{X}$ . Принадлежность вектора или алгебре действия, или алгебре пространства-времени определяется размерностью координат вектора. Поэтому, если не рассматривать размерность вектора или считать вектор безразмерным, то можно говорить вообще о *контравариантной алгебре фундаментальных частиц*. Обозначим безразмерную алгебру фундаментальных частиц следующим образом:  $(\mathbb{S}, \mathbb{X})$ . Необходимо отметить, что умножение в контравариантной алгебре  $(\mathbb{S}, \mathbb{X})$  является некоммутативным, поэтому алгебра  $(\mathbb{S}, \mathbb{X})$  существует в двух модификациях: правой —  ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})$  и левой —  ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})$ . Для правой контравариантной алгебры фундаментальных частиц  ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_I = {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L_{KI}.$$

Для левой контравариантной алгебры фундаментальных частиц  ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{e}_K = {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L_{KI}.$$

Кроме того, необходимо отметить, что структурные постоянные

$$C^L_{KI} \sim {}_rC^L_{KI}, \quad {}_lC^L_{KI}$$

участвуют в формировании оператора набла фундаментальной античастицы. Структурные постоянные  ${}_rC^L_{KI}$  участвуют в формировании левого оператора набла, а структурные постоянные  ${}_lC^L_{KI}$  участвуют в формировании правого оператора набла.

Отталкиваясь от вышесказанного, обратимся к алгебре кваркино. Базисные векторы  $\rho_I$  участвуют в построении как контравариантной алгебры действия кваркино  $\mathbb{Q}^s$ , так и контравариантной алгебры пространства-времени кваркино  $\mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s}$ . Принадлежность вектора или алгебре действия, или алгебре пространства-времени определяется размерностью координат вектора. Поэтому, если не рассматривать размерность вектора или считать вектор безразмерным, то можно говорить вообще о *контравариантной алгебре кваркино*. Обозначим безразмерную алгебру кваркино следующим образом  $(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})$ . Необходимо отметить, что умножение в контравариантной алгебре кваркино  $(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})$  является некоммутативным, поэтому алгебра  $(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})$  существует в двух модификациях: правой —  ${}_r(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})$  и левой —  ${}_l(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})$ . Для правой контравариантной алгебры кваркино  ${}_r(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})$

умножение базисных векторов имеет вид

$${}_r\rho_K \circ {}_r\rho_I = {}_r\rho_L \cdot {}_rC^L_{KI}. \quad (7)$$

Для левой контравариантной алгебры кваркино  ${}_l(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_l\rho_I \circ {}_l\rho_K = {}_l\rho_L \cdot {}_lC^L_{KI}. \quad (8)$$

Кроме того, необходимо отметить, что структурные постоянные

$$C^L_{KI} \sim {}_rC^L_{KI}, \quad {}_lC^L_{KI}$$

участвуют в формировании оператора набла антикваркино. Структурные постоянные  ${}_rC^L_{KI}$  участвуют в формировании левого оператора набла, а структурные постоянные  ${}_lC^L_{KI}$  участвуют в формировании правого оператора набла.

### 2.2. Ковариантная алгебра

Здесь мы также отталкиваемся от следующих общих соображений. Базисные векторы  $\mathbf{E}^I$  участвуют в построении как ковариантной алгебры действия фундаментальных античастиц  $\mathbb{S}^*$ , так и ковариантной алгебры пространства-времени фундаментальных античастиц  $\mathbb{X}^*$ . Принадлежность вектора или алгебре действия, или алгебре пространства-времени фундаментальных античастиц определяется размерностью вектора. Поэтому, если не рассматривать размерность вектора или считать вектор безразмерным, то можно говорить вообще о *ковариантной алгебре фундаментальных античастиц*. Обозначим безразмерную алгебру фундаментальных античастиц следующим образом:  $(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$ . Необходимо отметить, что умножение в ковариантной алгебре  $(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$  является некоммутативным, поэтому алгебра  $(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$  существует в двух модификациях: правой —  ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$  и левой —  ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$ . Для правой ковариантной алгебры фундаментальных античастиц  ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_r\mathbf{E}^K \circ {}_r\mathbf{E}^I = {}_rC^{IK}_L \cdot {}_r\mathbf{E}^L.$$

Для левой ковариантной алгебры фундаментальных античастиц  ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_l\mathbf{E}^I \circ {}_l\mathbf{E}^K = {}_lC^{IK}_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L.$$

Кроме того, необходимо отметить, что структурные постоянные

$$C^{IK}_L \sim {}_rC^{IK}_L, \quad {}_lC^{IK}_L$$

участвуют в формировании оператора набла фундаментальной частицы. Структурные постоянные  ${}_rC^{IK}_L$  участвуют в формировании левого оператора набла,

а структурные постоянные  ${}_l C^{IK}_L$  участвуют в формировании правого оператора набла.

Отталкиваясь от вышесказанного, обратимся к алгебре антикваркино. Базисные векторы  $\mathbf{R}^I$  участвуют в построении как ковариантной алгебры действия антикваркино  $\mathbb{Q}^{s*}$ , так и ковариантной алгебры пространства-времени антикваркино  $\mathbb{X}_Q^{s*}$ . Принадлежность вектора или алгебре действия, или алгебре пространства-времени антикваркино определяется размерностью вектора. Поэтому, если не рассматривать размерность вектора или считать вектор безразмерным, то можно говорить вообще о *ковариантной алгебре антикваркино*. Обозначим безразмерную алгебру антикваркино следующим образом:  $(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)^*$ . Необходимо отметить, что умножение в ковариантной алгебре  $(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)^*$  является некоммутативным, поэтому алгебра  $(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)^*$  существует в двух модификациях: правой –  ${}_r(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)^*$  и левой –  ${}_l(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)^*$ . Для правой ковариантной алгебры антикваркино  ${}_r(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)^*$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_r R^K \circ {}_r R^I = {}_r C^{IK}_L {}_r R^L. \quad (9)$$

Для левой ковариантной алгебры антикварков  ${}_l(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)^*$  умножение базисных векторов имеет вид

$${}_l R^I \circ {}_l R^K = {}_l C^{IK}_L {}_l R^L. \quad (10)$$

Кроме того, необходимо отметить, что структурные постоянные

$$C^{IK}_L \sim {}_r C^{IK}_L, \quad {}_l C^{IK}_L$$

участвуют в формировании оператора набла кваркино. Структурные постоянные  ${}_r C^{IK}_L$  участвуют в формировании левого оператора набла, а структурные постоянные  ${}_l C^{IK}_L$  участвуют в формировании правого оператора набла.

#### IV. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ КВАРКИНО ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}^s(1)$

В соответствии с выдвинутым нами предположением коммутативно-антикоммутативная алгебра  $\mathbb{Q}^s(1)$  есть алгебра действия и алгебра пространства-времени кваркино первого поколения. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\rho_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\rho_0$  имеет место правило умножения

$$\rho_0 \circ \rho_0 = \rho_0.$$

- Образующие базисные векторы  $\rho_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3, есть базисные векторы геометрического пространства. Число векторов  $\rho_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\rho_a \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho_a = \rho_a.$$

$$\rho_a \circ \rho_a = \rho_0.$$

- Векторы

$$\rho_{ab} = \rho_a \circ \rho_b.$$

Здесь  $a \neq b$ .

В соответствии с Разделом I для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей – условия соседней перестановки

$$\rho_{12} = \rho_{21},$$

$$\rho_{13} = -\rho_{31},$$

$$\rho_{32} = \rho_{23}.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности,

$$\rho_{21} \circ \rho_{21} = \rho_0,$$

$$\rho_{13} \circ \rho_{13} = -\rho_0,$$

$$\rho_{32} \circ \rho_{32} = \rho_0.$$

- Вектор

$$\rho_{123} = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей

$$\rho_{123} = \rho_{213} = -\rho_{231} = -\rho_{321} = -\rho_{312} = \rho_{132}.$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\rho_{123} \circ \rho_{123} = -\rho_0.$$

##### 1. Действительное представление алгебры действия кваркино $\mathbb{Q}^s(1)$

Записи вектора  $\psi$

$$\psi = \rho_{32} \psi^{32} + \rho_{13} \psi^{13} + \rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0 + \rho_1 \psi^1 + \rho_2 \psi^2 + \rho_3 \psi^3 + \rho_{123} \psi^{123}$$

соответствует действительное представление алгебры действия кваркино  $\mathbb{Q}_3^s$ . В этом случае структурные матрицы, которыми представлены базисные векторы

$$C^L_{KI} \sim \rho_I,$$

имеют действительные коэффициенты, а размерность матриц равна  $8 \times 8$  (См. Раздел V.). Помимо действительного представления будем использовать  $iab$ -представление и  $IAB$ -представление, удобные в силу своей компактности.

## 2. $iab$ -представление алгебры действия кваркино $\mathbb{Q}^s(1)$

$iab$ -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \rho_{13} \circ (\rho_{21} \psi^{32} + \rho_0 \psi^{13}) + \rho_0 \circ (\rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0) + \rho_2 \circ (\rho_{21} \psi^1 + \rho_0 \psi^2) + \rho_{123} \circ (\rho_{21} \psi^3 + \rho_0 \psi^{123}).$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_3^s$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_2^s \times \mathbb{Q}_1^s$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_2^s$  являются

$$\rho_{13}, \rho_0, \rho_2, \rho_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1^s$  являются

$$\rho_{21}, \rho_0.$$

Пространство  $\mathbb{Q}_1^s$  можно рассматривать как пространство  $iab$ -чисел. Для этого базисному вектору  $\rho_{21}$  алгебры  $\mathbb{Q}_1^s$  поставим в соответствие  $a$ -единицу, а базисному вектору  $\rho_0$  этой алгебры поставим в соответствие действительную единицу:

$$\rho_{21} \sim a, \quad \rho_0 \sim 1.$$

В результате получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3^s$  в  $iab$ -представлении

$$\psi = \rho_{13} \circ (a \psi^{32} + \psi^{13}) + \rho_0 \circ (a \psi^{21} + \psi^0) + \rho_2 \circ (a \psi^1 + \psi^2) + \rho_{123} \circ (a \psi^3 + \psi^{123}). \quad (11)$$

Таким образом, в  $iab$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются  $a$ -гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= a \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= a \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^2 &= a \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= a \psi^3 + \psi^{123}. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \rho_{13} \psi^{13} + \rho_0 \psi^0 + \rho_2 \psi^2 + \rho_{123} \psi^{123}. \quad (13)$$

Отсюда следует, что в  $iab$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\rho_{13}, \rho_0, \rho_2, \rho_{123}$ .

В  $iab$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$ . От  $iab$ -представления перейдем к  $IAB$ -представлению.

## 3. $IAB$ -представление алгебры действия кваркино $\mathbb{Q}^s(1)$

$IAB$ -представление алгебры  $\mathbb{Q}_3^s$  основано на разложении вектора

$$\psi = (\rho_{32} \psi^{32} + \rho_{13} \psi^{13} + \rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0) \circ \rho_0 + (\rho_{32} \psi^1 + \rho_{13} \psi^2 + \rho_{21} \psi^3 + \rho_0 \psi^{123}) \circ \rho_{123}.$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_3^s$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_1^s \times \mathbb{Q}_2^s$ . Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1^s$  являются

$$\rho_0, \rho_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_2^s$  являются

$$\rho_{32}, \rho_{13}, \rho_{21}, \rho_0.$$

$$(\rho_{32})^2 = (\rho_{21})^2 = (\rho_0)^2 = 1, \quad (\rho_{13})^2 = -1.$$

Последнюю алгебру назовем  $IAB$ -алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц  $IAB$ -алгебры используем следующие обозначения:

$$a \cdot A, \quad 1 \cdot I, \quad a \cdot B, \quad 1 \cdot \mathbb{1}.$$

Заменим базисные векторы  $\rho_{32}, \rho_{13}, \rho_{21}, \rho_0$  приведенными гиперчислами

$$\begin{aligned} \rho_{32} &\sim a A, \\ \rho_{13} &\sim 1 I, \\ \rho_{21} &\sim a B, \\ \rho_0 &\sim 1 \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3^s$  в  $IAB$ -представлении<sup>1</sup>

$$\psi = (a \cdot A \psi^{32} + 1 \cdot I \psi^{13} + a \cdot B \psi^{21} + 1 \cdot \mathbb{1} \psi^0) \circ \rho_0 + (a \cdot A \psi^1 + 1 \cdot I \psi^2 + a \cdot B \psi^3 + 1 \cdot \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \rho_{123}.$$

Таким образом, в  $IAB$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a \cdot A \psi^{32} + 1 \cdot I \psi^{13} + a \cdot B \psi^{21} + 1 \cdot \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{123} &= a \cdot A \psi^1 + 1 \cdot I \psi^2 + a \cdot B \psi^3 + 1 \cdot \mathbb{1} \psi^{123}. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \Psi^0 \rho_0 + \Psi^{123} \rho_{123}.$$

Отсюда следует, что в  $IAB$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\rho_0, \rho_{123}$ .

В  $IAB$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $2 \times 2$  (см. Раздел V).

<sup>1</sup> Заметим, что при умножении базисных единиц первые и вторые сомножители умножаются отдельно. Например,

$$(a \cdot I) \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot (I \cdot A) = -i \cdot B.$$

## V. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ КОНТРАВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ ДЕЙСТВИЯ КВАРКИНО $\mathbb{Q}_3^s$

В этом Разделе рассмотрим вычисление структурных матриц алгебры кваркино  $\mathbb{Q}_3^s$ . При этом будем пользоваться опытом, полученным при выводе матриц Дирака. Обращение к матрицам Дирака позволяет сделать следующие выводы.

1. Компоненты векторов и матриц необходимо рассматривать в следующей последовательности индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

2. Переход от действительного представления к компактному представлению осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C_{KI}^L$  от действительного представления к  $iab$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$i = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

$$a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C_{KI}^L$  от  $iab$ -представления к  $IAB$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

3. При переходе к частным случаям квантовой теории целесообразно пользоваться процедурой сжатия, или вырождения слагаемых компонент вектора.

Итак, в соответствии с общим подходом необходимо, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре  $\mathbb{Q}_3$ , найти структурные матрицы этой алгебры. Затем, анализируя свойства этих матриц, сделать заключение относительно свойств кварков.

---

<sup>2</sup> Напомним (см. Глава 4.2. Раздел III.), что для матриц  $i, a, b$  и соответствующих гиперчисел выполняются правила умножения

$$a^2 = b^2 = 1, \quad i^2 = -1, \quad ab = -ba = i,$$

$$ai = -ia = b, \quad ib = -bi = a.$$

Аналогично для матриц  $I, A, B$  и соответствующих гиперчисел выполняются правила умножения

$$A^2 = B^2 = \mathbb{1}, \quad I^2 = -\mathbb{1}, \quad AB = -BA = I,$$

$$AI = -IA = B, \quad IB = -BI = A.$$

## 1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры действия кваркино первого поколения ${}_r \mathbb{Q}_3^s(1)$

Приступим к вычислению структурных матриц правой алгебры действия кваркино  ${}_r \mathbb{Q}_3^s$ . Структурные матрицы будем обозначать теми базисными векторами, которые они представляют:

$${}_r \rho_I \sim {}_r C_{KI}^L.$$

Напомним, что закон умножения базисных векторов в правой алгебре кваркино  ${}_r \mathbb{Q}_3^s$  записывается следующим образом:

$${}_r \rho_K \circ {}_r \rho_I = {}_r \rho_L \cdot {}_r C_{KI}^L. \quad (15)$$

Из выражения (15) следует алгоритм вычисления структурных матриц правой алгебры действия кваркино  ${}_r \mathbb{Q}_3^s$ . Эти матрицы соответствуют базисным векторам  ${}_r \rho_I$ . Сначала нужно установить номер структурной матрицы ( $I$ ) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы ( $K$ ) проделать следующие вычисления. Базисный вектор  ${}_r \rho_K$ , номер которого совпадает с номером столбца матрицы, нужно умножить *справа* на базисный вектор  ${}_r \rho_I$ , номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор  ${}_r \rho_L$ , на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер ( $L$ ) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом необходимо поставить указанное численное значение проекции.

$${}_r \rho_0 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 2 & 123 \\ 13 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 123 & 1 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 123 & 1 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$${}_r \rho_1 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 2 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 2 & 123 \\ 13 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 123 & -1 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & & -I \\ \hline & & & I \\ \hline \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 123 & I & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline & I \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$r\rho_2 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|c} \hline & & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \\ = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & A \\ \hline A & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$r\rho_{123} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|c} \hline & & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline -1 & & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \\ = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -B \\ \hline B & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$r\rho_3 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|c} \hline & & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \\ = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$r\rho_{21} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 52 & 13 & 21 & 0 \\ & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & & -1 \\ \hline & & & & -1 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \\ = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline B & \\ \hline & -B \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$r\rho_{13} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|c} \hline & 1 & \\ \hline & 1 & \\ \hline -1 & & \\ \hline -1 & & \\ \hline & & -1 \\ \hline & & -1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & 1 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \\ = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline & -I \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$r\rho_{32} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|c} \hline & 1 & \\ \hline & 1 & \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & 1 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} \\ = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline A & \\ \hline & A \\ \hline \end{array} \end{array}$$

## 2. Структурные матрицы левой контравариантной алгебры действия кваркино первого поколения ${}_l\mathbb{Q}_3^s(1)$

Приступим к вычислению структурных матриц левой алгебры действия кваркино  ${}_l\mathbb{Q}_3^s$ . Структурные матрицы будем обозначать теми базисными векторами, которые они представляют:

$${}_l\rho_I \sim {}_lC_{KI}^L.$$

Напомним, что закон умножения базисных векторов в левой алгебре кваркино  ${}_l\mathbb{Q}_3^s(1)$  записывается следующим образом:

$${}_l\rho_I \circ {}_l\rho_K = {}_l\rho_L \cdot {}_lC_{KI}^L. \quad (16)$$

Из выражения (16) следует алгоритм вычисления структурных матриц алгебры  ${}_l\mathbb{Q}_3^s$ . Эти матрицы соответствуют базисным векторам  ${}_l\rho_I$ . Сначала нужно установить номер структурной матрицы ( $I$ ) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы ( $K$ ) проделать следующие вычисления. Базисный вектор  ${}_l\rho_K$ , номер которого совпадает с номером столбца матрицы, нужно умножить слева на базисный вектор  ${}_l\rho_I$ , номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор  ${}_l\rho_L$ , на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер ( $L$ ) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом необходимо поставить указанное численное значение проекции.

$${}_l\rho_0 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|cc|c} \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & 1 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 13 & 0 & 123 \\ & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 123 \\ & \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \end{array}$$



$${}^l\rho_1 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 13 \\ & 2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 123 \\ & 0 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & A \\ \hline A & \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$${}^l\rho_{32} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 13 \\ & 2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline -1 & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 123 \\ & 0 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline I & -I \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$${}^l\rho_2 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 13 \\ & 2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 123 \\ & 0 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & A \\ \hline A & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$${}^l\rho_{123} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 13 \\ & 2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ = b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 123 \\ & 0 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -B \\ \hline B & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

### VI. АЛГЕБРА КВАРКИНО ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}^s(2)$

В соответствии с выдвинутым предположением коммутативно-антикоммутирующая алгебра  $\mathbb{Q}^s(2)$  есть алгебра действия гипотетических фундаментальных частиц – кваркино второго поколения. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\rho_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\rho_0$  имеет место правило умножения

$$\rho_0 \circ \rho_0 = \rho_0.$$

- Образующие базисные векторы  $\rho_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3, есть базисные векторы геометрического пространства. Число векторов  $\rho_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\rho_a \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho_a = \rho_a.$$

$$\rho_a \circ \rho_a = \rho_0.$$

- Векторы

$$\rho_{ab} = \rho_a \circ \rho_b.$$

Здесь  $a \neq b$ . Число этих векторов равно трем. В соответствии с Разделом I, для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей – условия соседней перестановки

$$\rho_{12} = \rho_{21},$$

$$\rho_{13} = \rho_{31},$$

$$\rho_{32} = -\rho_{23}.$$

$${}^l\rho_3 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 13 \\ & 2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 123 \\ & 0 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -B \\ \hline B & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$${}^l\rho_{21} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 13 \\ & 2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 123 \\ & 0 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$${}^l\rho_{13} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 13 & 0 & 2 & 123 \\ & 32 & 21 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 13 \\ & 2 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ = b \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 123 \\ & 0 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline I & -I \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и из условий соседней перестановки. В частности,

$$\begin{aligned}\rho_{21} \circ \rho_{21} &= \rho_0, \\ \rho_{13} \circ \rho_{13} &= \rho_0, \\ \rho_{32} \circ \rho_{32} &= -\rho_0.\end{aligned}$$

- Вектор

$$\rho_{123} = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей

$$\rho_{123} = \rho_{213} = \rho_{231} = -\rho_{321} = -\rho_{312} = -\rho_{132}.$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\rho_{123} \circ \rho_{123} = -\rho_0.$$

## VII. АЛГЕБРА КВАРКИНО ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}^s(3)$

В соответствии с выдвинутым нами предположением коммутативно-антикоммутативная алгебра  $\mathbb{Q}^s(3)$  есть алгебра действия гипотетических фундаментальных частиц – кваркино третьего поколения. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\rho_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\rho_0$  имеет место правило умножения

$$\rho_0 \circ \rho_0 = \rho_0.$$

- Образующие базисные векторы  $\rho_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3, есть базисные векторы геометрического пространства. Число векторов  $\rho_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\rho_a \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho_a = \rho_a.$$

$$\rho_a \circ \rho_a = \rho_0.$$

- Векторы

$$\rho_{ab} = \rho_a \circ \rho_b.$$

Здесь  $a \neq b$ . Число этих векторов равно трем. В соответствии с Разделом I, для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и

соответственно сомножителей – условия соседней перестановки

$$\begin{aligned}\rho_{12} &= -\rho_{21}, \\ \rho_{13} &= \rho_{31}, \\ \rho_{32} &= \rho_{23}.\end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности,

$$\begin{aligned}\rho_{21} \circ \rho_{21} &= -\rho_0, \\ \rho_{13} \circ \rho_{13} &= \rho_0, \\ \rho_{32} \circ \rho_{32} &= \rho_0.\end{aligned}$$

- Вектор

$$\rho_{123} = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей

$$\rho_{123} = -\rho_{213} = -\rho_{231} = -\rho_{321} = \rho_{312} = \rho_{132}.$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\rho_{123} \circ \rho_{123} = -\rho_0.$$

## VIII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Над геометрическим пространством можно построить три алгебры, содержащих два коммутативных и одно антикоммутативное перестановочные соотношения. Эти алгебры ставятся в соответствие трем поколениям кваркино.
- Волновые функции кваркино разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех базисных векторов образующего геометрического пространства. Это правило совпадает с правилом, установленным для волновых функций лептонов и кварков разных поколений.
- Структурные матрицы алгебры кваркино  $\mathbb{Q}_3^s$  выведены по такому же алгоритму, по которому в Главе 4.2. Раздел III.2 были выведены матрицы Дирака. Это обстоятельство является свидетельством в пользу того, что предлагаемый подход к описанию фундаментальных частиц содержит элементы *единой* теории.

# Глава 4.12 Синие кваркино. Алгебра действия синих кваркино $\mathbb{Q}_b^s$

## 1. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ КВАРКИНО И ЦВЕТ

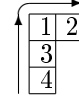
В этой Главе продолжаем рассматривать алгебру кваркино. Напомним, что логика рассуждений, основанная на суперсимметрии фермионной и бозонной ветвей дерева Юнга, заставляет ввести в рассмотрение гипотетические фундаментальные частицы, суперсимметричные кваркам, названные *кваркино*. Эта же логика заставляет ввести цветовые разновидности кваркино, причем цветовым разновидностям кваркино ставятся в соответствие разновидности условий соседней перестановки с участием базисного вектора времени. Квантовые уравнения для кваркино устанавливаются на основании того же алгоритма, из которого ранее было получено обобщение уравнения Дирака для лептонов. Эти уравнения относятся к кваркино одного поколения, и можно предположить, что в стандартном представлении эти уравнения разделяются на две независимые системы уравнений, одна из которых относится к верхнему кваркино, а другая к нижнему.

Прежде чем обратиться к алгебре релятивистских кваркино  $\mathbb{Q}_4^s$ , напомним следующее. В соответствии с суперсимметрией каждый из кваркино существует в трех разновидностях. Отличительное свойство этих разновидностей названо *цветом*, а кваркино в указанных разновидностях обозначены как *синий*, *желтый* и *красный*. Цветовая симметрия имеет под собой алгебраическую основу. А именно, алгебра релятивистских кваркино  $\mathbb{Q}_4^s$  представлена тремя вариантами, каждый из которых базируется на одной и той же алгебре  $\mathbb{Q}_3^s$ . Для того чтобы получить варианты релятивистской алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$ , необходимо расширить образующее пространство, заменив геометрическое пространство на пространство-время СТО. Иными словами, следует ввести координату времени, базисный вектор  $\rho_4$  и записать условия соседней перестановки этого базисного вектора с геометрическими базисными векторами  $\rho_a$ . Именно с разновидностями указанных условий соседней перестановки связаны цветовые разновидности кваркино.

### 1. Алгебры цветных кваркино первого поколения $\mathbb{Q}^s(1)$

#### 1.1. Алгебра синих кваркино первого поколения $\mathbb{Q}_b^s(1)$

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кваркино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} 12 &= 21, & 13 &= -31, & 23 &= 32, \\ 14 &= -41, & 24 &= 42, & 34 &= -43. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_3. \end{aligned}$$

#### 1.2. Алгебра желтых кваркино первого поколения $\mathbb{Q}_y^s(1)$

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кваркино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

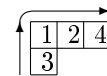
$$\begin{aligned} 12 &= 21, & 13 &= -31, & 23 &= 32, \\ 14 &= -41, & 24 &= 42, & 34 &= 43. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3. \end{aligned}$$

#### 1.3. Алгебра красных кваркино первого поколения $\mathbb{Q}_r^s(1)$

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кваркино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} 12 &= 21, & 13 &= -31, & 23 &= 32, \\ 14 &= 41, & 24 &= 42, & 34 &= 43. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\rho_1 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3.\end{aligned}$$

Для того, чтобы перейти к алгебрам цветных кваркино второго и третьего поколений, необходимо использовать условия соседней перестановки, отличающиеся от предыдущих циклической перестановкой геометрических базисных векторов.

## 2. Алгебры цветных кваркино второго поколения $\mathbb{Q}^s(2)$

### 2.1. Алгебра синих кваркино второго поколения $\mathbb{Q}_b^s(2)$

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кваркино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned}\mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}.\end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\rho_1 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_3.\end{aligned}$$

### 2.2. Алгебра желтых кваркино второго поколения $\mathbb{Q}_y^s(2)$

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кваркино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

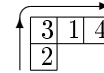
$$\begin{aligned}\mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= -\mathbf{43}.\end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\rho_1 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_3.\end{aligned}$$

### 2.3. Алгебра красных кваркино второго поколения $\mathbb{Q}_r^s(2)$

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кваркино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned}\mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}.\end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\rho_1 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3.\end{aligned}$$

## 3. Алгебры цветных кваркино третьего поколения $\mathbb{Q}^s(3)$

### 3.1. Алгебра синих кваркино третьего поколения $\mathbb{Q}_b^s(3)$

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кваркино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned}\mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= -\mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}.\end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\rho_1 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3.\end{aligned}$$

3.2. Алгебра желтых кваркино третьего поколения  $\mathbb{Q}_y^s(3)$

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кваркино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

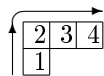
$$\begin{aligned} 12 &= -21, & 13 &= 31, & 23 &= 32, \\ 14 &= 41, & 24 &= -42, & 34 &= 43. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3. \end{aligned}$$

3.3. Алгебра красных кваркино третьего поколения  $\mathbb{Q}_r^s(3)$

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кваркино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} 12 &= -21, & 13 &= 31, & 23 &= 32, \\ 14 &= 41, & 24 &= 42, & 34 &= 43. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3. \end{aligned}$$

Далее в этой Главе рассматривается только алгебра синих кваркино первого поколения  $\mathbb{Q}_b^s(1)$ . Имеется в виду, что переход к алгебрам синих кваркино других поколений очевиден. Алгебра желтых кваркино первого поколения  $\mathbb{Q}_y^s(1)$  рассматривается в Главе 4.13. Алгебра красных кварков первого поколения  $\mathbb{Q}_r^s(1)$  рассматривается в Главе 4.14.

II. АЛГЕБРА СИНИХ КВАРКИНО  $\mathbb{Q}_b^s(1)$

1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры  $\mathbb{Q}_b^s(1)$  и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\rho_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\rho_0$  имеет место правило умножения

$$\rho_0 \circ \rho_0 = \rho_0.$$

- Образующие векторы  $\rho_i$ , где индекс  $i$  пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов  $\rho_i$  равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\rho_i \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho_i = \rho_i,$$

$$\rho_i \circ \rho_i = \text{sign}(\rho_i)^2 \cdot \rho_0,$$

где

$$\text{sign}(\rho_1)^2 = \text{sign}(\rho_2)^2 = \text{sign}(\rho_3)^2 = -\text{sign}(\rho_4)^2 = 1.$$

- Векторы

$$\rho_{ik} = \rho_i \circ \rho_k.$$

Здесь  $i \neq k$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6.$$

В соответствии с Разделом I. для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей (условия соседней перестановки)

$$\begin{aligned} \rho_{21} &= \rho_{21}, & \rho_{13} &= -\rho_{31}, & \rho_{32} &= \rho_{23}, \\ \rho_{14} &= -\rho_{41}, & \rho_{24} &= \rho_{42}, & \rho_{34} &= -\rho_{43}. \end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности,

$$\begin{aligned} \rho_{21} \circ \rho_{21} &= \rho_0, & \rho_{42} \circ \rho_{42} &= -\rho_0, \\ \rho_{32} \circ \rho_{32} &= \rho_0, & \rho_{14} \circ \rho_{14} &= \rho_0, \\ \rho_{13} \circ \rho_{13} &= -\rho_0, & \rho_{34} \circ \rho_{34} &= \rho_0. \end{aligned}$$

- Векторы

$$\rho_{ikl} = \rho_i \circ \rho_k \circ \rho_l.$$

Здесь  $i \neq k, i \neq l, k \neq l$ . Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно сомножителей вытекающие из условий соседней перестановки:

$$\begin{aligned} \rho_{123} &= \rho_{213} = -\rho_{231} = -\rho_{321} = -\rho_{312} = \rho_{132}, \\ \rho_{124} &= \rho_{214} = -\rho_{241} = -\rho_{421} = -\rho_{412} = \rho_{142}, \\ \rho_{134} &= \rho_{314} = \rho_{341} = -\rho_{431} = \rho_{413} = -\rho_{143}, \\ \rho_{234} &= \rho_{324} = \rho_{342} = -\rho_{432} = -\rho_{423} = -\rho_{243}. \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\begin{aligned} \rho_{123} \circ \rho_{123} &= -\rho_0, & \rho_{124} \circ \rho_{124} &= \rho_0, \\ \rho_{134} \circ \rho_{134} &= -\rho_0, & \rho_{234} \circ \rho_{234} &= \rho_0. \end{aligned}$$

• Вектор

$$\rho_{1324} = \rho_1 \circ \rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_4.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки,

$$\begin{aligned} \rho_{1324} &= \rho_{2134} = -\rho_{2314} = -\rho_{3214} = \\ &= -\rho_{3124} = \rho_{1324} = -\rho_{1243} = -\rho_{2143} = \\ &= \rho_{2413} = \rho_{4213} = \rho_{4123} = -\rho_{1423} = \\ &= \rho_{1342} = -\rho_{3142} = \rho_{3412} = -\rho_{4312} = \\ &= \rho_{4132} = -\rho_{1432} = \rho_{2341} = \rho_{3241} = \\ &= \rho_{3421} = -\rho_{4321} = -\rho_{4231} = -\rho_{2431}. \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\rho_{1324} \circ \rho_{1324} = \rho_0.$$

2. Структурные матрицы алгебр синих кваркино

Приведем структурные матрицы двух алгебр: правой контравариантной алгебры синих кваркино первого поколения  ${}_r(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})_b(1)$  и левой ковариантной алгебры синих кваркино первого поколения  ${}_l(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})_b^*(1)$ . С использованием таких матриц записываются квантовые уравнения для рассматриваемых кваркино. Компоненты векторов и матриц рассматриваются в следующей последовательности индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

Переход от действительного представления к компактным представлениям осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C^{IK}_L$  от действительного представления к  $iab$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}.$$

$$a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C^{IK}_L$  от  $iab$ -представления к  $IAB$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры синих кваркино первого поколения  ${}_r(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_{\mathbb{Q}^s})_b(1)$

The diagram illustrates the transformation of the structural matrix  ${}_r \rho_0$  from a 16x16 matrix to a block-diagonal form. The matrix  ${}_r \rho_0$  is shown with indices 32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124. The transformation is shown as  ${}_r \rho_0 \sim I A B$ , where  $I$ ,  $A$ , and  $B$  are 2x2 block matrices. The matrix  $I$  is a block-diagonal matrix with identity blocks. The matrix  $A$  is a block-diagonal matrix with blocks  $\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$ . The matrix  $B$  is a block-diagonal matrix with blocks  $\begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ .







	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32				-1				
13				-1				
21				-1				
0				-1				
42		1						
14		1						
1324	1							
34	1							
1								-1
2								-1
3								-1
123								-1
134						1		
234						1		
4						1		
124						1		

$r\rho_{42} \sim$

	0	34	123	124
13				
14				
2				
134				
	-1			
	1			
				-1
				1

$= a$

	0	34	123	124
13				
14				
2				
123				
234				
124				
	-A			0
A				34
				-A
				A

$= a$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32					1			
13					1			
21					-1			
0					-1			
42								-1
14								-1
1324								1
34								1
1	-1							
2	-1							
3		1						
123		1						
134			1					
234			1					
4				-1				
124				-1				

$r\rho_{123} \sim$

	0	34	123	124
13				
14				
2				
134				
	1			
	-1			
				1
				1

$= 1$

	0	34	123	124
13				
14				
2				
123				
234				
124				
				-B
B				34
				B
				-B

$= 1$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32			1					
13			1					
21			1					
0			1					
42	1							
14	1							
1324	1							
34	1							
1						1		
2						1		
3						1		
123						1		
134				1				
234				1				
4				1				
124				1				

$r\rho_{34} \sim$

	0	34	123	124
13				
14				
2				
134				
	1			
	1			
				1
				1

$= 1$

	0	34	123	124
13				
14				
2				
123				
234				
124				
				$\mathbb{1}$
$\mathbb{1}$				34
				$\mathbb{1}$
				$\mathbb{1}$

$= 1$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32								-1
13								-1
21								1
0								1
42				1				
14				1				
1324								-1
34								-1
1				1				
2				1				
3								-1
123								-1
134	-1							
234	-1							
4				1				
124				1				

$r\rho_{124} \sim$

	0	34	123	124
13				
14				
2				
134				
				-1
				1
				-1
				1

$= 1$

	0	34	123	124
13				
14				
2				
123				
234				
124				
				B
				-B
B				34
				-B
				B

$= 1$



2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры синих кваркино первого поколения  ${}_i(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_b^s)_b^*(1)$

$$\begin{aligned}
 {}_r R^0 &\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}
 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_r R^1 &\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 &= a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \\
 &= a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ A \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}
 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_r R^2 &\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ A \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}
 \end{array}
 \end{aligned}$$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32					1			
13					-1			
21						-1		
0					1			
42							1	
14							-1	
1324								-1
34								1
1	-1							
2	1							
3		1						
123		-1						
134			-1					
234			1					
4				1				
124				-1				

${}^r R^3 \sim$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
		1		13
		-1		0
			1	14
-1			-1	34
1				2
				123
				234
				124

$= i$

	0	34	123	124
	0	34	123	
		-B		0
			-B	34
B				123
				124

$= i$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32	1							
13	1							
21		1						
0		1						
42			1					
14			1					
1324				1				
34				1				
1					1			
2					1			
3						1		
123						1		
134							1	
234							1	
4								1
124								1

${}^r R^{21} \sim$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
1				13
1				0
		1		14
1				34
			1	2
				123
				123
				234
				124

$= a$

	0	34	123	124
	0	34	123	
1				0
		1		34
			1	123
				124

$= a$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32							-1	
13							1	
21								-1
0							1	
42						-1		
14					1			
1324								-1
34								1
1					-1			
2					1			
3						-1		
123						1		
134	-1							
234	1							
4					-1			
124					1			

${}^r R^4 \sim$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
		1		13
			1	0
			1	14
1			1	34
				2
1				123
				234
				124

$= -i$

	0	34	123	124
	0	34	123	
			1	0
				34
1				123
				124

$= -i$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32	1							
13		-1						
21	-1							
0	1							
42			1					
14				-1				
1324			-1					
34				1				
1						-1		
2						1		
3							1	
123							-1	
134								-1
234								1
4							1	
124								-1

${}^r R^{13} \sim$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
-1				13
1				0
		-1		14
				34
1				2
			1	123
				123
				234
				124

$= b$

	0	34	123	124
	0	34	123	
-I				0
		-I		34
			I	123
				I

$= b$

		13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4	
32		1							
13		-1							
21		-1							
0	1								
42				1					
14				-1					
1324				-1					
34			1						
1						-1			
2						1			
3						1			
123				-1					
134								-1	
234								1	
4								1	
124								-1	

${}_rR^{32} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
1				13	
-1				0	
	1			14	
	-1			34	
		-1		2	
		1		123	
			-1	234	
			1	124	

$= i$

		0	34	124
0				123
$I$				0
	$I$			34
			$-I$	123
				$-I$
				124

$= i$

		13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4	
32				-1					
13				1					
21				-1					
0	1								
42		-1							
14		1							
1324		-1							
34	1								
1									-1
2									1
3									-1
123								1	
134								-1	
234								1	
4								-1	
124							1		

${}_rR^{42} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
1				13	
1				0	
	1			14	
	-1			34	
				2	
				123	
				234	
				124	

$= -i$

		0	34	124
0				123
$A$				0
	$A$			34
				$A$
				$A$
				124

$= -i$

		13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4	
32				-1					
13				1					
21				-1					
0				1					
42		-1							
14		1							
1324	-1								
34	1								
1									-1
2									1
3									-1
123									1
134								-1	
234								1	
4								-1	
124								1	

${}_rR^{14} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
1				13	
1				0	
	1			14	
	1			34	
				2	
				123	
				234	
				124	

$= b$

		0	34	124
0				123
$A$				0
	$A$			34
				$A$
				$A$
				124

$= b$

		13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4	
32				-1					
13				-1					
21				1					
0				1					
42	-1								
14	-1								
1324	1								
34	1								
1									1
2									1
3									-1
123									-1
134								1	
234								1	
4								-1	
124								-1	

${}_rR^{34} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
1				13	
-1				0	
	1			14	
	-1			34	
				2	
				123	
				234	
				124	

$= 1$

		0	34	124
0				123
$B$				0
	$B$			34
				$B$
				$-B$
				$-B$
				124

$= 1$



$${}_r R^{1324} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 & \\ 32 & & & -1 & & & & & \\ 13 & & & -1 & & & & & \\ 21 & & & & & & & & 1 \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ 42 & -1 & & & & & & & \\ 14 & -1 & & & & & & & \\ 1324 & & & 1 & & & & & \\ 34 & & & 1 & & & & & \\ 1 & & & & & & & & 1 \\ 2 & & & & & & & & 1 \\ 3 & & & & & & & & -1 \\ 123 & & & & & & & & -1 \\ 134 & & & & & & 1 & & \\ 234 & & & & & & 1 & & \\ 4 & & & & & & & & -1 \\ 124 & & & & & & & & -1 \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} -1 & & & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 34 & 124 \\ & & 123 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} B & & \\ B & & -B \\ & & -B \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array} \end{array}$$

### 3. Действительное представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$

Структурные матрицы  ${}_r C^L_{KI}$  в действительном представлении вычислены по алгоритму, приведенному в Разделе II. Главы 4.1, для принятого ранее порядка индексов. При этом слагаемые вектора  $\psi$  записываются в следующей последовательности:

$$\begin{aligned}
 \psi = & \rho_{32} \psi^{32} + \rho_{13} \psi^{13} + \rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0 + \\
 & + \rho_{42} \psi^{42} + \rho_{14} \psi^{14} + \rho_{1324} \psi^{1324} + \rho_{34} \psi^{34} + \\
 & + \rho_1 \psi^1 + \rho_2 \psi^2 + \rho_3 \psi^3 + \rho_{123} \psi^{123} + \\
 & + \rho_{134} \psi^{134} + \rho_{234} \psi^{234} + \rho_4 \psi^4 + \rho_{124} \psi^{124}.
 \end{aligned}$$

В результате получены действительные структурные матрицы

$${}_r C^L_{KI} \sim {}_r \rho_I$$

размерности  $16 \times 16$  (см. Раздел II.2). Помимо действительного представления, обратимся к  $iab$ -представлению.

### 4. $iab$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$

$iab$ -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned}
 \psi = & \rho_{13} \circ (\rho_{21} \psi^{32} + \rho_0 \psi^{13}) + \rho_0 \circ (\rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0) + \\
 & + \rho_{14} \circ (\rho_{21} \psi^{42} + \rho_0 \psi^{14}) + \rho_{34} \circ (\rho_{21} \psi^{1324} + \rho_0 \psi^{34}) + \\
 & + \rho_2 \circ (\rho_{21} \psi^1 + \rho_0 \psi^2) + \rho_{123} \circ (\rho_{21} \psi^3 + \rho_0 \psi^{123}) + \\
 & + \rho_{234} \circ (\rho_{21} \psi^{134} + \rho_0 \psi^{234}) + \rho_{124} \circ (\rho_{21} \psi^4 + \rho_0 \psi^{124}).
 \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_3^s \times \mathbb{Q}_1^s$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_3$  являются

$$\rho_{13}, \rho_0, \rho_{14}, \rho_{34}, \rho_2, \rho_{123}, \rho_{234}, \rho_{124};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1^s$  являются

$$\rho_{21}, \rho_0.$$

Поставим в соответствие базисному вектору  $\rho_{21}$  алгебры  $\mathbb{Q}_1^s$   $a$ -единицу, а базисному вектору  $\rho_0$  действительную единицу. В результате получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$ , который в  $iab$ -представлении имеет вид

$$\begin{aligned}
 \psi = & \rho_{13} \circ (a \psi^{32} + \psi^{13}) + \rho_0 \circ (a \psi^{21} + \psi^0) + \\
 & + \rho_{14} \circ (a \psi^{42} + \psi^{14}) + \rho_{34} \circ (a \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\
 & + \rho_2 \circ (a \psi^1 + \psi^2) + \rho_{123} \circ (a \psi^3 + \psi^{123}) + \\
 & + \rho_{234} \circ (a \psi^{134} + \psi^{234}) + \rho_{124} \circ (a \psi^4 + \psi^{124}).
 \end{aligned}$$

Таким образом, в  $iab$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются  $a$ -гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned}
 \psi^{13} &= a \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= a \psi^{21} + \psi^0, \\
 \psi^{14} &= a \psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= a \psi^{1324} + \psi^{34}, \\
 \psi^2 &= a \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= a \psi^3 + \psi^{123}, \\
 \psi^{234} &= a \psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= a \psi^4 + \psi^{124}.
 \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \psi = & \rho_{13} \psi^{13} + \rho_0 \psi^0 + \rho_{14} \psi^{14} + \rho_{34} \psi^{34} + \\
 & + \rho_2 \psi^2 + \rho_{123} \psi^{123} + \rho_{234} \psi^{234} + \rho_{124} \psi^{124}.
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в  $iab$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\rho_{13}, \rho_0, \rho_{14}, \rho_{34}, \rho_2, \rho_{123}, \rho_{234}, \rho_{124}$ .

В  $iab$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $8 \times 8$  (см. Раздел II.2.).

### 5. $IAB$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$

$IAB$ -представление алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  основано на разложении вектора

$$\begin{aligned}
 \psi = & (\rho_{32} \psi^{32} + \rho_{13} \psi^{13} + \rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0) \circ \rho_0 + \\
 & + (\rho_{32} \psi^{42} + \rho_{13} \psi^{14} + \rho_{21} \psi^{1324} + \rho_0 \psi^{34}) \circ \rho_{34} + \\
 & + (\rho_{32} \psi^1 + \rho_{13} \psi^2 + \rho_{21} \psi^3 + \rho_0 \psi^{123}) \circ \rho_{123} + \\
 & + (\rho_{32} \psi^{134} + \rho_{13} \psi^{234} + \rho_{21} \psi^4 + \rho_0 \psi^{124}) \circ \rho_{124}.
 \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_2^s \times \mathbb{Q}_2^s$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{Q}_2^s$  являются

$$\rho_0, \quad \rho_{34}, \quad \rho_{123}, \quad \rho_{124};$$

базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{Q}_2^s$  являются

$$\rho_{32}, \quad \rho_{13}, \quad \rho_{21}, \quad \rho_0.$$

Последнюю алгебру мы назвали *IAB*-алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц *IAB*-алгебры используем следующие обозначения:

$$a \cdot A, \quad 1 \cdot I, \quad a \cdot B, \quad 1 \cdot \mathbb{1}.$$

Заменим базисные векторы  $\rho_{32}, \rho_{13}, \rho_{21}, \rho_0$  приведенными гиперчислами

$$\begin{aligned} \rho_{32} &\sim aA, \\ \rho_{13} &\sim 1I, \\ \rho_{21} &\sim aB, \\ \rho_0 &\sim 1\mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  в *IAB*-представлении

$$\begin{aligned} \psi &= (a \cdot A \psi^{32} + 1 \cdot I \psi^{13} + a \cdot B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0) \circ \rho_0 + \\ &+ (a \cdot A \psi^{42} + 1 \cdot I \psi^{14} + a \cdot B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}) \circ \rho_{34} + \\ &+ (a \cdot A \psi^1 + 1 \cdot I \psi^2 + a \cdot B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \rho_{123} + \\ &+ (a \cdot A \psi^{134} + 1 \cdot I \psi^{234} + a \cdot B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}) \circ \rho_{124}. \end{aligned}$$

Таким образом, в *IAB*-представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= aA \psi^{32} + 1I \psi^{13} + aB \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{34} &= aA \psi^{42} + 1I \psi^{14} + aB \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= aA \psi^1 + 1I \psi^2 + aB \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= aA \psi^{134} + 1I \psi^{234} + aB \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \Psi^0 \rho_0 + \Psi^{34} \rho_{34} + \Psi^{123} \rho_{123} + \Psi^{124} \rho_{124}.$$

Отсюда видно, что в *IAB*-представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\rho_0, \rho_{34}, \rho_{123}, \rho_{124}$ .

В *IAB*-представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$  (см. Раздел II.2.).

### III. КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВОБОДНЫХ КВАРКИНО

Согласно Главе 3.3, если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи квантовые явления, а уравнение структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовый постулат. Обратимся к уравнению структуры для произвольной

правой алгебры действия (формула (35) Главы 3.3.). Запишем его следующим образом:

$$d_2 d_1 S^L = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C_{KI}^L \cdot d_1 S^K \cdot d_2 S^I.$$

В этом уравнении введем обозначение

$$d_1 S^L = \psi^L.$$

Вектор  $\psi^L$  назван *волновой функцией* фундаментального объекта и отождествлен с волновой функцией, вводимой в квантовой теории фундаментального объекта. Кроме того, введем обозначение  $d$  для дифференциала  $d_2$ . Получим

$$d\psi^L = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C_{KI}^L \cdot \psi^K \cdot dS^I.$$

Это соотношение представляет собой квантовый постулат в самом общем виде. Перепишем его иначе:

$$\frac{\partial \psi^L}{\partial x^M} = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C_{KI}^L \cdot \frac{\partial S^I}{\partial x^M} \cdot \psi^K.$$

Далее учтем, что

$$\frac{\partial S^I}{\partial x^M} = -p_M^I.$$

Получим

$$\frac{\partial \psi^L}{\partial x^M} = -\frac{1}{S_0} {}_r C_{KI}^L \cdot p_M^I \cdot \psi^K. \quad (3)$$

Здесь  $p_M^I$  – координаты обобщенного импульса,  ${}_r C_{KI}^L$  – структурные постоянные правой алгебры действия,  $S_0$  – действительная постоянная величина, имеющая размерность действия. В Главе 4.3. мы ввели алгебру Клиффорда как алгебру действия и связали ее с лептонами. При этом постоянную величину  $S_0$  отождествлена с постоянной Планка. Если бы удалось найти несколько алгебр действия, то мы имели бы несколько объектов, подчиняющихся квантовым явлениям разного типа.

Теперь мы ввели новый объект – кваркино, которым сопоставили свою алгебру действия и алгебру пространства-времени. Согласно предыдущему, кваркино подчиняются своей квантовой теории. Уравнения (3) будут квантовыми постулатами для кваркино, если в них положить постоянные  ${}_r C_{KI}^L$  равными структурным постоянным алгебры кваркино и установить значение  $S_0$ . При этом возникает вопрос: нужно ли связывать постоянную Планка только с лептонами и соответственно с алгеброй Клиффорда, а для алгебры кваркино вводить другую постоянную с размерностью действия, или постоянная Планка является универсальной? А priori ответить на этот вопрос нельзя. Поэтому для кваркино введем свою постоянную действия, значение которой предстоит установить, и обозначим ее  $p$ .



Придадим соотношению (3) форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные постоянные  ${}_i C^{MN}{}_L$ . Получим

$${}_i C^{MN}{}_L \cdot \partial_M \psi^L(x) = -\frac{1}{p} {}_i C^{MN}{}_L \cdot r C^L{}_{KI} \cdot p^I{}_M \cdot \psi^K. \quad (4)$$

Это уравнение есть квантовое уравнение для кваркино в самом общем виде. Далее, повторяя рассуждения Раздела IV. Главы 4.5, запишем это уравнение при следующих ограничениях: дифференцирование выполняется только по координатам образующего пространства и при условии, что в первом сжатом представлении коэффициент при волновой функции в правой части принимает вид

$$-\frac{m_d c}{p}.$$

Здесь  $m_d$  есть масса нижнего кваркино. В результате получим следующее уравнение:

$${}_i C^{mN}{}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{1}{p} (r C^N{}_{K0} p^0{}_0 + r C^N{}_{K34} p^{34}{}_0) \cdot \psi^K. \quad (5)$$

При этом имеет место условие<sup>1</sup>

$$p^0{}_0 + p^{34}{}_0 = m_d c. \quad (6)$$

Разобьем величину  $(m_d c)$  между импульсами  $p^0{}_0$  и  $p^{34}{}_0$  в некоторой пропорции. Для этого положим

$$p^0{}_0 = \frac{m_d c}{2} \alpha, \quad p^{34}{}_0 = \frac{m_d c}{2} \beta.$$

Из выражения (6) имеем

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1. \quad (7)$$

Кроме того, положим

$$m_d \frac{\alpha - \beta}{2} = m_u. \quad (8)$$

Здесь  $m_u$  – масса верхнего кваркино. После подстановки импульсов получим уравнение, аналогичное уравнению (8) Главы 4.5:

$${}_i C^{mN}{}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{m_d c}{2p} (\alpha \cdot r C^N{}_{K0} + \beta \cdot r C^N{}_{K34}) \cdot \psi^K. \quad (9)$$

Понятно, что здесь  $r C^N{}_{K0} = \delta^N{}_K$  в отличие от  $r C^N{}_{K34}$ .

## 1. Структурные матрицы алгебры синих кваркино $\mathbb{Q}_b^s$

Используя результаты Раздела II.2., приведем структурные матрицы алгебры  $\mathbb{Q}_b^s$ , необходимые для построения квантового уравнения для свободных синих кваркино:

$${}_i C^{4N}{}_L = -i \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 123 \\ \hline & & \mathbb{1} \\ \hline & \mathbb{1} & \\ \hline \mathbb{1} & & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}, \quad {}_i C^{1N}{}_L = a \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 123 \\ \hline & A & \\ \hline A & & A \\ \hline & A & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array},$$

$${}_i C^{2N}{}_L = 1 \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 123 \\ \hline & A & \\ \hline A & & A \\ \hline A & & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}, \quad {}_i C^{3N}{}_L = i \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 123 \\ \hline & -B & \\ \hline B & & -B \\ \hline B & & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array},$$

$$r C^N{}_{K0} = 1 \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 123 \\ \hline \mathbb{1} & & \\ \hline & \mathbb{1} & \\ \hline & & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}, \quad r C^N{}_{K34} = 1 \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 123 \\ \hline & \mathbb{1} & \\ \hline \mathbb{1} & & \\ \hline & & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}.$$

## 2. Квантовое уравнение для синих кваркино первого поколения

Квантовое уравнение для свободных синих кваркино получим, подставив в уравнение (9) вышеприведенные структурные матрицы. Для действительного регулярного представления алгебры синих кваркино  $\mathbb{Q}_b^s$  компоненты волновой функции  $\psi^K(x)$  представляют собой шестнадцать действительных функций. В  $iab$ -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (1). И в  $IAB$ -представлении компонентами волновой функции являются четыре  $IAB$ -функции вида (2). Приведем квантовое уравнение по отношению к  $IAB$ -компонентам волновой функции синих кваркино:

$$\begin{aligned} & \left( -i \begin{array}{c|c|c} & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & & \end{array} \partial_4 + a \begin{array}{c|c|c} & A & \\ \hline A & & A \\ \hline & A & \end{array} \partial_1 + \right. \\ & \left. + \begin{array}{c|c|c} & A & \\ \hline A & & \\ \hline A & & \end{array} \partial_2 + i \begin{array}{c|c|c} & -B & \\ \hline B & & -B \\ \hline B & & \end{array} \partial_3 \right) \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \Bigg| = \\ & = -\frac{m_d c}{2p} \begin{array}{c|c|c} \alpha & \beta & \\ \hline \beta & \alpha & \\ \hline & \alpha & \beta \\ \hline & \beta & \alpha \end{array} \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \Bigg| \end{aligned}$$

<sup>1</sup> См. Раздел IV. Главы 4.5.

или

$$\begin{aligned}
i \partial_4 \Psi^{124} - (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \Psi^{123} &= \\
&= \frac{m_d c}{2p} (\alpha \cdot \Psi^0 + \beta \cdot \Psi^{34}), \\
i \partial_4 \Psi^{123} - (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \Psi^{124} &= \\
&= \frac{m_d c}{2p} (\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34}), \\
i \partial_4 \Psi^{34} - (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \Psi^0 &= \\
&= \frac{m_d c}{2p} (\alpha \cdot \Psi^{123} + \beta \cdot \Psi^{124}), \\
i \partial_4 \Psi^0 - (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \Psi^{34} &= \\
&= \frac{m_d c}{2p} (\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124}).
\end{aligned} \tag{10}$$

2.1. Стандартное представление квантового уравнения для синих кваркино

Преобразуем уравнения (10) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым, а третье с четвертым. Получим

$$\begin{aligned}
i \partial_4 \varphi_2 - (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \varphi_2 &= \frac{m_d c}{2p} (\alpha + \beta) \varphi_1, \\
i \partial_4 \varphi_1 - (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \varphi_1 &= \frac{m_d c}{2p} (\alpha + \beta) \varphi_2,
\end{aligned} \tag{11}$$

где  $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и  $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ . Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{aligned}
i \partial_4 \chi_2 + (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \chi_2 &= \frac{m_d c}{2p} (\beta - \alpha) \chi_1, \\
i \partial_4 \chi_1 + (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \chi_1 &= \frac{m_d c}{2p} (\beta - \alpha) \chi_2,
\end{aligned} \tag{12}$$

где  $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$  и  $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$ , или с учетом выражений (7) и (8)

$$\begin{aligned}
i \partial_4 \varphi_2 - (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \varphi_2 &= \frac{m_d c}{p} \varphi_1, \\
i \partial_4 \varphi_1 - (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \varphi_1 &= \frac{m_d c}{p} \varphi_2,
\end{aligned} \tag{13}$$

и

$$\begin{aligned}
i \partial_4 \chi_2 + (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \chi_2 &= \frac{m_u c}{p} \chi_1, \\
i \partial_4 \chi_1 + (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \chi_1 &= \frac{m_u c}{p} \chi_2
\end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений. Одна из систем представляет уравнение для нижнего синего кваркино с массой  $m_d$ , а другая представляет уравнение для верхнего синего кваркино с массой  $m_u$ .

## IV. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Цветовые разновидности кваркино ставятся в соответствие перестановочным соотношениям с участием базисного вектора времени и геометрических базисных векторов.
- В принятом понимании цвета кваркино имеют три цветовые разновидности: синие, желтые, красные.
- Из алгебраической структуры векторов действия кваркино следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений этих частиц. В общем случае нет оснований считать, что квантовые явления с участием кваркино определяются постоянной Планка, а не другой постоянной величиной, имеющей размерность действия.
- Структура квантовых уравнений для свободных синих кваркино такова, что они разделяются на две системы уравнений. Таким образом, имеем две частицы, одна из которых – это верхний кваркино, а другая – нижний кваркино.
- Уравнения для верхних и нижних синих кваркино отличаются не только массами частиц, но и знаком одной из компонент оператора импульса. Таким образом, в отличие от лептонов, движение в пространстве нижних кваркино отличается от движения верхних кваркино.
- Структура квантовых уравнений для свободных кваркино такова, что волновые функции кваркино разделяются на две компоненты – правую и левую, подобно тому как это имеет место для лептонов.
- Волновая функция нерелятивистского кваркино есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3^s$ .
- Волновая функция нижнего и верхнего синих кваркино одного поколения есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_b^s$ .
- Волновые функции синих кваркино разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех образующих базисных векторов.
- Компоненты волновой функции  $\Psi^0 + \Psi^{34}$ ,  $\Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\Psi^{123} - \Psi^{124}$ ,  $\Psi^0 - \Psi^{34}$  относятся к разным синим кваркино. Этот вывод опирается на следующие соображения.

1. Полученные квантовые уравнения для синих кваркино в стандартном представлении можно представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относится к двухкомпонентной волновой функции.

2. Независимость указанных двух систем уравнений друг от друга позволяет отнести эти системы уравнений к разным частицам, причем одна из этих частиц имеет массу  $m_d$ , а другая имеет массу  $m_u$ .

- Установлено следующее соответствие между компонентами волновой функции и синими кваркино первого поколения. Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где  $A$  принимает значения

32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,

разбиваются на четыре части:

$$\begin{aligned} & \text{левая компонента синего нижнего кваркино} \\ \varphi_1 &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) + \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}), \\ & \text{правая компонента синего нижнего кваркино} \\ \varphi_2 &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) + \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\ & \text{левая компонента синего верхнего кваркино} \\ \chi_1 &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) - \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\ & \text{правая компонента синего верхнего кваркино} \\ \chi_2 &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) - \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}). \end{aligned}$$

- Компоненты волновых функций синих кваркино второго и третьего поколений отличаются от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов:

для синих кваркино второго поколения

$$3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3;$$

для синих кваркино третьего поколения

$$3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2.$$

## Глава 4.13 Желтые кваркино. Алгебра действия желтых кваркино

$\mathbb{Q}_y^s$

### I. ЖЕЛТЫЕ КВАРКИНО ТРЕХ ПОКОЛЕНИЙ

Рассмотрим алгебру желтых кваркино  $\mathbb{Q}_y^s$ .

Начнем с алгебры желтых кваркино первого поколения  $\mathbb{Q}_y^s(1)$ .

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кваркино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} 12 &= 21, & 13 &= -31, & 23 &= 32, \\ 14 &= -41, & 24 &= 42, & 34 &= 43. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3. \end{aligned}$$

Для того чтобы перейти к алгебрам желтых кваркино второго и третьего поколений, необходимо использовать условия соседней перестановки, отличающиеся от предыдущих циклической перестановкой геометрических базисных векторов.

Тогда для алгебры желтых кваркино второго поколения  $\mathbb{Q}_y^s(2)$  имеем следующее.

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} 12 &= 21, & 13 &= 31, & 23 &= -32, \\ 14 &= 41, & 24 &= 42, & 34 &= -43. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_3. \end{aligned}$$

Алгебра желтых кваркино третьего поколения  $\mathbb{Q}_y^s(3)$ .

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} 12 &= -21, & 13 &= 31, & 23 &= 32, \\ 14 &= 41, & 24 &= -42, & 34 &= 43. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= -\rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3. \end{aligned}$$

Далее в этой Главе рассматривается только алгебра желтых кваркино первого поколения  $\mathbb{Q}_y^s(1)$ . Переход к алгебрам желтых кваркино других поколений очевиден.

### II. АЛГЕБРА ЖЕЛТЫХ КВАРКИНО ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}_y^s(1)$

#### 1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры  $\mathbb{Q}_y^s(1)$  и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\rho_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\rho_0$  имеет место правило умножения

$$\rho_0 \circ \rho_0 = \rho_0.$$

- Образующие векторы  $\rho_i$ , где индекс  $i$  пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов  $\rho_i$  равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\rho_i \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho_i = \rho_i.$$

$$\rho_i \circ \rho_i = \text{sign}(\rho_i)^2 \cdot \rho_0,$$

где

$$\text{sign}(\rho_1)^2 = \text{sign}(\rho_2)^2 = \text{sign}(\rho_3)^2 = -\text{sign}(\rho_4)^2 = 1.$$

• Векторы

$$\rho_{ik} = \rho_i \circ \rho_k .$$

Здесь  $i \neq k$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6 .$$

В соответствии с Разделом I, для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и соответственно сомножителей (условия соседней перестановки)

$$\begin{aligned} \rho_{21} = \rho_{21}, \quad \rho_{13} = -\rho_{31}, \quad \rho_{32} = \rho_{23}, \\ \rho_{14} = -\rho_{41}, \quad \rho_{24} = \rho_{42}, \quad \rho_{34} = \rho_{43} . \end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности, имеем

$$\begin{aligned} \rho_{21} \circ \rho_{21} = \rho_0, \quad \rho_{42} \circ \rho_{42} = -\rho_0, \\ \rho_{32} \circ \rho_{32} = \rho_0, \quad \rho_{14} \circ \rho_{14} = \rho_0, \\ \rho_{13} \circ \rho_{13} = -\rho_0, \quad \rho_{34} \circ \rho_{34} = -\rho_0 . \end{aligned}$$

• Векторы

$$\rho_{ikl} = \rho_i \circ \rho_k \circ \rho_l .$$

Здесь  $i \neq k, i \neq l, k \neq l$ . Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4 .$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки,

$$\begin{aligned} \rho_{123} = \rho_{213} = -\rho_{231} = -\rho_{321} = -\rho_{312} = \rho_{132}, \\ \rho_{124} = \rho_{214} = -\rho_{241} = -\rho_{421} = -\rho_{412} = \rho_{142}, \\ \rho_{134} = -\rho_{314} = \rho_{341} = \rho_{431} = -\rho_{413} = \rho_{143}, \\ \rho_{234} = \rho_{324} = \rho_{342} = \rho_{432} = \rho_{423} = \rho_{243} . \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\begin{aligned} \rho_{123} \circ \rho_{123} = -\rho_0, \quad \rho_{124} \circ \rho_{124} = \rho_0, \\ \rho_{134} \circ \rho_{134} = -\rho_0, \quad \rho_{234} \circ \rho_{234} = -\rho_0 . \end{aligned}$$

• Вектор

$$\rho_{1324} = \rho_1 \circ \rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_4 .$$

Здесь  $i \neq k, i \neq l, i \neq m, k \neq l, k \neq m, l \neq m$ . Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по четыре, то есть единице:

$$C_4^4 = 1 .$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки,

$$\begin{aligned} \rho_{1234} = \rho_{2134} = -\rho_{2314} = -\rho_{3214} = \\ = -\rho_{3124} = \rho_{1324} = \rho_{1243} = \rho_{2143} = \\ = -\rho_{2413} = -\rho_{4213} = -\rho_{4123} = \rho_{1423} = \\ = \rho_{1342} = -\rho_{3142} = \rho_{3412} = \rho_{4312} = \\ = -\rho_{4132} = \rho_{1432} = \rho_{2341} = \rho_{3241} = \\ = \rho_{3421} = \rho_{4321} = \rho_{4231} = \rho_{2431} . \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\rho_{1324} \circ \rho_{1324} = -\rho_0 .$$

2. Структурные матрицы алгебры желтых кваркино

Приведем структурные матрицы двух алгебр: правой контравариантной алгебры желтых кваркино первого поколения  ${}_r(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_y^s)$  и левой ковариантной алгебры желтых кваркино первого поколения  ${}_l(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_y^s)^*$ . С использованием таких матриц записываются квантовые уравнения для рассматриваемых кваркино. Компоненты векторов и матриц рассматриваются в следующей последовательности индексов:

(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124) .

Переход от действительного представления к компактным представлениям осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C_{KL}^{IK}$  от действительного представления к  $iab$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} 1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}, \\ a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C_{KL}^{IK}$  от  $iab$ -представления к  $IAB$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \\ A = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

2.1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры желтых кваркино первого поколения  $\tau(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)_y$

$r\rho_0 \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
32	1							
13		1						
21			1					
0				1				
42					1			
14						1		
1324							1	
34								1
1								
2								
3								
123								
134								
234								
4								
124								

$= I$

	0	34	123	124
13	1			
14		1		
34			1	
123				1
124				

	0	34	123	124
0	1			
34		1		
123			1	
124				1

$r\rho_1 \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
32								
13								
21								
0								
42								
14								
1324								
34								
1								
2								
3								
123								
134								
234								
4								
124								

$= a$

	0	34	123	124
13				
14				
34				
2				
123				
234				
124				

$= a$

	0	34	123	124
0				
34				
123				
124				

$r\rho_2 \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
32								
13								
21								
0								
42								
14								
1324								
34								
1								
2								
3								
123								
134								
234								
4								
124								

$= I$

	0	34	123	124
13				
14				
34				
2				
123				
234				
124				

$= I$

	0	34	123	124
0				
34				
123				
124				



$r\rho_{32} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32		1						
13		1						
21		1						
0	1							
42			1					
14			1					
1324			1					
34			1					
1					1			
2					1			
3					1			
123					1			
134							1	
234							1	
4							1	
124							1	

$= a$

	0	34	123	124
13	1			13
14	1			0
2		1		14
134			1	34
123				2
234				123
124				1

$= a$

	0	34	123	124
13	A			0
14		A		34
2			A	123
123				A
124				

$r\rho_{42} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32			-1					
13			-1					
21			-1					
0			-1					
42			1					
14			1					
1324			1					
34	1							
1								-1
2								-1
3								-1
123								-1
134							1	
234							1	
4							1	
124							1	

$= a$

	0	34	123	124
13	-1			13
14	-1			0
2		1		14
134			-1	34
123				2
234				123
124				1

$= a$

	0	34	123	124
13	-A			0
14		-A		34
2			-A	123
123				-A
124				A

$r\rho_{14} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32			-1					
13			-1					
21			1					
0			1					
42			1					
14			1					
1324	-1							
34	-1							
1								1
2								1
3								-1
123								-1
134								-1
234								-1
4								1
124								1

$= I$

	0	34	123	124
13	-1			13
14	1			0
2		1		14
134			1	34
123				2
234				123
124				-1

$= I$

	0	34	123	124
13	-I			0
14		I		34
2			I	123
123				-I
124				

$r\rho_{34} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32			-1					
13			-1					
21			-1					
0			-1					
42			1					
14			1					
1324			1					
34			1					
1								-1
2								-1
3								-1
123								-1
134							1	
234							1	
4							1	
124							1	

$= I$

	0	34	123	124
13	-1			13
14	-1			0
2		1		14
134			-1	34
123				2
234				123
124				1

$= I$

	0	34	123	124
13	-1			0
14		-1		34
2			-1	123
123				-1
124				1





$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & \\
 13 & & & & & & & & \\
 21 & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & \\
 42 & & & & & & & & \\
 14 & & & & & & & & \\
 1324 & & & & & & & & \\
 34 & & & & & & & & \\
 1 & & & & & & & & \\
 2 & & & & & & & & \\
 3 & & & & & & & & \\
 123 & & & & & & & & \\
 134 & & & & & & & & \\
 234 & & & & & & & & \\
 4 & & & & & & & & \\
 124 & & & & & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cc}
 & 0 \quad 34 \quad 123 \quad 124 \\
 13 \quad 14 \quad 2 \quad 134 & \\
 \begin{array}{cc}
 1 & \\
 -1 & -1 \\
 1 & \\
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 13 \\
 0 \\
 14 \\
 34 \\
 2 \\
 123 \\
 234 \\
 124 \\
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cc}
 & 34 \quad 124 \\
 0 \quad 123 & \\
 \begin{array}{cc}
 -B & \\
 B & B \\
 -B & 
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 0 \\
 34 \\
 123 \\
 124 \\
 \end{array} \\
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cc}
 & 0 \quad 34 \quad 123 \quad 124 \\
 13 \quad 14 \quad 2 \quad 134 & \\
 \begin{array}{cc}
 1 & \\
 1 & \\
 1 & \\
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 13 \\
 0 \\
 14 \\
 34 \\
 2 \\
 123 \\
 234 \\
 124 \\
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cc}
 & 34 \quad 124 \\
 0 \quad 123 & \\
 \begin{array}{cc}
 \mathbb{1} & \\
 \mathbb{1} & \mathbb{1} \\
 \mathbb{1} & 
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 0 \\
 34 \\
 123 \\
 124 \\
 \end{array} \\
 \end{array} \\
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры желтых кваркино первого поколения  ${}_l(\mathbb{Q}^s, X_{\mathbb{Q}^s})_y^*$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & \\
 13 & & & & & & & & \\
 21 & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & \\
 42 & & & & & & & & \\
 14 & & & & & & & & \\
 1324 & & & & & & & & \\
 34 & & & & & & & & \\
 1 & & & & & & & & \\
 2 & & & & & & & & \\
 3 & & & & & & & & \\
 123 & & & & & & & & \\
 134 & & & & & & & & \\
 234 & & & & & & & & \\
 4 & & & & & & & & \\
 124 & & & & & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cc}
 & 0 \quad 34 \quad 123 \quad 124 \\
 13 \quad 14 \quad 2 \quad 134 & \\
 \begin{array}{cc}
 1 & \\
 1 & \\
 1 & \\
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 13 \\
 0 \\
 14 \\
 34 \\
 2 \\
 123 \\
 234 \\
 124 \\
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cc}
 & 34 \quad 124 \\
 0 \quad 123 & \\
 \begin{array}{cc}
 \mathbb{1} & \\
 \mathbb{1} & \mathbb{1} \\
 \mathbb{1} & 
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 0 \\
 34 \\
 123 \\
 124 \\
 \end{array} \\
 \end{array} \\
 \end{array}
 \end{array}$$







$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & 1 \\
 13 & & & & & & & & 1 \\
 21 & & & & & & & & 1 \\
 0 & & & & & & & & 1 \\
 42 & & & & & & & -1 & \\
 14 & & & & & & & -1 & \\
 1324 & & & & & & & -1 & \\
 34 & & & & & -1 & & & \\
 1 & & & & 1 & & & & \\
 2 & & & & 1 & & & & \\
 3 & & & & 1 & & & & \\
 123 & & & 1 & & & & & \\
 134 & & -1 & & & & & & \\
 234 & & -1 & & & & & & \\
 4 & & -1 & & & & & & \\
 124 & -1 & & & & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 13 & 14 & 2 & 134 \\
 & & & & 13 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 14 \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 2 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 234 \\
 & & & & 124 \\
 1 & & & & 1 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & -1
 \end{array} \\
 = a \\
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & & & & A & 0 \\
 & & & & -A & 34 \\
 & & & & A & 123 \\
 & & & & -A & 124
 \end{array} \\
 = a
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & 1 \\
 13 & & & & & & & & 1 \\
 21 & & & & & & & & 1 \\
 0 & & & & & & & & 1 \\
 42 & & & & & & & -1 & \\
 14 & & & & & & & -1 & \\
 1324 & & & & & & & -1 & \\
 34 & & & & & -1 & & & \\
 1 & & & & 1 & & & & \\
 2 & & & & 1 & & & & \\
 3 & & & & 1 & & & & \\
 123 & & & 1 & & & & & \\
 134 & & -1 & & & & & & \\
 234 & & -1 & & & & & & \\
 4 & & -1 & & & & & & \\
 124 & -1 & & & & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 13 & 14 & 2 & 134 \\
 & & & & 13 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 14 \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 2 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 234 \\
 & & & & 124 \\
 1 & & & & 1 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & -1
 \end{array} \\
 = a \\
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & & & & \mathbb{1} & 0 \\
 & & & & -\mathbb{1} & 34 \\
 & & & & \mathbb{1} & 123 \\
 & & & & -\mathbb{1} & 124
 \end{array} \\
 = a
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & 1 \\
 13 & & & & & & & & 1 \\
 21 & & & & & & & & 1 \\
 0 & & & & & & & & 1 \\
 42 & & & & & & & -1 & \\
 14 & & & & & & & -1 & \\
 1324 & & & & & & & -1 & \\
 34 & & & & & -1 & & & \\
 1 & & & & 1 & & & & \\
 2 & & & & 1 & & & & \\
 3 & & & & 1 & & & & \\
 123 & & & 1 & & & & & \\
 134 & & -1 & & & & & & \\
 234 & & -1 & & & & & & \\
 4 & & -1 & & & & & & \\
 124 & -1 & & & & & & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & 13 & 14 & 2 & 134 \\
 & & & & 13 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 14 \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 2 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & 234 \\
 & & & & 124 \\
 1 & & & & 1 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & -1
 \end{array} \\
 = I \\
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{cc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 & & & & A & 0 \\
 & & & & -A & 34 \\
 & & & & A & 123 \\
 & & & & -A & 124
 \end{array} \\
 = I
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

### 3. Действительное представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$

Структурные матрицы  ${}_r C_{KI}^L$  в действительном представлении вычислены по алгоритму, приведенному в Разделе II. Главы 4.1, для принятого ранее порядка индексов. При этом слагаемые вектора  $\psi$  записываются в следующей последовательности:

$$\begin{aligned}
 \psi = & \rho_{32} \psi^{32} + \rho_{13} \psi^{13} + \rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0 + \\
 & + \rho_{42} \psi^{42} + \rho_{14} \psi^{14} + \rho_{1324} \psi^{1324} + \rho_{34} \psi^{34} + \\
 & + \rho_1 \psi^1 + \rho_2 \psi^2 + \rho_3 \psi^3 + \rho_{123} \psi^{123} + \\
 & + \rho_{134} \psi^{134} + \rho_{234} \psi^{234} + \rho_4 \psi^4 + \rho_{124} \psi^{124}.
 \end{aligned}$$

В результате получены действительные структурные матрицы

$${}_r C_{KI}^L \sim {}_r \rho I$$

размерности  $16 \times 16$  (см. Раздел II.2). Помимо действительного представления обратимся к  $iab$ -представлению.

#### 4. $iab$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$

$iab$ -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned} \psi &= \rho_{13} \circ (\rho_{21} \psi^{32} + \rho_0 \psi^{13}) + \rho_0 \circ (\rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0) + \\ &+ \rho_{14} \circ (\rho_{21} \psi^{42} + \rho_0 \psi^{14}) + \rho_{34} \circ (\rho_{21} \psi^{1324} + \rho_0 \psi^{34}) + \\ &+ \rho_2 \circ (\rho_{21} \psi^1 + \rho_0 \psi^2) + \rho_{123} \circ (\rho_{21} \psi^3 + \rho_0 \psi^{123}) + \\ &+ \rho_{234} \circ (\rho_{21} \psi^{134} + \rho_0 \psi^{234}) + \rho_{124} \circ (\rho_{21} \psi^4 + \rho_0 \psi^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_3^s \times \mathbb{Q}_1^s$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_3^s$  являются

$$\rho_{13}, \rho_0, \rho_{14}, \rho_{34}, \rho_2, \rho_{123}, \rho_{234}, \rho_{124};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1^s$  являются

$$\rho_{21}, \rho_0.$$

Поставим в соответствие базисному вектору  $\rho_{21}$  алгебры  $\mathbb{Q}_1^s$   $a$ -единицу, а базисному вектору  $\rho_0$  действительную единицу. В результате вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  в  $iab$ -представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= \rho_{13} \circ (a \psi^{32} + \psi^{13}) + \rho_0 \circ (a \psi^{21} + \psi^0) + \\ &+ \rho_{14} \circ (a \psi^{42} + \psi^{14}) + \rho_{34} \circ (a \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ &+ \rho_2 \circ (a \psi^1 + \psi^2) + \rho_{123} \circ (a \psi^3 + \psi^{123}) + \\ &+ \rho_{234} \circ (a \psi^{134} + \psi^{234}) + \rho_{124} \circ (a \psi^4 + \psi^{124}). \end{aligned}$$

Таким образом, в  $iab$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются  $a$ -гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= a \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= a \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= a \psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= a \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= a \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= a \psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= a \psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= a \psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \rho_{13} \psi^{13} + \rho_0 \psi^0 + \rho_{14} \psi^{14} + \rho_{34} \psi^{34} + \\ &+ \rho_2 \psi^2 + \rho_{123} \psi^{123} + \rho_{234} \psi^{234} + \rho_{124} \psi^{124}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в  $iab$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\rho_{13}, \rho_0, \rho_{14}, \rho_{34}, \rho_2, \rho_{123}, \rho_{234}, \rho_{124}$ .

В  $iab$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $8 \times 8$  (см. Раздел II.2).

#### 5. $IAB$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$

$IAB$ -представление алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  основано на разложении вектора

$$\begin{aligned} \psi &= (\rho_{32} \psi^{32} + \rho_{13} \psi^{13} + \rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0) \circ \rho_0 + \\ &+ (\rho_{32} \psi^{42} + \rho_{13} \psi^{14} + \rho_{21} \psi^{1324} + \rho_0 \psi^{34}) \circ \rho_{34} + \\ &+ (\rho_{32} \psi^1 + \rho_{13} \psi^2 + \rho_{21} \psi^3 + \rho_0 \psi^{123}) \circ \rho_{123} + \\ &+ (\rho_{32} \psi^{134} + \rho_{13} \psi^{234} + \rho_{21} \psi^4 + \rho_0 \psi^{124}) \circ \rho_{124}. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_2^s \times \mathbb{Q}_2^s$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{Q}_2^s$  являются

$$\rho_0, \rho_{34}, \rho_{123}, \rho_{124};$$

базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{Q}_2^s$  являются

$$\rho_{32}, \rho_{13}, \rho_{21}, \rho_0.$$

Последнюю алгебру мы назвали  $IAB$ -алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц  $IAB$ -алгебры используем следующие обозначения:

$$a \cdot A, \quad 1 \cdot I, \quad a \cdot B, \quad 1 \cdot \mathbb{1}.$$

Заменим базисные векторы  $\rho_{32}, \rho_{13}, \rho_{21}, \rho_0$  приведенными гиперчислами

$$\begin{aligned} \rho_{32} &\sim a A, \\ \rho_{13} &\sim 1 I, \\ \rho_{21} &\sim a B, \\ \rho_0 &\sim 1 \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  в  $IAB$ -представлении

$$\begin{aligned} \psi &= (a \cdot A \psi^{32} + 1 \cdot I \psi^{13} + a \cdot B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0) \circ \rho_0 + \\ &+ (a \cdot A \psi^{42} + 1 \cdot I \psi^{14} + a \cdot B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}) \circ \rho_{34} + \\ &+ (a \cdot A \psi^1 + 1 \cdot I \psi^2 + a \cdot B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \rho_{123} + \\ &+ (a \cdot A \psi^{134} + 1 \cdot I \psi^{234} + a \cdot B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}) \circ \rho_{124}. \end{aligned}$$

Таким образом, в  $IAB$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a A \psi^{32} + 1 I \psi^{13} + a B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{34} &= a A \psi^{42} + 1 I \psi^{14} + a B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= a A \psi^1 + 1 I \psi^2 + a B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= a A \psi^{134} + 1 I \psi^{234} + a B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \Psi^0 \rho_0 + \Psi^{34} \rho_{34} + \Psi^{123} \rho_{123} + \Psi^{124} \rho_{124}.$$

Отсюда видно, что в  $IAB$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\rho_0, \rho_{34}, \rho_{123}, \rho_{124}$ .

В  $IAB$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$  (см. Раздел II.2).

### III. КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ КВАРКИНО

Мы вычислили структурные матрицы алгебры кваркино и теперь вернемся к результатам Главы 3.3. Согласно этой Главе, если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи

квантовые явления, а уравнение структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовый постулат. В Разделе III. Главы 4.12 уравнение структуры алгебры действия общего вида преобразовано в квантовое уравнение для свободных кваркино, которым воспользуемся далее. Указанное уравнение имеет вид

$${}_i C^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{m_d c}{2p} (\alpha \cdot {}_r C^N_{K0} + \beta \cdot {}_r C^N_{K34}) \cdot \psi^K. \quad (3)$$

Здесь  $m_d$  есть масса нижнего кваркино,  $p$  – постоянная величина, имеющая размерность действия, аналогичная постоянной Планка,  $\alpha$  и  $\beta$  – действительные положительные числа, на которые наложено условие

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1. \quad (4)$$

Масса верхнего кварка  $m_u$  выражается через массу нижнего кварка  $m_d$  следующим образом:

$$m_u = m_d \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (5)$$

### 1. Структурные матрицы алгебры желтых кваркино $\mathbb{Q}_y^s$

Используя результаты Раздела II.2, приведем структурные матрицы алгебры  $\mathbb{Q}_y^s$ , необходимые для построения квантового уравнения для свободных желтых кваркино.

$${}_i C^{4N}_L = i \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 124 \\ \hline & & -B \\ \hline & B & \\ \hline -B & & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}, \quad {}_i C^{1N}_L = a \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 124 \\ \hline & & A \\ \hline & A & \\ \hline A & & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array},$$

$$C^{2N}_L = 1 \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 124 \\ \hline & & A \\ \hline A & & \\ \hline A & & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}, \quad {}_i C^{3N}_L = i \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 124 \\ \hline & & -B \\ \hline & -B & \\ \hline B & & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array},$$

$${}_r C^N_{K0} = 1 \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 124 \\ \hline \mathbb{1} & & \\ \hline & \mathbb{1} & \\ \hline & & \mathbb{1} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}, \quad {}_r C^N_{K34} = 1 \begin{array}{c|c|c} 0 & 34 & 124 \\ \hline & -\mathbb{1} & \\ \hline \mathbb{1} & & \\ \hline & & -\mathbb{1} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}.$$

### 2. Квантовое уравнение для свободных желтых кваркино

Квантовое уравнение для свободных желтых кваркино получим, подставив в уравнение (3) вышеприведенные структурные матрицы. Для действительного

регулярного представления алгебры желтых кваркино  $\mathbb{Q}_y^s$  компоненты волновой функции  $\psi^K(x)$  представляют собой шестнадцать действительных функций. В  $iab$ -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (1). И в  $IAB$ -представлении компонентами волновой функции являются четыре  $IAB$ -функции вида (2). Приведем квантовое уравнение по отношению к  $IAB$ -компонентам волновой функции желтых кваркино:

$$\left( i \begin{array}{c|c|c} & & -B \\ \hline & B & \\ \hline -B & & \end{array} \partial_4 + a \begin{array}{c|c|c} & & A \\ \hline & A & \\ \hline A & & \end{array} \partial_1 + \right. \\ \left. + \begin{array}{c|c|c} & A & \\ \hline A & & \end{array} \partial_2 + i \begin{array}{c|c|c} & & -B \\ \hline & -B & \\ \hline B & & \end{array} \partial_3 \right) \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} = \\ = -\frac{m_d c}{2p} \begin{array}{c|c|c} \alpha & -\beta & \\ \hline \beta & \alpha & \\ \hline & & \alpha - \beta \\ & & \beta & \alpha \end{array} \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array}$$

или

$$\begin{aligned} i B \partial_4 \Psi^{124} - (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \Psi^{123} &= \\ &= \frac{m_d c}{2p} (\alpha \cdot \Psi^0 - \beta \cdot \Psi^{34}), \\ -i B \partial_4 \Psi^{123} - (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \Psi^{124} &= \\ &= \frac{m_d c}{2p} (\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34}), \\ -i B \partial_4 \Psi^{34} - (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \Psi^0 &= \\ &= \frac{m_d c}{2p} (\alpha \cdot \Psi^{123} - \beta \cdot \Psi^{124}), \\ i B \partial_4 \Psi^0 - (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \Psi^{34} &= \\ &= \frac{m_d c}{2p} (\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124}). \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. Стандартное представление квантового уравнения для желтых кваркино

Преобразуем уравнения (6) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым, а третье с четвертым. Получим

$$-i B \partial_4 \chi_1 - (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \varphi_2 = \frac{m_1 c}{2p} \varphi_1 + \frac{m_2 c}{2p} \chi_2,$$

$$i B \partial_4 \chi_2 - (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \varphi_1 = \frac{m_1 c}{2p} \varphi_2 + \frac{m_2 c}{2p} \chi_1, \quad (7)$$

где  $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и  $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$  и  $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$ ,  $m_1 = m_d \alpha$ ,  $m_2 = m_d \beta$ .



Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$i B \partial_4 \varphi_1 + (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \chi_2 = -\frac{m_1 c}{2p} \chi_1 + \frac{m_2 c}{2p} \varphi_2,$$

$$-i B \partial_4 \varphi_2 + (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \chi_1 = -\frac{m_1 c}{2p} \chi_2 + \frac{m_2 c}{2p} \varphi_1,$$

(8)

Таким образом, система уравнений для желтых кваркино не разделяется на две системы, которые относились бы к разным частицам – верхней и нижней. Следовательно, желтое кваркино представлено одной частицей с четырехкомпонентной волновой функцией.

#### IV. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Волновая функция нерелятивистского желтого кваркино есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3^s$ .
- Волновая функция желтого кваркино одного поколения есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_y^s$ .
- Волновые функции желтых кваркино разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех образующих базисных векторов.
- Компоненты волновой функции  $\Psi^0 + \Psi^{34}$ ,  $\Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\Psi^{123} - \Psi^{124}$ ,  $\Psi^0 - \Psi^{34}$  относятся к одному желтому кваркино. Этот вывод следует из того, что полученные квантовые уравнения для желтых кваркино в стандартном представлении нельзя представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относилась бы к двухкомпонентной волновой функции.
- Установлена следующая организация волновой функции желтого кваркино первого поколения. Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где  $A$  принимает значения

32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,

разбиваются на четыре части:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) + \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}), \\ \varphi_2 &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) + \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\ \chi_1 &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) - \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\ \chi_2 &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) - \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}). \end{aligned}$$

- Компоненты волновых функций желтых кваркино второго и третьего поколений отличаются от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов:

для желтого кваркино второго поколения

$$3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3;$$

для желтого кваркино третьего поколения

$$3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2.$$

# Глава 4.14 Красные кваркино. Алгебра действия красных кваркино

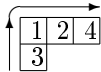
$\mathbb{Q}_r^s$

## I. КРАСНЫЕ КВАРКИНО ТРЕХ ПОКОЛЕНИЙ

Рассмотрим алгебру красных кваркино  $\mathbb{Q}_r^s$ .

Начнем с алгебры красных кваркино первого поколения  $\mathbb{Q}_r^s(1)$ .

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кваркино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= -\mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}. \end{aligned}$$

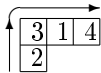
Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3. \end{aligned}$$

Для того чтобы перейти к алгебрам красных кваркино второго и третьего поколений, необходимо использовать условия соседней перестановки, отличающиеся от предыдущих циклической перестановкой геометрических базисных векторов.

Тогда для алгебры красных кваркино второго поколения  $\mathbb{Q}_r^s(2)$  имеем следующее.

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

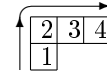
$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= -\mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3. \end{aligned}$$

Алгебра красных кваркино третьего поколения  $\mathbb{Q}_r^s(3)$ .

В соответствии с Разделом IV.3. Главы 3.4. волновая функция кварков в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} \mathbf{12} &= -\mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_1, \\ \rho_2 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_2, \\ \rho_3 \circ \rho_4 &= \rho_4 \circ \rho_3. \end{aligned}$$

Далее в этой Главе рассматривается только алгебра красных кваркино первого поколения  $\mathbb{Q}_r^s(1)$ . Имеется в виду, что переход к алгебрам красных кваркино других поколений очевиден.

## II. АЛГЕБРА КРАСНЫХ КВАРКИНО ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}_r^s(1)$

### 1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры  $\mathbb{Q}_r^s(1)$  и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\rho_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\rho_0$  имеет место правило умножения

$$\rho_0 \circ \rho_0 = \rho_0.$$

- Образующие векторы  $\rho_i$ , где индекс  $i$  пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Для них имеют место правила умножения

$$\rho_i \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho_i = \rho_i.$$

$$\rho_i \circ \rho_i = \text{sign}(\rho_i)^2 \cdot \rho_0,$$

где

$$\text{sign}(\rho_1)^2 = \text{sign}(\rho_2)^2 = \text{sign}(\rho_3)^2 = -\text{sign}(\rho_4)^2 = 1.$$

- Векторы

$$\rho_{ik} = \rho_i \circ \rho_k.$$

Здесь  $i \neq k$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6.$$

В соответствии с Разделом I. для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей (условия соседней перестановки)

$$\begin{aligned} \rho_{21} &= \rho_{21}, & \rho_{13} &= -\rho_{31}, & \rho_{32} &= \rho_{23}, \\ \rho_{14} &= \rho_{41}, & \rho_{24} &= \rho_{42}, & \rho_{34} &= \rho_{43}. \end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условий соседней перестановки. В частности, имеем

$$\begin{aligned} \rho_{21} \circ \rho_{21} &= \rho_0, & \rho_{42} \circ \rho_{42} &= -\rho_0, \\ \rho_{32} \circ \rho_{32} &= \rho_0, & \rho_{14} \circ \rho_{14} &= -\rho_0, \\ \rho_{13} \circ \rho_{13} &= -\rho_0, & \rho_{34} \circ \rho_{34} &= -\rho_0. \end{aligned}$$

• Векторы

$$\rho_{ikl} = \rho_i \circ \rho_k \circ \rho_l.$$

Здесь  $i \neq k, i \neq l, k \neq l$ . Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки:

$$\begin{aligned} \rho_{123} &= \rho_{213} = -\rho_{231} = -\rho_{321} = -\rho_{312} = \rho_{132}, \\ \rho_{124} &= \rho_{214} = \rho_{241} = \rho_{421} = \rho_{412} = \rho_{142}, \\ \rho_{134} &= -\rho_{314} = -\rho_{341} = -\rho_{431} = \rho_{413} = \rho_{143}, \\ \rho_{234} &= \rho_{324} = \rho_{342} = \rho_{432} = \rho_{423} = \rho_{243}. \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\begin{aligned} \rho_{123} \circ \rho_{123} &= -\rho_0, & \rho_{124} \circ \rho_{124} &= -\rho_0, \\ \rho_{134} \circ \rho_{134} &= \rho_0, & \rho_{234} \circ \rho_{234} &= -\rho_0. \end{aligned}$$

• Вектор

$$\rho_{1324} = \rho_1 \circ \rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_4.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки:

$$\begin{aligned} \rho_{1234} &= \rho_{2134} = -\rho_{2314} = -\rho_{3214} = \\ &= -\rho_{3124} = \rho_{1324} = \rho_{1243} = \rho_{2143} = \\ &= \rho_{2413} = \rho_{4213} = \rho_{4123} = \rho_{1423} = \\ &= \rho_{1342} = -\rho_{3142} = -\rho_{3412} = -\rho_{4312} = \\ &= \rho_{4132} = \rho_{1432} = -\rho_{2341} = -\rho_{3241} = \\ &= -\rho_{3421} = -\rho_{4321} = -\rho_{4231} = -\rho_{2431}. \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\rho_{1324} \circ \rho_{1324} = \rho_0.$$

## 2. Структурные матрицы алгебры красных кваркино

Приведем структурные матрицы двух алгебр: правой контравариантной алгебры красных кваркино первого поколения  ${}_r(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)_r$  и левой ковариантной алгебры красных кваркино первого поколения  ${}_l(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)_r^*$ . С использованием таких матриц записываются квантовые уравнения для рассматриваемых кваркино. Компоненты векторов и матриц рассматриваются в следующей последовательности индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

Переход от действительного представления к компактным представлениям осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C^{IK}_L$  от действительного представления к  $iab$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

$$a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C^{IK}_L$  от  $iab$ -представления к  $IAB$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1. Структурные матрицы правой контравариантной алгебры красных кваркино первого поколения  ${}_r(\mathbb{Q}^s, X_{\mathbb{Q}^s})_r$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 32 \\
 13 \\
 21 \\
 0 \\
 42 \\
 14 \\
 1324 \\
 34 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 123 \\
 134 \\
 234 \\
 4 \\
 124
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13 \quad 0 \quad 14 \quad 34 \quad 2 \quad 123 \quad 234 \quad 124 \\
 32 \quad 21 \quad 42 \quad 1324 \quad 1 \quad 3 \quad 134 \quad 4
 \end{array} \\
 \sim \\
 \begin{array}{c}
 32 \\
 13 \\
 21 \\
 0 \\
 42 \\
 14 \\
 1324 \\
 34 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 123 \\
 134 \\
 234 \\
 4 \\
 124
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1
 \end{array} \\
 = I \\
 \begin{array}{c}
 0 \quad 34 \quad 123 \quad 124 \\
 13 \quad 14 \quad 2 \quad 134
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13 \\
 0 \\
 14 \\
 34 \\
 2 \\
 123 \\
 234 \\
 124
 \end{array} \\
 = I \\
 \begin{array}{c}
 0 \quad 34 \quad 123 \\
 13 \quad 14 \quad 2 \quad 134
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13 \\
 0 \\
 14 \\
 34 \\
 2 \\
 123 \\
 234 \\
 124
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 13 \quad 0 \quad 14 \quad 34 \quad 2 \quad 123 \quad 234 \quad 124 \\
 32 \quad 21 \quad 42 \quad 1324 \quad 1 \quad 3 \quad 134 \quad 4
 \end{array} \\
 \sim \\
 \begin{array}{c}
 32 \\
 13 \\
 21 \\
 0 \\
 42 \\
 14 \\
 1324 \\
 34 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 123 \\
 134 \\
 234 \\
 4 \\
 124
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 -1 \\
 -1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1
 \end{array} \\
 = a \\
 \begin{array}{c}
 0 \quad 34 \quad 123 \quad 124 \\
 13 \quad 14 \quad 2 \quad 134
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 -1 \\
 1 \\
 1 \\
 -1 \\
 1 \\
 -1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13 \\
 0 \\
 14 \\
 34 \\
 2 \\
 123 \\
 234 \\
 124
 \end{array} \\
 = a \\
 \begin{array}{c}
 0 \quad 34 \quad 123 \\
 13 \quad 14 \quad 2 \quad 134
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 -I \\
 I \\
 -I \\
 I \\
 -I \\
 I \\
 -I \\
 I \\
 -I \\
 I \\
 -I \\
 I \\
 -I \\
 I
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 34 \\
 123 \\
 124
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 13 \quad 0 \quad 14 \quad 34 \quad 2 \quad 123 \quad 234 \quad 124 \\
 32 \quad 21 \quad 42 \quad 1324 \quad 1 \quad 3 \quad 134 \quad 4
 \end{array} \\
 \sim \\
 \begin{array}{c}
 32 \\
 13 \\
 21 \\
 0 \\
 42 \\
 14 \\
 1324 \\
 34 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 123 \\
 134 \\
 234 \\
 4 \\
 124
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1
 \end{array} \\
 = I \\
 \begin{array}{c}
 0 \quad 34 \quad 123 \quad 124 \\
 13 \quad 14 \quad 2 \quad 134
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13 \\
 0 \\
 14 \\
 34 \\
 2 \\
 123 \\
 234 \\
 124
 \end{array} \\
 = I \\
 \begin{array}{c}
 0 \quad 34 \quad 123 \\
 13 \quad 14 \quad 2 \quad 134
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13 \\
 0 \\
 14 \\
 34 \\
 2 \\
 123 \\
 234 \\
 124
 \end{array}
 \end{array}$$







$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & -1 & & & & & \\
 13 & & & -1 & & & & & \\
 21 & & & & 1 & & & & \\
 0 & & & & & 1 & & & \\
 42 & -1 & & & & & & & \\
 14 & -1 & & & & & & & \\
 1324 & & 1 & & & & & & \\
 34 & & & 1 & & & & & \\
 1 & & & & & & & 1 & \\
 2 & & & & & & & & 1 \\
 3 & & & & & & & & & -1 \\
 123 & & & & & & & & & -1 \\
 134 & & & & & & 1 & & & \\
 234 & & & & & & 1 & & & -1 \\
 4 & & & & & & & & & -1 \\
 124 & & & & & & & & & -1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & 14 & 2 & 134 & \\
 -1 & & & & 13 \\
 & & & & 0 \\
 -1 & & & & 14 \\
 1 & & & & 34 \\
 & & & & 2 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & 1234 \\
 & & & & 234 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & 124
 \end{array} \\
 = a \\
 \begin{array}{ccc}
 & 34 & 124 \\
 0 & & 123 \\
 B & & \\
 B & & -B \\
 & & -B \\
 & & 123 \\
 & & 124
 \end{array} \\
 = a
 \end{array}
 \end{array}
 \sim
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & \\
 13 & & & & & & & & \\
 21 & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & \\
 42 & & & & & & & & \\
 14 & & & & & & & & \\
 1324 & & & & & & & & \\
 34 & & & & & & & & \\
 1 & & & & & & & & 1 \\
 2 & & & & & & & & 1 \\
 3 & & & & & & & & & -1 \\
 123 & & & & & & & & & -1 \\
 134 & & & & & & 1 & & & \\
 234 & & & & & & 1 & & & -1 \\
 4 & & & & & & & & & -1 \\
 124 & & & & & & & & & -1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & 14 & 2 & 134 & \\
 1 & & & & 13 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 14 \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 2 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & 1234 \\
 & & & & 234 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & 124
 \end{array} \\
 = I \\
 \begin{array}{ccc}
 & 34 & 124 \\
 0 & & 123 \\
 \mathbb{1} & & \\
 \mathbb{1} & & -\mathbb{1} \\
 & & -\mathbb{1} \\
 & & 123 \\
 & & 124
 \end{array} \\
 = I
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры красных кваркино первого поколения  ${}_l(\mathbb{Q}^s, \mathbb{X}_Q^s)_r^*$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & & & & \\
 13 & & & & & & & & \\
 21 & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & \\
 42 & & & & & & & & \\
 14 & & & & & & & & \\
 1324 & & & & & & & & \\
 34 & & & & & & & & \\
 1 & & & & & & & 1 & \\
 2 & & & & & & & & 1 \\
 3 & & & & & & & & & 1 \\
 123 & & & & & & & & & 1 \\
 134 & & & & & & & & 1 & \\
 234 & & & & & & & & & 1 \\
 4 & & & & & & & & & 1 \\
 124 & & & & & & & & & 1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & 14 & 2 & 134 & \\
 1 & & & & 13 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 14 \\
 & & & & 34 \\
 & & & & 2 \\
 & & & & 123 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & 1234 \\
 & & & & 234 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & 124
 \end{array} \\
 = I \\
 \begin{array}{ccc}
 & 34 & 124 \\
 0 & & 123 \\
 \mathbb{1} & & \\
 \mathbb{1} & & -\mathbb{1} \\
 & & -\mathbb{1} \\
 & & 123 \\
 & & 124
 \end{array} \\
 = I
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$









$${}_i R^{134} \sim \begin{array}{c|c|c|c} & \begin{matrix} 13 & 0 & 14 & 34 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 \\ 1 & 3 & 134 & 4 \end{matrix} & & \\ \hline \begin{matrix} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \end{matrix} & & & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \end{matrix} & & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & & \end{array} \\
 \\
 = {}_i \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 34 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix} & & 1 & \\ & & -1 & \\ & & -1 & \\ & & 1 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline \end{array} = {}_i \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 34 & 124 \\ 0 & 123 \end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix} I & \\ -I & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \hline \end{array}$$

$${}_i R^{1324} \sim \begin{array}{c|c|c|c} & \begin{matrix} 13 & 0 & 14 & 34 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 \\ 1 & 3 & 134 & 4 \end{matrix} & & \\ \hline \begin{matrix} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \end{matrix} & & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \end{matrix} & & & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & & \end{array} \\
 \\
 = {}_i \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \\ \hline \end{array} = {}_i \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 34 & 124 \\ 0 & 123 \end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix} -B & \\ B & \\ B & \\ -B & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \hline \end{array}$$

$${}_i R^{234} \sim \begin{array}{c|c|c|c} & \begin{matrix} 13 & 0 & 14 & 34 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 \\ 1 & 3 & 134 & 4 \end{matrix} & & \\ \hline \begin{matrix} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \end{matrix} & & & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \end{matrix} & & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & & \end{array} \\
 \\
 = {}_b \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix} & & -1 & \\ & & 1 & \\ & & -1 & \\ & & 1 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline \end{array} = {}_b \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 34 & 124 \\ 0 & 123 \end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix} I & \\ -I & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \hline \end{array}$$

**3. Действительное представление алгебры кваркино  $\mathbb{Q}_4^s$**

Структурные матрицы  ${}_r C_{KI}^L$  в действительном представлении вычислены по алгоритму, приведенному в Разделе II. Главы 4.1, для принятого ранее порядка индексов. При этом слагаемые вектора  $\psi$  записываются в следующей последовательности:

$$\psi = \rho_{32} \psi^{32} + \rho_{13} \psi^{13} + \rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0 + \\
 + \rho_{42} \psi^{42} + \rho_{14} \psi^{14} + \rho_{1324} \psi^{1324} + \rho_{34} \psi^{34} + \\
 + \rho_1 \psi^1 + \rho_2 \psi^2 + \rho_3 \psi^3 + \rho_{123} \psi^{123} + \\
 + \rho_{134} \psi^{134} + \rho_{234} \psi^{234} + \rho_4 \psi^4 + \rho_{124} \psi^{124}.$$

В результате получены действительные структурные матрицы

$${}_r C_{KI}^L \sim {}_r \rho I$$

размерности  $16 \times 16$  (см. Раздел II.2). Помимо действительного представления обратимся к  $iab$ -представлению.

#### 4. $iab$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$

$iab$ -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned} \psi &= \rho_{13} \circ (\rho_{21} \psi^{32} + \rho_0 \psi^{13}) + \rho_0 \circ (\rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0) + \\ &+ \rho_{14} \circ (\rho_{21} \psi^{42} + \rho_0 \psi^{14}) + \rho_{34} \circ (\rho_{21} \psi^{1324} + \rho_0 \psi^{34}) + \\ &+ \rho_2 \circ (\rho_{21} \psi^1 + \rho_0 \psi^2) + \rho_{123} \circ (\rho_{21} \psi^3 + \rho_0 \psi^{123}) + \\ &+ \rho_{234} \circ (\rho_{21} \psi^{134} + \rho_0 \psi^{234}) + \rho_{124} \circ (\rho_{21} \psi^4 + \rho_0 \psi^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_3^s \times \mathbb{Q}_1^s$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_3^s$  являются

$$\rho_{13}, \rho_0, \rho_{14}, \rho_{34}, \rho_2, \rho_{123}, \rho_{234}, \rho_{124};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{Q}_1^s$  являются

$$\rho_{21}, \rho_0.$$

Поставим в соответствие базисному вектору  $\rho_{21}$  алгебры  $\mathbb{Q}_1^s$   $a$ -единицу, а базисному вектору  $\rho_0$  действительную единицу. В результате вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  в  $iab$ -представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= \rho_{13} \circ (a \psi^{32} + \psi^{13}) + \rho_0 \circ (a \psi^{21} + \psi^0) + \\ &+ \rho_{14} \circ (a \psi^{42} + \psi^{14}) + \rho_{34} \circ (a \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ &+ \rho_2 \circ (a \psi^1 + \psi^2) + \rho_{123} \circ (a \psi^3 + \psi^{123}) + \\ &+ \rho_{234} \circ (a \psi^{134} + \psi^{234}) + \rho_{124} \circ (a \psi^4 + \psi^{124}). \end{aligned}$$

Таким образом, в  $iab$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются  $a$ -гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= a \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= a \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= a \psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= a \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= a \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= a \psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= a \psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= a \psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \rho_{13} \psi^{13} + \rho_0 \psi^0 + \rho_{14} \psi^{14} + \rho_{34} \psi^{34} + \\ &+ \rho_2 \psi^2 + \rho_{123} \psi^{123} + \rho_{234} \psi^{234} + \rho_{124} \psi^{124}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в  $iab$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\rho_{13}, \rho_0, \rho_{14}, \rho_{34}, \rho_2, \rho_{123}, \rho_{234}, \rho_{124}$ .

В  $iab$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $8 \times 8$  (см. Раздел II.2.).

#### 5. $IAB$ -представление алгебры кваркино $\mathbb{Q}_4^s$

$IAB$ -представление алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  основано на разложении вектора

$$\begin{aligned} \psi &= (\rho_{32} \psi^{32} + \rho_{13} \psi^{13} + \rho_{21} \psi^{21} + \rho_0 \psi^0) \circ \rho_0 + \\ &+ (\rho_{32} \psi^{42} + \rho_{13} \psi^{14} + \rho_{21} \psi^{1324} + \rho_0 \psi^{34}) \circ \rho_{34} + \\ &+ (\rho_{32} \psi^1 + \rho_{13} \psi^2 + \rho_{21} \psi^3 + \rho_0 \psi^{123}) \circ \rho_{123} + \\ &+ (\rho_{32} \psi^{134} + \rho_{13} \psi^{234} + \rho_{21} \psi^4 + \rho_0 \psi^{124}) \circ \rho_{124}. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  в виде произведения  $\mathbb{Q}_2^s \times \mathbb{Q}_2^s$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{Q}_2^s$  являются

$$\rho_0, \rho_{34}, \rho_{123}, \rho_{124};$$

базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{Q}_2^s$  являются

$$\rho_{32}, \rho_{13}, \rho_{21}, \rho_0.$$

Последнюю алгебру мы назвали  $IAB$ -алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц  $IAB$ -алгебры используем следующие обозначения:

$$a \cdot A, \quad 1 \cdot I, \quad a \cdot B, \quad 1 \cdot \mathbb{1}.$$

Заменим базисные векторы  $\rho_{32}, \rho_{13}, \rho_{21}, \rho_0$  приведенными гиперчислами

$$\begin{aligned} \rho_{32} &\sim a A, \\ \rho_{13} &\sim 1 I, \\ \rho_{21} &\sim a B, \\ \rho_0 &\sim 1 \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{Q}_4^s$  в  $IAB$ -представлении

$$\begin{aligned} \psi &= (a \cdot A \psi^{32} + 1 \cdot I \psi^{13} + a \cdot B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0) \circ \rho_0 + \\ &+ (a \cdot A \psi^{42} + 1 \cdot I \psi^{14} + a \cdot B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}) \circ \rho_{34} + \\ &+ (a \cdot A \psi^1 + 1 \cdot I \psi^2 + a \cdot B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \rho_{123} + \\ &+ (a \cdot A \psi^{134} + 1 \cdot I \psi^{234} + a \cdot B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}) \circ \rho_{124}. \end{aligned}$$

Таким образом, в  $IAB$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a A \psi^{32} + 1 I \psi^{13} + a B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{34} &= a A \psi^{42} + 1 I \psi^{14} + a B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= a A \psi^1 + 1 I \psi^2 + a B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= a A \psi^{134} + 1 I \psi^{234} + a B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \Psi^0 \rho_0 + \Psi^{34} \rho_{34} + \Psi^{123} \rho_{123} + \Psi^{124} \rho_{124}.$$

Отсюда видно, что в  $IAB$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\rho_0, \rho_{34}, \rho_{123}, \rho_{124}$ .

В  $IAB$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$  (см. Раздел II.2.).

### III. КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВОБОДНЫХ КВАРКИНО

Мы вычислили структурные матрицы алгебры кваркино и теперь вернемся к результатам Главы 3.3. Согласно этой Главе, если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи

квантовые явления, а уравнение структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовый постулат. В Разделе III. Главы 4.12 уравнение структуры алгебры действия общего вида преобразовано в квантовое уравнение для свободных кваркино, которым воспользуемся далее. Указанное уравнение имеет вид

$$iC^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{m_d c}{2p} (\alpha \cdot rC^N_{K0} + \beta \cdot rC^N_{K34}) \cdot \psi^K. \quad (3)$$

Здесь  $m_d$  есть масса предполагаемого нижнего кваркино,  $p$  – постоянная величина, имеющая размерность действия, аналогичная постоянной Планка,  $\alpha$  и  $\beta$  – действительные положительные числа, на которые наложено условие

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1. \quad (4)$$

Масса предполагаемого верхнего кваркино  $m_u$  выражается через массу нижнего кваркино  $m_d$  следующим образом:

$$m_u = m_d \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (5)$$

### 1. Структурные матрицы алгебры красных кваркино $\mathbb{Q}_r^s$

Используя результаты Раздела II.2, приведем структурные матрицы алгебры  $\mathbb{Q}_r^s$ , необходимые для построения квантового уравнения для свободных красных кваркино.

$$iC^{4N}_L = a \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & & \\ \hline -\mathbb{1} & & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}, \quad iC^{1N}_L = a \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & A & A \\ \hline A & & \\ \hline A & & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array},$$

$$iC^{2N}_L = 1 \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & A & A \\ \hline A & & \\ \hline A & & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}, \quad iC^{3N}_L = i \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & -B & -B \\ \hline B & & \\ \hline B & & \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array},$$

$$rC^N_{K0} = 1 \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline \mathbb{1} & & \\ \hline \mathbb{1} & & \\ \hline & \mathbb{1} & \\ \hline & & \mathbb{1} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}, \quad rC^N_{K34} = 1 \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & -\mathbb{1} & \\ \hline \mathbb{1} & & \\ \hline & & -\mathbb{1} \\ \hline & & \mathbb{1} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array}.$$

### 2. Квантовое уравнение для красных кваркино

Квантовое уравнение для свободных красных кваркино получим, подставив в уравнение (3) вышеприведенные структурные матрицы. Для действительного

регулярного представления алгебры кварков  $\mathbb{Q}(u, d)$  компоненты волновой функции  $\psi^K(x)$  представляют собой шестнадцать действительных функций. В  $iab$ -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (1). И в  $IAB$ -представлении компонентами волновой функции являются четыре  $IAB$ -функции вида (2). Приведем квантовое уравнение по отношению к  $IAB$ -компонентам волновой функции красных кваркино:

$$\left( \begin{array}{c|c|c} & & 1 \\ \hline a & & -1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & -1 & \end{array} \partial_4 + a \begin{array}{c|c|c} & & A \\ \hline & & A \\ \hline A & & \\ \hline & & A \end{array} \partial_1 + \right. \\ \left. + \begin{array}{c|c|c} & & A \\ \hline & & A \\ \hline A & & \\ \hline & & A \end{array} \partial_2 + i \begin{array}{c|c|c} & & -B \\ \hline & & -B \\ \hline B & & \\ \hline & & B \end{array} \partial_3 \right) \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} = \\ = -\frac{m_d c}{2q} \begin{array}{c|c|c} \alpha & -\beta & \\ \hline \beta & \alpha & \\ \hline & & \alpha & -\beta \\ \hline & & \beta & \alpha \end{array} \begin{array}{c} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array}$$

или

$$\begin{aligned} -a \partial_4 \Psi^{124} - (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \Psi^{123} &= \\ &= \frac{m_d c}{2p} (\alpha \cdot \Psi^0 - \beta \cdot \Psi^{34}), \\ a \partial_4 \Psi^{123} - (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \Psi^{124} &= \\ &= \frac{m_d c}{2p} (\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34}), \\ -a \partial_4 \Psi^{34} - (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \Psi^0 &= \\ &= \frac{m_d c}{2p} (\alpha \cdot \Psi^{123} - \beta \cdot \Psi^{124}), \\ a \partial_4 \Psi^0 - (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \Psi^{34} &= \\ &= \frac{m_d c}{2p} (\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124}). \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. Стандартное представление квантового уравнения для красных кваркино

Преобразуем уравнения (6) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым а третье с четвертым. Получим

$$a B \partial_4 \chi_1 - (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \varphi_2 = \frac{m_1 c}{2p} \varphi_1 + \frac{m_2 c}{2p} \chi_2,$$

$$a \partial_4 \chi_2 - (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \varphi_1 = \frac{m_1 c}{2p} \varphi_2 + \frac{m_2 c}{2p} \chi_1. \quad (7)$$

где  $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и  $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$  и  $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$ ,  $m_1 = m_d \alpha$ ,  $m_2 = m_d \beta$ .

Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$a \partial_4 \varphi_1 + (a A \partial_1 + A \partial_2 + i B \partial_3) \chi_2 = -\frac{m_1 c}{2p} \chi_1 + \frac{m_2 c}{2p} \varphi_2,$$

$$a \partial_4 \varphi_2 + (a A \partial_1 + A \partial_2 - i B \partial_3) \chi_1 = -\frac{m_1 c}{2p} \chi_2 + \frac{m_2 c}{2p} \varphi_1, \quad (8)$$

Таким образом, система уравнений для красных кваркино не разделяется на две системы, которые относились бы к разным частицам – верхней и нижней. Следовательно, красное кваркино представлено одной частицей с четырехкомпонентной волновой функцией.

#### IV. ТАБЛИЦА ГИПОТЕТИЧЕСКИХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ – КВАРКИНО

В Главе 4.12. показано, что волновая функция синих кваркино в стандартном представлении распадается на две двух компонентные волновые функции, то есть эти кваркино представлены верхней и нижней частицами. В Главах 4.13. и 4.14. показано, что, в отличие от синих кваркино, волновая функция желтых и красных кваркино в стандартном представлении остается четырехкомпонентной, то есть синие кваркино представлены одной частицей в каждом поколении. Отсюда имеем следующую таблицу кваркино.

##### 1. Кваркино первого поколения

кваркино	синие	желтые	красные
верхние	$U_b$	$D_y$	$D_r$
нижние	$D_b$		

##### 2. Кваркино второго поколения

кваркино	синие	желтые	красные
верхние	$C_b$	$S_y$	$S_r$
нижние	$S_b$		

##### 3. Кваркино третьего поколения

кваркино	синие	желтые	красные
верхние	$T_b$	$B_y$	$B_r$
нижние	$B_b$		

#### V. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Волновая функция нерелятивистского красного кваркино есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_3^s$ .
- Волновая функция красного кваркино одного поколения есть вектор алгебры  $\mathbb{Q}_7^s$ .
- Волновые функции красных кваркино разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех образующих базисных векторов.
- Компоненты волновой функции  $\Psi^0 + \Psi^{34}, \Psi^{123} + \Psi^{124}, \Psi^{123} - \Psi^{124}, \Psi^0 - \Psi^{34}$  относятся к одному красному кваркино. Этот вывод следует из того, что полученные квантовые уравнения для красных кваркино в стандартном представлении нельзя представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относилась бы к двухкомпонентной волновой функции.
- Установлена следующая организация волновой функции красного кваркино первого поколения. Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где  $A$  принимает значения

$$32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,$$

разбиваются на четыре части:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) + \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}), \\ \varphi_2 &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) + \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\ \chi_1 &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) - \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\ \chi_2 &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) - \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}). \end{aligned}$$

- Компоненты волновых функций красных кваркино второго и третьего поколений отличаются от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов:

для красного кваркино второго поколения

$$3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3;$$

для красного кваркино третьего поколения

$$3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2.$$

# Глава 4.15 Нерелятивистские лептино. Алгебры действия и пространства-времени лептино

## I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Логика диаграмм Юнга заставляет ввести в рассмотрение гипотетические фундаментальные частицы, суперсимметричные лептонам, названные *лептино*.

Алгебра действия лептино является частным случаем алгебры действия фундаментальных частиц  $\mathbb{S}$ , для которого одна часть произведений базисных векторов образующего пространства антикоммумутативна, а другая часть – коммутативна. Также алгебра пространства-времени лептино есть частный случай алгебры пространства-времени фундаментальных частиц  $\mathbb{X}$ .

Для того, чтобы очевидно выделить этот случай, для алгебры лептино (действия и пространства-времени) введем другое обозначение базисных векторов. Вместо обозначения базисных векторов  $\mathbf{e}$  введем обозначение  $\kappa$ , а вместо  $\mathbf{E}$  введем обозначение  $\mathbf{K}$ . Кроме того, введем специальное обозначение для алгебры действия лептино  $\mathbb{C}^s$  и специальное обозначение для алгебры пространства-времени лептино  $\mathbb{X}_s^s$ .

Эта Глава относится к лептино, которые названы *нерелятивистскими*. Это название *не означает*, что рассматриваются лептино, движущиеся с скоростью, много меньшей скорости света. Это название означает, что рассматриваются лептино, в формировании волновой функции которых не участвуют времениподобные компоненты, то есть образующее пространство алгебры действия таких лептино полагается подобным геометрическому пространству.

## II. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ ЛЕПТИНО. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Настоящая Глава посвящена алгебре действия нерелятивистских лептино  $\mathbb{C}_3^s$ , образующим пространством которой является пространство, подобное геометрическому, с базисными векторами

$$\kappa_1 \equiv \mathbf{e}_1, \quad \kappa_2 \equiv \mathbf{e}_2, \quad \kappa_3 \equiv \mathbf{e}_3.$$

На лептино распространяется системообразующий постулат, изложенный в Главе 4.2. Раздел III., согласно которому каждой фундаментальной частице можно поставить в соответствие *две аналогичные* фундаментальные частицы. Итого имеем *три аналогичные* фундаментальные частицы, которые объединены в одну группу. О трех аналогичных фундаментальных частицах, принадлежащих одной группе, говорят как о трех частицах разных *поколений* этой группы – частице первого поколения, частице второго поколения и частице третьего поколения,

## 1. Алгебра действия и поколения лептино

Алгебра действия нерелятивистских лептино включает в себя три алгебры, отличающиеся правилами перестановки сомножителей в произведениях базисных векторов образующего пространства. Каждая из трех алгебр ставится в соответствие поколению лептино.

### 1.1. Алгебра действия лептино первого поколения

В соответствии с Разделом IV.4 Главы 3.4 волновая функция лептино первого поколения определена следующей диаграммой Юнга:

$$\overrightarrow{\boxed{1 \ 2 \ 3}}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры лептино

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}.$$

В результате пространственная часть волновой функции лептино имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_a \psi^a + \mathbf{e}_{\langle ab \rangle} \psi^{\langle ab \rangle} + \mathbf{e}_{\langle 123 \rangle} \psi^{\langle 123 \rangle}.$$

В развернутом виде условия соседней перестановки для принятого обозначения геометрических базисных векторов записываются так:

$$\begin{aligned} \kappa_2 \circ \kappa_1 &= \kappa_1 \circ \kappa_2, \\ \kappa_1 \circ \kappa_3 &= \kappa_3 \circ \kappa_1, \\ \kappa_3 \circ \kappa_2 &= \kappa_2 \circ \kappa_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Перепишем волновую функцию лептино с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

Получим

$$\begin{aligned} \psi &= \kappa_{32} \psi^{32} + \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_0 \psi^0 + \\ &+ \kappa_1 \psi^1 + \kappa_2 \psi^2 + \kappa_3 \psi^3 + \kappa_{123} \psi^{123} \end{aligned} \tag{2}$$

или в компактной записи

$$\psi = \kappa_A \psi^A,$$

где индекс  $A$  принимает значения

$$A \sim (32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

Алгебру, включающую перестановочные соотношения (1) и указанный порядок индексов, поставим в соответствие лептино первого поколения и будем обозначать  $\mathbb{C}^s(1)$ .



1.2. Алгебра действия лептино второго поколения

В соответствии с Разделом IV.3 Главы 3.4 волновая функция лептино второго поколения определена следующей диаграммой Юнга:

$$\overrightarrow{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры лептино

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}.$$

В результате пространственная часть волновой функции лептино имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_a \psi^a + \mathbf{e}_{(ab)} \psi^{(ab)} + \mathbf{e}_{(312)} \psi^{(312)}.$$

В развернутом виде условия соседней перестановки для принятого обозначения геометрических базисных векторов записываются так:

$$\begin{aligned} \kappa_2 \circ \kappa_1 &= \kappa_1 \circ \kappa_2, \\ \kappa_1 \circ \kappa_3 &= \kappa_3 \circ \kappa_1, \\ \kappa_3 \circ \kappa_2 &= \kappa_2 \circ \kappa_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Перепишем волновую функцию лептино с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(21, 32, 13, 0, 3, 1, 2, 312).$$

Получим

$$\begin{aligned} \psi &= \kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_{32} \psi^{32} + \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_0 \psi^0 + \\ &+ \kappa_3 \psi^3 + \kappa_1 \psi^1 + \kappa_2 \psi^2 + \kappa_{312} \psi^{312} \end{aligned} \quad (4)$$

или в компактной записи

$$\psi = \kappa_A \psi^A,$$

где индекс  $A$  принимает значения

$$A \sim (21, 32, 13, 0, 3, 1, 2, 312).$$

Алгебру, включающую условия соседней перестановки (3) и указанный порядок индексов, поставим в соответствие лептино второго поколения и будем обозначать  $\mathbb{C}^s(2)$ .

1.3. Алгебра действия лептино третьего поколения

В соответствии с Разделом IV.3 Главы 3.4 волновая функция лептино третьего поколения определена следующей диаграммой Юнга:

$$\overrightarrow{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры лептино

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}.$$

В результате пространственная часть волновой функции лептино имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0 \psi^0 + \mathbf{e}_a \psi^a + \mathbf{e}_{(ab)} \psi^{(ab)} + \mathbf{e}_{(312)} \psi^{(312)}.$$

В развернутом виде условия соседней перестановки для принятого обозначения геометрических базисных векторов записываются так:

$$\begin{aligned} \kappa_2 \circ \kappa_1 &= \kappa_1 \circ \kappa_2, \\ \kappa_1 \circ \kappa_3 &= \kappa_3 \circ \kappa_1, \\ \kappa_3 \circ \kappa_2 &= \kappa_2 \circ \kappa_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Перепишем волновую функцию лептино с учетом принятого переобозначения базисных векторов и принятого порядка индексов слагаемых компонент вектора  $\psi$

$$(13, 21, 32, 0, 2, 3, 1, 231).$$

Получим

$$\begin{aligned} \psi &= \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_{32} \psi^{32} + \kappa_0 \psi^0 + \\ &+ \kappa_2 \psi^2 + \kappa_3 \psi^3 + \kappa_1 \psi^1 + \kappa_{231} \psi^{231} \end{aligned} \quad (6)$$

или в компактной записи

$$\psi = \kappa_A \psi^A,$$

где индекс  $A$  принимает значения

$$A \sim (13, 21, 32, 0, 2, 3, 1, 231).$$

Алгебру, включающую условия соседней перестановки (5) и указанный порядок индексов, поставим в соответствие лептино третьего поколения и будем обозначать  $\mathbb{C}^s(3)$ .

Алгебры  $\mathbb{C}^s(1)$ ,  $\mathbb{C}^s(2)$ ,  $\mathbb{C}^s(3)$ , поставленные в соответствие трем поколениям лептино, содержат коммутативные соседние перестановки геометрических базисных векторов. Следует ожидать, что это совпадение приведет к совпадению ряда динамических характеристик поколений лептино.

От алгебры  $\mathbb{C}^s(1)$  можно перейти к алгебре  $\mathbb{C}^s(2)$  и затем к алгебре  $\mathbb{C}^s(3)$ , выполняя циклическую перестановку индексов 1, 2, 3, нумерующих компоненты геометрического вектора. Таким образом, переход от волновых функций лептино одного поколения к волновым функциям лептино других поколений осуществляется циклической перестановкой индексов, нумерующих компоненты геометрического вектора. При этом само число поколений лептино равно размерности геометрического пространства, то есть трем. Здесь необходимо вспомнить, что переход от волновых функций лептонов, кварков и кваркино одного

поколения к волновым функциям лептонов, кварков и кваркино других поколений осуществляется циклической перестановкой индексов, нумерующих компоненты геометрического вектора, а само число поколений лептонов, кварков и кваркино равно размерности геометрического пространства. Таким образом, мы имеем единую точку зрения, объясняющую как существование поколений фундаментальных частиц, так и их число. Наличие такой точки зрения является необходимым условием построения единой теории взаимодействий.

## 2. Алгебра действия нижних и верхних лептино

Здесь необходимо вспомнить ситуацию, с которой мы столкнулись при описании лептонов. В Главе 4.2. Раздел X. мы установили, что алгебра Клиффорда  $\mathbb{C}_3$  является алгеброй действия лептонов одного поколения. Наши рассуждения включали два этапа. Сначала мы обобщили алгебру  $\mathbb{C}_3$  до алгебры релятивистских лептонов  $\mathbb{C}_4$ , а затем записали квантовое уравнение для этой алгебры. Оказалось, что уравнение распадается на две независимые системы уравнений, одна из которых относится к верхнему, а другая к нижнему лептонам одного поколения. Если допустить единую точку зрения на алгебраическую структуру фундаментальных частиц, то нужно считать, что алгебра лептино  $\mathbb{C}_3^s$  является алгеброй действия лептино одного поколения, причем после того, как алгебра  $\mathbb{C}_3^s$  будет обобщена до алгебры релятивистских лептино  $\mathbb{C}_4^s$  и для нее будут записаны квантовые уравнения, возможны два варианта указанных уравнений.

Первый – эти уравнения распадутся на две независимых системы уравнений. В этом случае одна из систем относится к верхней фундаментальной частице рассматриваемого поколения, а другая к нижней частице этого поколения.

Второй – квантовые уравнения не распадутся на две независимых системы уравнений. В этом случае поколение представлено одной частицей.

Наличие такой точки зрения на алгебраическую структуру фундаментальных частиц одного поколения является весьма желательным с позиции *единого* подхода к фундаментальным частицам. Именно эту точку зрения мы проводим, постулируя вышеуказанное соответствие алгебр и поколений лептино.

## III. АЛГЕБРА ЛЕПТИНО ( $\mathbb{C}^s, \mathbb{X}_\mathbb{C}^s$ )

Итак, коммутативная алгебра ( $\mathbb{C}^s, \mathbb{X}_\mathbb{C}^s$ ) есть алгебра действия и алгебра пространства-времени гипотетических фундаментальных частиц – лептино. Укажем базисные векторы коммутативной алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\kappa_0$  – базисный вектор скалярной части векторов. Этот базисный вектор ничем не отличается от

соответствующего вектора  $\varepsilon_0$  алгебры  $\mathbb{C}$ . Однако мы используем другое обозначение для того, чтобы подчеркнуть принадлежность этого вектора другой алгебре. Для  $\kappa_0$  имеет место правило умножения

$$\kappa_0 \circ \kappa_0 = \kappa_0.$$

- Образующие векторы  $\kappa_a$ , где индекс  $a$  пробегает значения от 1 до 3. Нужно иметь в виду, что образующее пространство для алгебр  $\mathbb{C}_3^s$  и  $\mathbb{C}_3$  одинаково. Поэтому векторы  $\kappa_a$  совпадают с векторами  $\varepsilon_a$ . Число векторов  $\kappa_a$  равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\kappa_a \circ \kappa_0 = \kappa_0 \circ \kappa_a = \kappa_a.$$

$$\kappa_a \circ \kappa_a = \text{sign}(\kappa_a)^2 \cdot \kappa_0,$$

где

$$\text{sign}(\kappa_1)^2 = \text{sign}(\kappa_2)^2 = \text{sign}(\kappa_3)^2 = 1.$$

- Векторы

$$\kappa_{ab} = \kappa_a \circ \kappa_b.$$

Здесь  $a \neq b$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$\mathbb{C}_3^2 = 3.$$

Для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и соответственно сомножителей – условие коммутативности (условия коммутативности соседней перестановки)

$$\kappa_{ab} = \kappa_{ba}.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и коммутативности. В частности,

$$\begin{aligned} \kappa_{ab} \circ \kappa_{ab} &= \kappa_a \circ (\kappa_b \circ \kappa_b) \circ \kappa_a = \\ &= \text{sign}(\kappa_a)^2 \cdot \text{sign}(\kappa_b)^2 \cdot \kappa_0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\kappa_{21} \circ \kappa_{21} = \kappa_0, \quad \kappa_{32} \circ \kappa_{32} = \kappa_0, \quad \kappa_{13} \circ \kappa_{13} = \kappa_0.$$

- Векторы

$$\kappa_{abc} = \kappa_a \circ \kappa_b \circ \kappa_c.$$

Здесь

$$a \neq b, a \neq c, b \neq c.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из трех элементов по три

$$C_3^3 = 1.$$

Очевидно, что при перестановке индексов в виду коммутативности сомножителей знак не меняется:

$$\kappa_{abc} = \kappa_{bca} = \kappa_{cab} = \kappa_{bac} = \kappa_{acb} = \kappa_{cba}.$$

Из указанных законов также следует

$$\begin{aligned} \kappa_{abc} \circ \kappa_{abc} &= \kappa_a \circ (\kappa_b \circ (\kappa_c \circ \kappa_c) \circ \kappa_b) \circ \kappa_a = \\ &= \text{sign}(\kappa_a)^2 \cdot \text{sign}(\kappa_b)^2 \cdot \text{sign}(\kappa_c)^2 \cdot \kappa_0. \end{aligned}$$

Откуда

$$\kappa_{123} \circ \kappa_{123} = \kappa_0.$$

Как обычно в случае, когда необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства коммутативной алгебры, будем использовать обозначение  $\mathbb{C}_3^s$  вместо обозначения  $\mathbb{C}^s$ . Это особенно полезно при выделении подалгебры. Так подалгебру с двумя образующими базисными векторами (например,  $\kappa_1, \kappa_2$ ), удобно обозначать  $\mathbb{C}_2^s$ .

### 1. Деление в алгебре $\mathbb{C}^s$

В алгебре  $\mathbb{C}^s$  определено деление. Рассмотрим вычисление обратного вектора на примере алгебры  $\mathbb{C}_2^s$ , построенной на базисных векторах  $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{21}$ . Для вектора

$$\mathbf{x} = \kappa_0 x^0 + \kappa_1 x^1 + \kappa_2 x^2 + \kappa_{21} x^{21}$$

определим обратный вектор

$$\mathbf{x}^{-1} = \kappa_0 (x^{-1})^0 + \kappa_1 (x^{-1})^1 + \kappa_2 (x^{-1})^2 + \kappa_{21} (x^{-1})^{21}$$

из условия

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} = \kappa_0.$$

Сделаем это в два этапа. Сначала определим вектор

$$\mathbf{x}' = \kappa_0 (x')^0 + \kappa_1 (x')^1 + \kappa_2 (x')^2 + \kappa_{21} (x')^{21}$$

из условия

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x}' \in \mathbb{R}.$$

В левой части этого выражения имеем вектор

$$\begin{aligned} &\kappa_0 x^0 (x')^0 + \kappa_1 x^0 (x')^1 + \kappa_2 x^0 (x')^2 + \kappa_{21} x^0 (x')^{21} + \\ &+ \kappa_1 x^1 (x')^0 + \kappa_0 x^1 (x')^1 + \kappa_{21} x^1 (x')^2 + \kappa_2 x^1 (x')^{21} + \\ &+ \kappa_2 x^2 (x')^0 + \kappa_{21} x^2 (x')^1 + \kappa_0 x^2 (x')^2 + \kappa_1 x^2 (x')^{21} + \\ &+ \kappa_{21} x^{21} (x')^0 + \kappa_2 x^{21} (x')^1 + \kappa_1 x^{21} (x')^2 + \kappa_0 x^{21} (x')^{21}. \end{aligned}$$

Принятое условие равносильно решению системы уравнений

$$\begin{aligned} x^0 (x')^1 + x^1 (x')^0 + x^{21} (x')^2 + x^1 (x')^{21} &= 0, \\ x^{21} (x')^1 + x^2 (x')^0 + x^0 (x')^2 + x^1 (x')^{21} &= 0, \\ x^2 (x')^1 + x^{21} (x')^0 + x^1 (x')^2 + x^0 (x')^{21} &= 0. \end{aligned}$$

Так как число уравнений меньше числа неизвестных, можно положить  $(x')^0 = x^0$ . В результате получим

$$(x')^1 = -x^1 \frac{(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^{21})^2 - \frac{2x^0 x^2 x^{21}}{x^1}}{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^{21})^2 + \frac{2x^1 x^2 x^{21}}{x^0}},$$

$$(x')^2 = -x^2 \frac{(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^{21})^2 - \frac{2x^0 x^1 x^{21}}{x^2}}{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^{21})^2 + \frac{2x^1 x^2 x^{21}}{x^0}},$$

$$(x')^{21} = -x^{21} \frac{(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^{21})^2 - \frac{2x^0 x^1 x^2}{x^{21}}}{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^{21})^2 + \frac{2x^1 x^2 x^{21}}{x^0}}.$$

Для обратного вектора имеем

$$\mathbf{x}^{-1} = \frac{\kappa_0 x^0 + \kappa_1 (x')^1 + \kappa_2 (x')^2 + \kappa_{21} (x')^{21}}{(x^0)^2 + x^1 (x')^1 + x^2 (x')^2 + x^{21} (x')^{21}}.$$

### 2. Структурные матрицы коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^s$

Далее будем отталкиваться от Раздела I. Главы 4.2. Для алгебры Клиффорда вследствие антикоммутативности умножения целесообразно ввести два умножения – правое и левое. Правой и левой разновидностям алгебры Клиффорда соответствуют правые и левые структурные матрицы, правые и левые динамические параметры. Вследствие некоммутативности умножения правые и левые динамические параметры лептонов существенно различны.

В отличие от алгебры Клиффорда (алгебры лептонов) в коммутативной алгебре  $\mathbb{C}^s$  (алгебре лептино) правое и левое умножения идентичны. Поэтому законы умножения

$$\kappa_K \circ \kappa_I = \kappa_L \cdot {}_r C_{KI}^L \tag{7}$$

и

$$\kappa_I \circ \kappa_K = \kappa_L \cdot {}_l C_{KI}^L \tag{8}$$

эквивалентны, а

$${}_r C_{KI}^L = {}_l C_{KI}^L.$$

Таким образом, контравариантная коммутативная алгебра  $\mathbb{C}^s$  не разделяется на две модификации – правую и левую. Поэтому для лептино правые и левые

динамические параметры совпадают с точностью до постоянного множителя.

При описании *антилептино* необходимо перейти от контравариантной коммутативной алгебры  $\mathbb{C}^s$  к ковариантной (сопряженной) коммутативной алгебре  $\mathbb{C}^{s*}$ . Базисные векторы ковариантной алгебры  $\mathbb{C}^{s*}$  обозначены через  $K^I$ . В этих обозначениях закон умножения в ковариантной (сопряженной) коммутативной алгебре  $\mathbb{C}^{s*}$  записывается либо

$$K^K \circ K^I = {}_r C^{IK}_L K^L, \quad (9)$$

либо

$$K^I \circ K^K = {}_l C^{IK}_L K^L. \quad (10)$$

Оба закона эквивалентны, так как в силу коммутативности умножения

$${}_r C^{IK}_L = {}_l C^{IK}_L.$$

Поскольку для нерелятивистской коммутативной алгебры

$$g^{IK} = \delta^{IK},$$

структурные матрицы  $C^L_{KI}$  контравариантной коммутативной алгебры  $\mathbb{C}^s_3$  и структурные матрицы  $C^{IK}_L$  ковариантной (сопряженной) коммутативной алгебры  $\mathbb{C}^{s*}_3$  совпадают. Отсюда следует, что в нерелятивистском приближении лептино и антилептино – это одна и та же частица.

Из вышесказанного следует, что в отличие от некоммутативных алгебр, для которых существует четыре набора структурных матриц, для коммутативной алгебры существует один набор структурных матриц.

Далее рассмотрим структурные матрицы, которыми представляются базисные векторы коммутативной алгебры  $\mathbb{C}^s$ :

$$\kappa_I \sim C^L_{KI}.$$

Номер структурной матрицы  $I$  есть индекс базисного вектора, который может быть представлен этой матрицей.

Из выражения (7) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно установить номер структурной матрицы ( $I$ ) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы ( $K$ ) проделать следующие вычисления. Базисный вектор  $\kappa_K$ , номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *справа* на базисный вектор  $\kappa_I$ , номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор  $\kappa_L$ , на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер ( $L$ ) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Теперь вычислим структурные матрицы  $C^L_{KI}$  алгебры  $\mathbb{C}^s_3$  по приведенному алгоритму для принятого раннее порядка индексов.

При преобразовании матриц  $C^L_{KI}$  от действительного представления к  $a$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}.$$

При преобразовании матриц  $C^L_{KI}$  от  $a$ -представления к  $A$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}.$$

$$\kappa_0 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 1 \\ \\ 1 \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 13 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 1 \\ \\ 1 \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \\ \mathbb{1} & \\ & \mathbb{1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \\ \mathbb{1} \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\kappa_1 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 13 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \\ & A \\ & A \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\kappa_2 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 13 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \\ & A \\ & A \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\kappa_3 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 32 & 21 & 1 & 2 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 13 & 0 & 123 \\ 13 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 2 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 123 \\ & \mathbb{1} \\ & \mathbb{1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\kappa_{21} \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \\ 52 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ 13 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ 21 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 1 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 2 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 3 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 123 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\kappa_{13} \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \\ 13 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 21 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ 1 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 2 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 3 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 123 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\kappa_{32} \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \\ 13 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 21 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ 1 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 2 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 3 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 123 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = a \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\kappa_{123} \sim \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 2 \quad 123 \\ 32 \quad 21 \quad 1 \quad 3 \\ 13 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 21 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ 1 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ 2 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 3 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ 123 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = I \begin{array}{c} 13 \quad 0 \quad 123 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

### 3. Действительное представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^s$

Действительное представление соответствует записи вектора  $\psi$  в следующем виде:

$$\psi = \kappa_{32} \psi^{32} + \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_0 \psi^0 + \kappa_1 \psi^1 + \kappa_2 \psi^2 + \kappa_3 \psi^3 + \kappa_{123} \psi^{123}.$$

В результате получим действительные структурные матрицы  $8 \times 8$  представления базисных векторов  $\kappa_K$  (см. Раздел III). Помимо действительного представления будем использовать  $a$ -представление и  $A$ -представление базисных векторов коммутативной алгебры, удобные в силу своей компактности.

### 4. $a$ -представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^s$

$a$ -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \kappa_{13} \circ (\kappa_{21} \psi^{32} + \kappa_0 \psi^{13}) + \kappa_0 \circ (\kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_0 \psi^0) + \kappa_2 \circ (\kappa_{21} \psi^1 + \kappa_0 \psi^2) + \kappa_{123} \circ (\kappa_{21} \psi^3 + \kappa_0 \psi^{123}).$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_3^s$  в виде произведения  $\mathbb{C}_2^s \times \mathbb{C}_1^s$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_2^s$  являются

$$\kappa_{13}, \quad \kappa_0, \quad \kappa_2, \quad \kappa_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_1^s$  являются

$$\kappa_{21}, \quad \kappa_0.$$

Пространство  $\mathbb{C}_1^s$  можно рассматривать как пространство  $a$ -чисел. Для этого базисному вектору  $\kappa_{21}$  алгебры  $\mathbb{C}_1^s$  поставим в соответствие  $a$ -единицу, имея в виду, что  $\text{sign}(\kappa_{21})^2 = 1$ , а базисному вектору  $\kappa_0$  алгебры  $\mathbb{C}_1^s$  поставим в соответствие действительную единицу

$$\kappa_{21} \sim a, \quad \kappa_0 \sim 1.$$

В результате получим вектор алгебры  $\mathbb{C}_3^s$  в  $a$ -представлении

$$\psi = \kappa_{13} \circ (a \psi^{32} + \psi^{13}) + \kappa_0 \circ (a \psi^{21} + \psi^0) + \kappa_2 \circ (a \psi^1 + \psi^2) + \kappa_{123} \circ (a \psi^3 + \psi^{123}). \quad (11)$$

Таким образом, в  $a$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= a \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= a \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^2 &= a \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= a \psi^3 + \psi^{123}. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_0 \psi^0 + \kappa_2 \psi^2 + \kappa_{123} \psi^{123}. \quad (13)$$

Отсюда видно, что в  $a$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\kappa_{13}, \kappa_0, \kappa_2, \kappa_{123}$ .

$a$ -представление базисных векторов дается структурными матрицами  $4 \times 4$  (см. Раздел III). Назовем базисный вектор  $\kappa_{21}$  *основным* в связи с тем положением, которое он занимает в  $a$ -представлении. С алгебраической точки зрения направления  $\kappa_{13}$  и  $\kappa_{32}$  эквивалентны направлению  $\kappa_{21}$  и также могут быть приняты за основное. Для того, чтобы отличить эти случаи от предыдущего, будем обозначать  $a$ -единицу через  $b$ , если за основное направление принят вектор  $\kappa_{13}$ , и обозначать  $a$ -единицу через  $c$ , если за основное направление принят вектор  $\kappa_{32}$ . Указанное выделение базисных векторов, участвующих в  $a$ -представлении, соответствует трем поколениям фундаментальных частиц – лептино.

### 5. $A$ -представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_3^s$

$A$ -представление подалгебры  $\mathbb{C}_3^s$  основано на разложении вектора

$$\psi = (\kappa_{32} \psi^{32} + \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_0 \psi^0) \circ \kappa_0 + (\kappa_{32} \psi^1 + \kappa_{13} \psi^2 + \kappa_{21} \psi^3 + \kappa_0 \psi^{123}) \circ \kappa_{123}.$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_3^s$  в виде произведения  $\mathbb{C}_1^s \times \mathbb{C}_2^s$ . Базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_1^s$  являются

$$\kappa_0, \quad \kappa_{123};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_2^s$  являются

$$\kappa_{32}, \quad \kappa_{13}, \quad \kappa_{21}, \quad \kappa_0.$$

$$\text{sign } \kappa_{32} = \text{sign } \kappa_{13} = \text{sign } \kappa_{21} = 1, \quad \text{sign } \kappa_0 = 1.$$

Последнюю алгебру назовем  $A$ -алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных векторов используем следующие обозначения:

$$a \cdot A, \quad 1 \cdot A, \quad a \cdot \mathbb{1}, \quad 1 \cdot \mathbb{1}.$$

Заменяем базисные векторы  $\kappa_{32}, \kappa_{13}, \kappa_{21}, \kappa_0$  гиперчислами

$$\begin{aligned} \kappa_{32} &\sim a A, \\ \kappa_{13} &\sim 1 A, \\ \kappa_{21} &\sim a \mathbb{1}, \\ \kappa_0 &\sim 1 \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{C}_3^s$  в  $A$ -представлении

$$\psi = (a A \psi^{32} + 1 A \psi^{13} + a \mathbb{1} \psi^{21} + 1 \mathbb{1} \psi^0) \circ \kappa_0 + (a A \psi^1 + 1 A \psi^2 + a \mathbb{1} \psi^3 + 1 \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \kappa_{123}.$$

Таким образом, в  $A$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a A \psi^{32} + 1 A \psi^{13} + a \mathbb{1} \psi^{21} + 1 \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{123} &= a A \psi^1 + 1 A \psi^2 + a \mathbb{1} \psi^3 + 1 \mathbb{1} \psi^{123}. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \Psi^0 \kappa_0 + \Psi^{123} \kappa_{123}.$$

Отсюда видно, что в  $A$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\kappa_0, \kappa_{123}$ .

$A$ -представление базисных векторов дается структурными матрицами  $2 \times 2$  (см. Раздел III).

### 6. Физический смысл коммутативности умножения

В этом Разделе покажем, что коммутативность умножения в алгебре  $\mathbb{C}^s$  инициируется определенным движением в образующем пространстве. Однако, прежде чем рассмотреть коммутативную алгебру  $\mathbb{C}^s$ , обратимся к алгебре Клиффорда  $\mathbb{C}$  и попытаемся выяснить смысл антикоммутативности умножения в этой алгебре, а затем приведем аналогичные соображения для коммутативной алгебры  $\mathbb{C}^s$ .

Рассмотрим алгебру Клиффорда, образующим пространством которой является плоскость, натянутая на базисные векторы

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2.$$

Для них выполняется

$$(\varepsilon_1)^2 = \varepsilon_0, \quad (\varepsilon_2)^2 = \varepsilon_0.$$

Произведение образующих базисных векторов определяет базисный вектор

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_1 \circ \varepsilon_2.$$

Для алгебры Клиффорда это произведение антикоммутативно, то есть меняет знак при перестановке сомножителей:

$$\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 = -\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1.$$

Умножение в рассматриваемой алгебре будем записывать следующим образом:

$$\varepsilon_K \circ \varepsilon_I = \varepsilon_L C^L_{KI}.$$

В соответствии с регулярным представлением каждому базисному вектору можно поставить в соответствие структурную матрицу. В частности, базисному вектору  $\varepsilon_{12}$  в плоскости  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  можно поставить в соответствие матрицу

$$\varepsilon_{12} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline & 1 \\ \hline -1 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

Отрицательный знак перед единицей в последнем ряду является следствием антикоммутативности умножения.

Можно представить себе, что вышеприведенная матрица генетически связана с матрицей поворота в плоскости  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$$\mathbf{U}(\varphi) \sim \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline \cos \varphi & \sin \varphi & 1 \\ \hline -\sin \varphi & \cos \varphi & 2 \\ \hline \end{array}.$$

А именно матрица представления базисного вектора  $\varepsilon_{12}$  есть генератор группы поворотов

$$\varepsilon_{12} \sim K_{\varphi} = \frac{dU}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline & 1 \\ \hline -1 & \end{array} \\ 2 \end{array} .$$

Таким образом, приведенные соображения связывают антикоммутативность умножения в алгебре Клиффорда с круговыми поворотами в плоскостях образующего пространства. Отсюда становится понятным удобство алгебры Клиффорда при описании поворотов. Повороты уже запечатлены в алгебре Клиффорда с помощью антикоммутативности умножения.

Поэтому оператор

$$\varepsilon^{12} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

представляет собой оператор круговых поворотов в образующем пространстве (собственном пространстве-времени лептона). Применяя этот оператор к вектору действия, получим собственный момент импульса лептона, или его *спин*.

Рассмотрев таким образом алгебру Клиффорда, обратимся к коммутативной алгебре. Рассмотрим коммутативную алгебру  $\mathbb{C}^s$ , образующим пространством которой является плоскость, натянутая на базисные векторы

$$\kappa_1, \quad \kappa_2 .$$

Для них выполняется

$$(\kappa_1)^2 = \kappa_0, \quad (\kappa_2)^2 = \kappa_0 .$$

Произведение образующих базисных векторов определяет базисный вектор

$$\kappa_{12} = \kappa_1 \circ \kappa_2 .$$

Для коммутативной алгебры это произведение коммутативно, то есть не меняет знак при перестановке сомножителей

$$\kappa_1 \circ \kappa_2 = \kappa_2 \circ \kappa_1 .$$

Умножение в рассматриваемой алгебре будем записывать следующим образом:

$$\kappa_K \circ \kappa_I = \kappa_L C^L_{KI} .$$

В соответствии с регулярным представлением каждому базисному вектору можно поставить в соответствие структурную матрицу. В частности, базисному вектору  $\kappa_{12}$  в плоскости  $(\kappa_1, \kappa_2)$  можно поставить в соответствие матрицу

$$\kappa_{12} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \\ 2 \end{array} .$$

Положительные знаки перед единицами являются следствием коммутативности умножения.

Можно представить себе, что вышеприведенная матрица генетически связана с матрицей *гиперболического* поворота в плоскости  $(\kappa_1, \kappa_2)$

$$U(\psi) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline \cosh \psi & \sinh \psi \\ \hline \sinh \psi & \cosh \psi \end{array} \\ 2 \end{array} .$$

А именно матрица представления базисного вектора  $\kappa_{12}$  есть генератор группы гиперболических поворотов

$$\kappa_{12} \sim K_{\psi} = \frac{dU}{d\psi} \Big|_{\psi=0} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \\ 2 \end{array} .$$

Таким образом, приведенные соображения связывают коммутативность умножения в алгебре  $\mathbb{C}^s$  с гиперболическими поворотами в плоскостях образующего пространства.<sup>1</sup>

Поэтому оператор

$$\kappa^{12} \frac{\partial}{\partial \psi}$$

представляет собой оператор гиперболических поворотов в образующем пространстве (собственном пространстве-времени лептино). Применяя этот оператор к вектору действия, получим новый динамический параметр, аналогичный спину лептонов. Этот параметр в свое время был назван нами *инерцией*. Таким образом, необходимо положить, что для лептино, то есть частиц, векторы действия и векторы пространства-времени которых составляют коммутативную алгебру, спин равен нулю, а его место занимает новый, в некотором смысле симметричный спину динамический параметр – *инерция*.

#### IV. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Одним из возможных путей обобщения алгебры Клиффорда является отказ от антикоммутативности умножения.
- Коммутативной алгебре действия и пространства-времени  $\mathbb{C}^s$  ставятся в соответствие гипотетические фундаментальные частицы – *лептино*.
- В нерелятивистском приближении лептино и антитептино – это одна и та же частица.
- В геометрическом пространстве лептино отсутствуют круговые повороты. Вместо них имеют место гиперболические повороты (вместо движений по окружности имеют место движения по гиперболе). Оператору гиперболических поворотов в образующем пространстве (собственном пространстве-времени лептино) соответствует новый динамический параметр, аналогичный

<sup>1</sup> Движение точки по гиперболе можно рассматривать как результат падения точки на отталкивающий центр.

спину лептонов. Этот параметр назван *инерцией*. Таким образом, для лептино (то есть, для частиц, векторы действия и векторы пространства-времени которых составляют коммутативную алгебру), спин равен нулю, а его место занимает новый, в некотором смысле симметричный спину динамический параметр – *инерция*.

- Из алгебраической структуры векторов действия лептино следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений этих частиц. В общем случае нет оснований считать, что квантовые явления с участием лептино определяются постоянной Планка, а не другой постоянной величиной, имеющей размерность действия.



# Глава 4.16 Черные лептино. Алгебра действия черных лептино $\mathbb{C}_b^s$

## 1. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЛЕПТИНО И ЦВЕТ

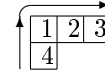
В этой Главе продолжаем рассматривать алгебру лептино. Напомним, что логика рассуждений, основанная на суперсимметрии фермионной и бозонной ветвей дерева Юнга, заставляет ввести в рассмотрение гипотетические фундаментальные частицы, суперсимметричные лептонам, названные *лептино*. Эта же логика заставляет ввести цветовые разновидности лептино, причем цветовым разновидностям лептино ставятся в соответствие разновидности условий соседней перестановки с участием базисного вектора времени. Квантовые уравнения для релятивистских лептино устанавливаются на основании того же алгоритма, из которого ранее было получено обобщение уравнения Дирака для лептонов. Эти уравнения относятся к лептино одного поколения. В том случае, если в стандартном представлении эти уравнения разделяются на две независимые системы уравнений, одна из систем относится к верхнему лептино, а другая к нижнему. В том случае, если в стандартном представлении эти уравнения не разделяются на две независимые системы уравнений, каждое поколение лептино представлено одной частицей.

Прежде чем обратиться к алгебре релятивистских лептино  $\mathbb{C}_4^s$ , напомним следующее. В соответствии с суперсимметрией каждый из лептино существует в двух разновидностях. Отличительное свойство этих разновидностей названо *цветом*, а лептино в указанных разновидностях обозначены как *черный* и *белый*. Цветовая симметрия имеет под собой алгебраическую основу, а именно алгебра релятивистских лептино  $\mathbb{C}_4^s$  представлена двумя вариантами, каждый из которых базируется на одной и той же алгебре  $\mathbb{C}_3^s$ . Для того чтобы получить варианты релятивистской алгебры  $\mathbb{C}_4^s$ , предстоит расширить образующее пространство, заменив геометрическое пространство на пространство-время СТО. Иными словами, мы должны ввести координату времени, базисный вектор  $\kappa_4$  и записать условия соседней перестановки этого базисного вектора с геометрическими базисными векторами  $\kappa_a$ . Именно с разновидностями указанных условий соседней перестановки связаны цветовые разновидности лептино.

### 1. Алгебры цветных лептино первого поколения $\mathbb{C}^s(1)$

#### 1.1. Алгебра черных лептино первого поколения $\mathbb{C}^s(1)_b$

В соответствии с Разделом IV.4. Главы 3.4. волновая функция лептино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

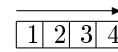
$$\begin{aligned} 12 &= 21, & 13 &= 31, & 23 &= 32, \\ 14 &= -41, & 24 &= 42, & 34 &= 43. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \kappa_1 \circ \kappa_4 &= -\kappa_4 \circ \kappa_1, \\ \kappa_2 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_2, \\ \kappa_3 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_3. \end{aligned}$$

#### 1.2. Алгебра белых лептино первого поколения $\mathbb{C}^s(1)_w$

В соответствии с Разделом IV.4. Главы 3.4. волновая функция лептино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} 12 &= 21, & 13 &= 31, & 23 &= 32, \\ 14 &= 41, & 24 &= 42, & 34 &= 43. \end{aligned}$$

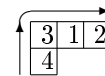
Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \kappa_1 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_1, \\ \kappa_2 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_2, \\ \kappa_3 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_3. \end{aligned}$$

## 2. Алгебры цветных лептино второго поколения $\mathbb{C}^s(2)$

### 2.1. Алгебра черных лептино второго поколения $\mathbb{C}^s(2)_b$

В соответствии с Разделом IV.4. Главы 3.4. волновая функция лептино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned} 12 &= 21, & 13 &= 31, & 23 &= 32, \\ 14 &= 41, & 24 &= 42, & 34 &= -43. \end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\kappa_1 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_1, \\ \kappa_2 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_2, \\ \kappa_3 \circ \kappa_4 &= -\kappa_4 \circ \kappa_3.\end{aligned}$$

### 2.2. Алгебра белых лептино второго поколения $\mathbb{C}^s(2)_w$

В соответствии с Разделом IV.4. Главы 3.4. волновая функция лептино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:

$$\overrightarrow{\boxed{3 \mid 1 \mid 2 \mid 4}}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned}\mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}.\end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\kappa_1 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_1, \\ \kappa_2 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_2, \\ \kappa_3 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_3.\end{aligned}$$

## 3. Алгебры цветных лептино третьего поколения $\mathbb{C}^s(3)$

### 3.1. Алгебра черных лептино третьего поколения $\mathbb{C}^s(3)_b$

В соответствии с Разделом IV.4. Главы 3.4. волновая функция лептино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:

$$\overrightarrow{\boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 4 & & \end{array}}}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned}\mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= -\mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}.\end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\kappa_1 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_1, \\ \kappa_2 \circ \kappa_4 &= -\kappa_4 \circ \kappa_2, \\ \kappa_3 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_3.\end{aligned}$$

### 3.2. Алгебра белых лептино третьего поколения $\mathbb{C}^s(3)_w$

В соответствии с Разделом IV.4. Главы 3.4. волновая функция лептино в этом случае определена следующей диаграммой Юнга:

$$\overrightarrow{\boxed{2 \mid 3 \mid 1 \mid 4}}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\begin{aligned}\mathbf{12} &= \mathbf{21}, & \mathbf{13} &= \mathbf{31}, & \mathbf{23} &= \mathbf{32}, \\ \mathbf{14} &= \mathbf{41}, & \mathbf{24} &= \mathbf{42}, & \mathbf{34} &= \mathbf{43}.\end{aligned}$$

Запишем условия соседней перестановки с участием базисного вектора времени в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\kappa_1 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_1, \\ \kappa_2 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_2, \\ \kappa_3 \circ \kappa_4 &= \kappa_4 \circ \kappa_3.\end{aligned}$$

Далее в этой Главе рассматривается только алгебра черных лептино первого поколения  $\mathbb{C}^s(1)_b$ . Имеется в виду, что переход к алгебрам черных лептино других поколений очевиден. Алгебра белых лептино первого поколения  $\mathbb{C}^s(1)_w$  рассматривается в Главе 4.17.

## II. АЛГЕБРА ЧЕРНЫХ ЛЕПТИНО $\mathbb{C}^s(1)_b$

### 1. Базисные векторы и их произведения

Укажем базисные векторы алгебры  $\mathbb{C}^s(1)_b$  и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\kappa_0$  – базисный вектор скалярной части вектора. Для  $\kappa_0$  имеет место правило умножения

$$\kappa_0 \circ \kappa_0 = \kappa_0.$$

- Образующие векторы  $\kappa_i$ , где индекс  $i$  пробегает значения от 1 до 4, есть базисные векторы пространства-времени СТО. Число векторов  $\kappa_i$  равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\kappa_i \circ \kappa_0 = \kappa_0 \circ \kappa_i = \kappa_i.$$

$$\kappa_i \circ \kappa_i = \text{sign}(\kappa_i)^2 \cdot \kappa_0,$$

где

$$\text{sign}(\kappa_1)^2 = \text{sign}(\kappa_2)^2 = \text{sign}(\kappa_3)^2 = -\text{sign}(\kappa_4)^2 = 1.$$

- Векторы

$$\kappa_{ik} = \kappa_i \circ \kappa_k.$$

Здесь  $i \neq k$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6.$$

В соответствии с Разделом I. для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей (условия соседней перестановки)

$$\begin{aligned} \kappa_{21} &= \kappa_{21}, & \kappa_{13} &= \kappa_{31}, & \kappa_{32} &= \kappa_{23}, \\ \kappa_{14} &= -\kappa_{41}, & \kappa_{24} &= \kappa_{42}, & \kappa_{34} &= \kappa_{43}. \end{aligned}$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и условия соседней перестановки. В частности, имеем

$$\begin{aligned} \kappa_{21} \circ \kappa_{21} &= \kappa_0, & \kappa_{42} \circ \kappa_{42} &= -\kappa_0, \\ \kappa_{32} \circ \kappa_{32} &= \kappa_0, & \kappa_{14} \circ \kappa_{14} &= \kappa_0, \\ \kappa_{13} \circ \kappa_{13} &= \kappa_0, & \kappa_{34} \circ \kappa_{34} &= -\kappa_0. \end{aligned}$$

• Векторы

$$\kappa_{ikl} = \kappa_i \circ \kappa_k \circ \kappa_l.$$

Здесь  $i \neq k, i \neq l, k \neq l$ . Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей, вытекающие из условий соседней перестановки

$$\begin{aligned} \kappa_{123} &= \kappa_{213} = \kappa_{231} = \kappa_{321} = \kappa_{312} = \kappa_{132}, \\ \kappa_{124} &= \kappa_{214} = -\kappa_{241} = -\kappa_{421} = -\kappa_{412} = \kappa_{142}, \\ \kappa_{134} &= \kappa_{314} = -\kappa_{341} = -\kappa_{431} = -\kappa_{413} = \kappa_{143}, \\ \kappa_{234} &= \kappa_{324} = \kappa_{342} = \kappa_{432} = \kappa_{423} = \kappa_{243}. \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\begin{aligned} \kappa_{123} \circ \kappa_{123} &= \kappa_0, & \kappa_{124} \circ \kappa_{124} &= \kappa_0, \\ \kappa_{134} \circ \kappa_{134} &= \kappa_0, & \kappa_{234} \circ \kappa_{234} &= -\kappa_0. \end{aligned}$$

• Вектор

$$\kappa_{1324} = \kappa_1 \circ \kappa_3 \circ \kappa_2 \circ \kappa_4.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и соответственно сомножителей,

вытекающие из условий соседней перестановки,

$$\begin{aligned} \kappa_{1234} &= \kappa_{2134} = \kappa_{2314} = \kappa_{3214} = \\ &= \kappa_{3124} = \kappa_{1324} = \kappa_{1243} = \kappa_{2143} = \\ &= -\kappa_{2413} = -\kappa_{4213} = -\kappa_{4123} = \kappa_{1423} = \\ &= \kappa_{1342} = \kappa_{3142} = -\kappa_{3412} = \kappa_{4312} = \\ &= -\kappa_{4132} = \kappa_{1432} = \kappa_{2341} = \kappa_{3241} = \\ &= \kappa_{3421} = \kappa_{4321} = \kappa_{4231} = \kappa_{2431}. \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности и условий соседней перестановки также следует

$$\kappa_{1324} \circ \kappa_{1324} = \kappa_0.$$

2. Структурные матрицы алгебр черных лептино

Приведем структурные матрицы двух алгебр: правой контравариантной алгебры черных лептино первого поколения  ${}_r(\mathbb{C}^s, \mathbb{X}_\mathbb{C}^s)_b$  и левой ковариантной алгебры черных лептино первого поколения  ${}_l(\mathbb{C}^s, \mathbb{X}_\mathbb{C}^s)_b^*$ . С использованием таких матриц записываются квантовые уравнения для рассматриваемых лептино.

Компоненты векторов и матриц рассматриваются в следующей последовательности индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

Переход от действительного представления к компактным представлениям осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C^{IK}_L$  от действительного представления к  $iab$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, & i &= \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}, \\ a &= \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, & b &= \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При преобразовании матриц  ${}_r C_{KI}^L$  и  ${}_l C^{IK}_L$  от  $iab$ -представления к  $IAB$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, & I &= \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \\ A &= \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$





$rK_{32} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32		1						
13		1						
21		1						
0	1							
42			1					
14			1					
1324			1					
34			1					
1					1			
2					1			
3					1			
123				1				
134							1	
234							1	
4							1	
124							1	

$= a$

	0	34	123	124
13	1			13
14	1			0
2		1		14
134			1	34
123				2
234				123
124				1

$= a$

	0	34	123	124
13	A			0
14	A			34
2		A		123
123			A	124

$rK_{42} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32			-1					
13			-1					
21			-1					
0			-1					
42		1						
14		1						
1324		1						
34	1							
1								-1
2								-1
3								-1
123								-1
134						1		
234						1		
4						1		
124						1		

$= a$

	0	34	123	124
13	-1			13
14	-1			0
2		1		14
134			1	34
123				2
234				123
124				1

$= a$

	0	34	123	124
13	-A			0
14	-A			34
2		A		123
123			A	124

$rK_{14} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32			1					
13			1					
21			1					
0			1					
42		1						
14		1						
1324	1							
34	1							
1							1	
2							1	
3							1	
123							1	
134				1				
234				1				
4				1				
124				1				

$= I$

	0	34	123	124
13	1			13
14	1			0
2		1		14
134			1	34
123				2
234				123
124				1

$= I$

	0	34	123	124
13	A			0
14	A			34
2		A		123
123			A	124

$rK_{34} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32			-1					
13			-1					
21			-1					
0			-1					
42	1							
14	1							
1324	1							
34	1							
1								-1
2								-1
3								-1
123								-1
134					1			
234					1			
4					1			
124					1			

$= I$

	0	34	123	124
13	-1			13
14	-1			0
2		1		14
134			1	34
123				2
234				123
124				1

$= I$

	0	34	123	124
13	-1			0
14	-1			34
2		1		123
123			1	124

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
32						1			
13						1			
21						1			
0						1			
42							-1		
14							-1		
1324								-1	
34									-1
1	-1								
2	-1								
3		-1							
123			-1						
134				1					
234					1				
4						1			
124							1		

$rK_{123} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
			1		
				1	
					-1
					-1
-1					
	-1				
					1
					1

$= I$

		0	34	123	124
				1	
					1

$= I$

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
32									1
13									1
21									1
0									1
42							1		
14							1		
1324								1	
34									1
1									
2									
3									
123									
134									
234									
4									
124									

$rK_{134} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
				1	
					1

$= a$

		0	34	123	124
				1	
					1

$= a$

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
32									1
13									1
21									1
0									1
42						1			
14						1			
1324							1		
34								1	
1									
2									
3									
123									
134	1								
234		1							
4									
124									1

$rK_{124} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
				1	
					1

$= I$

		0	34	123	124
				1	
					1

$= I$

		13	0	14	34	2	123	234	124
		32	21	42	1324	1	3	134	4
32									-1
13									-1
21									-1
0									-1
42							1		
14							1		
1324								1	
34									1
1									
2									
3									
123									
134									
234									
4									
124									

$rK_{234} \sim$

		0	34	123	124
13	14	2	134		
				-1	
					-1

$= I$

		0	34	123	124
				1	
					1

$= I$

2.2. Структурные матрицы левой ковариантной алгебры черных лептино первого поколения  ${}_1(C^s, X_C^s)_b^*$

$${}_r K_{1324} \sim \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} & & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ 1 & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$= a \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} & & 1 & \\ 1 & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{matrix} \end{matrix} = a \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 34 & 124 \\ 34 & 123 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} & & 1 & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

$${}_l K^0 \sim \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$= I \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} & & 1 & \\ 1 & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{matrix} \end{matrix} = I \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 34 & 124 \\ 34 & 123 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 124 \end{matrix} & \begin{matrix} & & 1 & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$







$${}_l K^{42} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 = i \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 = i \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \end{array}$$

$${}_l K^{123} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 = I \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 = I \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \end{array}$$

$${}_l K^{34} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 = b \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 = b \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \end{array}$$

$${}_l K^{124} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 = b \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \end{array} \\
 = b \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\ 32 & & & & & & & & 1 \\ 13 & & & & & & & & -1 \\ 21 & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ 42 & & & & & & & -1 & \\ 14 & & & & & & & 1 & \\ 1324 & & & & & & & 1 & \\ 34 & & & & & & & -1 & \\ 1 & & & & & & & -1 & \\ 2 & & & & & & & 1 & \\ 3 & & & & & & & 1 & \\ 123 & & & & & & & -1 & \\ 134 & & & & & & & 1 & \\ 234 & & & & & & & -1 & \\ 4 & & & & & & & -1 & \\ 124 & & & & & & & 1 & \end{matrix} \\
 & \sim \\
 & = i \begin{matrix} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & -1 \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & -1 \end{matrix} = i \begin{matrix} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & & & & I \\ & & & & -I \\ & & & & -I \\ & & & & I \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\ 32 & & & & & & & & 1 \\ 13 & & & & & & & & -1 \\ 21 & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ 42 & & & & & & & -1 & \\ 14 & & & & & & & 1 & \\ 1324 & & & & & & & 1 & \\ 34 & & & & & & & -1 & \\ 1 & & & & & & & -1 & \\ 2 & & & & & & & 1 & \\ 3 & & & & & & & & 1 \\ 123 & & & & & & & -1 & \\ 134 & & & & & & & 1 & \\ 234 & & & & & & & -1 & \\ 4 & & & & & & & -1 & \\ 124 & & & & & & & 1 & \end{matrix} \\
 & \sim \\
 & = i \begin{matrix} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \end{matrix} = i \begin{matrix} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & & & & -B \\ & & & & B \\ & & & & B \\ & & & & -B \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\ 32 & & & & & & & & 1 \\ 13 & & & & & & & & -1 \\ 21 & & & & & & & & -1 \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ 42 & & & & & & & -1 & \\ 14 & & & & & & & 1 & \\ 1324 & & & & & & & 1 & \\ 34 & & & & & & & -1 & \\ 1 & & & & & & & -1 & \\ 2 & & & & & & & 1 & \\ 3 & & & & & & & 1 & \\ 123 & & & & & & & -1 & \\ 134 & & & & & & & 1 & \\ 234 & & & & & & & -1 & \\ 4 & & & & & & & -1 & \\ 124 & & & & & & & 1 & \end{matrix} \\
 & \sim \\
 & = b \begin{matrix} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & 13 & 14 & 2 & 134 \\ & & & & -1 \\ & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & 1 \\ & & & & -1 \end{matrix} = b \begin{matrix} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ & & & & -I \\ & & & & I \\ & & & & I \\ & & & & -I \end{matrix}
 \end{aligned}$$

### 3. Действительное представление алгебры лептино $\mathbb{C}_4^s$

Структурные матрицы  ${}_{rC}L_{KI}$  в действительном представлении вычислены по алгоритму, приведенному в Разделе II. Главы 4.1, для принятого ранее порядка индексов. При этом слагаемые вектора  $\psi$  записываются в следующей последовательности:

$$\begin{aligned}
 \psi = & \kappa_{32} \psi^{32} + \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_0 \psi^0 + \\
 & + \kappa_{42} \psi^{42} + \kappa_{14} \psi^{14} + \kappa_{1324} \psi^{1324} + \kappa_{34} \psi^{34} + \\
 & + \kappa_1 \psi^1 + \kappa_2 \psi^2 + \kappa_3 \psi^3 + \kappa_{123} \psi^{123} + \\
 & + \kappa_{134} \psi^{134} + \kappa_{234} \psi^{234} + \kappa_4 \psi^4 + \kappa_{124} \psi^{124}.
 \end{aligned}$$

В результате получены действительные структурные матрицы

$${}_{rC}L_{KI} \sim {}_r\kappa_I$$

размерности  $16 \times 16$  (см. Раздел II.2). Помимо действительного представления воспользуемся  $iab$ -представлением.

#### 4. $iab$ -представление алгебры лептино $\mathbb{C}_4^s$

$iab$ -представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned} \psi &= \kappa_{13} \circ (\kappa_{21} \psi^{32} + \kappa_0 \psi^{13}) + \kappa_0 \circ (\kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_0 \psi^0) + \\ &+ \kappa_{14} \circ (\kappa_{21} \psi^{42} + \kappa_0 \psi^{14}) + \kappa_{34} \circ (\kappa_{21} \psi^{1324} + \kappa_0 \psi^{34}) + \\ &+ \kappa_2 \circ (\kappa_{21} \psi^1 + \kappa_0 \psi^2) + \kappa_{123} \circ (\kappa_{21} \psi^3 + \kappa_0 \psi^{123}) + \\ &+ \kappa_{234} \circ (\kappa_{21} \psi^{134} + \kappa_0 \psi^{234}) + \kappa_{124} \circ (\kappa_{21} \psi^4 + \kappa_0 \psi^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  в виде произведения  $\mathbb{C}_3^s \times \mathbb{C}_1^s$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_3^s$  являются

$$\kappa_{13}, \kappa_0, \kappa_{14}, \kappa_{34}, \kappa_2, \kappa_{123}, \kappa_{234}, \kappa_{124};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_1^s$  являются

$$\kappa_{21}, \kappa_0.$$

Поставим в соответствие базисному вектору  $\kappa_{21}$  алгебры  $\mathbb{C}_1^s$   $a$ -единицу, а базисному вектору  $\kappa_0$  действительную единицу. В результате вектор алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  в  $iab$ -представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= \kappa_{13} \circ (a \psi^{32} + \psi^{13}) + \kappa_0 \circ (a \psi^{21} + \psi^0) + \\ &+ \kappa_{14} \circ (a \psi^{42} + \psi^{14}) + \kappa_{34} \circ (a \psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ &+ \kappa_2 \circ (a \psi^1 + \psi^2) + \kappa_{123} \circ (a \psi^3 + \psi^{123}) + \\ &+ \kappa_{234} \circ (a \psi^{134} + \psi^{234}) + \kappa_{124} \circ (a \psi^4 + \psi^{124}). \end{aligned}$$

Таким образом, в  $iab$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются  $a$ -гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= a \psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= a \psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= a \psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= a \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= a \psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= a \psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= a \psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= a \psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_0 \psi^0 + \kappa_{14} \psi^{14} + \kappa_{34} \psi^{34} + \\ &+ \kappa_2 \psi^2 + \kappa_{123} \psi^{123} + \kappa_{234} \psi^{234} + \kappa_{124} \psi^{124}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в  $iab$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\kappa_{13}, \kappa_0, \kappa_{14}, \kappa_{34}, \kappa_2, \kappa_{123}, \kappa_{234}, \kappa_{124}$ .

В  $iab$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $8 \times 8$  (см. Раздел II.2).

#### 5. $IAB$ -представление алгебры лептино $\mathbb{C}_4^s$

$IAB$ -представление алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  основано на разложении вектора

$$\begin{aligned} \psi &= (\kappa_{32} \psi^{32} + \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_0 \psi^0) \circ \kappa_0 + \\ &+ (\kappa_{32} \psi^{42} + \kappa_{13} \psi^{14} + \kappa_{21} \psi^{1324} + \kappa_0 \psi^{34}) \circ \kappa_{34} + \\ &+ (\kappa_{32} \psi^1 + \kappa_{13} \psi^2 + \kappa_{21} \psi^3 + \kappa_0 \psi^{123}) \circ \kappa_{123} + \\ &+ (\kappa_{32} \psi^{134} + \kappa_{13} \psi^{234} + \kappa_{21} \psi^4 + \kappa_0 \psi^{124}) \circ \kappa_{124}. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  в виде произведения  $\mathbb{C}_2^s \times \mathbb{C}_2^s$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{C}_2^s$  являются

$$\kappa_0, \kappa_{34}, \kappa_{123}, \kappa_{124};$$

базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{C}_2^s$  являются

$$\kappa_{32}, \kappa_{13}, \kappa_{21}, \kappa_0.$$

Последнюю алгебру мы назвали  $IAB$ -алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц  $IAB$ -алгебры используем следующие обозначения:

$$a \cdot A, \quad 1 \cdot I, \quad a \cdot B, \quad 1 \cdot \mathbb{1}.$$

Заменяем базисные векторы  $\kappa_{32}, \kappa_{13}, \kappa_{21}, \kappa_0$  приведенными гиперчислами

$$\begin{aligned} \kappa_{32} &\sim a A, \\ \kappa_{13} &\sim 1 I, \\ \kappa_{21} &\sim a B, \\ \kappa_0 &\sim 1 \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Получим вектор алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  в  $IAB$ -представлении

$$\begin{aligned} \psi &= (a \cdot A \psi^{32} + 1 \cdot I \psi^{13} + a \cdot B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0) \circ \kappa_0 + \\ &+ (a \cdot A \psi^{42} + 1 \cdot I \psi^{14} + a \cdot B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}) \circ \kappa_{34} + \\ &+ (a \cdot A \psi^1 + 1 \cdot I \psi^2 + a \cdot B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}) \circ \kappa_{123} + \\ &+ (a \cdot A \psi^{134} + 1 \cdot I \psi^{234} + a \cdot B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}) \circ \kappa_{124}. \end{aligned}$$

Таким образом, в  $IAB$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a A \psi^{32} + 1 I \psi^{13} + a B \psi^{21} + \mathbb{1} \psi^0, \\ \Psi^{34} &= a A \psi^{42} + 1 I \psi^{14} + a B \psi^{1324} + \mathbb{1} \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= a A \psi^1 + 1 I \psi^2 + a B \psi^3 + \mathbb{1} \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= a A \psi^{134} + 1 I \psi^{234} + a B \psi^4 + \mathbb{1} \psi^{124}. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \Psi^0 \kappa_0 + \Psi^{34} \kappa_{34} + \Psi^{123} \kappa_{123} + \Psi^{124} \kappa_{124}.$$

Отсюда видно, что в  $IAB$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\kappa_0, \kappa_{34}, \kappa_{123}, \kappa_{124}$ .

В  $IAB$ -представлении структурные матрицы имеют размерность  $4 \times 4$  (см. Раздел II.2).

### III. КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ЛЕПТИНО

Согласно Главе 3.3, если действие некоторого объекта является алгеброй, то такому объекту присущи квантовые явления, а уравнение структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовый постулат. Обратимся к уравнению структуры для произвольной

правой алгебры действия (формула (35) Главы 3.3.). Запишем его следующим образом:

$$d_2 d_1 S^L = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot d_1 S^K \cdot d_2 S^I.$$

В этом уравнении введем обозначение

$$d_1 S^L = \psi^L.$$

Вектор  $\psi^L$  назван *волновой функцией* фундаментального объекта и отождествлен с волновой функцией, вводимой в квантовой теории фундаментального объекта. Кроме того, введем обозначение  $d$  для дифференциала  $d_2$ . Получим

$$d\psi^L = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot \psi^K \cdot dS^I.$$

Это соотношение представляет собой квантовый постулат в самом общем виде. Перепишем его иначе:

$$\frac{\partial \psi^L}{\partial x^M} = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot \frac{\partial S^I}{\partial x^M} \cdot \psi^K.$$

Далее учтем, что

$$\frac{\partial S^I}{\partial x^M} = -p^I_M.$$

Получим

$$\frac{\partial \psi^L}{\partial x^M} = -\frac{1}{S_0} {}_r C^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K. \quad (3)$$

Здесь  $p^I_M$  – координаты обобщенного импульса,  ${}_r C^L_{KI}$  – структурные постоянные правой алгебры действия,  $S_0$  – действительная постоянная величина, имеющая размерность действия. В Главе 4.3. мы ввели алгебру Клиффорда как алгебру действия и связали ее с лептонами. При этом постоянную величину  $S_0$  отождествлена с постоянной Планка. Если бы удалось найти несколько алгебр действия, то мы имели бы несколько объектов, подчиняющихся квантовым явлениям разного типа.

Теперь мы ввели новый объект – лептино, которым сопоставили свою алгебру действия и алгебру пространства-времени. Согласно предыдущему, лептино подчиняются своей квантовой теории. Уравнения (3) будут квантовыми постулатами для кваркино, если в них положить постоянные  ${}_r C^L_{KI}$  равными структурным постоянным алгебры лептино и установить значение  $S_0$ . При этом возникает вопрос: нужно ли связывать постоянную Планка только с лептонами и соответственно с алгеброй Клиффорда, а для алгебры лептино вводить другую постоянную с размерностью действия, или постоянная Планка является универсальной? А priori ответить на этот вопрос нельзя. Поэтому для лептино введем свою постоянную действия, значение которой предстоит установить, и обозначим ее через  $l$ .

Придадим соотношению (3) форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные постоянные  ${}_l C^{MN}_L$ . Получим

$${}_l C^{MN}_L \cdot \partial_M \psi^L(x) = -\frac{1}{l} {}_l C^{MN}_L \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K. \quad (4)$$

С нашей точки зрения, это уравнение и есть квантовое уравнение для лептино в самом общем виде. Далее, повторяя рассуждения Раздела III. Главы 4.5, запишем это уравнение при следующих ограничениях: дифференцирование выполняется только по координатам образующего пространства и условию, что в первом сжатом представлении коэффициент при волновой функции в правой части принимает вид

$$-\frac{m_d c}{p}.$$

Здесь  $m_d$  есть масса предполагаемого нижнего лептино. В результате получим следующее уравнение:

$${}_l C^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{1}{p} ({}_r C^N_{K0} p^0_0 + {}_r C^N_{K34} p^{34}_0) \cdot \psi^K. \quad (5)$$

При этом имеет место условие<sup>1</sup>

$$p^0_0 + p^{34}_0 = m_d c. \quad (6)$$

Разобьем величину  $(m_d c)$  между импульсами  $p^0_0$  и  $p^{34}_0$  в некоторой пропорции. Для этого положим

$$p^0_0 = \frac{m_d c}{2} \alpha, \quad p^{34}_0 = \frac{m_d c}{2} \beta.$$

Из выражения (6) имеем

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1. \quad (7)$$

Кроме того, положим

$$m_d \frac{\alpha - \beta}{2} = m_u. \quad (8)$$

Здесь  $m_u$  – масса предполагаемого верхнего лептино. После подстановки импульсов получим уравнение, аналогичное уравнению (8) Главы 4.5.

$${}_l C^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{m_d c}{2p} (\alpha \cdot {}_r C^N_{K0} + \beta \cdot {}_r C^N_{K34}) \cdot \psi^K. \quad (9)$$

Понятно, что здесь  ${}_r C^N_{K0} = \delta^N_K$  в отличие от  ${}_r C^N_{K34}$ .

### 1. Структурные матрицы алгебры черных лептино $\mathbb{C}_b^s$

Используя результаты Раздела II.2., приведем структурные матрицы алгебры  $\mathbb{C}_b^s$ , необходимые для построения квантового уравнения для свободных черных лептино.

<sup>1</sup> См. Раздел III. Главы 4.5.

$${}_i C^{4N}_L = i \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} -B \\ B \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} B \\ -B \end{array} & \end{array}, \quad {}_i C^{1N}_L = a \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} A \\ A \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} A \\ A \end{array} & \end{array},$$

$${}_i C^{2N}_L = i \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} A \\ A \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} A \\ A \end{array} & \end{array}, \quad {}_i C^{3N}_L = a \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \end{array}.$$

$${}_r C^{N}_{K0} = i \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \end{array}, \quad {}_r C^{N}_{K34} = i \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{array} & \end{array}.$$

## 2. Квантовое уравнение для черных лептино

Квантовое уравнение для свободных черных лептино получим, подставив в уравнение (9) вышеприведенные структурные матрицы. Для действительного регулярного представления алгебры черных лептино  $\mathbb{C}_b^s$  компоненты волновой функции  $\psi^K(x)$  представляют собой шестнадцать действительных функций. В  $iab$ -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (1). И в  $IAB$ -представлении компонентами волновой функции являются четыре  $IAB$ -функции вида (2). Приведем квантовое уравнение по отношению к  $IAB$ -компонентам волновой функции черных лептино:

$$\left( i \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} -B \\ B \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} B \\ -B \end{array} & \end{array} \partial_4 + a \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} A \\ A \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} A \\ A \end{array} & \end{array} \partial_1 + \right. \\ \left. + \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} A \\ A \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} A \\ A \end{array} & \end{array} \partial_2 + a \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 34 \\ 123 \end{array} & \begin{array}{c} 124 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \end{array} \partial_3 \right) \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{pmatrix} = \\ = -\frac{m_d c}{2l} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \\ & \alpha & -\beta \\ & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} i B \partial_4 \Psi^{124} &- (a A \partial_1 + A \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{123} = \\ &= \frac{m_d c}{2l} (\alpha \cdot \Psi^0 - \beta \cdot \Psi^{34}), \\ -i B \partial_4 \Psi^{123} &- (a A \partial_1 + A \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{124} = \\ &= \frac{m_d c}{2l} (\beta \cdot \Psi^0 + \alpha \cdot \Psi^{34}), \\ -i B \partial_4 \Psi^{34} &- (a A \partial_1 + A \partial_2 + a \partial_3) \Psi^0 = \\ &= \frac{m_d c}{2l} (\alpha \cdot \Psi^{123} - \beta \cdot \Psi^{124}), \\ i B \partial_4 \Psi^0 &- (a A \partial_1 + A \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{34} = \\ &= \frac{m_d c}{2l} (\beta \cdot \Psi^{123} + \alpha \cdot \Psi^{124}). \end{aligned} \quad (10)$$

## 3. Стандартное представление квантового уравнения для черных лептино

Преобразуем уравнения (10) следующим образом. Сначала сложим первое уравнение со вторым, а третье с четвертым. Получим

$$\begin{aligned} -i B \partial_4 \chi_1 - (a A \partial_1 + A \partial_2 + a \partial_3) \varphi_2 &= \frac{m_1 c}{2l} \varphi_1 + \frac{m_2 c}{2l} \chi_2, \\ i B \partial_4 \chi_2 - (a A \partial_1 + A \partial_2 + a \partial_3) \varphi_1 &= \frac{m_1 c}{2l} \varphi_2 + \frac{m_2 c}{2l} \chi_1, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\varphi_1 = \Psi^0 + \Psi^{34}$  и  $\varphi_2 = \Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\chi_1 = \Psi^{123} - \Psi^{124}$  и  $\chi_2 = \Psi^0 - \Psi^{34}$ ,  $m_1 = m_d \alpha$ ,  $m_2 = m_d \beta$ .

Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{aligned} i B \partial_4 \varphi_1 + (a A \partial_1 + A \partial_2 + a \partial_3) \chi_2 &= -\frac{m_1 c}{2l} \chi_1 + \frac{m_2 c}{2l} \varphi_2, \\ -i B \partial_4 \varphi_2 + (a A \partial_1 + A \partial_2 - a \partial_3) \chi_1 &= -\frac{m_1 c}{2l} \chi_2 + \frac{m_2 c}{2l} \varphi_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, система уравнений для черных лептино не разделяется на две системы, которые относились бы к разным частицам – верхней и нижней. Следовательно, черное лептино представлено одной частицей с четырехкомпонентной волновой функцией.

## IV. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Волновая функция нерелятивистского черного лептино есть вектор алгебры  $\mathbb{C}_b^s$ .
- Волновая функция черного лептино одного поколения есть вектор алгебры  $\mathbb{C}_b^s$ .
- Волновые функции черных лептино разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех образующих базисных векторов.

- Компоненты волновой функции  $\Psi^0 + \Psi^{34}$ ,  $\Psi^{123} + \Psi^{124}$ ,  $\Psi^{123} - \Psi^{124}$ ,  $\Psi^0 - \Psi^{34}$  относятся к одному черному лептино. Этот вывод следует из того, что полученные квантовые уравнения для черных лептино в стандартном представлении нельзя представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относилась бы к двухкомпонентной волновой функции.
- Установлена следующая организация волновой функции черного лептино первого поколения. Компоненты волновой функции  $\psi^A$ , где  $A$  принимает значения

32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124,

разбиваются на четыре части:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) + \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}), \\ \varphi_2 &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) + \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\ \chi_1 &= \Psi^{123}(\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{123}) - \Psi^{124}(\psi^{134}, \psi^{234}, \psi^4, \psi^{124}), \\ \chi_2 &= \Psi^0(\psi^{32}, \psi^{13}, \psi^{21}, \psi^0) - \Psi^{34}(\psi^{42}, \psi^{14}, \psi^{1324}, \psi^{34}).\end{aligned}$$

- Компоненты волновых функций черных лептино второго и третьего поколений отличаются от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов:

для черного лептино второго поколения

$$3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3;$$

для черного лептино третьего поколения

$$3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2.$$



## Глава 4.17 Белые лептино. Алгебра действия белых лептино $\mathbb{C}_w^s$

### 1. АЛГЕБРА БЕЛЫХ ЛЕПТИНО $\mathbb{C}_w^s$

#### 1. Базисные векторы и их произведения

Итак, коммутативная алгебра  $\mathbb{C}_w^s$  есть алгебра действия гипотетических фундаментальных частиц – лептино. Укажем базисные векторы коммутативной алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- $\kappa_0$  – базисный вектор скалярной части векторов. Этот базисный вектор ничем не отличается от соответствующего вектора  $\varepsilon_0$  алгебры  $\mathbb{C}$ . Однако используем другое обозначение для того, чтобы подчеркнуть принадлежность этого вектора другой алгебре. Для  $\kappa_0$  имеет место правило умножения

$$\kappa_0 \circ \kappa_0 = \kappa_0.$$

- Образующие векторы  $\kappa_i$ , где индекс  $i$  пробегает значения от 1 до 4. Нужно иметь в виду, что образующее пространство для алгебр  $\mathbb{C}^s$  и  $\mathbb{C}$  одинаково. Поэтому векторы  $\kappa_i$  совпадают с векторами  $\varepsilon_i$ . Число векторов  $\kappa_i$  равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\kappa_i \circ \kappa_0 = \kappa_0 \circ \kappa_i = \kappa_i.$$

$$\kappa_i \circ \kappa_i = \text{sign}(\kappa_i)^2 \cdot \kappa_0,$$

где

$$\text{sign}(\kappa_1)^2 = \text{sign}(\kappa_2)^2 = \text{sign}(\kappa_3)^2 = -\text{sign}(\kappa_4)^2 = 1.$$

- Векторы

$$\kappa_{ik} = \kappa_i \circ \kappa_k.$$

Здесь  $i \neq k$ . Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6.$$

Для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и соответственно сомножителей – условие коммутативности

$$\kappa_{ik} = \kappa_{ki}.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и коммутативности. В частности,

$$\begin{aligned} \kappa_{ik} \circ \kappa_{ik} &= \kappa_i \circ (\kappa_k \circ \kappa_k) \circ \kappa_i = \\ &= \text{sign}(\kappa_i)^2 \cdot \text{sign}(\kappa_k)^2. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \kappa_{21} \circ \kappa_{21} &= \kappa_0, & \kappa_{42} \circ \kappa_{42} &= -\kappa_0, \\ \kappa_{32} \circ \kappa_{32} &= \kappa_0, & \kappa_{14} \circ \kappa_{14} &= -\kappa_0, \\ \kappa_{13} \circ \kappa_{13} &= \kappa_0, & \kappa_{34} \circ \kappa_{34} &= -\kappa_0. \end{aligned}$$

- Векторы

$$\kappa_{ikl} = \kappa_i \circ \kappa_k \circ \kappa_l.$$

Здесь

$$i \neq k, i \neq l, k \neq l.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4.$$

Очевидно, что при перестановке индексов в виду коммутативности сомножителей знак не меняется:

$$\kappa_{ikl} = \kappa_{kli} = \kappa_{lik} = \kappa_{kil} = \kappa_{ilk} = \kappa_{lki}.$$

Из указанных законов также следует

$$\begin{aligned} \kappa_{ikl} \circ \kappa_{ikl} &= \kappa_i \circ (\kappa_k \circ (\kappa_l \circ \kappa_l) \circ \kappa_k) \circ \kappa_i = \\ &= \text{sign} \kappa_i \circ \text{sign} \kappa_k \circ \text{sign} \kappa_l. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \kappa_{123} \circ \kappa_{123} &= \kappa_0, & \kappa_{124} \circ \kappa_{124} &= -\kappa_0, \\ \kappa_{134} \circ \kappa_{134} &= -\kappa_0, & \kappa_{234} \circ \kappa_{234} &= -\kappa_0. \end{aligned}$$

- Вектор

$$\kappa_{iklm} = \kappa_m \circ \kappa_l \circ \kappa_k \circ \kappa_i.$$

Здесь

$$i \neq k, i \neq l, i \neq m, k \neq l, k \neq m, l \neq m.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по четыре, то есть единице

$$C_4^4 = 1.$$

Этот вектор подчиняются следующим правилам перестановки индексов:

$$\begin{aligned} \kappa_{iklm} &= \kappa_{ilmk} = \kappa_{imkl} = \kappa_{ilkm} = \\ &= \kappa_{ikml} = \kappa_{imlk} = \kappa_{klmi} = \kappa_{kml} = \\ &= \kappa_{kilm} = \kappa_{kml} = \kappa_{klmi} = \kappa_{kilm} = \\ &= \kappa_{lmik} = \kappa_{likm} = \kappa_{lkmi} = \kappa_{limk} = \\ &= \kappa_{lmki} = \kappa_{lkim} = \kappa_{mikl} = \kappa_{mkli} = \\ &= \kappa_{mlik} = \kappa_{mkil} = \kappa_{mil} = \kappa_{mlki}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \kappa_{iklm} \circ \kappa_{iklm} = \\ & = \kappa_i \circ (\kappa_k \circ (\kappa_l \circ (\kappa_m \circ \kappa_m) \circ \kappa_l) \circ \kappa_k) \circ \kappa_i = \\ & = \text{sign } \kappa_i \circ \text{sign } \kappa_k \circ \text{sign } \kappa_l \circ \text{sign } \kappa_m . \end{aligned}$$

Откуда

$$\kappa_{1324} \circ \kappa_{1324} = -\kappa_0 .$$

Как обычно, если необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства коммутативной алгебры, будем использовать обозначение  $\mathbb{C}_4^*$  вместо обозначения  $\mathbb{C}^s$ . Это особенно полезно при выделении подалгебры. Так подалгебру с тремя образующими базисными векторами (например  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ), удобно обозначать  $\mathbb{C}_3^s$ .

### 2. Структурные матрицы коммутативной алгебры белых лептино

Предварительно заметим, что для коммутативной алгебры правые и левые структурные матрицы совпадают. Кроме того, структурные матрицы контравариантной алгебры связаны со структурными матрицами ковариантной алгебры следующим образом: симметричные матрицы совпадают, антисимметричные матрицы отличаются знаком.

Указанные обстоятельства позволяют ограничиться вычислением структурных матриц одной алгебры, например структурных матриц правой контравариантной алгебры  $r(\mathbb{C}^s, \mathbb{X}\mathbb{C}^s)_w$ , а структурные матрицы левой ковариантной алгебры  $l(\mathbb{C}^s, \mathbb{X}\mathbb{C}^s)_w^*$  установить преобразованием вышеуказанных матриц. С использованием таких матриц записываются квантовые уравнения для рассматриваемых лептино.

Компоненты векторов и матриц рассматриваются в следующей последовательности индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124) .$$

При преобразовании матриц  $C_{KI}^L$  от действительного представления к  $a$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} .$$

При преобразовании матриц  $C_{KI}^L$  от  $a$ -представления к  $A$ -представлению использованы следующие обозначения для блоков  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \kappa_0 & \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 & \\ \hline 32 & 1 & & & & & & & \\ 13 & & 1 & & & & & & \\ 21 & & & 1 & & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & & \\ \hline 42 & & & & 1 & & & & \\ 14 & & & & & 1 & & & \\ 1324 & & & & & & 1 & & \\ 34 & & & & & & & 1 & \\ \hline 1 & & & & & & 1 & & \\ 2 & & & & & & & 1 & \\ 3 & & & & & & & & 1 \\ \hline 123 & & & & & & & & 1 \\ 134 & & & & & & & 1 & \\ 234 & & & & & & & & 1 \\ 4 & & & & & & & & 1 \\ \hline 124 & & & & & & & & 1 \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 & \\ \hline 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 0 & 34 & 124 \\ & 0 & 123 & \\ \hline \mathbb{1} & & & \\ & \mathbb{1} & & \\ \hline & & \mathbb{1} & \\ & & & \mathbb{1} \end{array} \end{array} \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 & \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 & \\ \hline 32 & & & & & & & & \\ 13 & & & & & & 1 & & \\ 21 & & & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & & 1 \\ \hline 42 & & & & & & & & 1 \\ 14 & & & & & & & & 1 \\ 1324 & & & & & & & & 1 \\ 34 & & & & & & 1 & & \\ \hline 1 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & \\ \hline 123 & & & & & & & & \\ 134 & & & & & & 1 & & \\ 234 & & & & & & & 1 & \\ 4 & & & & & & & 1 & \\ \hline 124 & & & & & & & & 1 \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 34 & 123 & 124 \\ 13 & 14 & 2 & 134 & \\ \hline & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 0 & 34 & 124 \\ & 0 & 123 & \\ \hline & & A & \\ & A & & A \end{array} \end{array} \end{array} \end{aligned}$$

$\kappa_2 \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32					1			
13						1		
21				1				
0					1			
42							1	
14								1
1324							1	
34								1
1	1							
2		1						
3	1							
123	1							
134			1					
234				1				
4					1			
124						1		

$= 1$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
		1		13
		1		0
			1	14
				34
1	1			2
1				123
				234
				124

$= 1$

	0	34	123	124
	0	123		0
		A		34
A				123
		A		124

$\kappa_4 \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32								-1
13								-1
21								-1
0								-1
42					1			
14						1		
1324							1	
34								1
1								
2								
3								
123								
134	1							
234	1							
4								
124								

$= a$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
				13
				0
				14
				34
1	1			2
-1				123
-1				234
1				124

$= a$

	0	34	123	124
	0	123		0
		-1		34
				123
				124

$\kappa_3 \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32					1			
13						1		
21							1	
0								1
42								
14								
1324								
34								
1	1							
2	1							
3		1						
123			1					
134				1				
234					1			
4						1		
124							1	

$= a$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
		1		13
			1	0
				14
				34
1	1			2
1				123
				234
				124

$= a$

	0	34	123	124
	0	123		0
		1		34
				123
				124

$\kappa_{21} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32	1							
13	1							
21		1						
0			1					
42				1				
14					1			
1324						1		
34							1	
1								1
2								
3								
123								
134								
234								
4								
124								

$= a$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
1				13
				0
				14
				34
1	1			2
				123
				234
				124

$= a$

	0	34	123	124
	0	123		0
		1		34
				123
				124

$\kappa_{13} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32	1							
13		1						
21	1							
0	1							
42			1					
14				1				
1324			1					
34				1				
1					1			
2						1		
3					1			
123						1		
134							1	
234								1
4							1	
124								1

$= 1$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
1				
1				
		1		
			1	
				1

$= 1$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
A				
A				
			A	
				A

$\kappa_{14} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32								
13			-1					
21				-1				
0					-1			
42			1					
14				1				
1324	1							
34					1			
1								-1
2								
3								-1
123								
134							1	
234								1
4						1		
124							1	

$= 1$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
1				
1				

$= 1$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
-1				
-1				
1				
1				

$\kappa_{32} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32	1							
13		1						
21	1							
0	1							
42				1				
14					1			
1324				1				
34					1			
1						1		
2							1	
3								1
123							1	
134								1
234								
4								1
124								

$= a$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
1				
1				
		1		
			1	
				1

$= a$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
A				
A				
			A	
				A

$\kappa_{42} \sim$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32								
13								
21								
0								
42			1					
14				1				
1324	1							
34					1			
1								-1
2								
3								-1
123								
134							1	
234								1
4						1		
124							1	

$= a$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
1				
1				

$= a$

	0	34	123	124
13	14	2	134	
-1				
-1				
1				
1				

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32			-1					
13			-1					
21			-1					
0			-1					
42	1							
14	1							
1324	1							
34	1							
1						-1		
2						-1		
3						-1		
123						-1		
134				1				
234				1				
4				1				
124				1				

$\kappa_{34} \sim$

	0	34	123	124
13		-1		
14		-1		
34	1			
2			-1	
123			-1	
234			1	
124			1	

$= I$

	0	34	123	124
0		-1		
34	1			
2			-1	
123			-1	
124			1	

$= I$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32								-1
13								-1
21								-1
0								-1
42				1				
14				1				
1324				1				
34				1				
1			-1					
2			-1					
3			-1					
123			-1					
134	1							
234	1							
4	1							
124	1							

$\kappa_{124} \sim$

	0	34	123	124
13		-1		
14		-1		
34	1			
2			-1	
123			-1	
234			1	
124			1	

$= I$

	0	34	123	124
0		-1		
34	1			
2			-1	
123			-1	
124			1	

$= I$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32				1				
13				1				
21				1				
0				1				
42					1			
14					1			
1324					1			
34					1			
1	1							
2	1							
3	1							
123	1							
134		1						
234		1						
4		1						
124		1						

$\kappa_{123} \sim$

	0	34	123	124
13		1		
14		1		
34	1			
2			1	
123			1	
234			1	
124			1	

$= I$

	0	34	123	124
0		1		
34	1			
2			1	
123			1	
124			1	

$= I$

	13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4
32								-1
13								-1
21								-1
0								-1
42				1				
14				1				
1324				1				
34				1				
1			-1					
2			-1					
3			-1					
123			-1					
134	1							
234	1							
4	1							
124	1							

$\kappa_{134} \sim$

	0	34	123	124
13		-1		
14		-1		
34	1			
2			-1	
123			-1	
234			1	
124			1	

$= a$

	0	34	123	124
0		-1		
34	1			
2			-A	
123			-A	
124			A	

$= a$

		13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4	
$\kappa_{234} \sim$	32								-1
	13								-1
	21								-1
	0								-1
	42					1			
	14						1		
	1324					1			
	34						1		
	1								-1
	2								-1
	3								-1
	123								-1
	134					1			
	234						1		
	4					1			
	124								1

$= I$		0	34	123	124
	13	14	2	134	
				-1	13
				-1	0
				1	14
				1	34
				-1	2
				-1	123
				1	234
				1	124

$= I$		0	34	123	124
	13	14	2	134	
				-A	0
				A	34
				-A	123
				A	124

		13	0	14	34	2	123	234	124
	32	21	42	1324	1	3	134	4	
$\kappa_{1324} \sim$	32								-1
	13								-1
	21								-1
	0								-1
	42					1			
	14					1			
	1324						1		
	34							1	
	1								-1
	2								-1
	3								-1
	123								-1
	134							1	
	234						1		
	4							1	
	124								1

$= a$		0	34	123	124
	13	14	2	134	
				-1	13
				-1	0
				1	14
				1	34
				-1	2
				-1	123
				1	234
				1	124

$= a$		0	34	123	124
	13	14	2	134	
				-1	0
				-1	34
				1	123
				1	124

Мы получили структурные матрицы коммутативной алгебры  $\mathbb{C}_w^s$  по такому же алгоритму, по которому в Разделе II. Главы 4.3. были выведены матрицы Дирака. Обратим внимание на матрицу, представляющую базисный вектор  $\kappa_{21}$ . В  $a$ -представлении эта матрица имеет вид

$$C_{K(21)}^L = a \cdot \delta_K^L.$$

Эта матрица должна играть в теории лептино такую же роль, как матрица  $i \cdot \delta_K^L$  в теории лептонов.

### 3. Действительное представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_4^s$

Действительное представление коммутативной алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  соответствует записи вектора  $\psi$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi = & \kappa_{32} \psi^{32} + \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_0 \psi^0 + \\ & + \kappa_{42} \psi^{42} + \kappa_{14} \psi^{14} + \kappa_{1324} \psi^{1324} + \kappa_{34} \psi^{34} + \\ & + \kappa_1 \psi^1 + \kappa_2 \psi^2 + \kappa_3 \psi^3 + \kappa_{123} \psi^{123} + \\ & + \kappa_{134} \psi^{134} + \kappa_{234} \psi^{234} + \kappa_4 \psi^4 + \kappa_{124} \psi^{124}. \end{aligned}$$

В результате мы получили действительные матрицы  $16 \times 16$  представления базисных векторов  $\kappa_I$  (см. Раздел I.2.).

Помимо действительного представления, будем использовать  $a$ -представление и  $A$ -представление базисных векторов коммутативной алгебры, удобные в силу своей компактности.

### 4. $a$ -представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_4^s$

$a$ -представление в этом случае основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned} \psi = & \kappa_{13} \circ (\kappa_{21} \psi^{32} + \kappa_0 \psi^{13}) + \kappa_0 \circ (\kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_0 \psi^0) + \\ & + \kappa_{14} \circ (\kappa_{21} \psi^{42} + \kappa_0 \psi^{14}) + \kappa_{34} \circ (\kappa_{21} \psi^{1324} + \kappa_0 \psi^{34}) + \\ & + \kappa_2 \circ (\kappa_{21} \psi^1 + \kappa_0 \psi^2) + \kappa_{123} \circ (\kappa_{21} \psi^3 + \kappa_0 \psi^{123}) + \\ & + \kappa_{234} \circ (\kappa_{21} \psi^{134} + \kappa_0 \psi^{234}) + \kappa_{124} \circ (\kappa_{21} \psi^4 + \kappa_0 \psi^{124}). \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  в виде произведения  $\mathbb{C}_3^s \times \mathbb{C}_1^s$  (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_3^s$  являются

$$\kappa_{13}, \kappa_0, \kappa_{14}, \kappa_{34}, \kappa_2, \kappa_{123}, \kappa_{234}, \kappa_{124};$$

базисными векторами алгебры  $\mathbb{C}_1^s$  являются

$$\kappa_{21}, \kappa_0.$$

Как и прежде, поставим в соответствие базисному вектору  $\kappa_{21}$  алгебры  $\mathbb{C}_1^s$   $a$ -единицу, а базисному вектору  $\kappa_0$  действительную единицу. В результате вектор

алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  в  $a$ -представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= \kappa_{13} \circ (a\psi^{32} + \psi^{13}) + \kappa_0 \circ (a\psi^{21} + \psi^0) + \\ &+ \kappa_{14} \circ (a\psi^{42} + \psi^{14}) + \kappa_{34} \circ (a\psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ &+ \kappa_2 \circ (a\psi^1 + \psi^2) + \kappa_{123} \circ (a\psi^3 + \psi^{123}) + \\ &+ \kappa_{234} \circ (a\psi^{134} + \psi^{234}) + \kappa_{124} \circ (a\psi^4 + \psi^{124}). \end{aligned}$$

Таким образом, в  $a$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются  $a$ -числами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \psi^{13} &= a\psi^{32} + \psi^{13}, & \psi^0 &= a\psi^{21} + \psi^0, \\ \psi^{14} &= a\psi^{42} + \psi^{14}, & \psi^{34} &= a\psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \psi^2 &= a\psi^1 + \psi^2, & \psi^{123} &= a\psi^3 + \psi^{123}, \\ \psi^{234} &= a\psi^{134} + \psi^{234}, & \psi^{124} &= a\psi^4 + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_0 \psi^0 + \kappa_{14} \psi^{14} + \kappa_{34} \psi^{34} + \\ &+ \kappa_2 \psi^2 + \kappa_{123} \psi^{123} + \kappa_{234} \psi^{234} + \kappa_{124} \psi^{124}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в  $a$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\kappa_{13}, \kappa_0, \kappa_{14}, \kappa_{34}, \kappa_2, \kappa_{123}, \kappa_{234}, \kappa_{124}$ .

$a$ -представление базисных векторов дается структурными матрицами  $8 \times 8$  (см. Раздел I.2).

### 5. $A$ -представление коммутативной алгебры $\mathbb{C}_4^s$

$A$ -представление алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  основано на разложении вектора

$$\begin{aligned} \psi &= (\kappa_{32} \psi^{32} + \kappa_{13} \psi^{13} + \kappa_{21} \psi^{21} + \kappa_0 \psi^0) \circ \kappa_0 + \\ &+ (\kappa_{32} \psi^{42} + \kappa_{13} \psi^{14} + \kappa_{21} \psi^{1324} + \kappa_0 \psi^{34}) \circ \kappa_{34} + \\ &+ (\kappa_{32} \psi^1 + \kappa_{13} \psi^2 + \kappa_{21} \psi^3 + \kappa_0 \psi^{123}) \circ \kappa_{123} + \\ &+ (\kappa_{32} \psi^{134} + \kappa_{13} \psi^{234} + \kappa_{21} \psi^4 + \kappa_0 \psi^{124}) \circ \kappa_{124}. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  в виде произведения  $\mathbb{C}_2^s \times \mathbb{C}_2^s$ . Базисными векторами одной алгебры  $\mathbb{C}_2^s$  являются

$$\kappa_0, \quad \kappa_{34}, \quad \kappa_{123}, \quad \kappa_{124};$$

базисными векторами другой алгебры  $\mathbb{C}_2^s$  являются

$$\kappa_{32}, \quad \kappa_{13}, \quad \kappa_{21}, \quad \kappa_0.$$

Как и прежде, заменяя базисные векторы  $\kappa_{32}, \kappa_{13}, \kappa_{21}, \kappa_0$   $A$ -числами, получим вектор алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  в  $A$ -представлении

$$\begin{aligned} \psi &= (a \cdot A\psi^{32} + 1 \cdot A\psi^{13} + a \cdot \mathbb{1}\psi^{21} + 1 \cdot \mathbb{1}\psi^0) \circ \kappa_0 + \\ &+ (a \cdot A\psi^{42} + 1 \cdot A\psi^{14} + a \cdot \mathbb{1}\psi^{1324} + 1 \cdot \mathbb{1}\psi^{34}) \circ \kappa_{34} + \\ &+ (a \cdot A\psi^1 + 1 \cdot A\psi^2 + a \cdot \mathbb{1}\psi^3 + 1 \cdot \mathbb{1}\psi^{123}) \circ \kappa_{123} + \\ &+ (a \cdot A\psi^{134} + 1 \cdot A\psi^{234} + a \cdot \mathbb{1}\psi^4 + 1 \cdot \mathbb{1}\psi^{124}) \circ \kappa_{124}. \end{aligned}$$

Таким образом, в  $A$ -представлении координаты (компоненты) вектора являются  $A$ -числами. Введем для них обозначения

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= a A\psi^{32} + 1 \cdot A\psi^{13} + a \mathbb{1}\psi^{21} + 1 \cdot \mathbb{1}\psi^0, \\ \Psi^{34} &= a A\psi^{42} + 1 \cdot A\psi^{14} + a \mathbb{1}\psi^{1324} + 1 \cdot \mathbb{1}\psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= a A\psi^1 + 1 \cdot A\psi^2 + a \mathbb{1}\psi^3 + 1 \cdot \mathbb{1}\psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= a A\psi^{134} + 1 \cdot A\psi^{234} + a \mathbb{1}\psi^4 + 1 \cdot \mathbb{1}\psi^{124}. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом этого вектор  $\psi$  можно записать в виде

$$\psi = \Psi^0 \kappa_0 + \Psi^{34} \kappa_{34} + \Psi^{123} \kappa_{123} + \Psi^{124} \kappa_{124}.$$

Отсюда видно, что в  $A$ -представлении вектор  $\psi$  проецируется на направления  $\kappa_0, \kappa_{34}, \kappa_{123}, \kappa_{124}$ .

$A$ -представление базисных векторов дается структурными матрицами  $4 \times 4$  (см. Раздел I.2).

### 6. Сжатое представление коммутативной алгебры

При переходе к частным случаям квантовой теории целесообразно пользоваться процедурой сжатия, или вырождения, слагаемых компонент вектора.

В этом разделе рассмотрим сжатое представление базисных векторов коммутативной алгебры  $\mathbb{C}_n^s$  в ее подалгебре  $\mathbb{C}_{n-k}^s$ , где  $k < n$ . Для примера рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры  $\mathbb{C}_n^s$  в ее подалгебре  $\mathbb{C}_{n-1}^s$ . Разобьем базисные векторы  $\kappa_I$  алгебры  $\mathbb{C}_n^s$  на две группы  $\kappa_{I_1}$  и  $\kappa_{I_2}$  с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы  $\kappa_{I_1}$  образовывали алгебру  $\mathbb{C}_{n-1}^s$ . В силу симметрий коммутативной алгебры умножение базисных векторов можно записать в виде следующей таблицы:

$$\kappa_{K_1} \circ \kappa_{I_1} = \kappa_{L_1} \cdot C^{L_1}_{K_1 I_1}, \quad (3)$$

$$\kappa_{K_1} \circ \kappa_{I_2} = \kappa_{L_2} \cdot C^{L_2}_{K_1 I_2}, \quad (4)$$

$$\kappa_{K_2} \circ \kappa_{I_1} = \kappa_{L_2} \cdot C^{L_2}_{K_2 I_1},$$

$$\kappa_{K_2} \circ \kappa_{I_2} = \kappa_{L_1} \cdot C^{L_1}_{K_2 I_2}.$$

Будем полагать, что приближенно при вычислении матриц представления базисных векторов алгебры  $\mathbb{C}_n^s$  в алгебре  $\mathbb{C}_{n-1}^s$  базисные векторы  $\kappa_{L_2}$  в правой части уравнения (4) можно заменить на базисные векторы  $\kappa_{L_1}$  с помощью соотношения

$$\kappa_{L_2} = \kappa_{L_1} \cdot P^{L_1}_{L_2}, \quad (5)$$

где  $P^{L_1}_{L_2}$  есть матрица соответствий. Тогда соотношение (4) принимает вид

$$\kappa_{K_1} \circ \kappa_{I_2} = \kappa_{L_1} \cdot P^{L_1}_{L_2} \cdot C^{L_2}_{K_1 I_2}. \quad (6)$$

Соотношения (3) и (6) позволяют получить матрицы представления базисных векторов алгебры  $\mathbb{C}_n^s$  в ее подалгебре  $\mathbb{C}_{n-1}^s$ , причем базисные векторы подалгебры  $\mathbb{C}_{n-1}^s$  представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно.







(42, 14, 1324, 34), (134, 234, 4, 124) и (1, 2, 3, 123) заменяются на базисные векторы с индексами (32, 13, 21, 0) соответственно. Тогда размерность матриц представления базисных векторов алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна  $4 \times 4$  в действительном представлении,  $2 \times 2$  в  $a$ -представлении и  $1 \times 1$  в  $A$ -представлении.

Ограничимся тем, что приведем матрицы регулярного представления образующих базисных векторов алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  в алгебре  $\mathbb{C}_2^s$ . Имеем

$$\kappa_1 \sim \begin{array}{cc} & 13 \quad 0 \\ & 32 \quad 21 \\ 1 & 32 & & 1 \\ 2 & 13 & & 1 \\ 3 & 21 & 1 & \\ 123 & 0 & 1 & \end{array} = a \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} = a A,$$

$$\kappa_2 \sim \begin{array}{cc} & 13 \quad 0 \\ & 32 \quad 21 \\ 1 & 32 & 1 & \\ 2 & 13 & & 1 \\ 3 & 21 & 1 & \\ 123 & 0 & 1 & \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} = 1 A,$$

$$\kappa_3 \sim \begin{array}{cc} & 13 \quad 0 \\ & 32 \quad 21 \\ 1 & 32 & 1 & \\ 2 & 13 & 1 & \\ 3 & 21 & & 1 \\ 123 & 0 & & 1 \end{array} = a \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = a \mathbb{1},$$

$$\kappa_4 \sim \begin{array}{cc} & 13 \quad 0 \\ & 32 \quad 21 \\ 134 & 32 & 1 & \\ 234 & 13 & 1 & \\ 4 & 21 & & 1 \\ 124 & 0 & & 1 \end{array} = a \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = a \mathbb{1}.$$

В результате для базисных векторов алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  получим

$$\begin{aligned} \kappa_{32} &\sim a A, & \kappa_{42} &\sim a A, \\ \kappa_{13} &\sim 1 A, & \kappa_{14} &\sim 1 A, \\ \kappa_{21} &\sim a \mathbb{1}, & \kappa_{1324} &\sim a \mathbb{1}, \\ \kappa_0 &\sim 1 \mathbb{1}, & \kappa_{34} &\sim 1 \mathbb{1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 &\sim a A, & \kappa_{134} &\sim a A, \\ \kappa_2 &\sim 1 A, & \kappa_{234} &\sim 1 A, \\ \kappa_3 &\sim a \mathbb{1}, & \kappa_4 &\sim a \mathbb{1}, \\ \kappa_{123} &\sim 1 \mathbb{1}, & \kappa_{124} &\sim 1 \mathbb{1}. \end{aligned}$$

В этом представлении только базисные векторы  $\kappa_{32}$ ,  $\kappa_{13}$ ,  $\kappa_{21}$ ,  $\kappa_0$  представлены точно. Соотношения

$$\begin{aligned} \kappa_{32} &\sim a A, \\ \kappa_{13} &\sim 1 A, \\ \kappa_{21} &\sim a \mathbb{1}, \\ \kappa_0 &\sim 1 \mathbb{1} \end{aligned}$$

можно рассматривать как соответствие между указанными базисными векторами и  $A$ -числами.

### 6.3. Третье сжатое представление

Рассмотрим третье сжатое представление

$$R_3 : \mathbb{C}_4^s \rightarrow \mathbb{C}_1^s \{ \kappa_{21}, \kappa_0 \}.$$

Для этого положим, что соотношение (5) определяется тем, что базисные векторы с индексами (42, 14), (1324, 34), (134, 234), (4, 124), (1, 2), (3, 123), (32, 13) заменяются на векторы с индексами (21, 0) соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна  $2 \times 2$  в действительном представлении,  $1 \times 1$  в  $a$ -представлении. В результате для базисных векторов алгебры  $\mathbb{C}_4^s$  получим

$$\begin{aligned} \kappa_{32} &\sim a, & \kappa_1 &\sim a, & \kappa_{42} &\sim a, & \kappa_{134} &\sim a, \\ \kappa_{13} &\sim 1, & \kappa_2 &\sim 1, & \kappa_{14} &\sim 1, & \kappa_{234} &\sim 1, \\ \kappa_{21} &\sim a, & \kappa_3 &\sim a, & \kappa_{1324} &\sim a, & \kappa_4 &\sim a, \\ \kappa_0 &\sim 1, & \kappa_{123} &\sim 1, & \kappa_{34} &\sim 1, & \kappa_{124} &\sim 1. \end{aligned}$$

В рассматриваемом представлении вектор  $\kappa_{21}$ , и только он, представляется точно  $a$ -единицей.

## II. КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЛЕПТИНО

Мы вычислили структурные матрицы алгебры кваркино и теперь вернемся к результатам Главы 3.3. Согласно этой Главе, если действие некоторого объекта является алгеброй, такому объекту присущи квантовые явления, а уравнение структуры этой алгебры можно рассматривать как квантовый постулат. В Разделе III. Главы 4.16 уравнение структуры алгебры действия общего вида преобразовано в квантовое уравнение для свободных лептино (формула (4)), которым воспользуемся далее. Указанное уравнение имеет вид

$$C^{MN}_L \cdot \partial_M \psi^L(x) = \frac{1}{l} C^{MN}_L \cdot C^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K. \quad (7)$$

Здесь  $l$  – постоянная величина, имеющая размерность действия, аналогичная постоянной Планка. С нашей точки зрения, это уравнение и есть квантовое

уравнение для лептино в самом общем виде. Далее запишем это уравнение при следующих ограничениях: дифференцирование выполняется только по координатам образующего пространства и условию, что в первом сжатом представлении коэффициент при волновой функции в правой части принимает вид

$$-\frac{m c}{l}.$$

Здесь  $m$  есть масса лептино. В результате получим следующее уравнение:

$$C^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L(x) = -\frac{m c}{2l} (C^{0N}_L + C^{34N}_L) \cdot (C^L_{K0} + C^L_{K34}) \cdot \psi^K. \quad (8)$$

Понятно, что здесь  $C^{0N}_K = C^N_{K0} = \delta^N_K$  в отличие от  $C^N_{K34}$  и  $C^{34N}_L$ . Мы положили, что

$$p^0_0 = p^{34}_0 = p^0_{34} = p^{34}_{34} = -\frac{m c}{2}.$$

### 1. Структурные матрицы алгебры белых лептино $\mathbb{Q}_w^s$

Используя результаты Раздела II.2, приведем структурные матрицы алгебры  $\mathbb{Q}_w^s$   $C^{4N}_L$ ,  $C^{1N}_L$ ,  $C^{2N}_L$ ,  $C^{3N}_L$ ,  $C^N_{K34}$  и  $C^{34N}_L$  в  $A$ -представлении, необходимые для построения квантового уравнения для свободных белых лептино.

$$C^{4N}_L = a \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ \hline & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} 124 & \\ \hline & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & 34 \\ \hline 1 & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ \hline -1 & 124 \end{array} \end{array}, \quad C^{1N}_L = a \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ \hline & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} 124 & \\ \hline & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & 34 \\ \hline A & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ \hline A & 124 \end{array} \end{array},$$

$$C^{2N}_L = 1 \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ \hline & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} 124 & \\ \hline & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & 34 \\ \hline A & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ \hline A & 124 \end{array} \end{array}, \quad C^{3N}_L = a \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ \hline & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} 124 & \\ \hline & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & 34 \\ \hline 1 & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ \hline 1 & 124 \end{array} \end{array},$$

$$C^{34N}_L = 1 \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ \hline & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} 124 & \\ \hline & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & 34 \\ \hline -\mathbb{1} & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ \hline & -\mathbb{1} \end{array} \end{array}, \quad C^N_{K34} = 1 \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ \hline & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} 124 & \\ \hline & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & 34 \\ \hline \mathbb{1} & 123 \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ \hline & -\mathbb{1} \end{array} \end{array}.$$

### 2. Квантовое уравнение для белых лептино

Квантовое уравнение для свободных белых лептино получим, подставив в уравнение (8) вышеприведенные структурные матрицы. Для действительного регулярного представления алгебры черных лептино  $\mathbb{C}_b^s$  компоненты волновой функции  $\psi^K(x)$  представляют собой шестнадцать действительных функций.

В  $iab$ -представлении волновая функция содержит восемь компонент вида (1). И в  $IAB$ -представлении компонентами волновой функции являются четыре  $A$ -функции вида (2). Приведем квантовое уравнение по отношению к  $A$ -компонентам волновой функции белых лептино:

$$\left( a \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} & 1 \\ \hline & -1 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{cc} 1 & \\ \hline -1 & \end{array} & \end{array} \partial_4 + a \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} & A \\ \hline & A \end{array} & \\ \hline \begin{array}{cc} A & \\ \hline A & \end{array} & \end{array} \partial_1 + \right. \\ \left. + \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} & A \\ \hline & A \end{array} & \\ \hline \begin{array}{cc} A & \\ \hline A & \end{array} & \end{array} \partial_2 + a \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} & 1 \\ \hline & 1 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{cc} 1 & \\ \hline 1 & \end{array} & \end{array} \partial_3 \right) \begin{array}{l} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} = \\ = -\frac{m c}{l} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 1 & \\ \hline 1 & \end{array} & \\ \hline \begin{array}{cc} & \\ \hline & 1 \end{array} & \end{array} \begin{array}{l} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array}$$

или

$$\begin{aligned} a \partial_4 \Psi^{124} + (a A \partial_1 + A \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{123} &= -\frac{m c}{l} \Psi^0, \\ -a \partial_4 \Psi^{123} + (a A \partial_1 + A \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{124} &= -\frac{m c}{l} \Psi^{34}, \\ a \partial_4 \Psi^{34} + (a A \partial_1 + A \partial_2 + a \partial_3) \Psi^0 &= -\frac{m c}{l} \Psi^{123}, \\ -a \partial_4 \Psi^0 + (a A \partial_1 + A \partial_2 + a \partial_3) \Psi^{34} &= -\frac{m c}{l} \Psi^{124}. \end{aligned} \quad (9)$$

Есть ли в этом уравнении доля истины, покажет будущее.

### III. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Одним из возможных путей обобщения алгебры Клиффорда является отказ от антикоммутиративности умножения.
- Коммутативной алгебре действия и пространства-времени  $\mathbb{C}^*$  ставятся в соответствие гипотетические фундаментальные частицы – лептино.
- В нерелятивистском приближении лептино и антилептино – это одна и та же частица.
- В геометрическом пространстве лептино отсутствуют круговые повороты. Вместо них имеют место гиперболические повороты (вместо движений по окружности имеют место движения по гиперболе). Оператору гиперболических поворотов в образующем пространстве (собственном пространстве-времени лептино) соответствует новый динамический параметр, аналогичный спину лептонов. Этот параметр назван *инерцией*. Таким образом, для лептино (то есть для частиц, векторы действия и векторы пространства-времени которых составляют коммутативную алгебру), спин равен нулю, а его место зани-

мает новый, в некотором смысле симметричный спину динамический параметр – *инерция*.

- Из алгебраической структуры векторов действия лептино следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений этих частиц. В общем случае нет оснований считать, что квантовые явления с участием лептино определяются постоянной Планка, а не другой постоянной величиной, имеющей размерность действия.

## Часть 5

# Промежуточные физические объекты

### Глава 5.1 Алгебра действия промежуточных объектов

#### 1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КАК ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

В Четвертой Части мы рассматривали свободные фундаментальные частицы. Далее будем рассматривать их взаимодействие между собой.

Взаимодействие частиц (и в общем случае физических объектов) между собой есть действие<sup>1</sup> частиц (физических объектов) друг на друга, приводящее к изменению параметров их движения.

Пусть  $A$  – множество физических объектов. Каждую пару физических объектов  $a, b \in A$  можно характеризовать наличием или отсутствием взаимодействия между ними. Таким образом, на подмножестве  $B$  множества пар физических объектов  $A \times A$  вводится бинарное отношение  $\mathfrak{F}$ . Иначе говоря, попарное взаимодействие есть бинарное отношение  $\mathfrak{F}$  между физическими объектами, определяющее подмножество<sup>2</sup> взаимодействующих физических объектов  $B$ . Заметим, что введение качества  $\mathfrak{F}$ , или понятия взаимодействия как бинарного отношения, становится возможным после того, как изобретен способ регистрации взаимодействия. Заметим также, что таких способов может быть несколько, они могут быть более или менее совершенны и совершенствоваться. Важно, что все они имеют инвариантное содержание как бинарные отношения. Бинарное отношение  $\mathfrak{F}$  между физическими объектами  $a$  и  $b$  будем записывать  $a \mathfrak{F} b$  и говорить, что физический объект  $a$  взаимодействует с физическим объектом  $b$ . Так как взаимодействие  $\mathfrak{F}$  есть качество, определяющее подмножество  $B$  на множестве пар  $A \times A$ , то можно ввести понятия пере-

сечения, дополнения, объединения бинарных отношений. Дополнением к бинарному отношению (взаимодействию)  $\mathfrak{F}$  является бинарное отношение  $\bar{\mathfrak{F}}$ , определяемое посредством подмножества не взаимодействующих физических объектов  $\bar{B}$ , то есть  $a \bar{\mathfrak{F}} b$  имеет место тогда, когда  $a$  не взаимодействует с  $b$ . Пусть физический объект  $a$  взаимодействует с физическим объектом  $b$ . Тогда обратное отношение  $a \mathfrak{F}^{-1} b$ , равнозначное тому, что  $b \mathfrak{F} a$ , означает, что  $b$  взаимодействует с  $a$ . Таким образом, взаимодействие как бинарное отношение обладает свойством *симметричности*: если  $a \mathfrak{F} b$ , то  $b \mathfrak{F} a$ , то есть, если  $a$  взаимодействует с  $b$ , то  $b$  взаимодействует с  $a$ . Введем также единичное отношение  $\mathfrak{E}$ , определяемое тем, что два физических объекта  $a$  и  $b$  вступают в это отношение ( $a \mathfrak{E} b$ ), если  $a = b$ . Очевидно, что  $\mathfrak{E}^{-1} = \mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{E} = \mathfrak{E} \circ \mathfrak{F}$ . Рассмотрим теперь отношение  $\mathfrak{R} = \mathfrak{F} \cup \mathfrak{E}$ . Это отношение 1) *симметрично*, 2) *рефлексивно*, то есть  $\mathfrak{E} \in \mathfrak{R}$ , и 3) *транзитивно*, то есть, если  $a$  взаимодействует с  $b$  ( $a \mathfrak{R} b$ ), а  $b$  взаимодействует с  $c$  ( $b \mathfrak{R} c$ ), то  $a$  взаимодействует и с  $c$  ( $a \mathfrak{R} c$ ). Условие транзитивности означает, что смешанные взаимодействия не рассматриваются. Бинарное отношение, обладающее тремя вышеуказанными свойствами, является отношением *эквивалентности*. Таким образом, взаимодействие как бинарное отношение есть отношение эквивалентности.

#### 1. Скалярное действие и отношение эквивалентности

Взгляд на взаимодействие как на бинарное отношение заставляет скорректировать скалярное действие для взаимодействующих физических объектов. Рассмотрим такую коррекцию на примере скалярного действия, полученного в Разделе V.1 Главы 3.2. Это действие имеет вид (формула (54) Главы 3.2):

$$\begin{aligned} {}_l \mathcal{S} = & - \int \left( (p^K{}_I(1) + C_1 \cdot l^K{}_I(1)) \frac{Dy^I(x)}{\partial x^K} (2) + \right. \\ & + (m^{KK_1}{}_I(1) + C_2 \cdot l^{KK_1}{}_I(1)) \frac{Dl^{K_1}}{\partial x^K} (2) + \\ & \left. + (w^{KK_2K_1}{}_I(1) + C_3 \cdot l^{KK_2K_1}{}_I(1)) \frac{Dl^{K_1K_2}}{\partial x^K} (2) \right) \cdot d\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Нужно иметь в виду, что слово *действие* используется в нескольких смыслах: *действие* как *явление*, например действие одного физического объекта на другой; *действие* как *физическая величина*, например вектор действия, *действие* в смысле *применение оператора*, например действие оператора на функцию. Мы будем использовать слово *действие*, полагая, что читатель легко определит в каком из упомянутых трех значений это слово используется. Кроме того, мы используем термины *взаимодействие* (физических объектов друг с другом) и *воздействие* (одного физического объекта на другой).

<sup>2</sup> Задание взаимодействия  $\mathfrak{F}$  для пар физических объектов из  $A \times A$  не означает, что это взаимодействие имеет место для любой пары физических объектов.

Это скалярное действие относится к фундаментальному объекту 1, являющемуся источником поля внешней симметрии 1 и взаимодействующему с полем внешней симметрии 2, создаваемым источником 2. Здесь

$$p^K_I(1), \quad m^{KK_1}_I(1), \quad w^{KK_2K_1}_I(1)$$

– параметры источника (фундаментального объекта) 1,

$$l^K_I(1), \quad l^{KK_1}_I(1), \quad l^{KK_2K_1}_I(1)$$

– переменные поля внешней симметрии 1,

$$\frac{Dy^I(x)}{\partial x^K}(2) = l^K_I(2), \quad \frac{Dl^{K_1}_{K_1}}{\partial x^K}(2) = l^{K_1K}_I(2),$$

$$\frac{Dl^{K_1K_2}}{\partial x^K}(2) = l^{K_1K_2K}_I(2)$$

– переменные поля внешней симметрии 2.

Для того, чтобы сделать наши выкладки более прозрачными, обозначим через  $p_\alpha(1)$  параметры фундаментального объекта 1, где индекс  $\alpha$  принимает значения 1, 2, 3, причем

$$p_1(1) \sim p^K_I(1), \quad p_2(1) \sim m^{KK_1}_I(1),$$

$$p_3(1) \sim w^{KK_2K_1}_I(1).$$

Кроме того, обозначим через  $l_\alpha(1)$  переменные поля внешней симметрии 1, причем

$$l_1(1) \sim l^K_I(1), \quad l_2(1) \sim l^{KK_1}_I(1),$$

$$l_3(1) \sim l^{KK_2K_1}_I(1).$$

Кроме того, обозначим через  $l^\alpha(2)$  переменные поля внешней симметрии 2, причем

$$l^1(2) \sim l^K_I(2), \quad l^2(2) \sim l^{K_1K}_I(2),$$

$$l^3(2) \sim l^{K_1K_2K}_I(2).$$

В приведенных обозначениях скалярное действие (1) записывается следующим образом:

$${}_1\mathcal{S} = - \int (p_\alpha(1) + C_\alpha \cdot l_\alpha(1)) \cdot l^\alpha(2) \cdot d\Omega. \quad (2)$$

Условие симметричности взаимодействия как бинарного отношения требует, чтобы скалярное действие было симметрично относительно взаимодействующих физических объектов 1 и 2. Это означает, что скалярное действие (2) должно быть скорректировано и записано в следующем виде:

$${}_1\mathcal{S} = - \int (p_\alpha(1) + C_\alpha \cdot l_\alpha(1)) \cdot (c_\alpha \cdot p^\alpha(2) + l^\alpha(2)) \cdot d\Omega. \quad (3)$$

Здесь  $p^\alpha(2)$  параметры фундаментального объекта 2,  $c_\alpha$  это постоянные коэффициенты.

Из скалярного действия (3) следует, что при описании взаимодействующих фундаментальных объектов

1 и 2, являющихся источниками полей, соответственно 1 и 2, необходимо учитывать

1) взаимодействие фундаментального объекта 1 с полем 2;

2) взаимодействие фундаментального объекта 2 с полем 1;

3) непосредственное взаимодействие фундаментальных объектов 1 и 2 между собой;

3) непосредственное взаимодействие полей 1 и 2 между собой.

Все указанные взаимодействия следует считать близкодействующими.

В том случае, если в соотношении (3) слагаемое  $c_\alpha \cdot p^\alpha(2)$  много больше слагаемого  $l^\alpha(2)$  или слагаемое  $c_\alpha \cdot p^\alpha(2)$  много меньше слагаемого  $l^\alpha(2)$ , скалярное действие (3) сводится к скалярному действию (2).

## 2. Класс и тип взаимодействий

Рассмотрим множество наборов из  $n$  взаимодействующих физических объектов  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Они составляют подмножество в  $A^n$ . Таким образом, взаимодействие  $n$  физических объектов определяет на множестве физических объектов  $A$   $n$ -арное отношение.

Назовем *классом взаимодействия*<sup>3</sup> в  $A$  по отношению к взаимодействию  $\mathfrak{F}$  множество всех физических объектов из  $A$ , взаимодействующих с заданным физическим объектом  $a$ . Обозначим класс взаимодействия  $\text{cl}(a)$ . Класс  $\text{cl}(a)$  есть подмножество множества физических объектов  $A$  ( $\text{cl}(a) \subset A$ ), в то время как  $B$  есть подмножество множества пар физических объектов  $A \times A$ . Качество, присущее физическим объектам, объединенным в один класс, назовем *типом взаимодействия*. Класс взаимодействия может быть определен с помощью любого физического объекта, входящего в этот класс. Действительно, если  $b \in \text{cl}(a)$ , то в силу транзитивности взаимодействия из  $c \mathfrak{F} a$  следует  $c \mathfrak{F} b$ . Из транзитивности взаимодействия также следует, что два класса взаимодействия либо совпадают, либо не пересекаются. Действительно, пусть даны два класса взаимодействия  $\text{cl}(a), \text{cl}(b) \subset A$ , тогда, если существует  $c$ , такое, что  $a \mathfrak{F} c$  и  $b \mathfrak{F} c$ , то  $\text{cl}(a) = \text{cl}(b)$ . Число типов взаимодействия равно числу классов взаимодействия.

В настоящее время установлены четыре типа взаимодействия: электромагнитное, слабое, сильное и гравитационное. В своих рассуждениях для определенности будем апеллировать к взаимодействию электрических зарядов (электрически заряженных тел), хотя наши рассуждения будут иметь общий характер и относиться к взаимодействиям других типов.

<sup>3</sup> Здесь мы перефразируем определение *класса эквивалентности*.

У физических объектов, вступающих во взаимодействие определенного типа, устанавливается наличие некоторого количества  $q$  – *заряда* соответствующего типа. Введение понятия заряда  $q$  как физической величины становится возможным после того, как изобретен способ сравнения зарядов и способ сложения зарядов. Заметим также, что таких способов может быть несколько, они могут быть более или менее совершенны и совершенствоваться<sup>4</sup>. Важно, что все они имеют инвариантное содержание как законы композиции, определяющие заряд как векторную или скалярную величину над полем действительных чисел, то есть на множестве значений зарядов имеют место законы

- сложения зарядов

$$q = q_1 + q_2,$$

- умножения заряда на число

$$q = \alpha \cdot q_1, \quad \text{где } \alpha \text{ действительное число,}$$

которые связаны между собой законом дистрибутивности.

Для электромагнитного взаимодействия заряд есть скалярная величина над полем действительных чисел. Для гравитационного взаимодействия заряд есть скалярная величина над полем положительных действительных чисел. Для сильного взаимодействия заряд есть векторная величина над полем действительных чисел.

Особенность взаимодействия зарядов состоит в том, что это взаимодействие осуществляется на расстоянии, без непосредственного контакта зарядов друг с другом. Этот факт находится в противоречии с повседневным опытом и здравым смыслом, поэтому вызвал к жизни точку зрения, согласно которой между взаимодействующими зарядами находится промежуточный "агент", причем он сначала взаимодействует с одним зарядом путем непосредственного контакта, затем с другим, также непосредственно контактируя с ним. Таким образом, "агент" осуществляет перенос взаимодействия от одного заряда к другому. Инициатором этой точки зрения был Ньютон. В дальнейшем эта концепция получила развитие в двух разновидностях:

- переносчиком взаимодействия между зарядами является *промежуточный объект*;
- переносчиком взаимодействия между зарядами является *поле*<sup>5</sup>.

Так как обе разновидности "агента" относятся к одному явлению – взаимодействию зарядов, то они должны быть эквивалентны. Вместе с тем, в настоящее время обе концепции не адекватны друг другу, что свидетельствует об их взаимном несовершенстве и служит импульсом для их развития<sup>6</sup>. В этой Главе мы сформулируем подход к описанию промежуточных объектов и, в частности, промежуточных частиц<sup>7</sup>. К промежуточным частицам мы отнесем фотон,  $W$  и  $Z$ -бозоны, глюоны и мезоны, а также гипотетические (им суперсимметричные) частицы.

Согласно нашей общей позиции, элементарные частицы (в том числе и промежуточные) характеризуются вектором действия. Далее нужно учесть, что промежуточная частица, взаимодействуя с фундаментальной частицей, меняет характеристики движения фундаментальной частицы. Для этого мы рассматриваем действие промежуточной частицы как оператор, действующий на вектор действия фундаментальной частицы. Если удастся показать, что операторы действия промежуточной частицы образуют алгебру, то тогда вступят в силу общие соображения, изложенные в Главе 3.3, согласно которым уравнения структуры алгебры действия преобразуются в квантовые уравнения для частицы (в нашем случае промежуточной). Совместное рассмотрение алгебр действия фундаментальной и промежуточной частиц должно привести к системе квантовых уравнений, описывающих взаимодействие указанных частиц. Такова канва рассуждений, которой будем следовать далее.

## II. ПРОСТРАНСТВО ДЕЙСТВИЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

Напомним, что промежуточный объект описывается вектором действия

$$\mathbf{S},$$

подобным вектору линейного преобразования пространства-времени. Множество таких векторов составляет векторное пространство действия промежуточных объектов, обозначенное  $\mathbf{S}_1$ . Кроме того, напомним, что фундаментальный объект описывается контравариантным вектором действия

$$\mathbf{S}.$$

Множество таких векторов составляет векторное пространство действия фундаментальных объектов, обозначенное  $\mathbf{S}$ . Размерность векторов действия – Дж·сек.

<sup>4</sup> В основе указанных способов может лежать, например, сравнение и сложение сил, поставленных в соответствие зарядам.

<sup>5</sup> Поле как часть пространства, в которой на вносимый заряд действует сила.

<sup>6</sup> В Главах 5.2 и 5.3 мы вернемся к этому вопросу.

<sup>7</sup> Обычно термин "промежуточные" используется по отношению к частицам, переносящим слабое взаимодействие. Мы этот термин распространим на все частицы-переносчики взаимодействия.

### 1. Воздействие промежуточного объекта на фундаментальный объект

Исходим из общего представления о том, что воздействие промежуточного объекта на фундаментальный объект приводит к возникновению *другого* фундаментального объекта, точнее фундаментального объекта с другими энергетическими и динамическими характеристиками. Такая предпосылка позволяет рассматривать вектор действия промежуточного объекта  $\mathbf{S}$  как некоторый оператор  $\mathbf{S}(\ )$ , который ставит в соответствие вектору действия фундаментального объекта  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}$  вектор действия другого фундаментального объекта  $\mathbf{S}' \in \mathbb{S}$ . Указанное соответствие запишем так:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}(\mathbf{S}). \quad (4)$$

Можно также говорить об операторе  $\mathbf{S}(\ )$  как о *преобразовании* вектора  $\mathbf{S}$  в вектор  $\mathbf{S}'$ . Таким образом, воздействие промежуточного объекта на фундаментальный объект можно рассматривать как преобразование вектора действия фундаментального объекта.

Потребуем, чтобы преобразование  $\mathbf{S}(\ )$  было *линейным*, то есть выполнялось соотношение

$$\mathbf{S}(\alpha_1 \cdot \mathbf{S}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{S}_2) = \alpha_1 \cdot \mathbf{S}(\mathbf{S}_1) + \alpha_2 \cdot \mathbf{S}(\mathbf{S}_2).$$

Вектор действия фундаментального объекта  $\mathbf{S}$  может быть разложен по базисным векторам  $\mathbf{e}_I$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_0 S^0 + \mathbf{e}_{i_1} S^{i_1} + \dots + \mathbf{e}_{1324} S^{1324} = \mathbf{e}_I \cdot S^I.$$

Поэтому вектор  $\mathbf{S}' = \mathbf{S}(\mathbf{S})$  в силу линейности преобразования может быть записан в виде

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}(\mathbf{e}_I) \cdot S^I.$$

Введем разложение векторов  $\mathbf{S}(\mathbf{e}_I)$  по базисным векторам  $\mathbf{e}_M$

$$\mathbf{S}(\mathbf{e}_I) = \frac{1}{S_0} \cdot \mathbf{e}_M \cdot S^M_I.$$

Здесь  $S^M_I$  – коэффициенты разложения, имеющие размерность действия,  $S_0$  – коэффициент, имеющий размерность действия, и введенный для того, чтобы выражение в правой части было безразмерным.. Используя это соотношение, получим

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{S_0} \cdot \mathbf{e}_M \cdot S^M_I \cdot S^I.$$

Для действия в безразмерной форме это выражение принимает вид

$$\mathbf{S}' = \mathbf{e}_M \cdot S^M_I \cdot S^I. \quad (5)$$

### 2. Векторное пространство действия промежуточных объектов

Множество векторов действия промежуточного объекта, или множество *линейных преобразований*  $\mathbb{S}_1$ , рассматривается как векторное пространство, то есть на нем определены операции сложения  $\oplus$

$$\mathbf{S}_1(\ ) \oplus \mathbf{S}_2(\ ) \in \mathbb{S}_1$$

и умножения на число  $\odot$

$$\alpha \odot \mathbf{S}(\ ) \in \mathbb{S}_1.$$

Эти операции удовлетворяют закону дистрибутивности

$$\alpha \odot [\mathbf{S}_1(\ ) \oplus \mathbf{S}_2(\ )] = \alpha \odot \mathbf{S}_1(\ ) \oplus \alpha \odot \mathbf{S}_2(\ ). \quad (6)$$

В результате множество линейных преобразований  $\mathbb{S}_1$  становится векторным пространством. Соответствие закона дистрибутивности в  $\mathbb{S}_1$  закону дистрибутивности в  $\mathbb{S}$

$$\alpha \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) = \alpha \cdot \mathbf{S}_1 + \alpha \cdot \mathbf{S}_2$$

можно рассматривать как условия согласования сложений " $\oplus$ " и "+" и умножений " $\odot$ " и " $\cdot$ ". Эти условия сводятся к тому, что  $\oplus$ -сложение становится  $+$ -сложением, а  $\odot$ -умножение становится  $\cdot$ -умножением после действия оператора (6) на вектор  $\mathbf{S}$ .

На векторном пространстве  $\mathbb{S}_1$  введем *базисные преобразования*  $\mathbf{I}^I_K(\ )$ , чтобы

$$\mathbf{S}(\ ) = \mathbf{I}^I_M(\ ) \cdot S^M_I,$$

где  $S^M_I$  – координаты вектора действия промежуточного объекта, или *координаты* преобразования  $\mathbf{S}(\ )$ , представляющие собой ранее введенные коэффициенты разложения векторов  $\mathbf{S}(\mathbf{e}_I)$  по базисным векторам  $\mathbf{e}_M$ .

Найдем правило преобразования базисных векторов  $\mathbf{e}_K$  пространства  $\mathbb{S}$  с помощью базисных преобразований  $\mathbf{I}^I_M(\ )$  из того условия, что линейное преобразование вектора  $\mathbf{S} = \mathbf{e}_K \cdot S^K$  должно иметь вид (5). Таким образом, должно выполняться

$$\mathbf{S}(\mathbf{S}) = \mathbf{I}^I_M(\mathbf{e}_K) \cdot S^M_I \cdot S^K = \mathbf{e}_M \cdot S^M_I \cdot S^I.$$

Отсюда

$$\mathbf{I}^I_M(\mathbf{e}_K) = \mathbf{e}_M \cdot \delta^I_K, \quad (7)$$

где  $\delta^I_K$  – символ Кронекера.

### 3. Левое и правое воздействия промежуточного объекта на фундаментальный объект

Воздействие промежуточного объекта на фундаментальный объект, представленное линейным преобразованием вектора действия фундаментального объекта

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}(\mathbf{S}),$$



можно рассматривать не в операторной форме, а в алгебраической как вид умножения, используя символ  $\circ$ -умножения. При этом также нужно различать два вида линейного преобразования и соответственно два вида умножения – левое и правое.

3.1. Левое воздействие промежуточного объекта на фундаментальный объект

Для левого умножения имеем

$${}_l\mathbf{S}' = {}_l\mathbf{S} \circ {}_l\mathbf{S}.$$

Левый закон композиции для базисных векторов (7) приобретает вид

$${}_l\mathbf{I}_M^I \circ {}_l\mathbf{e}_K = \delta^I_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M. \quad (8)$$

Действительно, пусть

$${}_l\mathbf{S} = {}_lS^M_I \cdot {}_l\mathbf{I}_M^I \quad \text{и} \quad {}_l\mathbf{S} = {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lS^K.$$

Тогда

$$\begin{aligned} {}_l\mathbf{S}' &= {}_l\mathbf{S} \circ {}_l\mathbf{S} = {}_lS^M_I \cdot {}_lS^K \cdot {}_l\mathbf{I}_M^I \circ {}_l\mathbf{e}_K = \\ &= {}_l\mathbf{e}_M \cdot {}_lS^M_K \cdot {}_lS^K. \end{aligned}$$

3.2. Правое воздействие промежуточного объекта на фундаментальный объект

Для правого умножения имеем

$${}_r\mathbf{S}' = {}_r\mathbf{S} \circ {}_r\mathbf{S}.$$

Правый закон композиции для базисных векторов (7) приобретает вид

$${}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}_M^I = \delta^I_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M. \quad (9)$$

Действительно, пусть

$${}_r\mathbf{S} = {}_rS^M_I \cdot {}_r\mathbf{I}_M^I \quad \text{и} \quad {}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rS^K.$$

Тогда

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{S}' &= {}_r\mathbf{S} \circ {}_r\mathbf{S} = {}_rS^K \cdot {}_rS^M_I \cdot {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}_M^I = \\ &= {}_r\mathbf{e}_M \cdot {}_rS^M_K \cdot {}_rS^K. \end{aligned}$$

4. Группа и алгебра действия промежуточных объектов

На множестве векторов действия  $\mathbf{S}_1$  введем закон композиции, то есть двум преобразованиям  $\mathbf{S}_1(\ )$  и  $\mathbf{S}_2(\ )$  ставится в соответствие преобразование  $\mathbf{S}(\ )$ , называемое композицией, или произведением преобразований  $\mathbf{S}_1(\ )$  и  $\mathbf{S}_2(\ )$ . Возможны два вида композиции:

левая, когда

$${}_l\mathbf{S}(\ ) = \mathbf{S}_2(\mathbf{S}_1(\ )), \quad (10)$$

и правая, когда

$${}_r\mathbf{S}(\ ) = \mathbf{S}_1(\mathbf{S}_2(\ )). \quad (11)$$

Здесь  ${}_l\mathbf{S}(\ )$ ,  ${}_r\mathbf{S}(\ )$ ,  $\mathbf{S}_1(\ )$ ,  $\mathbf{S}_2(\ ) \in \mathbf{S}_1$ .

Потребуем, чтобы композиция преобразований была групповым законом, то есть, чтобы на множестве линейных преобразований  $\mathbf{S}_1$  было определено:

1. единичное преобразование  $\delta(\ )$ , для которого выполняются соотношения

$$\delta(\mathbf{S}(\ )) = \mathbf{S}(\ ), \quad \mathbf{S}(\delta(\ )) = \mathbf{S}(\ );$$

2. обратное преобразование  $\mathbf{S}^{-1}(\ )$ , для которого выполняются соотношения

$$\mathbf{S}(\mathbf{S}^{-1}(\ )) = \delta(\ ), \quad \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{S}(\ )) = \delta(\ ).$$

Указанные определения делают множество векторов действия промежуточных объектов  $\mathbf{S}_1$  группой. Точнее, закону композиции (10) соответствует левая группа действия промежуточных объектов  ${}_l\mathbf{S}_1$ , а закону композиции (11) соответствует правая группа действия промежуточных объектов  ${}_r\mathbf{S}_1$ .

4.1. Левая группа и левая алгебра действия промежуточных объектов

Найдем связь между базисными векторами и координатами преобразования-композиции и базисными векторами и координатами преобразований, участвующих в композиции, для левой группы действия промежуточных объектов  ${}_l\mathbf{S}_1$ . Для этого перепишем закон композиции (10), подчеркнув, что все линейные преобразования, участвующие в композиции, относятся к левой группе  ${}_l\mathbf{S}_1$

$${}_l\mathbf{S}(\ ) = {}_l\mathbf{S}_2({}_l\mathbf{S}_1(\ )), \quad (12)$$

где  ${}_l\mathbf{S}(\ )$ ,  ${}_l\mathbf{S}_1(\ )$ ,  ${}_l\mathbf{S}_2(\ ) \in {}_l\mathbf{S}_1$ .

Запишем преобразования, участвующие в композиции, через базисные преобразования и координаты (матрицы) преобразований

$$\begin{aligned} {}_l\mathbf{S}(\ ) &= {}_l\mathbf{I}_K^I(\ ) \cdot {}_lS^K_I, \\ {}_l\mathbf{S}_2(\ ) &= {}_l\mathbf{I}_K^L(\ ) \cdot {}_l(S_2)^K_L, \quad {}_l\mathbf{S}_1(\ ) = {}_l\mathbf{I}_M^I(\ ) \cdot {}_l(S_1)^M_I. \end{aligned}$$

Исходим из того, что матрицы-координаты преобразования-композиции равны произведению матриц-координат преобразований, участвующих в композиции,

$${}_lS^K_I = {}_l(S_2)^K_N \cdot {}_l(S_1)^N_I, \quad (13)$$

то есть

$${}_l\mathbf{S}(\ ) = {}_l\mathbf{I}_K^I(\ ) \cdot {}_l(S_2)^{K_N} \cdot {}_l(S_1)^{N_I}. \quad (14)$$

С другой стороны из выражения (12) имеем

$${}_l\mathbf{S}(\ ) = {}_l\mathbf{S}_2({}_l\mathbf{S}_1(\ )) = {}_l\mathbf{I}_K^L({}_l\mathbf{I}_M^I(\ )) \cdot {}_l(S_2)^{K_L} \cdot {}_l(S_1)^{M_I}.$$

Из сравнения этого выражения с равенством (14) получим

$$\begin{aligned} {}_l\mathbf{I}_K^L({}_l\mathbf{I}_M^I(\ )) \cdot {}_l(S_2)^{K_L} \cdot {}_l(S_1)^{M_I} &= \\ &= {}_l\mathbf{I}_K^I(\ ) \cdot {}_l(S_2)^{K_L} \cdot \delta^L_M \cdot {}_l(S_1)^{M_I}. \end{aligned}$$

Отсюда следует закон композиции базисных преобразований в левой группе действия промежуточных объектов  ${}_l\mathbf{S}_1$

$${}_l\mathbf{I}_K^L({}_l\mathbf{I}_M^I(\ )) = \delta^L_M \cdot {}_l\mathbf{I}_K^I(\ ).$$

Левый закон композиции, действующий на векторах пространства  ${}_l\mathbf{S}_1$ , можно рассматривать как вид умножения и записывать его в алгебраической, а не в операторной форме

$${}_l\mathbf{S} = {}_l\mathbf{S}_2 \circ {}_l\mathbf{S}_1. \quad (15)$$

Закон композиции для базисных векторов приобретает вид о-умножения

$${}_l\mathbf{I}_K^L \circ {}_l\mathbf{I}_M^I = \delta^L_M \cdot {}_l\mathbf{I}_K^I. \quad (16)$$

Будем полагать, что законы композиции и сложения линейных преобразований связаны законом дистрибутивности. Вследствие этого множество векторов действия (линейных преобразований)  ${}_l\mathbf{S}_1$  является кольцом. А так как оно вместе с тем является векторным пространством, то, следовательно, оно представляет собой *алгебру*. Алгебру векторов действия промежуточных объектов, основанную на композиции (12), назовем *левой* и обозначим так же, как и группу,  ${}_l\mathbf{S}_1$ .

#### 4.2. Правая группа и правая алгебра действия промежуточных объектов

Найдем связь между базисными векторами и координатами преобразования-композиции и базисными векторами и координатами преобразований, участвующих в композиции, для правой группы действия промежуточных объектов  ${}_r\mathbf{S}_1$ . Для этого перепишем закон композиции (11), подчеркнув, что все линейные преобразования, участвующие в композиции, относятся к правой группе  ${}_r\mathbf{S}_1$

$${}_r\mathbf{S}(\ ) = {}_r\mathbf{S}_1({}_r\mathbf{S}_2(\ )), \quad (17)$$

где  ${}_r\mathbf{S}(\ ), {}_r\mathbf{S}_1(\ ), {}_r\mathbf{S}_2(\ ) \in {}_r\mathbf{S}_1$ .

Запишем преобразования, участвующие в композиции, через базисные преобразования и координаты (матрицы) преобразований

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{S}(\ ) &= {}_r\mathbf{I}_M^L(\ ) \cdot {}_r\mathbf{S}^M_L, \\ {}_r\mathbf{S}_1(\ ) &= {}_r\mathbf{I}_K^L(\ ) \cdot {}_r(S_1)^{K_L}, \quad {}_r\mathbf{S}_2(\ ) = {}_r\mathbf{I}_M^I(\ ) \cdot {}_r(S_2)^{M_I}. \end{aligned}$$

Исходим из того, что матрицы-координаты преобразования-композиции равны произведению матриц-координат преобразований, участвующих в композиции

$${}_r\mathbf{S}^M_L = {}_r(S_2)^{M_N} \cdot {}_r(S_1)^{N_L}, \quad (18)$$

то есть

$${}_r\mathbf{S}(\ ) = {}_r\mathbf{I}_M^L(\ ) \cdot {}_r(S_2)^{M_N} \cdot {}_r(S_1)^{N_L}. \quad (19)$$

С другой стороны из выражения (17) имеем

$${}_r\mathbf{S}(\ ) = {}_r\mathbf{S}_1({}_r\mathbf{S}_2(\ )) = {}_r\mathbf{I}_K^L({}_r\mathbf{I}_M^I(\ )) \cdot {}_r(S_2)^{M_I} \cdot {}_r(S_1)^{K_L}.$$

Из сравнения этого выражения с равенством (19) получим

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{I}_K^L({}_r\mathbf{I}_M^I(\ )) \cdot {}_r(S_2)^{M_I} \cdot {}_r(S_1)^{K_L} &= \\ &= {}_r\mathbf{I}_M^L(\ ) \cdot {}_r(S_2)^{M_I} \cdot \delta^I_K \cdot {}_r(S_1)^{K_L}. \end{aligned}$$

Отсюда следует закон композиции базисных преобразований в правой группе действия промежуточных объектов  ${}_r\mathbf{S}_1$

$${}_r\mathbf{I}_K^L({}_r\mathbf{I}_M^I(\ )) = \delta^I_K \cdot {}_r\mathbf{I}_M^L(\ ).$$

Правый закон композиции, действующий на векторах пространства  ${}_r\mathbf{S}_1$ , можно рассматривать как вид умножения и записывать его в алгебраической, а не в операторной форме

$${}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{S}_1 \circ {}_r\mathbf{S}_2. \quad (20)$$

Закон композиции для базисных векторов приобретает вид о-умножения

$${}_r\mathbf{I}_K^L \circ {}_r\mathbf{I}_M^I = \delta^I_K \cdot {}_r\mathbf{I}_M^L. \quad (21)$$

Будем полагать, что законы композиции и сложения линейных преобразований связаны законом дистрибутивности. Вследствие этого множество векторов действия (линейных преобразований)  ${}_r\mathbf{S}_1$  является кольцом. А так как оно вместе с тем является векторным пространством, то, следовательно, оно представляет собой *алгебру*. Алгебру векторов действия промежуточных объектов, основанную на умножении (17), назовем *правой* и обозначим так же, как и группу,  ${}_r\mathbf{S}_1$ .

Единицей алгебр является вектор  $\delta(\ ) = \delta^M_L \cdot \mathbf{I}_M^L(\ )$ .

### III. КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

#### 1. Системообразующий постулат

Напомним постулат, относящийся к квантовым явлениям (Глава 3.3). Квантовые явления, то есть дискретность динамических параметров, обусловлены тем, что множество векторов действия физических объектов составляет алгебру, то есть на множестве этих векторов, помимо операций сложения и умножения на число, имеет место операция умножения. Уравнения структуры алгебры действия и ее подалгебр могут быть представлены как *квантовые уравнения (уравнения дискретности)* динамических параметров.

В частности, в тех явлениях, в которых участвуют промежуточные объекты, имеет место дискретность динамических параметров промежуточных объектов. Она обусловлена тем, что множество векторов действия промежуточных объектов составляет алгебру. Уравнения структуры алгебры действия промежуточных объектов могут быть представлены как квантовые уравнения динамических параметров этих объектов.

#### 2. Уравнения структуры алгебры действия промежуточных объектов

##### 2.1. Правая алгебра действия промежуточных объектов

Далее рассмотрим уравнения структуры правой алгебры действия промежуточных объектов  ${}_r\mathbf{S}_1$ , определяемые дифференцированием закона умножения векторов (20). Рассмотрим дифференциал вектора действия  ${}_r\mathbf{S}$ . Будем различать дифференциалы индексом, например  $d_1, d_2, \dots$ , если дифференцирование выполняется по векторам  ${}_r\mathbf{S}_1, {}_r\mathbf{S}_2, \dots$  соответственно. Из выражения (20) следует

$$d_1 {}_r\mathbf{S} = d_r \mathbf{S}_1 \circ {}_r\mathbf{S}_2, \quad d_2 {}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{S}_1 \circ d_r \mathbf{S}_2.$$

Из этих выражений получаем

$$d_r \mathbf{S}_2 = ({}_r\mathbf{S}_1)^{-1} \circ d_2 {}_r\mathbf{S}, \quad d_r \mathbf{S}_1 = d_1 {}_r\mathbf{S} \circ ({}_r\mathbf{S}_2)^{-1}. \quad (22)$$

Введем второй дифференциал  $d_2 d_1 {}_r\mathbf{S}$ . Из выражения (20) для него имеет место

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S} = d_r \mathbf{S}_1 \circ d_r \mathbf{S}_2.$$

Используя выражение (22), получим<sup>8</sup>

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S} = d_1 {}_r\mathbf{S} \circ ({}_r\mathbf{S})^{-1} \circ d_2 {}_r\mathbf{S}.$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при

$${}_r\mathbf{S} = ({}_r\mathbf{S})^{-1} = \mathbf{I}_I^K \cdot \delta^I_K,$$

это уравнение принимает вид

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S} = d_1 {}_r\mathbf{S} \circ d_2 {}_r\mathbf{S}. \quad (23)$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* правой алгебры действия промежуточных объектов  ${}_r\mathbf{S}_1$  в векторной форме.

Подставляя в равенство (23) выражения дифференциалов векторов действия через дифференциалы координат и пользуясь законом умножения базисных векторов (21), получим уравнения структуры в координатной форме

$$d_2 d_1 {}_r S^I_K = d_2 {}_r S^I_L \cdot d_1 {}_r S^L_K. \quad (24)$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того чтобы перейти к размерному действию, необходимо переписать уравнения (23) и (24) соответственно следующим образом:

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} d_1 {}_r\mathbf{S} \circ d_2 {}_r\mathbf{S}. \quad (25)$$

и

$$d_2 d_1 {}_r S^I_K = \frac{1}{S_0} \cdot d_2 {}_r S^I_L \cdot d_1 {}_r S^L_K. \quad (26)$$

Здесь постоянный коэффициент  $S_0$ , векторы действия  ${}_r\mathbf{S}$  и координаты векторов действия  ${}_r S^I_L$  имеют размерность действия.

##### 2.2. Левая алгебра действия промежуточных объектов

Далее рассмотрим уравнения структуры левой алгебры действия промежуточных объектов  ${}_l\mathbf{S}_1$ , определяемые дифференцированием закона умножения векторов (15). Рассмотрим дифференциал вектора действия  ${}_l\mathbf{S}$ . Будем различать дифференциалы индексом, например  $d_1, d_2, \dots$ , если дифференцирование выполняется по векторам  ${}_l\mathbf{S}_1, {}_l\mathbf{S}_2, \dots$  соответственно. Из выражения (15) следует

$$d_2 {}_l\mathbf{S} = d_l \mathbf{S}_2 \circ {}_l\mathbf{S}_1, \quad d_1 {}_l\mathbf{S} = {}_l\mathbf{S}_2 \circ d_l \mathbf{S}_1.$$

<sup>8</sup> Здесь учтено, что для выражения (20)

$${}_r\mathbf{S}^{-1} = ({}_r\mathbf{S}_2)^{-1} \circ ({}_r\mathbf{S}_1)^{-1}.$$

Из этих выражений получаем

$$d_l S_2 = d_2 \circ (l S_1)^{-1}, \quad d_l S_1 = (l S_2)^{-1} \circ d_l l S. \quad (27)$$

Введем второй дифференциал  $d_2 d_l l S$ . Из выражения (15) для него имеет место

$$d_2 d_l l S = d_l S_2 \circ d_l l S_1.$$

Используя соотношение (27), получим<sup>9</sup>

$$d_2 d_l l S = d_2 l S \circ (l S)^{-1} \circ d_l l S.$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при

$$l S = (l S)^{-1} = \mathbf{I}_I^K \cdot \delta^K_I,$$

это уравнение принимает вид

$$d_2 d_l l S = d_2 l S \circ d_l l S. \quad (28)$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* левой алгебры действия промежуточных объектов  $l S_1$  в векторной форме.

Подставляя в равенство (28) выражения дифференциалов векторов действия через дифференциалы координат и пользуясь законом умножения базисных векторов (16), получим уравнения структуры в координатной форме

$$d_2 d_l l S^K_I = d_2 l S^I_L \cdot d_l l S^L_K. \quad (29)$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того чтобы перейти к размерному действию, необходимо переписать уравнения (28) и (29) соответственно следующим образом:

$$d_2 d_l l S = \frac{1}{S_0} d_2 l S \circ d_l l S \quad (30)$$

и

$$d_2 d_l l S^K_I = \frac{1}{S_0} \cdot d_2 l S^I_L \cdot d_l l S^L_K. \quad (31)$$

Здесь постоянный коэффициент  $S_0$ , векторы действия  $l S$  и координаты векторов действия  $l S^I_L$  имеют размерность действия.

### 3. Квантовые уравнения для свободного промежуточного объекта

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые уравнения, которыми определяется квантовая механика промежуточных частиц. Перейдем к более привычной записи квантовых уравнений. При этом необходимо учесть, что квантовые уравнения, как и уравнения структуры, существуют в двух модификациях – для правой и для левой алгебр действия промежуточных объектов.

<sup>9</sup> Здесь учтено, что для (15)

$$l S^{-1} = (l S_1)^{-1} \circ (l S_2)^{-1}.$$

### 3.1. Правая алгебра действия промежуточных объектов

В уравнении структуры (25) введем обозначение

$$d_l r S = r \psi_1$$

и в уравнении (26) соответственно введем обозначение

$$d_l r S^L_K = r \psi^L_K.$$

Будем рассматривать функцию  $r \psi_1$  с координатами  $r \psi^L_K$  как *правую* волновую функцию промежуточного объекта. Дифференциал  $d_2$  обозначим  $d$ . Уравнение структуры (25), записанное по отношению к правой волновой функции

$$d r \psi_1 = \frac{1}{S_0} r \psi_1 \circ d r S, \quad (32)$$

и уравнение структуры (26), записанное по отношению к координатам правой волновой функции

$$d r \psi^I_K = \frac{1}{S_0} \cdot d r S^I_L \cdot r \psi^L_K, \quad (33)$$

представляют собой *правые квантовые уравнения для промежуточного объекта* в дифференциалах.

Правый вектор действия промежуточного объекта является функцией координат обобщенного пространства-времени

$$r S = r S(x).$$

Производную от правого вектора действия  $r S(x)$  по координате пространства-времени, взятую с обратным знаком, определим как вектор *правого момента* промежуточного объекта

$$r M_M = -\frac{\partial r S}{\partial x^M},$$

который может быть записан через координаты момента следующим образом:

$$r M_M = r \mathbf{I}_I^L \cdot r m^I_{LM},$$

где

$$r m^I_{LM} = -\frac{\partial r S^I_L}{\partial x^M}.$$

С использованием правого момента правые квантовые уравнения переписываются следующим образом. Уравнение (32) принимает вид

$$\frac{\partial r \psi_1}{\partial x^M} = -\frac{1}{S_0} r \psi_1 \circ r M_M. \quad (34)$$

Уравнение (33) принимает вид

$$\frac{\partial r \psi^I_K}{\partial x^M} = -\frac{1}{S_0} r m^I_{LM} \cdot r \psi^L_K. \quad (35)$$

Далее придадим этому уравнению форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные константы  ${}_I C^{MN}$ , выполнив соответствующие суммирования. Получим

$${}_I C^{MN} \cdot \frac{\partial {}_r \psi^K}{\partial x^M} = -\frac{1}{S_0} {}_I C^{MN} \cdot {}_r m^I{}_{LM} \cdot {}_r \psi^K. \quad (36)$$

(Как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Это уравнение и есть правое квантовое уравнение для свободного промежуточного объекта в самом общем виде. Из сравнения с формулой (19) Главы 4.4. видно, что структура уравнения (36) аналогична структуре квантового уравнения для фундаментального объекта.

### 3.2. Левая алгебра действия промежуточных объектов

В уравнении структуры (30) введем обозначение

$$d_1 {}_I S = {}_I \psi_1$$

и в уравнении (31) соответственно введем обозначение

$$d_1 {}_I S^L{}_K = {}_I \psi^L{}_K.$$

Будем рассматривать функцию  ${}_I \psi_1$  с координатами  ${}_I \psi^L{}_K$  как левую волновую функцию промежуточного объекта. Дифференциал  $d_2$  обозначим  $d$ . Уравнение структуры (30), записанное по отношению к левой волновой функции

$$d_1 {}_I \psi_1 = \frac{1}{S_0} d_1 S \circ {}_I \psi_1, \quad (37)$$

и уравнение структуры (31), записанное по отношению к координатам левой волновой функции

$$d_1 \psi^I{}_K = \frac{1}{S_0} \cdot d_1 S^I{}_L \cdot {}_I \psi^L{}_K, \quad (38)$$

представляют собой левые квантовые уравнения для промежуточного объекта в дифференциалах.

Левый вектор действия промежуточного объекта является функцией координат обобщенного пространства-времени

$${}_I S = {}_I S(x).$$

Производную от левого вектора действия  ${}_I S(x)$  по координате пространства-времени, взятую обратным знаком, определим как вектор *левого момента* промежуточного объекта

$${}_I M_M = -\frac{\partial {}_I S}{\partial x^M},$$

который может быть записан через координаты момента следующим образом:

$${}_I M_M = {}_I \mathbf{I}^L{}_I \cdot {}_I m^I{}_{LM},$$

где

$${}_I m^I{}_{LM} = -\frac{\partial {}_I S^I{}_L}{\partial x^M}.$$

С использованием левого импульса левые квантовые уравнения для промежуточного объекта переписываются следующим образом. Уравнение (37) принимает вид

$$\frac{\partial {}_I \psi_1}{\partial x^M} = -\frac{1}{S_0} {}_I M_M \circ {}_I \psi_1. \quad (39)$$

Уравнение (38) принимает вид

$$\frac{\partial {}_I \psi^I{}_K}{\partial x^M} = -\frac{1}{S_0} {}_I m^I{}_{LM} \cdot {}_I \psi^L{}_K. \quad (40)$$

Далее придадим этому уравнению форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные константы  ${}_r C^{MN}$ , выполнив соответствующие суммирования. Получим

$${}_r C^{MN} \cdot \frac{\partial {}_I \psi^K}{\partial x^M} = -\frac{1}{S_0} {}_r C^{MN} \cdot {}_I m^I{}_{LM} \cdot {}_I \psi^L{}_K. \quad (41)$$

(Как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Это уравнение и есть левое квантовое уравнение для свободного промежуточного объекта в самом общем виде.

## IV. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО И ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТОВ

Современная квантовая теория не в состоянии описать движение электрона внутри атома, сопровождаемое излучением фотона. Такое движение разделяется на два процесса. Первый состоит в движении электрона по стационарной орбите. Второй состоит в переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую, сопровождаемом испусканием фотона. Сегодня описание первого процесса выполняется квантовой механикой, а описание второго процесса выполняется квантовой электродинамикой. Указанные разделы квантовой физики строятся на разных принципах и разном математическом формализме. С нашей точки зрения, эта разнородность является свидетельством несовершенства сегодняшних воззрений на квантовые явления.

Сформулируем условия, которым должна, по нашему мнению, удовлетворять квантовая физика, рассматривающая оба процесса в движении электрона внутри атома единым образом.

1. Должны иметь место две системы дифференциальных уравнений.

Первая относится к электрону и формулируется по отношению к его волновой функции.

Вторая относится к фотону и формулируется по отношению к его волновой функции.

2. Системы уравнений должны быть взаимосвязаны, то есть, в первую систему уравнений должны входить параметры фотона, а во вторую систему уравнений должны входить параметры электрона.
3. Системы уравнений должны зависеть от внешнего поля. Динамическое изменение внешнего поля должно выводить систему уравнений из одного устойчивого состояния и через переходной процесс приводить к другому устойчивому состоянию.
4. В переходном процессе изменяются параметры электрона и фотона. В частности, переходной процесс должен описывать возникновение фотона, то есть переход от состояния, в котором его волновая функция связана с электроном, к состоянию, когда волновая функция описывает свободный фотон, движущийся со скоростью света.
5. В частном случае первая система уравнений, относящаяся к электрону, должна сводиться к системе уравнений квантовой механики.

Поставленная столь общим образом задача поиска новой квантовой теории становится достаточно определенной, если исходить из развиваемой нами концепции, что квантовые явления есть следствие алгебраической структуры пространств, рассматриваемых в физике. Основные особенности нашей концепции суть следующие. Мы ввели пространство всех контра- и ковариантных тензоров над пространством-временем СТО в качестве *обобщенного пространства-времени*  $\mathcal{X}$  фундаментальных частиц. Действие фундаментальных частиц рассматривается как векторная величина. Множество векторов действия фундаментальных частиц образует алгебру  $\mathcal{S}$ , подобную алгебре  $\mathcal{X}$ . Волновая функция фундаментальной частицы трактуется как дифференциал вектора действия этой частицы. Уравнения релятивистской квантовой механики для свободных фундаментальных частиц выводятся из уравнений структуры для алгебры  $\mathcal{S}$ .

В настоящем Разделе указанная концепция квантовой теории развивается с целью описать взаимодействие фундаментальной и промежуточной частиц.

Исходим из следующих положений.

1. На пространстве действия фундаментальных объектов  $\mathcal{S}$  вводятся линейные преобразования с размерностью действия. Они составляют векторное пространство действия  $\mathcal{S}_1$  промежуточных объектов. Множество векторов действия промежуточных объектов  $\mathcal{S}_1$  является алгеброй. Вводится пространство действия фундаментальных и промежуточных объектов  $\mathcal{T} = (\mathcal{S} + \mathcal{S}_1)$ , ко-

торое также наделяется алгебраическими свойствами.

2. Частное дифференцирование закона умножения в алгебре  $\mathcal{T}$  приводит к специфическим дифференциальным соотношениям – уравнениям структуры. Уравнения структуры для алгебры  $\mathcal{T}$  приводятся к системе квантовых уравнений для фундаментального и промежуточного объектов, взаимодействующих друг с другом.

### 1. Системообразующий постулат

Напомним постулат, относящийся к квантовым явлениям (Глава 3.3). Квантовые явления, то есть дискретность динамических параметров, обусловлены тем, что множество векторов действия физических объектов составляет алгебру, то есть на множестве этих векторов, помимо операций сложения и умножения на число, имеет место операция умножения. *Уравнения структуры* алгебры действия и ее подалгебр могут быть представлены как *квантовые уравнения (уравнения дискретности)* динамических параметров.

В частности, в тех явлениях, в которых участвуют фундаментальные и промежуточные объекты, имеет место дискретность динамических параметров этих объектов. Она обусловлена тем, что множество векторов действия фундаментальных объектов и множество векторов действия промежуточных объектов составляют алгебру. Уравнения структуры алгебры действия фундаментальных и промежуточных объектов могут быть представлены как квантовые уравнения динамических параметров этих объектов.

### 2. Алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов

В настоящем Разделе обобщается представление о векторе действия, принятом ранее. Пространство действия фундаментальных и промежуточных объектов  $\mathcal{T}$  представляет собой сумму двух векторных пространств действия  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{S}_1$  фундаментальных и промежуточных объектов соответственно. Иначе говоря, вектор действия в рассматриваемом случае представлен суммой двух составляющих

$$\mathcal{S} + \mathcal{S}_1.$$

Здесь вектор  $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ , а вектор  $\mathbf{S} \in \mathcal{S}_1$ . При рассмотрении умножения векторов в пространстве действия  $\mathcal{T}$  необходимо различать правое и левое умножения и соответственно две модификации алгебры действия фундаментальных и промежуточных объектов – правую  ${}_r\mathcal{T}$  и левую  ${}_l\mathcal{T}$ .

2.1. Правая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов  ${}_r\mathbb{T}$

Закон умножения векторов действия в рассматриваемом случае для безразмерного действие записывается следующим образом:

$${}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S} = ({}_r\mathbf{S}_1 + {}_r\mathbf{S}_1) \circ ({}_r\mathbf{S}_2 + {}_r\mathbf{S}_2). \quad (42)$$

Это умножение определено, если определено умножение пары векторов каждого вида. Произведение вектора  ${}_r\mathbf{S}_1$  на  ${}_r\mathbf{S}_2$  справа определено умножением векторов в правой алгебре действия фундаментальных объектов

$${}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{S}_1 \circ {}_r\mathbf{S}_2.$$

Произведение вектора  ${}_r\mathbf{S}_1$  на  ${}_r\mathbf{S}_2$  справа определено умножением векторов в правой алгебре действия промежуточных объектов

$${}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{S}_1 \circ {}_r\mathbf{S}_2.$$

Произведение вектора  ${}_r\mathbf{S}_1$  на  ${}_r\mathbf{S}_2$  представляет собой линейное преобразование вектора действия фундаментального объекта справа

$${}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{S}_1 \circ {}_r\mathbf{S}_2.$$

Произведение линейного преобразования  ${}_r\mathbf{S}_2$  на вектор  ${}_r\mathbf{S}_1$  слева будем полагать равным нулю

$${}_r\mathbf{S}_1 \circ {}_r\mathbf{S}_2 = 0.$$

Векторы  ${}_r\mathbf{S}$  и  ${}_r\mathbf{S}$  допускают разложение по базисным векторам

$${}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rS^K, \quad {}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{I}^L_K \cdot {}_rS^K_L.$$

Таким образом, вектор действия в  $({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S})$  может быть разложен по базисным векторам следующим образом:

$${}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rS^K + {}_r\mathbf{I}^L_K \cdot {}_rS^K_L.$$

При этом рассмотренные выше произведения должны быть представлены через произведения соответствующих базисных векторов. Для базисных векторов  ${}_r\mathbf{e}_I$  мы ранее записали

$${}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_I = {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L_{KI}. \quad (43)$$

Правый закон композиции для базисных векторов  ${}_r\mathbf{I}^L_K$  задан формулой (21) :

$${}_r\mathbf{I}^L_K \circ {}_r\mathbf{I}^I_M = \delta^I_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L_M. \quad (44)$$

Правое линейное преобразование задано формулой (9):

$${}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I_M = \delta^I_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M. \quad (45)$$

Левое линейное преобразование дает

$${}_r\mathbf{I}^I_M \circ {}_r\mathbf{e}_K = 0. \quad (46)$$

В результате множество векторов  $\mathbb{T}$  становится алгеброй, которую будем называть *правой алгеброй фундаментальных и промежуточных объектов*, а также правой алгеброй *взаимодействующих* фундаментальных и промежуточных объектов и обозначать эту алгебру  ${}_r\mathbb{T}$ .

Для того чтобы перейти к размерному действию, необходимо уравнение (42) записать в виде

$${}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} ({}_r\mathbf{S}_1 + {}_r\mathbf{S}_1) \circ ({}_r\mathbf{S}_2 + {}_r\mathbf{S}_2), \quad (47)$$

где  $S_0$  есть постоянная, имеющая размерность действия.

2.2. Левая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов  ${}_l\mathbb{T}$

Закон умножения векторов действия в рассматриваемом случае для безразмерного действие записывается следующим образом:

$${}_l\mathbf{S} + {}_l\mathbf{S} = ({}_l\mathbf{S}_2 + {}_l\mathbf{S}_2) \circ ({}_l\mathbf{S}_1 + {}_l\mathbf{S}_1). \quad (48)$$

Это умножение определено, если определено умножение пары векторов каждого вида. Произведение вектора  ${}_l\mathbf{S}_1$  на  ${}_l\mathbf{S}_2$  слева определено умножением векторов в левой алгебре действия фундаментальных объектов

$${}_l\mathbf{S} = {}_l\mathbf{S}_2 \circ {}_l\mathbf{S}_1.$$

Произведение вектора  ${}_l\mathbf{S}_1$  на  ${}_l\mathbf{S}_2$  слева определено умножением векторов в левой алгебре действия промежуточных объектов

$${}_l\mathbf{S} = {}_l\mathbf{S}_2 \circ {}_l\mathbf{S}_1.$$

Произведение вектора  ${}_l\mathbf{S}_1$  на  ${}_l\mathbf{S}_2$  представляет собой линейное преобразование вектора действия фундаментального объекта слева

$${}_l\mathbf{S} = {}_l\mathbf{S}_2 \circ {}_l\mathbf{S}_1.$$

Произведение линейного преобразования  ${}_l\mathbf{S}_2$  на вектор  ${}_l\mathbf{S}_1$  справа будем полагать равным нулю

$${}_l\mathbf{S}_2 \circ {}_l\mathbf{S}_1 = 0.$$

Векторы  ${}_l\mathbf{S}$  и  ${}_l\mathbf{S}$  допускают разложение по базисным векторам

$${}_l\mathbf{S} = {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lS^K, \quad {}_l\mathbf{S} = {}_l\mathbf{I}^L_K \cdot {}_lS^K_L.$$

Таким образом, вектор действия в  $({}_l\mathbf{S} + {}_l\mathbf{S})$  может быть разложен по базисным векторам следующим образом:

$${}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lS^K + {}_l\mathbf{I}^L_K \cdot {}_lS^K_L.$$

При этом рассмотренные выше произведения должны быть представлены через произведения соответствующих базисных векторов. Для базисных векторов  ${}_l\mathbf{e}_I$  мы ранее записали

$${}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{e}_K = {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC_{KI}^L. \quad (49)$$

Левый закон композиции для базисных векторов  ${}_l\mathbf{I}_K^L$  задан формулой (16) :

$${}_l\mathbf{I}_K^L \circ {}_l\mathbf{I}_M^I = \delta_{LM}^L \cdot {}_l\mathbf{I}_K^I. \quad (50)$$

Левое линейное преобразование задано формулой (8):

$${}_l\mathbf{I}_M^I \circ {}_l\mathbf{e}_K = \delta_{KI}^I \cdot {}_l\mathbf{e}_M. \quad (51)$$

Правое линейное преобразование дает

$${}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{I}_M^I = 0. \quad (52)$$

В результате множество векторов  $\mathbb{T}$  становится алгеброй, которую будем называть *левой алгеброй фундаментальных и промежуточных объектов*, а также левой алгеброй *взаимодействующих* фундаментальных и промежуточных объектов и обозначать эту алгебру  ${}_l\mathbb{T}$ .

Для того чтобы перейти к размерному действию, необходимо уравнение (48) записать в виде

$${}_l\mathbf{S} + {}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} ({}_l\mathbf{S}_2 + {}_l\mathbf{S}_2) \circ ({}_l\mathbf{S}_1 + {}_l\mathbf{S}_1), \quad (53)$$

где  $S_0$  есть постоянная, имеющая размерность действия.

### 3. Уравнения структуры алгебры действия фундаментальных и промежуточных объектов

Особенность дифференцирования векторов алгебр связана с дифференцированием закона умножения векторов. Оно приводит к специфическим дифференциальным соотношениям – *уравнениям структуры*.

#### 3.1. Правая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов

Далее рассмотрим уравнения структуры для правой алгебры действия фундаментальных и промежуточных объектов  ${}_r\mathbb{T}$ . Рассмотрим дифференциал закона умножения (42). Как и прежде, будем различать дифференциалы индексом –  $d_1, d_2, \dots$  в зависимости от того по какому вектору выполняется дифференцирование. Из выражения (42) следует

$$\begin{aligned} d_1({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}) &= d({}_r\mathbf{S}_1 + {}_r\mathbf{S}_1) \circ ({}_r\mathbf{S}_2 + {}_r\mathbf{S}_2), \\ d_2({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}) &= ({}_r\mathbf{S}_1 + {}_r\mathbf{S}_1) \circ d({}_r\mathbf{S}_2 + {}_r\mathbf{S}_2). \end{aligned}$$

Из этих выражений вблизи единицы алгебры, то есть при

$${}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{e}_0$$

и при

$${}_r\mathbf{S} = ({}_r\mathbf{S})^{-1} = \mathbf{I}_I^I \cdot \delta_{IK}^I,$$

получаем

$$\begin{aligned} d({}_r\mathbf{S}_1 + {}_r\mathbf{S}_1) &= d_1({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}), \\ d({}_r\mathbf{S}_2 + {}_r\mathbf{S}_2) &= d_2({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (54)$$

Введем второй дифференциал

$$d_2d_1({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}).$$

Из выражения (42) для него имеет место

$$d_2d_1({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}) = d({}_r\mathbf{S}_1 + {}_r\mathbf{S}_1) \circ d({}_r\mathbf{S}_2 + {}_r\mathbf{S}_2).$$

С учетом равенства (54), вблизи единицы алгебры это уравнение принимает вид

$$d_2d_1({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}) = d_1({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}) \circ d_2({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}). \quad (55)$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* правой алгебры взаимодействующих фундаментальных и промежуточных объектов  ${}_r\mathbb{T}$  в векторной форме.

Подставим в равенство (55) выражения дифференциалов через дифференциалы координат

$$\begin{aligned} d_2d_1({}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rS^L + {}_r\mathbf{I}_M^L \cdot {}_rS^M) &= \\ = d_1({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rS^K + {}_r\mathbf{I}_K^L \cdot {}_rS^K) \circ & \quad (56) \\ \circ d_2({}_r\mathbf{e}_I \cdot {}_rS^I + {}_r\mathbf{I}_M^I \cdot {}_rS^M) & \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{e}_L \cdot d_2d_1{}_rS^L + {}_r\mathbf{I}_M^L \cdot d_2d_1{}_rS^M &= \\ = d_1({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rS^K + {}_r\mathbf{I}_K^L \cdot {}_rS^K) \circ & \\ \circ d_2({}_r\mathbf{e}_I \cdot {}_rS^I + {}_r\mathbf{I}_M^I \cdot {}_rS^M). & \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{e}_L \cdot d_2d_1{}_rS^L + {}_r\mathbf{I}_M^L \cdot d_2d_1{}_rS^M &= \\ = ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_I) d_1{}_rS^K d_2{}_rS^I + & \\ + ({}_r\mathbf{I}_K^L \circ {}_r\mathbf{e}_I) d_1{}_rS^K d_2{}_rS^I + & \\ + ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}_M^I) d_1{}_rS^K d_2{}_rS^M + & \\ + d_1{}_rS^K d_2{}_rS^M ({}_r\mathbf{I}_K^L \circ {}_r\mathbf{I}_M^I). & \end{aligned}$$

Пользуясь законом умножения базисных векторов (43), (44), (45), (46), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{e}_L \cdot d_2d_1{}_rS^L + {}_r\mathbf{I}_M^L \cdot d_2d_1{}_rS^M &= \\ = ({}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC_{KI}^L) d_1{}_rS^K \cdot d_2{}_rS^I + & \\ + (\delta_{KI}^I \cdot {}_r\mathbf{e}_M) d_1{}_rS^K \cdot d_2{}_rS^M + & \\ + d_1{}_rS^K \cdot d_2{}_rS^M (\delta_{KI}^I \cdot {}_r\mathbf{I}_M^L). & \end{aligned}$$



После разделения уравнения по компонентам базисных векторов получим уравнения структуры в координатной форме

$$\begin{aligned} d_2 d_1 r S^L &= {}_r C_{KI}^L \cdot d_2 r S^I \cdot d_1 r S^K + d_2 r S^L_I \cdot d_1 r S^I, \\ d_2 d_1 r S^M_L &= d_2 r S^M_I \cdot d_1 r S^I_L. \end{aligned} \quad (57)$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того чтобы перейти к размерному действию, необходимо уравнение (42) записать в виде равенства (47). Тогда уравнения (55) и (57) примут вид соответственно

$$d_2 d_1 ({}_r \mathbf{S} + {}_r \mathbf{S}) = \frac{1}{S_0} \cdot d_1 ({}_r \mathbf{S} + {}_r \mathbf{S}) \circ d_2 ({}_r \mathbf{S} + {}_r \mathbf{S}) \quad (58)$$

и

$$\begin{aligned} d_2 d_1 r S^L &= \frac{1}{S_0} {}_r C_{KI}^L \cdot d_2 r S^I \cdot d_1 r S^K + \frac{1}{S_0} d_2 r S^L_I \cdot d_1 r S^I, \\ d_2 d_1 r S^M_L &= \frac{1}{S_0} \cdot d_2 r S^M_I \cdot d_1 r S^I_L. \end{aligned} \quad (59)$$

### 3.2. Левая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов

Далее рассмотрим уравнения структуры для левой алгебры действия фундаментальных и промежуточных объектов  ${}_l \mathbb{T}$ . Рассмотрим дифференциал закона умножения (48). Как и прежде, будем различать дифференциалы индексом  $-d_1, d_2, \dots$  в зависимости от того, по какому вектору выполняется дифференцирование. Из выражения (48) следует

$$\begin{aligned} d_2 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}) &= d ({}_l \mathbf{S}_2 + {}_l \mathbf{S}_2) \circ ({}_l \mathbf{S}_1 + {}_l \mathbf{S}_1), \\ d_1 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}) &= ({}_l \mathbf{S}_2 + {}_l \mathbf{S}_2) \circ d ({}_l \mathbf{S}_1 + {}_l \mathbf{S}_1). \end{aligned}$$

Из этих выражений вблизи единицы алгебры, то есть при

$${}_l \mathbf{S} = {}_l \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{e}_0$$

и при

$${}_l \mathbf{S} = ({}_l \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{I}_I^I \cdot \delta^I_K,$$

получаем

$$\begin{aligned} d ({}_l \mathbf{S}_1 + {}_l \mathbf{S}_1) &= d_1 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}), \\ d ({}_l \mathbf{S}_2 + {}_l \mathbf{S}_2) &= d_2 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}). \end{aligned} \quad (60)$$

Введем второй дифференциал

$$d_2 d_1 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}).$$

Из выражения (48) для него имеет место соотношение

$$d_2 d_1 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}) = d ({}_l \mathbf{S}_2 + {}_l \mathbf{S}_2) \circ d ({}_l \mathbf{S}_1 + {}_l \mathbf{S}_1).$$

С учетом выражения (60) вблизи единицы алгебры это уравнение принимает вид

$$d_2 d_1 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}) = d_2 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}) \circ d_1 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}). \quad (61)$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* левой алгебры взаимодействующих фундаментальных и промежуточных объектов  ${}_l \mathbb{T}$  в векторной форме.

Подставим в соотношение (61) выражения дифференциалов через дифференциалы координат

$$\begin{aligned} d_2 d_1 ({}_l \mathbf{e}_L \cdot {}_l S^L + {}_l \mathbf{I}_M^L \cdot {}_l S^M_L) &= \\ = d_2 ({}_l \mathbf{e}_K \cdot {}_l S^K + {}_l \mathbf{I}_K^L \cdot {}_l S^K_L) \circ & \\ \circ d_1 ({}_l \mathbf{e}_I \cdot {}_l S^I + {}_l \mathbf{I}_M^I \cdot {}_l S^M_I) & \end{aligned} \quad (62)$$

или

$$\begin{aligned} {}_l \mathbf{e}_L \cdot d_2 d_1 {}_l S^L + {}_l \mathbf{I}_M^L \cdot d_2 d_1 {}_l S^M_L &= \\ = d_2 ({}_l \mathbf{e}_K \cdot {}_l S^K + {}_l \mathbf{I}_K^L \cdot {}_l S^K_L) \circ & \\ \circ d_1 ({}_l \mathbf{e}_I \cdot {}_l S^I + {}_l \mathbf{I}_M^I \cdot {}_l S^M_I). & \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} {}_l \mathbf{e}_L \cdot d_2 d_1 {}_l S^L + {}_l \mathbf{I}_M^L \cdot d_2 d_1 {}_l S^M_L &= \\ = ({}_l \mathbf{e}_I \circ {}_l \mathbf{e}_K) d_2 {}_l S^I d_1 {}_l S^K + & \\ + ({}_l \mathbf{I}_K^L \circ {}_l \mathbf{e}_I) d_2 {}_l S^K_L d_1 {}_l S^I + & \\ + ({}_l \mathbf{e}_K \circ {}_l \mathbf{I}_M^I) d_2 {}_l S^K d_1 {}_l S^M_I + & \\ + d_2 {}_l S^K_L d_1 {}_l S^M_I ({}_l \mathbf{I}_K^L \circ {}_l \mathbf{I}_M^I). & \end{aligned}$$

Пользуясь законом умножения базисных векторов (49), (50), (51), (52), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} {}_l \mathbf{e}_L \cdot d_2 d_1 {}_l S^L + {}_l \mathbf{I}_M^L \cdot d_2 d_1 {}_l S^M_L &= \\ = ({}_l \mathbf{e}_L \cdot {}_l C_{KI}^L) d_1 {}_l S^K \cdot d_2 {}_l S^I + & \\ + (\delta^I_K \cdot {}_l \mathbf{e}_M) d_1 {}_l S^K \cdot d_2 {}_l S^M_I + & \\ + d_2 {}_l S^K_L \cdot d_1 {}_l S^M_I (\delta^L_M \cdot {}_l \mathbf{I}_K^I). & \end{aligned}$$

После разделения уравнения по компонентам базисных векторов получим уравнения структуры в координатной форме

$$\begin{aligned} d_2 d_1 {}_l S^L &= {}_l C_{KI}^L \cdot d_2 {}_l S^I \cdot d_1 {}_l S^K + d_2 {}_l S^L_I \cdot d_1 {}_l S^I, \\ d_2 d_1 {}_l S^M_L &= d_2 {}_l S^M_I \cdot d_1 {}_l S^I_L. \end{aligned} \quad (63)$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того чтобы перейти к размерному действию, необходимо уравнение (48) записать в виде равенства (53). Тогда уравнения (61) и (63) примут вид соответственно

$$d_2 d_1 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}) = \frac{1}{S_0} \cdot d_2 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}) \circ d_1 ({}_l \mathbf{S} + {}_l \mathbf{S}) \quad (64)$$

и

$$\begin{aligned} d_2 d_1 {}_l S^L &= \frac{1}{S_0} {}_l C_{KI}^L \cdot d_2 {}_l S^I \cdot d_1 {}_l S^K + \frac{1}{S_0} d_2 {}_l S^L_I \cdot d_1 {}_l S^I, \\ d_2 d_1 {}_l S^M_L &= \frac{1}{S_0} \cdot d_2 {}_l S^M_I \cdot d_1 {}_l S^I_L. \end{aligned} \quad (65)$$

#### 4. Система квантовых уравнений для фундаментальных и промежуточных объектов

Уравнения структуры алгебры взаимодействующих фундаментальных и промежуточных объектов, по существу, и есть квантовые уравнения, которыми определяется совместная квантовая механика фундаментальных и промежуточных частиц. Перейдем к более привычной записи квантовых уравнений. При этом необходимо учесть, что квантовые уравнения, как и уравнения структуры, существуют в двух модификациях – для правой и для левой алгебр действия фундаментальных и промежуточных объектов.

##### 4.1. Правая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов

В уравнении структуры (58) введем обозначение

$$d_1 {}_r\mathbf{S} = {}_r\psi \quad \text{и} \quad d_1 {}_r\mathbf{S} = {}_r\psi_1,$$

а в уравнении (59) соответственно введем обозначения

$$d_1 {}_r\mathbf{S}^L = {}_r\psi^L \quad \text{и} \quad d_1 {}_r\mathbf{S}^L_K = {}_r\psi^L_K.$$

Функция  ${}_r\psi$  с координатами  ${}_r\psi^L$  – это *правая* волновая функция фундаментального объекта. Функция  ${}_r\psi_1$  с координатами  ${}_r\psi^L_K$  – это *правая* волновая функция промежуточного объекта. Дифференциал  $d_2$  обозначим  $d$ . Уравнение структуры (58), записанное по отношению к правым волновым функциям фундаментального и промежуточного объектов в виде

$$d {}_r\psi + d {}_r\psi_1 = \frac{1}{S_0} ({}_r\psi + {}_r\psi_1) \circ (d {}_r\mathbf{S} + d {}_r\mathbf{S}), \quad (66)$$

и уравнения структуры (59), записанные по отношению к координатам правых волновых функций фундаментального и промежуточного объектов в виде

$$\begin{aligned} d {}_r\psi^L &= \frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^L_{KI} \cdot d {}_r\mathbf{S}^I \cdot {}_r\psi^K + \frac{1}{S_0} \cdot d {}_r\mathbf{S}^L_I \cdot {}_r\psi^I, \\ d {}_r\psi^L_K &= \frac{1}{S_0} \cdot d {}_r\mathbf{S}^M_I \cdot {}_r\psi^I_L \end{aligned} \quad (67)$$

представляют собой *правые квантовые уравнения для фундаментального и промежуточного объектов* в дифференциалах.

Правые векторы действия фундаментального и промежуточного объектов являются функциями координат обобщенного пространства-времени

$${}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{S}(x) \quad \text{и} \quad {}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{S}(x).$$

Производную от правого вектора действия  ${}_r\mathbf{S}(x)$  по координате пространства-времени, взятую с обратным знаком, определим как вектор *правого импульса* фундаментального объекта

$${}_r\mathbf{P}_M = -\frac{\partial {}_r\mathbf{S}(x)}{\partial x^M},$$

который может быть записан через координаты импульса следующим образом:

$${}_r\mathbf{P}_M = {}_r\mathbf{e}_I \cdot {}_r p^I_M,$$

где

$${}_r p^I_M = -\frac{\partial {}_r\mathbf{S}^I}{\partial x^M}.$$

Производную от правого вектора действия  ${}_r\mathbf{S}(x)$  по координате пространства-времени, взятую с обратным знаком, определим как вектор *правого момента* промежуточного объекта

$${}_r\mathbf{M}_M = -\frac{\partial {}_r\mathbf{S}}{\partial x^M},$$

который может быть записан через координаты момента следующим образом:

$${}_r\mathbf{M}_M = {}_r\mathbf{I}^L_I \cdot {}_r m^I_{LM},$$

где

$${}_r m^I_{LM} = -\frac{\partial {}_r\mathbf{S}^I_L}{\partial x^M}.$$

С использованием правого импульса фундаментального объекта и правого момента промежуточного объекта правые квантовые уравнения фундаментального и промежуточного объектов переписываются следующим образом. Уравнение (66) принимает вид

$$d {}_r\psi + d {}_r\psi_1 = -\frac{1}{S_0} ({}_r\psi + {}_r\psi_1) \circ ({}_r\mathbf{P}_M + {}_r\mathbf{M}_M) dx^M. \quad (68)$$

Система уравнений (67) принимает вид

$$\begin{aligned} d {}_r\psi^L &= -\frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^L_{KI} \cdot {}_r p^I_M \cdot dx^M \cdot {}_r\psi^K - \\ &-\frac{1}{S_0} \cdot {}_r m^L_{IM} \cdot dx^M \cdot {}_r\psi^I, \\ d {}_r\psi^L_K &= -\frac{1}{S_0} \cdot {}_r m^L_{IM} \cdot dx^M \cdot {}_r\psi^I_K \end{aligned} \quad (69)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}_r\psi^L}{\partial x^M} &= -\frac{1}{S_0} ({}_rC^L_{KI} \cdot {}_r p^I_M + {}_r m^L_{KM}) {}_r\psi^K, \\ \frac{\partial {}_r\psi^L_K}{\partial x^M} &= -\frac{1}{S_0} {}_r m^L_{IM} \cdot {}_r\psi^I_K. \end{aligned} \quad (70)$$

Далее придадим этим уравнениям форму уравнения Дирака. Для этого умножим обе части каждого из уравнений на структурные константы  ${}_i C^{MN}_L$ , выполнив соответствующие суммирования. Получим

$$\begin{aligned} {}_i C^{MN}_L \cdot \frac{\partial {}_r\psi^L}{\partial x^M} &= \\ &= -\frac{1}{S_0} {}_i C^{MN}_L \cdot ({}_rC^L_{KI} \cdot {}_r p^I_M + {}_r m^L_{KM}) {}_r\psi^K, \\ {}_i C^{MN}_L \cdot \frac{\partial {}_r\psi^L_K}{\partial x^M} &= -\frac{1}{S_0} {}_i C^{MN}_L \cdot {}_r m^L_{IM} \cdot {}_r\psi^I_K \end{aligned} \quad (71)$$

(Как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.)

Эта система уравнений и есть система правых квантовых уравнений для фундаментальной и промежуточной частиц, взаимодействующих между собой.

#### 4.2. Левая алгебра действия фундаментальных и промежуточных объектов

В уравнении структуры (64) введем обозначение

$$d_1 \mathbf{S} = \mathbf{i}\psi \quad \text{и} \quad d_1 \mathbf{S} = \mathbf{i}\psi_1,$$

а в уравнении (65) соответственно введем обозначения

$$d_1 \mathbf{S}^L = \mathbf{i}\psi^L \quad \text{и} \quad d_1 \mathbf{S}^L_K = \mathbf{i}\psi^L_K.$$

Функция  $\mathbf{i}\psi$  с координатами  $\mathbf{i}\psi^L$  – это левая волновая функция фундаментального объекта. Функция  $\mathbf{i}\psi_1$  с координатами  $\mathbf{i}\psi^L_K$  – это левая волновая функция промежуточного объекта. Дифференциал  $d_2$  обозначим  $d$ . Уравнение структуры (64), записанное по отношению к левым волновым функциям фундаментального и промежуточного объектов в виде

$$d\mathbf{i}\psi + d\mathbf{i}\psi_1 = \frac{1}{S_0} (d\mathbf{S} + d\mathbf{S}) \circ (\mathbf{i}\psi + \mathbf{i}\psi_1), \quad (72)$$

и уравнения структуры (65), записанные по отношению к координатам левых волновых функций фундаментального и промежуточного объектов в виде

$$\begin{aligned} d\mathbf{i}\psi^L &= \frac{1}{S_0} \cdot \mathbf{i}C^L_{KI} \cdot d\mathbf{S}^I \cdot \mathbf{i}\psi^K + \frac{1}{S_0} \cdot d\mathbf{S}^L_I \cdot \mathbf{i}\psi^I, \\ d\mathbf{i}\psi^M_L &= \frac{1}{S_0} \cdot d\mathbf{S}^M_I \cdot \mathbf{i}\psi^I_L \end{aligned} \quad (73)$$

представляют собой левые квантовые уравнения для фундаментального и промежуточного объектов в дифференциалах.

Левые векторы действия фундаментального и промежуточного объектов являются функциями координат обобщенного пространства-времени

$$\mathbf{i}\mathbf{S} = \mathbf{i}\mathbf{S}(x) \quad \text{и} \quad \mathbf{i}\mathbf{S} = \mathbf{i}\mathbf{S}(x).$$

Производную от левого вектора действия  $\mathbf{i}\mathbf{S}(x)$  по координате пространства-времени, взятую с обратным знаком, определим как вектор левых импульсов фундаментального объекта

$$\mathbf{i}\mathbf{P}_M = -\frac{\partial \mathbf{i}\mathbf{S}(x)}{\partial x^M},$$

который может быть записан через координаты импульса следующим образом:

$$\mathbf{i}\mathbf{P}_M = \mathbf{i}\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{i}P^I_M,$$

где

$$\mathbf{i}P^I_M = -\frac{\partial \mathbf{i}S^I}{\partial x^M}.$$

Производную от левого вектора действия  $\mathbf{i}\mathbf{S}(x)$  по координате пространства-времени, взятую с обратным знаком, определим как вектор левых импульсов промежуточного объекта

$$\mathbf{i}\mathbf{M}_M = -\frac{\partial \mathbf{i}S}{\partial x^M},$$

который может быть записан через координаты момента следующим образом:

$$\mathbf{i}\mathbf{M}_M = \mathbf{i}\mathbf{I}^L_I \cdot \mathbf{i}m^I_{LM},$$

где

$$\mathbf{i}m^I_{LM} = -\frac{\partial \mathbf{i}S^I_L}{\partial x^M}.$$

С использованием левого импульса фундаментального объекта и левого момента промежуточного объекта левые квантовые уравнения фундаментального и промежуточного объектов переписываются следующим образом. Уравнение (72) принимает вид

$$d\mathbf{i}\psi + d\mathbf{i}\psi_1 = -\frac{1}{S_0} (\mathbf{i}\mathbf{P}_M + \mathbf{i}\mathbf{M}_M) \circ (\mathbf{i}\psi + \mathbf{i}\psi_1) \cdot dx^M. \quad (74)$$

Система уравнений (73) принимает вид

$$\begin{aligned} d\mathbf{i}\psi^L &= -\frac{1}{S_0} \cdot \mathbf{i}C^L_{KI} \cdot \mathbf{i}P^I_M \cdot dx^M \cdot \mathbf{i}\psi^K - \\ &-\frac{1}{S_0} \cdot \mathbf{i}m^L_{IM} \cdot dx^M \cdot \mathbf{i}\psi^I, \\ d\mathbf{i}\psi^L_K &= -\frac{1}{S_0} \cdot \mathbf{i}m^L_{IM} \cdot dx^M \cdot \mathbf{i}\psi^I_K \end{aligned} \quad (75)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}\psi^L}{\partial x^M} &= -\frac{1}{S_0} (\mathbf{i}C^L_{KI} \cdot \mathbf{i}P^I_M + \mathbf{i}m^L_{KM}) \cdot \mathbf{i}\psi^K, \\ \frac{\partial \mathbf{i}\psi^L_K}{\partial x^M} &= -\frac{1}{S_0} \mathbf{i}m^L_{IM} \cdot \mathbf{i}\psi^I_K. \end{aligned} \quad (76)$$

Далее придадим этим уравнениям форму уравнения Дирака. Для этого умножим обе части каждого из уравнений на структурные константы  $\mathbf{i}r^{MN}_L$ , выполнив соответствующие суммирования. Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{i}r^{MN}_L \cdot \frac{\partial \mathbf{i}\psi^L}{\partial x^M} &= \\ &= -\frac{1}{S_0} \mathbf{i}r^{MN}_L \cdot (\mathbf{i}C^L_{KI} \cdot \mathbf{i}P^I_M + \mathbf{i}m^L_{KM}) \mathbf{i}\psi^K, \\ \mathbf{i}r^{MN}_L \cdot \frac{\partial \mathbf{i}\psi^L_K}{\partial x^M} &= -\frac{1}{S_0} \mathbf{i}r^{MN}_L \cdot \mathbf{i}m^L_{IM} \cdot \mathbf{i}\psi^I_K \end{aligned} \quad (77)$$

(Как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Эта система уравнений и есть система левых квантовых уравнений для фундаментальной и промежуточной частиц, взаимодействующих между собой.

### 5. Частные случаи

В этом Разделе остановимся на системе *правых* квантовых уравнений для фундаментальной и промежуточной частиц, взаимодействующих между собой (71)<sup>10</sup>. Перепишем указанную систему уравнений, опустив указание на то, что векторы действия являются правыми,

$$\begin{aligned} iC^{MN}_L \cdot \frac{\partial \psi^L}{\partial x^M} &= -\frac{1}{S_0} iC^{MN}_L \cdot ({}_r C^L_{KI} \cdot p^I_M + m^L_{KM}) \cdot \psi^K, \\ iC^{MN}_L \cdot \frac{\partial \psi^L_K}{\partial x^M} &= -\frac{1}{S_0} iC^{MN}_L \cdot m^L_{IM} \cdot \psi^I_K. \end{aligned} \quad (78) - \text{Дж.сек.}$$

#### 1. Фундаментальная частица.

В этом случае надо положить волновую функцию и момент промежуточной частицы равными нулю:  $\psi^I_K = 0$ ,  $m^L_{LM} = 0$ . Тогда система уравнений (78) сводится к уравнению для фундаментальной частицы

$$iC^{MN}_L \cdot \partial_M \psi^L = -\frac{1}{S_0} iC^{MN}_L \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K. \quad (79)$$

#### 2. Промежуточная частица.

В этом случае надо положить волновую функцию и импульс фундаментальной частицы равными нулю:  $\psi^I = 0$ ,  $p^I_L = 0$ . Тогда система уравнений (78) сводится к уравнению для промежуточной частицы

$$iC^{MN}_I \cdot \partial_M \psi^L_K = -\frac{1}{S_0} iC^{MN}_L \cdot m^L_{IM} \cdot \psi^I_K. \quad (80)$$

#### 3. Излучение промежуточной частицы.

В этом случае надо положить момент промежуточной частицы равным постоянной величине:

$$m^L_{IM} = K^L_{IM}.$$

Тогда система квантовых уравнений (78) разделяется на две. Одна относится к фундаментальной частице с новым значением обобщенного импульса

$$iC^{MN}_L \cdot \partial_M \psi^L = -\frac{1}{S_0} iC^{MN}_L \cdot ({}_r C^L_{KI} \cdot p^I_M + K^L_{KM}) \psi^K, \quad (81)$$

а другая – к излученной промежуточной частице

$$iC^{MN}_I \cdot \partial_M \psi^L_K = -\frac{1}{S_0} iC^{MN}_L \cdot K^L_{IM} \cdot \psi^I_K. \quad (82)$$

## V. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АНТИОБЪЕКТЫ. ПРОСТРАНСТВО ДЕЙСТВИЯ

Напомним, что промежуточный антиобъект описывается ковариантным вектором действия

$$\mathbf{S}^*,$$

подобным вектору сопряженного линейного преобразования пространства-времени. Множество таких векторов составляет векторное пространство действия промежуточных антиобъектов, обозначенное  $\mathbf{S}^*_1$ . Кроме того, напомним, что фундаментальный антиобъект описывается ковариантным вектором действия

$$\mathbf{S}^*.$$

Множество таких векторов составляет векторное пространство действия фундаментальных антиобъектов, обозначенное  $\mathbf{S}^*$ . Размерность векторов действия

### 1. Воздействие промежуточного антиобъекта на фундаментальный антиобъект

Будем исходить из общего представления о том, что воздействие промежуточного антиобъекта на фундаментальный антиобъект приводит к возникновению *другого* фундаментального антиобъекта, точнее фундаментального антиобъекта с другими энергетическими и динамическими характеристиками. Такая предпосылка позволяет рассматривать вектор действия промежуточного антиобъекта  $\mathbf{S}^{*'}$  как некоторый оператор  $(\ )^*$ , который ставит в соответствие вектору действия фундаментального антиобъекта  $\mathbf{S}^* \in \mathbf{S}^*$  вектор действия другого фундаментального антиобъекта  $\mathbf{S}^{*'} \in \mathbf{S}^*$ . Указанное соответствие запишем так:

$$\mathbf{S}^{*'} = (\mathbf{S}^*)\mathbf{S}^*. \quad (83)$$

Можно также говорить об операторе  $(\ )^*$  как о *преобразовании* вектора  $\mathbf{S}^*$  в вектор  $\mathbf{S}^{*'}$ . Назовем такое преобразование *сопряженным*. Таким образом, воздействие промежуточного антиобъекта на фундаментальный антиобъект можно рассматривать как сопряженное преобразование вектора действия фундаментального антиобъекта.

Потребуем, чтобы сопряженное преобразование  $(\ )^*$  было *линейным*, то есть выполнялось соотношение

$$(\alpha_1 \cdot \mathbf{S}^*_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{S}^*_2)\mathbf{S}^* = \alpha_1 \cdot (\mathbf{S}^*_1)\mathbf{S}^* + \alpha_2 \cdot (\mathbf{S}^*_2)\mathbf{S}^*.$$

Вектор действия фундаментального антиобъекта  $\mathbf{S}^*$  может быть разложен по базисным векторам  $\mathbf{E}^I$ :

$$\mathbf{S}^* = S_0 \mathbf{E}^0 + S_{i_1} \mathbf{E}^{i_1} + \dots + S_{1324} \mathbf{E}^{1324} = S_I \cdot \mathbf{E}^I.$$

Поэтому вектор  $\mathbf{S}^{*'} = (\mathbf{S}^*)\mathbf{S}^*$  в силу линейности преобразования может быть записан в виде

$$\mathbf{S}^{*'} = S_I \cdot (\mathbf{E}^I)\mathbf{S}^*.$$

Введем разложение векторов  $(\mathbf{E}^I)\mathbf{S}^*$  по базисным векторам  $\mathbf{E}^M$

$$(\mathbf{E}^I)\mathbf{S}^* = \frac{1}{S_0} \cdot S^{*I}_M \cdot \mathbf{E}^M.$$

<sup>10</sup> Отметим, что классическое уравнение Дирака является правым квантовым уравнением.

Здесь  $S^*I_M$  – коэффициенты разложения, имеющие размерность действия,  $S_0$  – коэффициент, имеющий размерность действия и введенный для того, чтобы выражение в правой части было безразмерным. Используя это соотношение, получим

$$\mathbf{S}^{*'} = \frac{1}{S_0} \cdot S_I \cdot S^*I_M \cdot \mathbf{E}^M. \quad (84)$$

Для действия в безразмерной форме это выражение принимает вид

$$\mathbf{S}^{*'} = S_I \cdot S^*I_M \cdot \mathbf{E}^M. \quad (85)$$

## 2. Векторное пространство действия промежуточных антиобъектов

Множество векторов действия промежуточного антиобъекта или множество *сопряженных линейных преобразований*  $\mathbf{S}_1^*$  рассматривается как векторное пространство, то есть на нем определим операции сложения  $\oplus$

$$(\ )\mathbf{S}_1^* \oplus (\ )\mathbf{S}_2^* \in \mathbf{S}_1^*$$

и умножения на число  $\odot$

$$\alpha \odot (\ )\mathbf{S}^* \in \mathbf{S}_1^*.$$

Эти операции удовлетворяют закону дистрибутивности:

$$\alpha \odot [(\ )\mathbf{S}_1^* \oplus (\ )\mathbf{S}_2^*] = \alpha \odot (\ )\mathbf{S}_1^* \oplus \alpha \odot (\ )\mathbf{S}_2^*. \quad (86)$$

В результате множество линейных сопряженных преобразований  $\mathbf{S}_1^*$  становится векторным пространством. Соответствие закона дистрибутивности в  $\mathbf{S}_1^*$  закону дистрибутивности в  $\mathbf{S}^*$

$$\alpha \cdot (\mathbf{S}_1^* + \mathbf{S}_2^*) = \alpha \cdot \mathbf{S}_1^* + \alpha \cdot \mathbf{S}_2^*$$

можно рассматривать как условия согласования сложений " $\oplus$ " и " $+$ " и умножений " $\odot$ " и " $\cdot$ ". Эти условия сводятся к тому, что  $\oplus$ -сложение становится  $+$ -сложением, а  $\odot$ -умножение становится  $\cdot$ -умножением после действия оператора (86) на вектор  $\mathbf{S}^*$ .

На векторном пространстве  $\mathbf{S}_1^*$  введем *базисные преобразования*  $(\ )\mathbf{K}^M_I$ , чтобы

$$(\ )\mathbf{S}^* = S^*I_M \cdot (\ )\mathbf{K}^M_I. \quad (87)$$

Здесь  $S^*I_M$  – *координаты* сопряженного преобразования  $\mathbf{S}^*$ , представляющие собой ранее введенные коэффициенты разложения векторов  $(\mathbf{E}^I)\mathbf{S}^*$  по базисным векторам  $\mathbf{E}^M$ .

Найдем правило преобразования базисных векторов  $\mathbf{E}^K$  пространства  $\mathbf{S}^*$  с помощью базисных преобразований  $\mathbf{K}^M_I$  из того условия, что сопряженное

линейное преобразование вектора  $\mathbf{S}^* = S_I \cdot \mathbf{E}^I$  должно иметь вид равенства (85). Таким образом, должно выполняться равенство

$$(\mathbf{S}^*)\mathbf{S}^* = S_K \cdot S^*I_M \cdot (\mathbf{E}^K)\mathbf{K}^M_I = S_I \cdot S^*I_M \cdot \mathbf{E}^M.$$

Отсюда

$$(\mathbf{E}^K)\mathbf{K}^M_I = \mathbf{E}^M \cdot \delta^{K_I}, \quad (88)$$

где  $\delta^{K_I}$  – символ Кронекера.

## 3. Левое и правое воздействия промежуточного антиобъекта на фундаментальный антиобъект

Воздействие промежуточного антиобъекта на фундаментальный антиобъект, представленное сопряженным линейным преобразованием вектора действия фундаментального антиобъекта

$$\mathbf{S}^{*'} = (\mathbf{S}^*)\mathbf{S}^*,$$

можно рассматривать не в операторной форме, а в алгебраической как вид умножения, используя символ  $\circ$ -умножения. При этом также нужно различать два вида линейного преобразования и соответственно два вида умножения – левое и правое.

### 3.1. Левое воздействие промежуточного антиобъекта на фундаментальный антиобъект

Для левого умножения имеем

$${}_l\mathbf{S}^{*'} = {}_l\mathbf{S}^* \circ {}_l\mathbf{S}^*.$$

Левый закон композиции для базисных векторов (88) приобретает вид

$${}_l\mathbf{E}^K \circ \mathbf{K}^M_I = \mathbf{E}^M \cdot \delta^{K_I}. \quad (89)$$

Действительно, пусть

$${}_l\mathbf{S}^* = {}_lS^*I_M \cdot {}_l\mathbf{K}^M_I \quad \text{и} \quad {}_l\mathbf{S}^* = {}_lS_K \cdot {}_l\mathbf{E}^K.$$

Тогда

$$\begin{aligned} {}_l\mathbf{S}^{*'} &= {}_l\mathbf{S}^* \circ {}_l\mathbf{S}^* = {}_lS_K \cdot {}_lS^*I_M \cdot {}_l\mathbf{E}^K \circ {}_l\mathbf{K}^M_I = \\ &= {}_lS_K \cdot {}_lS^*K_M \cdot {}_l\mathbf{E}^M. \end{aligned}$$

### 3.2. Правое воздействие промежуточного антиобъекта на фундаментальный антиобъект

Для правого умножения имеем

$${}_r\mathbf{S}^{*'} = {}_r\mathbf{S}^* \circ {}_r\mathbf{S}^*.$$

Правый закон композиции для базисных векторов (88) приобретает вид

$${}_r\mathbf{K}^M_I \circ {}_r\mathbf{E}^K = \delta^{K_I} \cdot {}_r\mathbf{E}^M. \quad (90)$$

Действительно, пусть

$${}_r\mathbf{S}^* = {}_r\mathbf{S}^{*I}_M \cdot {}_r\mathbf{K}^M_I \quad \text{и} \quad {}_r\mathbf{S}^* = {}_r\mathbf{S}_K \cdot {}_r\mathbf{E}^K.$$

Тогда

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{S}^{*I} &= {}_r\mathbf{S}^* \circ {}_r\mathbf{S}^* = {}_r\mathbf{S}_K \cdot {}_r\mathbf{S}^{*I}_M \cdot {}_r\mathbf{K}^M_I \circ {}_r\mathbf{E}^K = \\ &= {}_r\mathbf{S}_K \cdot {}_r\mathbf{S}^{*K}_M \cdot {}_r\mathbf{E}^M. \end{aligned}$$

#### 4. Группа и алгебра действия промежуточных антиобъектов

На множестве линейных сопряженных преобразований  $\mathbf{S}_1^*$  введем *закон композиции*, то есть двум преобразованиям  $(\ )_r\mathbf{S}_1^*$  и  $(\ )_r\mathbf{S}_2^*$  ставится в соответствие преобразование  $(\ )_r\mathbf{S}^*$ , называемое композицией или произведением преобразований  $(\ )_r\mathbf{S}_1^*$  и  $(\ )_r\mathbf{S}_2^*$ . Возможны два вида композиции:

*правая*, когда

$$(\ )_r\mathbf{S}^* = ((\ )_r\mathbf{S}_1^*)_r\mathbf{S}_2^*, \quad (91)$$

и *левая*, когда

$$(\ )_l\mathbf{S}^* = ((\ )_r\mathbf{S}_2^*)_r\mathbf{S}_1^*. \quad (92)$$

Здесь  $(\ )_r\mathbf{S}^*$ ,  $(\ )_l\mathbf{S}^*$ ,  $(\ )_r\mathbf{S}_1^*$ ,  $(\ )_r\mathbf{S}_2^* \in \mathbf{S}_1^*$ .

Потребуем, чтобы композиция преобразований была *групповым* законом, то есть чтобы на множестве линейных сопряженных преобразований  $\mathbf{S}_1^*$  было определено

- 1) *единичное* преобразование  $(\ )\delta$ , для которого выполняются соотношения

$$((\ )\mathbf{S}^*)\delta = (\ )\mathbf{S}^*, \quad ((\ )\delta)\mathbf{S}^* = (\ )\mathbf{S}^*,$$

- 2) *обратное* преобразование  $(\ )(\mathbf{S}^*)^{-1}$ , для которого выполняются соотношения

$$((\ )\mathbf{S}^*)(\mathbf{S}^*)^{-1} = (\ )\delta, \quad ((\ )(\mathbf{S}^*)^{-1})\mathbf{S}^* = (\ )\delta.$$

Указанные определения делают множество линейных сопряженных преобразований  $\mathbf{S}_1^*$  *группой*, точнее закону композиции (91) соответствует *правая* группа действия промежуточных антиобъектов  ${}_r\mathbf{S}_1^*$ , а закону композиции (92) соответствует *левая* группа действия промежуточных антиобъектов  ${}_l\mathbf{S}_1^*$ .

##### 4.1. Правая группа и правая алгебра действия промежуточных антиобъектов

Найдем связь между базисными векторами и координатами преобразования-композиции и базисными векторами и координатами преобразований, участвующих в композиции, для правой группы действия промежуточных антиобъектов  ${}_r\mathbf{S}_1^*$ . Для этого перепишем закон композиции (91), подчеркнув, что все

линейные сопряженные преобразования, участвующие в композиции, относятся к правой группе  ${}_r\mathbf{S}_1^*$ :

$$(\ )_r\mathbf{S}^* = ((\ )_r\mathbf{S}_1^*)_r\mathbf{S}_2^*, \quad (93)$$

где  $(\ )_r\mathbf{S}^*$ ,  $(\ )_r\mathbf{S}_1^*$ ,  $(\ )_r\mathbf{S}_2^* \in {}_r\mathbf{S}_1^*$ .

Запишем преобразования, участвующие в композиции, через базисные преобразования и координаты (матрицы) преобразований:

$$\begin{aligned} (\ )_r\mathbf{S}^* &= {}_r\mathbf{S}^{*M}_L \cdot (\ )_r\mathbf{K}^L_M, \quad (\ )_r\mathbf{S}_2^* = {}_r(\mathbf{S}_2^*)^M_I \cdot (\ )_r\mathbf{K}^I_M, \\ (\ )_r\mathbf{S}_1^* &= {}_r(\mathbf{S}_1^*)^K_L \cdot (\ )_r\mathbf{K}^L_K. \end{aligned}$$

Исходим из того, что матрицы-координаты преобразования-композиции равны произведению матриц-координат, участвующих в композиции:

$${}_r\mathbf{S}^{*M}_L = {}_r(\mathbf{S}_2^*)^M_K \cdot {}_r(\mathbf{S}_1^*)^K_L, \quad (94)$$

то есть

$$(\ )_r\mathbf{S}^* = {}_r(\mathbf{S}_2^*)^M_K \cdot {}_r(\mathbf{S}_1^*)^K_L \cdot (\ )_r\mathbf{K}^L_M. \quad (95)$$

С другой стороны из выражения (93) имеем

$$(\ )_r\mathbf{S}^* = {}_r(\mathbf{S}_2^*)^M_I \cdot {}_r(\mathbf{S}_1^*)^K_L \cdot ((\ )_r\mathbf{K}^L_K)_r\mathbf{K}^I_M.$$

Из сравнения этого выражения с соотношением (95) получим

$$\begin{aligned} {}_r(\mathbf{S}_2^*)^M_I \cdot {}_r(\mathbf{S}_1^*)^K_L \cdot ((\ )_r\mathbf{K}^L_K)_r\mathbf{K}^I_M &= \\ &= {}_r(\mathbf{S}_2^*)^M_I \cdot {}_r(\mathbf{S}_1^*)^K_L \cdot \delta^I_K \cdot (\ )_r\mathbf{K}^L_M. \end{aligned}$$

Отсюда следует закон композиции базисных преобразований в правой группе действия промежуточных антиобъектов  ${}_r\mathbf{S}_1^*$ :

$$((\ )_r\mathbf{K}^L_K)_r\mathbf{K}^I_M = \delta^I_K \cdot (\ )_r\mathbf{K}^L_M.$$

Правый закон композиции, действующий на векторах пространства  ${}_r\mathbf{S}_1^*$ , можно рассматривать как вид умножения и записывать его в алгебраической, а не в операторной форме:

$${}_r\mathbf{S}^* = {}_r\mathbf{S}_1^* \circ {}_r\mathbf{S}_2^*. \quad (96)$$

Закон композиции для базисных векторов приобретает вид о-умножения:

$${}_r\mathbf{K}^L_K \circ {}_r\mathbf{K}^I_M = \delta^I_K \cdot {}_r\mathbf{K}^L_M. \quad (97)$$

Будем полагать, что законы композиции и сложения линейных преобразований связаны законом дистрибутивности. Вследствие этого множество векторов действия (сопряженных линейных преобразований)  ${}_r\mathbf{S}_1^*$  является кольцом. А так как оно вместе с тем является векторным пространством, то, следовательно, оно представляет собой *алгебру*. Алгебру векторов действия промежуточных антиобъектов, основанную на композиции (93), назовем *правой* и обозначим так же, как и группу,  ${}_r\mathbf{S}_1^*$ .

## 4.2. Левая группа и левая алгебра действия промежуточных антиобъектов

Найдем связь между базисными векторами и координатами преобразования-композиции и базисными векторами и координатами преобразований, участвующих в композиции, для левой группы действия промежуточных антиобъектов  ${}_l\mathcal{S}_1^*$ . Для этого перепишем закон композиции (92), подчеркнув, что все линейные сопряженные преобразования, участвующие в композиции, относятся к левой группе  ${}_l\mathcal{S}_1^*$ :

$$(\ )_l\mathcal{S}^* = ((\ )_l\mathcal{S}_2^*)_l\mathcal{S}_1^*, \quad (98)$$

где  $(\ )_l\mathcal{S}^*$ ,  $(\ )_l\mathcal{S}_1^*$ ,  $(\ )_l\mathcal{S}_2^* \in {}_l\mathcal{S}_1^*$ .

Запишем преобразования, участвующие в композиции, через базисные преобразования и координаты (матрицы) преобразований:

$$\begin{aligned} (\ )_l\mathcal{S}^* &= {}_lS^{*M}{}_I \cdot (\ )_l\mathbf{K}^I{}_M, \quad (\ )_l\mathcal{S}_2^* = {}_l(S_2^*)^K{}_L \cdot (\ )_l\mathbf{K}^L{}_K, \\ (\ )_l\mathcal{S}_1^* &= {}_l(S_1^*)^M{}_I \cdot (\ )_l\mathbf{K}^I{}_M, \end{aligned}$$

Исходим из того, что матрицы-координаты преобразования-композиции равны произведению матриц-координат, участвующих в композиции:

$${}_lS^{*K}{}_I = {}_l(S_2^*)^K{}_L \cdot {}_l(S_1^*)^L{}_I, \quad (99)$$

то есть

$$(\ )_l\mathcal{S}^* = {}_l(S_2^*)^K{}_L \cdot {}_l(S_1^*)^L{}_I \cdot (\ )_l\mathbf{K}^I{}_K. \quad (100)$$

С другой стороны, из выражения (98) имеем

$$(\ )_l\mathcal{S}^* = {}_l(S_2^*)^K{}_L \cdot {}_l(S_1^*)^M{}_I \cdot ((\ )_l\mathbf{K}^L{}_K)_l\mathbf{K}^I{}_M.$$

Из сравнения этого выражения с соотношением (100) получим

$$\begin{aligned} {}_l(S_2^*)^K{}_L \cdot {}_l(S_1^*)^M{}_I \cdot ((\ )_l\mathbf{K}^L{}_K)_l\mathbf{K}^I{}_M &= \\ &= {}_l(S_2^*)^K{}_L \cdot {}_l(S_1^*)^M{}_I \cdot \delta^L{}_M \cdot (\ )_l\mathbf{K}^I{}_K. \end{aligned}$$

Отсюда следует закон композиции базисных преобразований в левой группе действия промежуточных антиобъектов  ${}_l\mathcal{S}_1^*$ :

$$((\ )_l\mathbf{K}^L{}_K)_l\mathbf{K}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot (\ )_l\mathbf{K}^I{}_K.$$

Левый закон композиции, действующий на векторах пространства  ${}_l\mathcal{S}_1^*$ , можно рассматривать как вид умножения и записывать его в алгебраической, а не в операторной форме:

$${}_l\mathcal{S}^* = {}_l\mathcal{S}_2^* \circ {}_l\mathcal{S}_1^*. \quad (101)$$

Закон композиции для базисных векторов приобретает вид  $\circ$ -умножения:

$${}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K. \quad (102)$$

Будем полагать, что законы композиции и сложения линейных преобразований связаны законом дистрибутивности. Вследствие этого множество векторов действия (сопряженных линейных преобразований)  ${}_l\mathcal{S}_1^*$  является кольцом. А так как оно вместе с тем является векторным пространством, то, следовательно, оно представляет собой *алгебру*. Алгебру векторов действия промежуточных антиобъектов, основанную на композиции (98), назовем *левой* и обозначим так же, как и группу,  ${}_l\mathcal{S}_1^*$ .

## 5. Связь между физическими объектами и антиобъектами. Операция сопряжения

## 5.1. Сопряжение правых векторов действия

Линейное преобразование  ${}_r\mathcal{S}^*: {}_r\mathcal{S}^* \rightarrow {}_r\mathcal{S}^*$  является сопряженным<sup>11</sup> линейному преобразованию  ${}_l\mathcal{S}: {}_l\mathcal{S} \rightarrow {}_l\mathcal{S}$ <sup>12</sup>. Связь между этими преобразованиями дается формулами:

$$\begin{aligned} ({}_r\mathcal{S}')^* &= ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rS^K{}_I \cdot {}_rS^I)^* = \\ &= ({}_rS^I)^* \cdot ({}_rS^K{}_I)^* \cdot ({}_r\mathbf{e}_K)^* = {}_lS^I \cdot {}_lS^{*I}{}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^K = {}_l\mathcal{S}'^*, \end{aligned}$$

$$({}_rS^K{}_I)^* = {}_lS^{*I}{}_K,$$

$$({}_r\mathbf{I}^I{}_K(\ ))^* = (\ )_l\mathbf{K}^K{}_I,$$

$$\begin{aligned} ({}_r\mathcal{S}(\ ))^* &= ({}_r\mathbf{I}^I{}_K(\ ) \cdot {}_rS^K{}_I)^* = ({}_rS^K{}_I)^* \cdot ({}_r\mathbf{I}^I{}_K(\ ))^* = \\ &= {}_lS^{*I}{}_K \cdot (\ )_l\mathbf{K}^K{}_I = (\ )_l\mathcal{S}^*, \end{aligned}$$

$$({}_r\mathcal{S}(\ ))^* = (\ )_l\mathcal{S}^*,$$

$${}_rS^{*M}{}_L = g^{IM} \cdot {}_lS^K{}_I \cdot g_{KL}$$

и

$$\begin{aligned} (({}_r\mathcal{S}^*)')^* &= ({}_rS^I \cdot {}_rS^{*I}{}_K \cdot {}_r\mathbf{E}^K)^* = \\ &= ({}_r\mathbf{E}^K)^* \cdot ({}_rS^{*I}{}_K)^* \cdot ({}_rS^I)^* = {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lS^K{}_I \cdot {}_lS^I = {}_l\mathcal{S}, \end{aligned}$$

$$({}_rS^{*K}{}_I)^* = {}_lS^I{}_K,$$

$$((\ )_r\mathbf{K}^I{}_K)^* = {}_l\mathbf{I}^K{}_I(\ ),$$

$$\begin{aligned} (\ )_r\mathcal{S}^* &= ({}_rS^{*K}{}_I \cdot (\ )_r\mathbf{K}^I{}_K)^* = ((\ )_r\mathbf{K}^I{}_K)^* \cdot ({}_rS^{*K}{}_I)^* = \\ &= {}_l\mathbf{I}^K{}_I(\ ) \cdot {}_lS^I{}_K = {}_l\mathcal{S}(\ ), \end{aligned}$$

$$((\ )_r\mathcal{S}^*)^* = {}_l\mathcal{S}(\ ),$$

$${}_rS^{*M}{}_L = g^{IM} \cdot {}_lS^{*K}{}_I \cdot g_{KL}.$$

Здесь  $g_{KL}$  и  $g^{IM}$  – компоненты метрического и обратного метрического тензоров.

<sup>11</sup> То есть полученным в результате операции сопряжения.

<sup>12</sup> Если контравариантный вектор действия отождествить с дираковским *кет*-вектором состояния, а ковариантный вектор действия отождествить с дираковским *бра*-вектором состояния, то приведенные в этом Разделе соотношения по существу составляют аксиомы Гильбертова пространства, положенного в основу классической квантовой механики.

## 5.2. Сопряжение левых векторов действия

Линейное преобразование  ${}_l\mathbf{S}^*: {}_l\mathbf{S} \rightarrow {}_l\mathbf{S}^*$  является сопряженным линейному преобразованию  ${}_r\mathbf{S}: {}_r\mathbf{S} \rightarrow {}_r\mathbf{S}^*$ . Связь между этими преобразованиями дается формулами:

$$\begin{aligned} ({}_l\mathbf{S}')^* &= ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{S}^{K_I} \cdot {}_l\mathbf{S}^I)^* = \\ &= ({}_l\mathbf{S}^I)^* \cdot ({}_l\mathbf{S}^{K_I})^* \cdot ({}_l\mathbf{e}_K)^* = {}_r\mathbf{S}^I \cdot {}_r\mathbf{S}^{*I_K} \cdot {}_r\mathbf{e}^K = {}_r\mathbf{S}^{*I}, \\ ({}_l\mathbf{S}^{K_I})^* &= {}_r\mathbf{S}^{*I_K}, \\ ({}_l\mathbf{I}^K())^* &= ({}_r\mathbf{K}^K_I), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ({}_l\mathbf{S}())^* &= ({}_l\mathbf{I}^K() \cdot {}_l\mathbf{S}^{K_I})^* = ({}_l\mathbf{S}^{K_I})^* \cdot ({}_l\mathbf{I}^K())^* = \\ &= {}_r\mathbf{S}^{*I_K} \cdot ({}_r\mathbf{K}^K_I) = ({}_r\mathbf{S}^*), \end{aligned}$$

$$({}_l\mathbf{S}())^* = ({}_r\mathbf{S}^*),$$

$${}_l\mathbf{S}^{*M}_L = g^{IM} \cdot {}_r\mathbf{S}^{K_I} \cdot g_{KL}$$

и

$$\begin{aligned} (({}_l\mathbf{S}^*)')^* &= ({}_l\mathbf{S}^I \cdot {}_l\mathbf{S}^{*I_K} \cdot {}_l\mathbf{e}^K)^* = \\ &= ({}_l\mathbf{e}^K)^* \cdot ({}_l\mathbf{S}^{*I_K})^* \cdot ({}_l\mathbf{S}^I)^* = {}_r\mathbf{e}^K \cdot {}_r\mathbf{S}^{K_I} \cdot {}_r\mathbf{S}^I = {}_r\mathbf{S}, \end{aligned}$$

$$({}_l\mathbf{S}^{*K_I})^* = {}_r\mathbf{S}^I_K,$$

$$(({}_r\mathbf{K}^K_I)^*)^* = {}_r\mathbf{I}^K_I(),$$

$$\begin{aligned} ({}_r\mathbf{S}^*)^* &= ({}_l\mathbf{S}^{*K_I} \cdot ({}_r\mathbf{K}^K_I)^*)^* = (({}_r\mathbf{K}^K_I)^*)^* \cdot ({}_l\mathbf{S}^{*K_I})^* = \\ &= {}_r\mathbf{I}^K_I() \cdot {}_r\mathbf{S}^I_K = {}_r\mathbf{S}(), \end{aligned}$$

$$(({}_r\mathbf{S}^*)^*)^* = {}_r\mathbf{S}(),$$

$${}_l\mathbf{S}^{*M}_L = g^{IM} \cdot {}_r\mathbf{S}^{*K_I} \cdot g_{KL}.$$

Здесь  $g_{KL}$  и  $g^{IM}$  – компоненты метрического и обратного метрического тензоров.

## VI. КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ АНТИОБЪЕКТОВ

### 1. Уравнения структуры алгебры действия промежуточных антиобъектов

#### 1.1. Правая алгебра действия промежуточных антиобъектов

Далее рассмотрим уравнения структуры алгебры действия промежуточных антиобъектов  ${}_r\mathbf{S}_1^*$ , определяемые дифференцированием вышеуказанного закона умножения векторов (96). Рассматривая дифференциал вектора действия  ${}_r\mathbf{S}^*$ , будем различать дифференциалы индексом  $d_1, d_2, \dots$ , если дифференцирование выполняется по векторам  ${}_r\mathbf{S}_1^*, {}_r\mathbf{S}_2^*, \dots$  соответственно. Из выражения (96) следует

$$d_1 {}_r\mathbf{S}^* = d_r \mathbf{S}_1^* \circ {}_r\mathbf{S}_2^*, \quad d_2 {}_r\mathbf{S}^* = {}_r\mathbf{S}_1^* \circ d_r \mathbf{S}_2^*.$$

Из этих выражений получаем

$$d_r \mathbf{S}_2^* = ({}_r\mathbf{S}_1^*)^{-1} \circ d_2 {}_r\mathbf{S}^*, \quad d_r \mathbf{S}_1^* = d_1 {}_r\mathbf{S}^* \circ ({}_r\mathbf{S}_2^*)^{-1}. \quad (103)$$

Введем второй дифференциал  $d_2 d_1 {}_r\mathbf{S}^*$ . Из выражения (96) для него имеет место равенство

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S}^* = d_r \mathbf{S}_1^* \circ d_r \mathbf{S}_2^*.$$

Используя выражение (103), получим соотношение<sup>13</sup>

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S}^* = d_1 {}_r\mathbf{S}^* \circ ({}_r\mathbf{S}^*)^{-1} \circ d_2 {}_r\mathbf{S}^*.$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при

$${}_r\mathbf{S}^* = ({}_r\mathbf{S}^*)^{-1} = \delta^I_K \cdot \mathbf{K}^K_I,$$

это уравнение принимает вид

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S}^* = d_1 {}_r\mathbf{S}^* \circ d_2 {}_r\mathbf{S}^*. \quad (104)$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* правой алгебры действия промежуточных антиобъектов  ${}_r\mathbf{S}_1^*$  в векторной форме.

Подставляя в соотношение (104) выражения дифференциалов векторов действия через дифференциалы координат и пользуясь законом умножения базисных векторов (97), получим уравнения структуры в координатной форме

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S}^{*I}_K = d_2 {}_r\mathbf{S}^{*I}_L \cdot d_1 {}_r\mathbf{S}^{*L}_K. \quad (105)$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того чтобы перейти к размерному действию, необходимо переписать уравнения (104) и (105) соответственно следующим образом:

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S}^* = \frac{1}{S_0} d_1 {}_r\mathbf{S}^* \circ d_2 {}_r\mathbf{S}^* \quad (106)$$

и

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S}^{*I}_K = \frac{1}{S_0} \cdot d_2 {}_r\mathbf{S}^{*I}_L \cdot d_1 {}_r\mathbf{S}^{*L}_K. \quad (107)$$

Здесь постоянный коэффициент  $S_0$ , векторы действия  ${}_r\mathbf{S}^*$  и координаты векторов действия  ${}_r\mathbf{S}^{*I}_K$  имеют размерность действия.

<sup>13</sup> Здесь учтено, что для соотношения (96)

$$({}_r\mathbf{S}^*)^{-1} = ({}_r\mathbf{S}_2^*)^{-1} \circ ({}_r\mathbf{S}_1^*)^{-1}.$$



1.2. Левая алгебра действия промежуточных антиобъектов

Далее рассмотрим уравнения структуры алгебры действия промежуточных антиобъектов  ${}_l\mathbf{S}_1^*$ , определяемые дифференцированием вышеуказанного закона умножения векторов (101). Рассматривая дифференциал вектора действия  ${}_l\mathbf{S}^*$ , будем различать дифференциалы индексом  $d_1, d_2, \dots$ , если дифференцирование выполняется по векторам  ${}_l\mathbf{S}_1^*, {}_l\mathbf{S}_2^*, \dots$  соответственно. Из выражения (101) следует

$$d_2 {}_l\mathbf{S}^* = d_1 {}_l\mathbf{S}_2^* \circ {}_l\mathbf{S}_1^*, \quad d_1 {}_l\mathbf{S}^* = {}_l\mathbf{S}_2^* \circ d_1 {}_l\mathbf{S}_1^*.$$

Из этих выражений получаем

$$d_1 {}_l\mathbf{S}_2^* = d_2 {}_l\mathbf{S}^* \circ ({}_l\mathbf{S}_1^*)^{-1}, \quad d_1 {}_l\mathbf{S}_1^* = ({}_l\mathbf{S}_2^*)^{-1} \circ d_1 {}_l\mathbf{S}^*. \quad (108)$$

Введем второй дифференциал  $d_2 d_1 {}_l\mathbf{S}^*$ . Из выражения (101) для него имеет место равенство

$$d_2 d_1 {}_l\mathbf{S}^* = d_1 {}_l\mathbf{S}_2^* \circ d_1 {}_l\mathbf{S}_1^*.$$

Используя выражение (108), получим<sup>14</sup>

$$d_2 d_1 {}_l\mathbf{S}^* = d_2 {}_l\mathbf{S}^* \circ ({}_l\mathbf{S}^*)^{-1} \circ d_1 {}_l\mathbf{S}^*.$$

Вблизи единицы алгебры, то есть при

$${}_l\mathbf{S}^* = ({}_l\mathbf{S}^*)^{-1} = \delta^I_K \cdot \mathbf{K}^K_I,$$

это уравнение принимает вид

$$d_2 d_1 {}_l\mathbf{S}^* = d_2 {}_l\mathbf{S}^* \circ d_1 {}_l\mathbf{S}^*. \quad (109)$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* левой алгебры действия промежуточных антиобъектов  ${}_l\mathbf{S}_1^*$  в векторной форме.

Подставляя в соотношение (109) выражения дифференциалов векторов действия через дифференциалы координат и пользуясь законом умножения базисных векторов (102), получим уравнения структуры в координатной форме

$$d_2 d_1 {}_l\mathbf{S}^{*I}_K = d_2 {}_l\mathbf{S}^{*I}_L \cdot d_1 {}_l\mathbf{S}^{*L}_K. \quad (110)$$

Выведенные уравнения структуры записаны для действия в безразмерной форме. Для того чтобы перейти к размерному действию, необходимо переписать уравнения (109) и (110) соответственно следующим образом:

$$d_2 d_1 {}_l\mathbf{S}^* = \frac{1}{S_0} d_2 {}_l\mathbf{S}^* \circ d_1 {}_l\mathbf{S}^* \quad (111)$$

и

$$d_2 d_1 {}_l\mathbf{S}^{*I}_K = \frac{1}{S_0} \cdot d_2 {}_l\mathbf{S}^{*I}_L \cdot d_1 {}_l\mathbf{S}^{*L}_K. \quad (112)$$

Здесь постоянный коэффициент  $S_0$ , векторы действия  ${}_l\mathbf{S}^*$  и координаты векторов действия  ${}_l\mathbf{S}^{*I}_K$  имеют размерность действия.

2. Квантовые уравнения для свободных промежуточных антиобъектов

Уравнения структуры по существу и есть квантовые уравнения, которыми определяется квантовая механика промежуточных античастиц. При этом необходимо учесть, что квантовые уравнения, как и уравнения структуры, существуют в двух модификациях – для правой и для левой алгебр действия промежуточных антиобъектов.

2.1. Правая алгебра действия промежуточных антиобъектов

В уравнении структуры (106) введем обозначение

$$d_1 {}_r\mathbf{S}^* = {}_r\psi_1^*$$

и в уравнении структуры (107) соответственно введем обозначение

$$d_1 {}_r\mathbf{S}^{*I}_K = {}_r\psi^{*I}_K.$$

Будем рассматривать функцию  ${}_r\psi_1^*$  с координатами  ${}_r\psi^{*I}_K$  как *правую* волновую функцию промежуточного антиобъекта. Дифференциал  $d_2$  обозначим  $d$ . Уравнение структуры (106), записанное по отношению к правой волновой функции

$$d {}_r\psi_1^* = \frac{1}{S_0} {}_r\psi_1^* \circ d {}_r\mathbf{S}^* \quad (113)$$

и уравнение структуры (107), записанное по отношению к координатам правой волновой функции

$$d {}_r\psi^{*I}_K = \frac{1}{S_0} \cdot d {}_r\mathbf{S}^{*I}_L \cdot {}_r\psi^{*L}_K, \quad (114)$$

представляют собой *правые квантовые уравнения для промежуточного антиобъекта* в дифференциалах.

Правый вектор действия промежуточного антиобъекта является функцией координат сопряженного пространства-времени

$${}_r\mathbf{S}^* = {}_r\mathbf{S}^*(x^*).$$

Производную от правого вектора действия  ${}_r\mathbf{S}^*(x^*)$  по координате сопряженного пространства-времени, взятую с обратным знаком, определим как вектор *правого момента* промежуточного антиобъекта

$${}_r\mathbf{M}^{*M} = -\frac{\partial {}_r\mathbf{S}^*}{\partial x_M},$$

который может быть записан через координаты момента следующим образом:

$${}_r\mathbf{M}^{*M} = {}_r m^{*MI}_L \cdot {}_r\mathbf{K}^L_I,$$

где

$${}_r m^{*MI}_L = -\frac{\partial {}_r\mathbf{S}^{*I}_L}{\partial x_M}.$$

<sup>14</sup> Здесь учтено, что для выражения (101)

$$({}_l\mathbf{S}^*)^{-1} = ({}_l\mathbf{S}_1^*)^{-1} \circ ({}_l\mathbf{S}_2^*)^{-1}.$$

С использованием правого момента правые квантовые уравнения для промежуточного антиобъекта переписываются следующим образом. Уравнение (113) принимает вид

$$\frac{\partial_r \psi_1^*}{\partial x_M} = -\frac{1}{S_0} {}_r \psi_1^* \circ {}_r M^{*M}. \quad (115)$$

Уравнение (114) принимает вид

$$\frac{\partial_r \psi^{*I}{}_K}{\partial x_M} = -\frac{1}{S_0} {}_r m^{*MI}{}_L \cdot {}_r \psi^{*L}{}_K. \quad (116)$$

Далее придадим этому соотношению форму уравнения Дирака для античастиц. Для этого умножим его обе части на структурные константы  ${}_l C^K{}_{NM}$ , выполнив соответствующие суммирования. Получим

$${}_l C^K{}_{NM} \cdot \frac{\partial_r \psi^{*I}{}_K}{\partial x_M} = -\frac{1}{S_0} {}_l C^K{}_{NM} \cdot {}_r m^{*MI}{}_L \cdot {}_r \psi^{*L}{}_K. \quad (117)$$

(Как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Это уравнение и есть правое квантовое уравнение для свободного промежуточного антиобъекта в самом общем виде.

## 2.2. Левая алгебра действия промежуточных антиобъектов

В уравнении структуры (109) введем обозначение

$$d_1 {}_l S^* = {}_l \psi_1^*$$

и в уравнении структуры (110) соответственно введем обозначение

$$d_1 {}_l S^{*I}{}_K = {}_l \psi^{*I}{}_K.$$

Будем рассматривать функцию  ${}_l \psi_1^*$  с координатами  ${}_l \psi^{*I}{}_K$  как левую волновую функцию промежуточного антиобъекта. Дифференциал  $d_2$  обозначим  $d$ . Уравнение структуры (109), записанное по отношению к левой волновой функции

$$d {}_l \psi_1^* = \frac{1}{S_0} d {}_l S^* \circ {}_l \psi_1^*, \quad (118)$$

и уравнение структуры (110), записанное по отношению к координатам правой волновой функции

$$d {}_l \psi^{*I}{}_K = \frac{1}{S_0} \cdot d {}_l S^{*I}{}_L \cdot {}_l \psi^{*L}{}_K, \quad (119)$$

представляют собой левые квантовые уравнения для промежуточного антиобъекта в дифференциалах.

Левый вектор действия промежуточного антиобъекта является функцией координат сопряженного пространства-времени

$${}_l S^* = {}_l S^*(x^*).$$

Производную от левого вектора действия  ${}_l S^*(x^*)$  по координате сопряженного пространства-времени, взятую с обратным знаком, определим как вектор *левого момента* промежуточного антиобъекта

$${}_l M^{*M} = -\frac{\partial {}_l S^*}{\partial x_M},$$

который может быть записан через координаты момента следующим образом:

$${}_l M^{*M} = {}_l m^{*MI}{}_L \cdot {}_l K^L{}_I,$$

где

$${}_l m^{*MI}{}_L = -\frac{\partial {}_l S^{*I}{}_L}{\partial x_M}.$$

С использованием левого момента левые квантовые уравнения промежуточного антиобъекта переписываются следующим образом.

Уравнение (118) принимает вид

$$\frac{\partial {}_l \psi_1^*}{\partial x_M} = -\frac{1}{S_0} {}_l M^{*M} \circ {}_l \psi_1^*. \quad (120)$$

Уравнение (119) принимает вид

$$\frac{\partial {}_l \psi^{*I}{}_K}{\partial x_M} = -\frac{1}{S_0} {}_l m^{*MI}{}_L \cdot {}_l \psi^{*L}{}_K. \quad (121)$$

Далее придадим этому соотношению форму уравнения Дирака для античастиц. Для этого умножим его обе части на структурные константы  ${}_r C^K{}_{NM}$ , выполнив соответствующие суммирования. Получим

$${}_r C^K{}_{NM} \cdot \frac{\partial {}_l \psi^{*I}{}_K}{\partial x_M} = -\frac{1}{S_0} {}_r C^K{}_{NM} \cdot {}_l m^{*MI}{}_L \cdot {}_l \psi^{*L}{}_K. \quad (122)$$

(Как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Это уравнение и есть левое квантовое уравнение для свободного промежуточного антиобъекта в самом общем виде.

## VII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Действие промежуточного объекта есть оператор линейного преобразования, применяемый к векторам действия фундаментальных объектов. Действие промежуточного антиобъекта есть оператор линейного преобразования, применяемый к векторам действия фундаментальных антиобъектов.
- Векторы действия промежуточных объектов составляют алгебру. Векторы действия промежуточных антиобъектов также составляют алгебру.

- Квантовые уравнения для свободных промежуточных объектов имеют вид (36) и (41). Квантовые уравнения для свободных промежуточных антиобъектов имеют вид (117) и (122).
- Рассмотреть взаимодействующие объекты означает: 1) ввести алгебру действия, общую для взаимодействующих объектов; 2) записать уравнения структуры этой алгебры и 3) перейти от указанных уравнений к системе квантовых уравнений для взаимодействующих объектов.

## Глава 5.2 Взаимодействие элементарных частиц

### 1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ. ОБОБЩАЮЩАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ

#### 1. Предварительные замечания

1. В этом Разделе понятие *физический объект* отождествлено с понятием *элементарная частица*.

2. Рассмотрим множество элементарных частиц, включая фундаментальные частицы и античастицы, а также промежуточные частицы и античастицы.

3. Каждая частица представлена вектором действия. Множество элементарных частиц представлено множеством векторов действия. Это множество есть сумма множеств векторов действия фундаментальных и промежуточных частиц и античастиц, то есть

$$\mathbf{T} + \mathbf{T}^* = \mathbf{S} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}^* + \mathbf{S}_1^*.$$

Вектор действия  $\mathbf{T} \in (\mathbf{T} + \mathbf{T}^*)$  представляет собой сумму векторов действия указанных элементарных частиц.

4. Множество векторов действия  $(\mathbf{T} + \mathbf{T}^*)$  является алгеброй, то есть на этом множестве, помимо операции сложения, имеет место операция умножения. Операция умножения является некоммутативной, поэтому необходимо вводить две модификации алгебры действия элементарных частиц – правую и левую. В этом Разделе будем рассматривать алгебру  $(\mathbf{T} + \mathbf{T}^*)$ , не разделяя ее на правую и левую, но для определенности будем записывать умножения в этой алгебре так, как они записываются в правой алгебре.

#### 2. Системообразующий постулат

о-умножение отождествляется с *взаимодействием* элементарных частиц, сопровождающим их участие в динамических явлениях. В этом смысле, например, закон умножения

$$\mathbf{e}_{I_1} \circ \mathbf{e}_{I_2} = \mathbf{e}_I \cdot C^I_{I_1 I_2}$$

нужно интерпретировать так. Участвуя в динамических явлениях, фундаментальная частица ( $\mathbf{e}_1$ ) взаимодействует с фундаментальной частицей ( $\mathbf{e}_2$ ). Результатом этого взаимодействия является фундаментальная частица ( $\mathbf{e}$ ). Аналогичным образом закон умножения

$$\mathbf{e}_M \circ \mathbf{I}_K^L = \delta^L_M \cdot \mathbf{e}_K$$

следует интерпретировать так. Участвуя в динамических явлениях, промежуточная частица ( $\mathbf{I}$ ) взаимодействует с фундаментальной частицей ( $\mathbf{e}$ ). Результатом этого взаимодействия является другая фундаментальная частица ( $\mathbf{e}$ ). Аналогичным образом закон

умножения

$$\mathbf{I}_K^L \circ \mathbf{I}_M^J = \delta^J_K \cdot \mathbf{I}_M^L$$

нужно интерпретировать так. Участвуя в динамических явлениях, одна промежуточная частица ( $\mathbf{I}_1$ ) взаимодействует с другой промежуточной частицей ( $\mathbf{I}_2$ ). Результатом этого взаимодействия является третья промежуточная частица ( $\mathbf{I}$ ). Аналогичным образом следует интерпретировать другие законы умножения.

#### 3. Взаимодействие элементарных частиц. Обобщающая точка зрения

Сведения об элементарных частицах доставляются, в частности, из экспериментов по столкновению частиц. Процессы столкновения включают в себя три этапа. На первом этапе мы имеем группу свободных частиц, именуемую *начальной конфигурацией* частиц. На втором этапе эти частицы вступают в отношение, называемое *взаимодействием*, вследствие которого на третьем этапе имеет место преобразование начальной конфигурации частиц в новую группу (другими словами *конечную конфигурацию*) свободных частиц. В процессах столкновения можно выделить два элементарных преобразования начальной конфигурации частиц в конечную. Одно из них представляет *синтез* частицы, другое представляет *распад* частицы. При синтезе частицы несколько начальных частиц преобразуются в одну конечную частицу. При распаде частицы одна начальная частица преобразуется в несколько конечных частиц. Произвольный процесс столкновения частиц можно представить как последовательное осуществление нескольких синтезов и распадов частиц.

Имея в виду, что частицы представлены векторами алгебры действия  $(\mathbf{T} + \mathbf{T}^*)$ , то есть на векторах действия имеет место не только операция сложения, но и умножения, представим процессы синтеза и распада частиц через умножение соответствующих векторов алгебры действия  $(\mathbf{T} + \mathbf{T}^*)$ . Так, например, процесс синтеза представим в виде произведения

$$\mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2 \circ \dots \circ \mathbf{T}_n = \mathbf{T},$$

где  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n$  – векторы действия частиц начальной конфигурации, участвующих в синтезе,  $\mathbf{T}$  – вектор действия синтезируемой частицы. Прочтение этого соотношения справа налево представляет процесс распада частицы. Если возможна адекватная формулировка правил вычисления произведений векторов, то по таким правилам можно было бы определить конечную конфигурацию частиц по начальной конфигурации частиц, участвующих в столкновении.

Далее рассмотрим подалгебры алгебры действия частиц ( $\mathbb{T} + \mathbb{T}^*$ ) по мере усложнения состава частиц, описываемых этими подалгебрами. Взаимодействие в указанной интерпретации может быть представлено через элементарные акты, которые представляются таблицей умножения базисных векторов. Поэтому далее рассмотрим таблицы умножения базисных векторов подалгебр алгебры действия частиц ( $\mathbb{T} + \mathbb{T}^*$ ) и дадим им соответствующую интерпретацию.

1. Выделим частицы, состояние которых описывается вектором действия

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_K \cdot S^K \in \mathbb{S}.$$

Мы определили их как *фундаментальные*. К фундаментальным частицам мы отнесли лептоны и кварки, а также гипотетические (суперсимметричные лептонам и кваркам) лептино и кваркино. Указанные частицы определены как фундаментальные, поскольку предполагается, что они не могут быть синтезированы из других частиц. Этим частицам соответствует правило умножения базисных векторов действия

$$\mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_L \cdot C^L_{KI}.$$

В соответствии с нашей концепцией это выражение при прочтении его слева направо нужно рассматривать как синтез фундаментальной частицы, что противоречит представлению о ее фундаментальности. Это противоречие снимается, если придерживаться следующей точки зрения. Фундаментальная частица содержит компоненты, которые, взаимодействуя друг с другом, синтезируют эту же фундаментальную частицу. Причем указанные компоненты не существуют как самостоятельные образования. Например, электрон включает в себя левую и правую компоненты, которые связаны между собой системой дифференциальных уравнений (то есть взаимодействуют между собой), но не существуют самостоятельно.

2. Выделим частицы, состояние которых описывается вектором действия

$$\mathbf{S}^* = S_K \cdot \mathbf{E}^K \in \mathbb{S}^*.$$

Мы определили их как *фундаментальные античастицы*. К фундаментальным античастицам мы отнесли антилептоны и антикварки а также гипотетические (суперсимметричные антилептонам и антикваркам) антилептино и антикваркино. Указанные античастицы определены как фундаментальные, поскольку также предполагается, что они не могут быть синтезированы из других частиц. Этим частицам соответствует правило умножения базисных векторов

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{E}^K = C^{IK}_L \cdot \mathbf{E}^L.$$

3. Выделим частицы, состояние которых описывается вектором действия

$$\mathbf{S} = \mathbf{I}^L_K \cdot S^K_L \in \mathbb{S}_1.$$

Мы определили их как *промежуточные* частицы. Такое определение обусловлено тем, что эти частицы выступают как носители взаимодействия между фундаментальными частицами (и античастицами). К промежуточным частицам мы отнесли фотон,  $W$  и  $Z$ -бозоны, глюоны и мезоны, а также гипотетические (им суперсимметричные) частицы. Этим частицам соответствует правило умножения базисных векторов

$$\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N = \delta^M_L \cdot \mathbf{I}^K_N. \quad (1)$$

Вышеуказанные правила произведений базисных векторов допускают естественное обобщение, базирующееся на правилах тензорной алгебры. В частности, все произведения, представляющие собой тензоры четных рангов, допускают отображение в числовое пространство  $\mathbb{R}$  (множество действительных чисел). В результате произведение базисных векторов (1) приобретает вид

$$\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N = \mathbf{I}^{KM}_L + \delta^M_L \cdot \mathbf{I}^K_N + \delta^M_L \cdot \delta^K_N.$$

Первое слагаемое в правой части должно быть опущено, так как выводит нас за рамки рассматриваемой алгебры:

$$\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N = \delta^M_L \cdot \mathbf{I}^K_N + \delta^M_L \cdot \delta^K_N. \quad (2)$$

Последнее слагаемое входит в алгебру и должно быть проинтерпретировано с точки зрения взаимодействия частиц. Этому слагаемому соответствует скалярная компонента вектора действия, которую свяжем со *скалярной* промежуточной частицей.

4. В предыдущем пункте показано, что обобщение правила умножения базисных векторов (1) до (2) на основании правил тензорной алгебры приводит к необходимости расширения алгебры действия промежуточных частиц и ведения скалярной промежуточной частицы. Обозначим действие скалярной промежуточной частицы символом  $C$ , а базисные единицы этого действия обозначим через  $\delta^K_L$ . Тогда

$$C = \delta^K_L \cdot C^K_L = C^K_K,$$

где  $C^K_L \in \mathbb{R}$  – координаты действия. Введение скаляров в алгебру действия требует определения умножения скаляров между собой и умножения скаляра на вектор. Априори, без дополнительных соображений, формулировка таких законов умножения содержит существенную неопределенность, поэтому пока их рассматривать не будем<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Например, умножение скаляров можно подчинить следующему правилу:

$$C_1 \circ C_2 = C$$

и правилу умножения базисных единиц

$$\delta^K_L \circ \delta^M_N = \delta^M_L \cdot \delta^K_N.$$

5. Выделим частицы, состояние которых описывается вектором действия

$$\mathbf{S}^* = S^{*K}_L \cdot \mathbf{K}^L_K \in \mathbf{S}_1^*.$$

Мы определили их как *промежуточные* античастицы. Эти частицы также выступают как носители взаимодействия между фундаментальными частицами (и античастицами). К промежуточным античастицам отнесем фотон,  $W^+$  и  $Z$ -бозоны, антиглюоны и антимезоны, а также гипотетические (им суперсимметричные) античастицы. Этим частицам соответствует правило умножения базисных векторов

$$\mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{K}^M_N = \delta^K_N \cdot \mathbf{K}^M_L. \quad (3)$$

Это правило также допускает естественное обобщение, базирующееся на правилах тензорной алгебры. В частности, все произведения, представляющие собой тензоры четных рангов, допускают отображение в числовое пространство  $\mathbb{R}$  (множество действительных чисел). В результате произведение базисных векторов (3) приобретает вид

$$\mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{K}^M_N = \delta^K_N \cdot \mathbf{K}^M_L + \delta^K_N \cdot \delta^M_L. \quad (4)$$

Здесь опущено слагаемое ( $\mathbf{K}^K_L \mathbf{K}^M_N$ ) в правой части, так как оно выводит нас за рамки рассматриваемой алгебры. Слагаемому ( $\delta^K_N \cdot \delta^M_L$ ) соответствует скалярная компонента вектора действия, которую также свяжем со *скалярной* промежуточной античастицей.

6. Рассмотрим алгебру, которая представляет фундаментальные и промежуточные частицы совместно,  $\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{S}_1$ . Векторы этой алгебры имеют вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_K \cdot S^K + \mathbf{I}^L_K \cdot S^K_L.$$

Таблица умножения базисных векторов в этой алгебре задается соотношениями<sup>2</sup>:

$$\mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_L \cdot C^L_{KI}, \quad (5)$$

$$\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N = \delta^M_L \cdot \mathbf{I}^K_N, \quad (6)$$

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L = \delta^K_I \cdot \mathbf{e}_L, \quad (7)$$

$$\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{e}_I = 0. \quad (8)$$

Соотношение (7) соответствует случаю поглощения промежуточной частицы фундаментальной частицей, а при прочтении его справа налево – случаю испускания промежуточной частицы фундаментальной частицей. Именно в этом соотношении промежуточная

частица проявляет себя как переносчик взаимодействия между фундаментальными частицами. На примерах взаимодействия фундаментальных и промежуточных частиц покажем соответствие между элементарными диаграммами Фейнмана и правилами произведения базисных векторов (7) в рассматриваемой алгебре.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} e^- \\ \diagdown \\ \gamma \\ \diagup \\ e^- \end{array} & \begin{array}{c} \gamma \\ \diagdown \\ e^- \\ \diagup \\ e^- \end{array} \\ e^- \rightarrow e^- \gamma & e^- \gamma \rightarrow e^- \\ \mathbf{e}_L \rightarrow \mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L & \mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L \rightarrow \mathbf{e}_L \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \nu_\mu \\ \diagdown \\ Z \\ \diagup \\ \nu_\mu \end{array} & \begin{array}{c} Z \\ \diagdown \\ \nu_\mu \\ \diagup \\ \nu_\mu \end{array} \\ \nu_\mu \rightarrow \nu_\mu Z & \nu_\mu Z \rightarrow \nu_\mu \\ \mathbf{e}_L \rightarrow \mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L & \mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L \rightarrow \mathbf{e}_L \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} e^- \\ \diagdown \\ W^+ \\ \diagup \\ \nu_e \end{array} & \begin{array}{c} W^+ \\ \diagdown \\ e^- \\ \diagup \\ \nu_e \end{array} \\ \nu_e \rightarrow e^- W^+ & e^- W^+ \rightarrow \nu_e \\ \mathbf{e}_L \rightarrow \mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L & \mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L \rightarrow \mathbf{e}_L \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} u \\ \diagdown \\ W^+ \\ \diagup \\ d \end{array} & \begin{array}{c} W^+ \\ \diagdown \\ d \\ \diagup \\ u \end{array} \\ u \rightarrow d W^+ & d W^+ \rightarrow u \\ \mathbf{e}_L \rightarrow \mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L & \mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L \rightarrow \mathbf{e}_L \end{array}$$

Приведенные правила умножения базисных векторов также допускают естественное обобщение, базирующееся на правилах тензорной алгебры. С эстетической точки зрения правило умножения (5) интересно обобщить до следующего соотношения:

$$\mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_L \cdot C^L_{KI} + \mathbf{I}^M_L \cdot C^L_{MKI}. \quad (9)$$

В этом случае в квантовое уравнение для промежуточной частицы входит волновая функция фундаментальной частицы, взаимодействующей с указанной промежуточной частицей. В рассматриваемой алгебре правило умножения (6) также необходимо обобщить до (2). С точки зрения тензорной алгебры соотношение (8) надо записать так:

$$\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{e}_I = \mathbf{E}^K \cdot g_{LI}. \quad (10)$$

Однако оно выходит за рамки рассматриваемой алгебры и приобретает смысл только при совместном рассмотрении алгебр действия частиц и античастиц.

<sup>2</sup> См. Глава 5.1. формулы (43), (44), (45), (46).

8. Выделим фундаментальные частицы и античастицы. Рассмотрим алгебру, которая представляет эти частицы совместно,  $(\mathbf{S} + \mathbf{S}^*)$ . Векторы этой алгебры имеют вид

$$\mathbf{e}_K \cdot S^K + S_L \cdot \mathbf{E}^L.$$

Таблица умножения базисных векторов в этой алгебре задается с помощью следующих соотношений:

$$\mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_L \cdot C^L_{KI}, \quad (11)$$

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{E}^K = C^{IK}_L \cdot \mathbf{E}^L, \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{E}^K = \mathbf{E}^K \circ \mathbf{e}_I = \delta^K_I. \quad (13)$$

В предыдущем пункте приведено соотношение (9), обобщающее соотношение (5). Аналогично соотношение (12) интересно обобщить до

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{E}^K = C^{IK}_L \cdot \mathbf{E}^L + C^{IKM}_L \cdot \mathbf{K}^L_M. \quad (14)$$

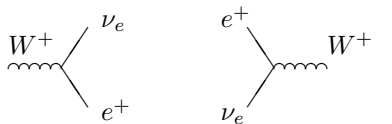
В этом случае в квантовое уравнение для промежуточной античастицы входит волновая функция фундаментальной античастицы, взаимодействующей с указанной промежуточной античастицей. Правило умножения (13) также должно быть обобщено в соответствии с правилами тензорной алгебры. С этой точки зрения произведение  $\mathbf{S}^* \circ \mathbf{S}$  можно рассматривать как линейное преобразование вектора  $\mathbf{S}$ , а произведение  $\mathbf{S} \circ \mathbf{S}^*$  можно рассматривать как линейное преобразование вектора  $\mathbf{S}^*$ . Поэтому можно положить

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}^I_K \quad (15)$$

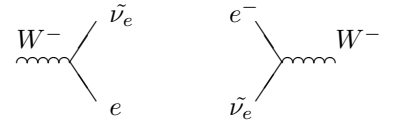
и

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{E}^K = \mathbf{K}^K_I. \quad (16)$$

Этим соотношениям соответствуют случаи аннигиляции фундаментальной частицы и античастицы в промежуточную и обратному образованию фундаментальной частицы и античастицы из промежуточной частицы. На примере указанного взаимодействия фундаментальных частиц с промежуточными покажем соответствие между элементарными диаграммами Фейнмана и правилами произведения базисных векторов (15) и (16).



$W^+ \rightarrow \nu_e e^+ \quad e^+ \nu_e \rightarrow W^+$   
 $\mathbf{I}^K_L \rightarrow \mathbf{E}^K \circ \mathbf{e}_L \quad \mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K \rightarrow \mathbf{I}^I_K$



$W^- \rightarrow e \tilde{\nu}_e \quad e^- \tilde{\nu}_e \rightarrow W^-$   
 $\mathbf{K}^K_I \rightarrow \mathbf{e}_I \circ \mathbf{E}^K \quad \mathbf{e}_I \circ \mathbf{E}^K \rightarrow \mathbf{K}^K_I$

Соотношения (13), (15) и (16) могут быть объединены следующим образом:

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}^I_K + \delta^K_I \quad (17)$$

и

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{E}^K = \mathbf{K}^K_I + \delta^K_I. \quad (18)$$

Из них следует, что аннигиляция фундаментальной частицы и античастицы приводит к образованию векторной и скалярной промежуточных частиц.

Таким образом, векторы действия фундаментальных частиц и античастиц не образуют независимую алгебру и должны рассматриваться вместе с промежуточными частицами и античастицами.

9. Выделим промежуточные частицы и античастицы. Рассмотрим алгебру, которая представляет эти частицы совместно,  $(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1^*)$ . Векторы этой алгебры имеют вид

$$\mathbf{I}^L_K \cdot S^K_L + S^{*L}_K \cdot \mathbf{K}^K_L.$$

Таблица умножения базисных векторов в этой алгебре, помимо уже приведенных соотношений (2) и (4), должна включать произведения  $\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{K}^M_N$  и  $\mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N$ . На основании правил тензорной алгебры имеем

$$\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{K}^M_N = g_{LN} \cdot C^{KM}_P \cdot \mathbf{E}^P + g_{LN} \cdot g^{KM} \quad (19)$$

и

$$\mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N = \mathbf{e}_P \cdot C^P_{NL} \cdot g^{KM} + g^{KM} \cdot g_{LN}. \quad (20)$$

Первые слагаемые в правых частях этих соотношений выходят за рамки рассматриваемой алгебры. Таким образом, соотношения (19) и (20) необходимо скорректировать:

$$\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{K}^M_N = g_{LN} \cdot g^{KM}$$

и

$$\mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N = g^{KM} \cdot g_{LN}.$$

Отсюда следует, что аннигиляция промежуточной частицы и промежуточной античастицы приводит к образованию скалярной частицы.

Однако, из соотношений (19) и (20) следует, что в общем случае промежуточные частицы и античастицы необходимо рассматривать вместе с фундаментальными частицами и античастицами.

10. Рассмотрим алгебру действия, которая представляет фундаментальные и промежуточные частицы и античастицы совместно:

$$\mathbf{T} + \mathbf{T}^* = \mathbf{S} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}^* + \mathbf{S}_1^*.$$

Векторы этой алгебры имеют вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_K \cdot \mathbf{S}^K + \mathbf{I}_{K_L}^L \cdot \mathbf{S}_{K_L}^K + \mathbf{S}_K \cdot \mathbf{E}^K + \mathbf{S}^{*K}_L \cdot \mathbf{K}^L_{K_L}.$$

В соответствии с соображениями, приведенными в предыдущих пунктах Раздела, таблица умножения базисных векторов в этой алгебре имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I &= \mathbf{e}_L \cdot C^L_{KI} + \mathbf{I}^M_L \cdot C^L_{MKI}, \\ \mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L &= \delta^K_I \cdot \mathbf{e}_L, \\ \mathbf{e}_I \circ \mathbf{E}^K &= \mathbf{K}^K_I + \delta^K_I, \\ \mathbf{e}_I \circ \mathbf{K}^K_L &= g_{IL} \cdot \mathbf{E}^K, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^I \circ \mathbf{E}^K &= C^{IK}_L \cdot \mathbf{E}^L + C^{IKM}_L \cdot \mathbf{K}^L_M, \\ \mathbf{E}^I \circ \mathbf{K}^K_L &= \delta^I_L \cdot \mathbf{E}^K, \\ \mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K &= \mathbf{I}^I_K + \delta^I_K, \\ \mathbf{E}^I \circ \mathbf{I}^K_L &= g^{IK} \cdot \mathbf{e}_L, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{e}_I &= \mathbf{E}^K \cdot g_{LI}, \\ \mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N &= \delta^M_L \cdot \mathbf{I}^K_N + \delta^M_N \cdot \delta^K_L, \\ \mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{E}^I &= \mathbf{E}^K \cdot \delta^I_L, \\ \mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{K}^M_N &= g_{LN} \cdot C^{KM}_P \cdot \mathbf{E}^P + g_{LN} \cdot g^{KM}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{E}^I &= g^{KI} \cdot \mathbf{e}_L, \\ \mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{K}^M_N &= \delta^{KN} \cdot \mathbf{K}^M_L + \delta^{KN} \cdot \delta^M_L, \\ \mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{e}_I &= \delta^K_I \cdot \mathbf{e}_L, \\ \mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N &= \mathbf{e}_P \cdot C^P_{NL} \cdot g^{KM} + g^{KM} \cdot g_{LN}. \end{aligned} \quad (24)$$

Проиллюстрируем некоторые из правил умножения элементарными актами взаимодействия фундаментальных и промежуточных частиц.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} e^+ \\ \diagdown \\ W^+ \\ \diagup \\ \nu_e \end{array} & \begin{array}{c} \tilde{\nu}_e \\ \diagdown \\ W^+ \\ \diagup \\ e^+ \end{array} \\ e^+ \rightarrow W^+ \tilde{\nu}_e & W^+ \tilde{\nu}_e \rightarrow e^+ \\ \mathbf{E}^K \rightarrow \mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{E}^I & \mathbf{I}^I_K \circ \mathbf{E}^K \rightarrow \mathbf{E}^I \\ \\ \begin{array}{c} \tilde{\nu}_e \\ \diagdown \\ W^- \\ \diagup \\ e^+ \end{array} & \begin{array}{c} e^+ \\ \diagdown \\ W^- \\ \diagup \\ \tilde{\nu}_e \end{array} \\ \tilde{\nu}_e \rightarrow e^+ W^- & e^+ W^- \rightarrow \tilde{\nu}_e \\ \mathbf{E}^K \rightarrow \mathbf{E}^L \circ \mathbf{K}^K_L & \mathbf{E}^I \circ \mathbf{K}^K_L \rightarrow \mathbf{E}^K \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} W^- \\ \diagup \\ e^- \\ \diagdown \\ \nu_e \end{array} & \begin{array}{c} \nu_e \\ \diagdown \\ W^- \\ \diagup \\ e \end{array} \\ e^- \rightarrow W^- \nu_e & W^- \nu_e \rightarrow e \\ \mathbf{e}_L \rightarrow \mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{e}_I & \mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{e}_I \rightarrow \mathbf{e}_L \end{array}$$

11. Далее еще раз приведем произведения базисных векторов алгебры действия ( $\mathbf{T} + \mathbf{T}^*$ ) фундаментальных и промежуточных частиц, сопоставив этим произведениям элементарные акты взаимодействий. Фундаментальные частицы обозначим  $F$ , промежуточные частицы обозначим  $B$ , фундаментальные античастицы обозначим соответственно  $F^*$ , промежуточные античастицы обозначим  $B^*$ , скалярные частицы обозначим  $\phi$ .

В результате имеем соответствие между произведениями базисных векторов и элементарными актами взаимодействия частиц:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I &= \mathbf{e}_L \cdot C^L_{KI} + \mathbf{I}^M_L \cdot C^L_{MKI} \\ &\sim F_1 \circ F_2 \rightarrow F_3 + B, \\ \mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L &= \delta^K_I \cdot \mathbf{e}_L \sim F_1 \circ B \rightarrow F_2, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^I \circ \mathbf{E}^K &= C^{IK}_L \cdot \mathbf{E}^L + C^{IKM}_L \cdot \mathbf{K}^L_M \\ &\sim F_1^* \circ F_2^* \rightarrow F_3^* + B, \\ \mathbf{E}^I \circ \mathbf{K}^K_L &= \delta^I_L \cdot \mathbf{E}^K \sim F_1^* \circ B^* \rightarrow F_2^*, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_I \circ \mathbf{E}^K &= \mathbf{K}^K_I + \delta^K_I \sim F \circ F^* \rightarrow B^* + \phi, \\ \mathbf{e}_I \circ \mathbf{K}^K_L &= g_{IL} \cdot \mathbf{E}^K \sim F \circ B^* \rightarrow F^*, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K &= \mathbf{I}^I_K + \delta^I_K \sim F_1^* \circ F_2 \rightarrow B + \phi, \\ \mathbf{E}^I \circ \mathbf{I}^K_L &= g^{IK} \cdot \mathbf{e}_L \sim F^* \circ B \rightarrow F_1, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{e}_I &= \mathbf{E}^K \cdot g_{LI} \sim B \circ F_1 \rightarrow F_2^*, \\ \mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N &= \delta^M_L \cdot \mathbf{I}^K_N + \delta^M_N \cdot \delta^K_L \\ &\sim B_1 \circ B_2 \rightarrow B_3 + \phi, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{E}^I &= g^{KI} \cdot \mathbf{e}_L \sim B^* \circ F_1^* \rightarrow F_2, \\ \mathbf{K}^K_L \circ \mathbf{K}^M_N &= \delta^{KN} \cdot \mathbf{K}^M_L + \delta^{KN} \cdot \delta^M_L \\ &\sim B_1^* \circ B_2^* \rightarrow B_3^* + \phi, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{E}^I &= \mathbf{E}^K \cdot \delta^I_L \sim B \circ F_1^* \rightarrow F_2^*, \\ \mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{K}^M_N &= g_{LN} \cdot C^{KM}_P \cdot \mathbf{E}^P + g_{LN} \cdot g^{KM} \\ &\sim B_1 \circ B_2^* \rightarrow F + \phi, \end{aligned} \quad (31)$$



$$\begin{aligned} \mathbf{K}_L^K \circ \mathbf{e}_I &= \delta^{KI} \cdot \mathbf{e}_L \sim B^* \circ F_1 \rightarrow F_2, \\ \mathbf{K}_L^K \circ \mathbf{I}_N^M &= \mathbf{e}_P \cdot C^P_{NL} \cdot g^{KM} + g^{KM} \cdot g_{LN}, \quad (32) \\ &\sim B_1^* \circ B_2 \rightarrow F + \phi. \end{aligned}$$

## II. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ. ДОПОЛНЕНИЕ

В основе представлений о взаимодействии элементарных частиц лежат следующие соображения.

Вектор действия фундаментальных частиц  $F$  имеет вид  $\mathbf{S} = \mathbf{e}_K \cdot S^K$ . Отсюда умножения, в которых участвует вектор действия фундаментальных частиц, сводятся к умножениям, в которых участвует базисный вектор  $\mathbf{e}_K$ . Поэтому мы исходим из того, что взаимодействиям, в которых участвуют фундаментальные частицы, соответствуют умножения<sup>3</sup>, в которых участвует базисный вектор  $\mathbf{e}_K$ . Соответствие между базисными векторами  $\mathbf{e}_K$  и фундаментальными частицами запишем следующим образом:

$$\mathbf{e} \sim F.$$

Вектор действия фундаментальных античастиц  $F^*$  имеет вид  $\mathbf{S}^* = S_K \cdot \mathbf{E}^K$ . Отсюда умножения, в которых участвует вектор действия фундаментальных античастиц, сводятся к умножениям, в которых участвует базисный вектор  $\mathbf{E}^K$ . Поэтому мы исходим из того, что взаимодействиям, в которых участвуют фундаментальные античастицы, соответствуют умножения, в которых участвует базисный вектор  $\mathbf{E}^K$ . Соответствие между базисными векторами  $\mathbf{E}^K$  и фундаментальными античастицами запишем следующим образом:

$$\mathbf{E} \sim F^*.$$

Вектор действия промежуточных частиц  $B$  имеет вид  $\mathbf{S} = S^M_I \cdot \mathbf{I}_M$ . Отсюда умножения, в которых участвует вектор действия промежуточных частиц, сводятся к умножениям, в которых участвует базисный вектор  $\mathbf{I}_M$ . Поэтому мы исходим из того, что взаимодействиям, в которых участвуют промежуточные частицы, соответствуют умножения, в которых участвует базисный вектор  $\mathbf{I}_M$ . Соответствие между базисными векторами  $\mathbf{I}_M$  и промежуточными частицами запишем следующим образом:

$$\mathbf{I} \sim B.$$

Вектор действия промежуточных античастиц  $B^*$  имеет вид  $\mathbf{S}^* = S^{*M}_I \cdot \mathbf{K}^I_M$ . Отсюда умножения,

в которых участвует вектор действия промежуточных античастиц, сводятся к умножениям, в которых участвует базисный вектор  $\mathbf{K}^I_M$ . Поэтому мы исходим из того, что взаимодействиям, в которых участвуют промежуточные античастицы, соответствуют умножения, в которых участвует базисный вектор  $\mathbf{K}^I_M$ . Соответствие между базисными векторами  $\mathbf{K}^I_M$  и промежуточными античастицами запишем следующим образом:

$$\mathbf{K} \sim B^*.$$

Аналогичные соображения касаются промежуточных частиц и античастиц второго рода.

В результате взаимодействиям фундаментальных и промежуточных частиц и античастиц соответствуют умножения векторов действия этих частиц, которые сводятся к элементарным умножениям базисных векторов пространства действия. Указанные элементарные умножения составляют таблицу умножения базисных векторов, поэтому рассматриваемые нами взаимодействия находятся в соответствии с отдельными составляющими таблицы умножения базисных векторов. В качестве примера рассмотрим следующее произведение базисных векторов:

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K = \delta^{KI} \cdot \mathbf{e}_L. \quad (33)$$

Оно переводится на язык взаимодействий следующим образом:

$$F_1 \circ B = F_2.$$

Здесь символ универсального умножения означает *взаимодействие*, а само выражение читается следующим образом: фундаментальная частица  $F_1$  взаимодействует с промежуточной частицей  $B$ , в результате этого взаимодействия появляется фундаментальная частица  $F_2$ .

### 1. Простейшие диаграммы взаимодействий

В этом Разделе дадим дополнительные объяснения простейших диаграмм взаимодействия элементарных частиц. Построение простейших диаграмм взаимодействия навеяно диаграммами Фейнмана, однако в их основе лежат другие соображения, касающиеся взаимодействия элементарных частиц. Мы исходим из постулата о том, что взаимодействию частиц соответствует умножение векторов действия (или волновых функций) этих частиц. Поэтому в нашем случае диаграмма взаимодействия это графическая иллюстрация умножения векторов действия взаимодействующих частиц.

Вводимые нами *простейшие* диаграммы взаимодействия элементарных частиц являются иллюстрацией отдельных составляющих таблицы умножения

<sup>3</sup> Например, из таблицы умножений (25) - (32).

базисных векторов, точнее соответствующих им взаимодействиям.

Диаграмма наносится на плоскость и изображает распространение элементарных частиц во времени. Для этого на плоскости вводится ось или линия времени, имеющая направление слева направо. То есть, события изображенные правее, происходят позднее событий, изображенных левее. Распространение частицы изображается отрезком линии. (Распространение фундаментальной частицы изображается отрезком прямой линии. Распространение промежуточной частицы изображается отрезком волнистой линии.) Если конец отрезка свободен, то это означает, что в момент времени, соответствующий этому концу, частица свободна. Если концы нескольких отрезков соединены в точку – *вершину*, то это означает, что в момент времени, соответствующий вершине, происходит взаимодействие с участием нескольких частиц, концы отрезков которых соединены.

Пусть взаимодействие, иллюстрируемое простейшей диаграммой, представлено произведением

$$a \circ b = c.$$

Оно означает, что во взаимодействии участвуют три частицы  $a$ ,  $b$  и  $c$ , причем частицы  $a$  и  $b$  взаимодействуют между собой, а частица  $c$  синтезируется в результате взаимодействия.

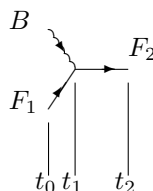
Удобно снабжать отрезки стрелками в соответствии со следующим правилом: если отрезок относится к взаимодействующей частице ( $a$  или  $b$ ), то стрелка направлена к вершине; если отрезок относится к синтезируемой частице ( $c$ ), то стрелка направлена от вершины.

Прочтение вышеуказанного произведения справа налево

$$c = a \circ b$$

означает, что во взаимодействии участвуют три частицы  $a$ ,  $b$  и  $c$ , причем частица  $c$  распадается на две частицы  $a$  и  $b$  в результате взаимодействия. Для этого случая отрезки снабжаются стрелками в соответствии со следующим правилом: для отрезка распадающейся частицы ( $c$ ) стрелка направлена к вершине; отрезки частиц ( $a$  и  $b$ ), возникающих в результате распада, снабжены стрелками, направленными от вершины.

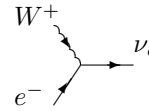
В качестве примера приведем простейшую диаграмму для взаимодействия, соответствующего произведению (33).



В момент времени  $t_0$  частицы  $F_1$  и  $B$  распространяются свободно и остаются свободными до момента времени  $t_1$ . В момент времени  $t_1$  происходит взаимодействие частиц  $F_1$  и  $B$ , в результате которого возникает другая фундаментальная частица  $F_2$ . Эта частица распространяется свободно с момента времени  $t_1$  до момента времени  $t_2$ . Этой диаграмме соответствует следующая запись распространения частиц, участвующих во взаимодействии:

$$F_1 + B \rightarrow F_1 \circ B = F_2 \rightarrow F_2.$$

Например, в частном случае имеем



$$e^- + W^+ \rightarrow e^- \circ W^+ = \nu_e \rightarrow \nu_e$$

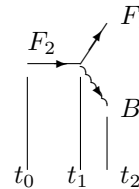
Прочтение произведения базисных векторов (33) справа налево:

$$\delta^K_I \cdot \mathbf{e}_L = \mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L,$$

интерпретируется как взаимодействие, обратное предыдущему

$$F_2 = F_1 \circ B$$

– взаимодействие, в результате которого фундаментальная частица  $F_2$  распадается на две частицы: фундаментальную частицу  $F_1$  и промежуточную частицу  $B$ . Указанный распад иллюстрируется следующей диаграммой взаимодействий:



В момент времени  $t_0$  существует свободная фундаментальная частица  $F_2$ . Она остается свободной до момента времени  $t_1$ . В момент времени  $t_1$  происходит распад частицы  $F_2$ , в результате которого возникают две частицы: другая фундаментальная частица  $F_1$  и промежуточная частица  $B$ . Эти частицы распространяются свободно с момента времени  $t_1$  до момента времени  $t_2$ . Этой диаграмме соответствует следующая запись распространения частиц, участвующих во взаимодействии:

$$F_2 \rightarrow F_2 = F_1 \circ B \rightarrow F_1 + B.$$

### 2. Скалярное, векторное и тензорное взаимодействия

Универсальное умножение представляет собой совокупность трех видов умножения: скалярного, векторного и тензорного. Отсюда следует, что нужно различать три вида взаимодействия, которые также будем называть *скалярное, векторное и тензорное*. Например, универсальное произведение

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \delta^K_I + \mathbf{I}^I_K$$

включает в себя векторное произведение

$$\mathbf{E}^I \cdot \mathbf{e}_K = \delta^K_I$$

и тензорное произведение

$$\mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_K = \mathbf{I}^I_K.$$

Отсюда следует, что фундаментальные античастицы  $F_1^*$  и фундаментальные частицы  $F_2$  участвуют в скалярном и тензорном взаимодействии.

### 3. Скалярные частицы

При скалярном умножении появляются объекты, действие которых является числом, а базисом являются числовые тензоры. Такие объекты и соответствующие им элементарные частицы назовем *скалярными*. В общем случае скалярные частицы будем обозначать буквой  $\phi$ . Соответствие между числовым базисом и скалярными частицами запишем следующим образом:

$$\text{числовой базис} \sim \phi.$$

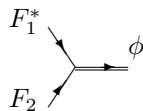
Рассмотрим, например, скалярное произведение

$$\mathbf{E}^I \cdot \mathbf{e}_K = \delta^K_I.$$

Здесь символ Кронекера  $\delta^K_I$  является числовым базисом, поэтому указанное скалярное произведение переводится на язык взаимодействий следующим образом:

$$F_1^* \cdot F_2 = \phi.$$

Эта запись означает, что в результате скалярного взаимодействия фундаментальной античастицы  $F_1^*$  и фундаментальной частицы  $F_2$  появляется скалярная частица  $\phi$ . Распространение скалярной частицы на диаграмме взаимодействий будем изображать отрезком сдвоенной линии. В результате указанное скалярное взаимодействие иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Этой диаграмме соответствует следующая запись распространения частиц, участвующих во взаимодействии:

$$F_1^* + F_2 \rightarrow F_1^* \cdot F_2 = \phi \rightarrow \phi.$$

Остановимся на смысле скалярной частицы. Напомним, что вектор действия элементарной частицы содержит скалярную компоненту. Например, вектор действия фундаментальной частицы  $\mathbf{S} = \mathbf{e}_K \cdot S^K$  содержит скалярную компоненту  $\mathbf{e}_0 \cdot S^0$ . Скалярной компонентой определяется масса элементарной частицы. Действие скалярной частицы содержит единственную компоненту – скалярную. Таким образом, следует считать, что скалярная частица имеет единственную характеристику – массу.

Далее укажем скалярные частицы, базисы которых представлены числовыми тензорами второго ранга<sup>4</sup>. Из скалярных произведений

$$\mathbf{E}^I \cdot \mathbf{e}_K = \delta^K_I, \quad \mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_K = g_{IK}, \quad \mathbf{E}^I \cdot \mathbf{E}^K = g^{IK} \quad (34)$$

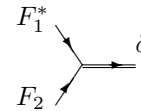
следует, что существуют три разновидности скалярных частиц  $\phi$ , базисы которых представлены числовыми тензорами второго ранга. Обозначим эти скалярные частицы буквами  $\delta$ ,  $g$  и  $g^*$ , а соответствие между базисами и введенными скалярными частицами запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta^K_I &\sim \delta, \\ g_{IK} &\sim g, \\ g^{IK} &\sim g^*. \end{aligned}$$

В результате произведения (34) переводятся на язык взаимодействий следующим образом:

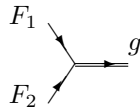
$$\begin{aligned} F_1^* \cdot F_2 &= \delta, \\ F_1 \cdot F_2 &= g, \\ F_1^* \cdot F_2^* &= g^*. \end{aligned}$$

Для указанных взаимодействий распространение частиц, участвующих во взаимодействиях, иллюстрируется следующими диаграммами:

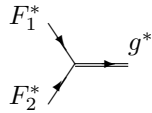


$$F_1^* + F_2 \rightarrow F_1^* \cdot F_2 = \delta \rightarrow \delta$$

<sup>4</sup> Из Раздела V Главы 1.6. следует, что существуют скалярные частицы, базисы которых представлены числовыми тензорами ранга более двух.



$$F_1 + F_2 \rightarrow F_1 \cdot F_2 = g \rightarrow g$$



$$F_1^* + F_2^* \rightarrow F_1^* \cdot F_2^* = g^* \rightarrow g^*$$

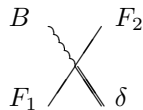
Вернемся к произведению (33):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K = \delta_I^K \cdot \mathbf{e}_L.$$

Ранее мы рассматривали его, не принимая во внимание множитель  $\delta_I^K$ . Теперь, имея в виду представление о скалярных частицах, нужно сказать, что в правой части этого соотношения записано произведение числового базиса скалярной частицы  $\delta$  и базисного вектора фундаментальной частицы  $F_1$ . То есть, произведение (33) переводится на язык взаимодействий следующим образом:

$$F_1 \circ B = \delta \cdot F_2.$$

Отсюда следует, что в результате взаимодействия фундаментальной частицы  $F_1$  и промежуточной частицы  $B$  возникают скалярная частица  $\delta$  и другая фундаментальная частица  $F_2$ . Это взаимодействие иллюстрируется следующей диаграммой:



$$F_1 + B \rightarrow F_1 \circ B = \delta \cdot F_2 \rightarrow \delta + F_2$$

### III. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Фундаментальные частицы разделяются на два класса: лептоны ( $l$ ) и кварки ( $q$ ). Взаимодействие между фундаментальными частицами в самом общем виде обозначим, используя символ универсального умножения  $\circ$ -умножение. В результате будем различать следующие взаимодействия фундаментальных частиц:

взаимодействие между кварками

$$q_1 \circ q_2,$$

взаимодействие между лептонами

$$l_1 \circ l_2,$$

взаимодействие между лептонами и кварками

$$l \circ q.$$

Кварки участвуют в сильных (цветовых) взаимодействиях, в электрослабых взаимодействиях и гравитационных взаимодействиях.

Сильному (цветовому) взаимодействию между кварками поставим в соответствие свой символ универсального умножения  $\bullet$ -умножение.

Электрослабому взаимодействию между кварками поставим в соответствие свой символ универсального умножения  $\bullet$ -умножение.

Гравитационному взаимодействию между кварками поставим в соответствие свой символ универсального умножения  $\bullet$ -умножение.

Используя указанные символы, запишем то обстоятельство, что кварки участвуют в каждом из этих взаимодействий, следующим образом:

$$q_1 \circ q_2 = q_1 \bullet q_2 + q_1 \bullet q_2 + q_1 \bullet q_2.$$

Лептоны участвуют в цветовых взаимодействиях, в электрослабых взаимодействиях и гравитационных взаимодействиях.

Цветовому взаимодействию между лептонами поставим в соответствие свой символ универсального умножения  $\bullet$ -умножение.

Электрослабому взаимодействию между лептонами поставим в соответствие символ универсального умножения  $\bullet$ -умножение.

Гравитационному взаимодействию между лептонами поставим в соответствие символ универсального умножения  $\bullet$ -умножение.

Используя указанные символы, запишем то обстоятельство, что лептоны участвуют в каждом из этих взаимодействий, следующим образом:

$$l_1 \circ l_2 = l_1 \bullet l_2 + l_1 \bullet l_2 + l_1 \bullet l_2.$$

Взаимодействия между лептонами и кварками включают в себя электрослабые взаимодействия и гравитационные взаимодействия.

Электрослабому взаимодействию между лептонами и кварками поставим в соответствие символ универсального умножения  $\bullet$ -умножения.

Гравитационному взаимодействию между лептонами и кварками поставим в соответствие символ универсального умножения  $\bullet$ -умножения.

Используя указанные символы, запишем то обстоятельство, что лептоны и кварки участвуют в каждом из этих взаимодействий, следующим образом:

$$l \circ q = l \bullet q + l \bullet q.$$

Каждое из взаимодействий осуществляется благодаря испусканию или обмену промежуточных частиц.

Далее рассмотрим каждое из указанных взаимодействий. Начнем с электрослабого взаимодействия между лептонами.

#### IV. ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ЛЕПТОНАМИ

Обратимся к электрослабому взаимодействию между лептонами. Напомним, что это взаимодействие и соответствующие ему произведения базисных векторов были обозначены как  $\bullet$ -умножение:

$$l_1 \bullet l_2.$$

Обратимся к базисному вектору лептонов одного поколения  $\mathbf{e}_I$ . Разобьем индекс  $I$  на две части 1 и 2. Соответственно базисный вектор  $\mathbf{e}_I$  разобьется на две части  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Будем полагать, что базисный вектор  $\mathbf{e}_1$  соответствует нижней частице, а базисный вектор  $\mathbf{e}_2$  соответствует верхней частице того же поколения.

Аналогичные действия выполним для сопряженного базисного вектора  $\mathbf{E}^I$ .

Для лептонов первого поколения имеем следующие соответствия<sup>5</sup>:

$$\mathbf{e}_1 \sim e_-, \quad \mathbf{e}_2 \sim \nu_e, \quad (35)$$

а также

$$\mathbf{E}^1 \sim e^+, \quad \mathbf{E}^2 \sim \bar{\nu}_e. \quad (36)$$

Далее рассмотрим электрослабые взаимодействия, в которых участвуют лептоны, на основании таблицы умножения базисных векторов (25)–(32) и соответствий, приведенных в соотношениях (35) и (36).

Электрослабые взаимодействия между лептонами включают в себя

1. чисто электромагнитные взаимодействия между нижними лептонами;
2. чисто слабые взаимодействия между верхними лептонами;
3. электрослабые взаимодействия между нижними и верхними лептонами.

Далее рассмотрим представленные взаимодействия в указанной последовательности.

#### V. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ЛЕПТОНАМИ ОДНОГО ПОКОЛЕНИЯ

В чистом электромагнитном взаимодействии участвуют только нижние лептоны. Для первого поколения это

$$\text{электрон} - e_- \quad \text{и} \quad \text{позитрон} - e^+.$$

Сначала обратимся к промежуточной частице электромагнитного взаимодействия, благодаря испусканию или обмену которой осуществляется электромагнитное взаимодействие.

#### 1. Фотон – промежуточная частица электромагнитного взаимодействия

К промежуточной частице электромагнитного взаимодействия – фотону – придем, рассматривая произведение базисных векторов (28):

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}^I_K + \delta^I_K.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}^I_K$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta^I_K$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае указанное произведение предстает в следующем виде<sup>6</sup>:

$$\mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}^1_1. \quad (37)$$

Введем обозначение для фотона –  $\gamma^\pm$ . Тогда получим соответствие

$$\mathbf{I}^1_1 \sim \gamma^\pm. \quad (38)$$

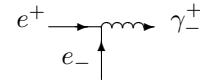
Учитывая соответствия (35), (36) и (38) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (37) и электромагнитного взаимодействия лептонов, приводящего к синтезу фотона:

$$e^+ \bullet e_- = \gamma^\pm \sim \mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}^1_1. \quad (39)$$

Процесс синтеза фотона в результате аннигиляции электрон-позитронной пары записывается следующим образом:

$$e^+ + e_- \rightarrow e^+ \bullet e_- = \gamma^\pm \rightarrow \gamma^\pm.$$

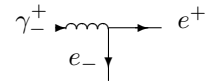
Этот процесс синтеза фотона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу распада фотона и образованию электрон-позитронной пары:

$$\gamma^\pm \rightarrow \gamma^\pm = e^+ \bullet e_- \rightarrow e^+ + e_-.$$

Этот процесс распада фотона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза фотона при аннигиляции лептонов второго поколения

$$\mu^+ + \mu_- \rightarrow \mu^+ \bullet \mu_- = \gamma^\pm \rightarrow \gamma^\pm.$$

<sup>5</sup> Аналогичные соотношения получаются для лептонов второго и третьего поколений

<sup>6</sup> Скалярные произведения и скалярные взаимодействия здесь не рассматриваются.

Прочтение произведения базисных векторов (37) справа налево соответствует процессу распада фотона на лептоны второго поколения

$$\gamma_{-}^{+} \rightarrow \gamma_{-}^{+} = \mu^{+} \bullet \mu^{-} \rightarrow \mu^{+} + \mu^{-}.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза фотона при аннигиляции лептонов третьего поколения

$$\tau^{+} + \tau_{-} \rightarrow \tau^{+} \bullet \tau_{-} = \gamma_{-}^{+} \rightarrow \gamma_{-}^{+}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (37) справа налево соответствует процессу распада фотона на лептоны третьего поколения

$$\gamma_{-}^{+} \rightarrow \gamma_{-}^{+} = \tau^{+} \bullet \tau_{-} \rightarrow \tau^{+} + \tau_{-}.$$

В заключение этого Раздела отметим, что обозначение фотона  $\gamma_{-}^{+}$  соответствует представлению о том, что фотон – это электрический диполь. Необходимость такого представления рассмотрена в Разделе III Главы 5.3.

## 2. Взаимодействие между лептонами одного поколения и фотоном

### 2.1. Взаимодействие между электроном и фотоном

Взаимодействие между электроном и фотоном рассмотрим, обратившись к произведению базисных векторов (25):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K = \delta_I^K \cdot \mathbf{e}_L.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_1. \quad (40)$$

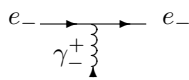
Отсюда с учетом соответствий (35) и (38) имеем соответствие

$$e_{-} \bullet \gamma_{-}^{+} = \delta_1 \cdot e_{-} \sim \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_1.$$

Отсюда процесс поглощения фотона электроном записывается следующим образом:

$$e_{-} + \gamma_{-}^{+} \rightarrow e_{-} \bullet \gamma_{-}^{+} = \delta_1 \cdot e_{-} \rightarrow e_{-}.$$

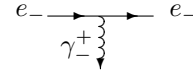
Процесс поглощения фотона электроном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу испускания фотона электроном:

$$e_{-} \rightarrow \delta_1 \cdot e_{-} = e_{-} \bullet \gamma_{-}^{+} \rightarrow e_{-} + \gamma_{-}^{+}.$$

Процесс испускания фотона электроном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



### 2.2. Взаимодействие между позитроном и фотоном

Взаимодействие между позитроном и фотоном рассмотрим, обратившись к произведению базисных векторов (31):

$$\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{E}^J = \mathbf{E}^K \cdot \delta_L^J.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_1^1. \quad (41)$$

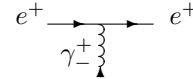
Отсюда с учетом соответствий (36) и (38) имеем соответствие

$$\gamma_{-}^{+} \bullet e^{+} = e^{+} \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_1^1.$$

Отсюда процесс поглощения фотона позитроном записывается следующим образом:

$$\gamma_{-}^{+} + e^{+} \rightarrow \gamma_{-}^{+} \bullet e^{+} = \delta_1 \cdot e^{+} \rightarrow e^{+}.$$

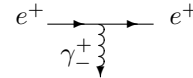
Процесс поглощения фотона позитроном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу испускания фотона позитроном:

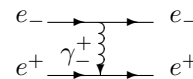
$$e^{+} \rightarrow e^{+} \cdot \delta_1 = \gamma_{-}^{+} \bullet e^{+} \rightarrow \gamma_{-}^{+} + e^{+}.$$

Процесс испускания фотона позитроном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

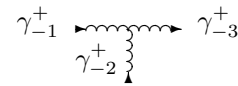
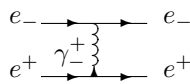


### 2.3. Притяжение между разноименными электрическими зарядами

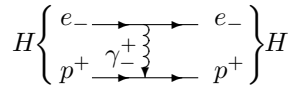
1. Притяжение между электроном и позитроном происходит за счет испускания фотона электроном и поглощения его позитроном



а также за счет испускания фотона позитроном и поглощения его электроном

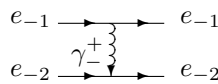


2. Приведем пример притяжения между электроном и протоном в атоме водорода:



2.4. Отталкивание между одноименными электрическими зарядами

Отталкивание между электронами происходит за счет испускания фотона одним из электронов и поглощения его другим электроном <sup>7</sup>:



Отталкивание между электронами  $e_{-1}$  и  $e_{-2}$  происходит благодаря испусканию фотона электроном  $e_{-1}$  и поглощению этого фотона электроном  $e_{-2}$ .

3. Электромагнитное взаимодействие между фотонами

К электромагнитным взаимодействиям между фотонами придем, рассматривая произведение базисных векторов (29):

$$\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N = \delta^M_L \cdot \mathbf{I}^K_N + \delta^M_N \cdot \delta^K_L.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде <sup>8</sup>:

$$\mathbf{I}^1_1 \bullet \mathbf{I}^1_1 = \delta^1_1 \cdot \mathbf{I}^1_1. \quad (42)$$

Отсюда с учетом соответствия (38) имеем соответствие

$$\gamma^+_{-1} \bullet \gamma^+_{-2} = \delta_1 \cdot \gamma^+_{-3} \sim \mathbf{I}^1_1 \bullet \mathbf{I}^1_1 = \delta^1_1 \cdot \mathbf{I}^1_1.$$

Отсюда процесс испускания фотона в результате аннигиляции фотонной пары записывается следующим образом:

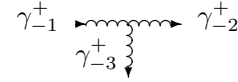
$$\gamma^+_{-1} + \gamma^+_{-2} \rightarrow \gamma^+_{-1} \bullet \gamma^+_{-2} = \delta_1 \cdot \gamma^+_{-3} \rightarrow \gamma^+_{-3}.$$

Процесс испускания фотона в результате аннигиляции фотонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

Обратное прочтение произведения приводит к процессу распада фотона и рождения фотонной пары:

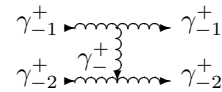
$$\gamma^+_{-1} \rightarrow \delta_1 \cdot \gamma^+_{-1} = \gamma^+_{-2} \bullet \gamma^+_{-3} \rightarrow \gamma^+_{-2} + \gamma^+_{-3}.$$

Процесс распада фотона и рождения фотонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



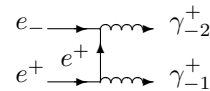
3.1. Составные электромагнитные взаимодействия с участием фотонов

1. Процесс взаимодействия фотонов (процесс рассеяния фотона на фотоне)



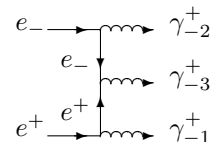
Взаимодействие между фотоном 1 и фотоном 2 происходит благодаря испусканию фотона фотоном 1 и поглощению этого фотона фотоном 2.

2. Двухфотонная аннигиляция электрон-позитронной пары



В нижней вершине позитрон испускает фотон 1, в верхней вершине происходит аннигиляция электронно-позитронной пары и синтез фотона 2.

3. Трехфотонная аннигиляция электрон-позитронной пары



В нижней вершине позитрон испускает фотон 1, в верхней вершине электрон испускает фотон 2, в средней вершине происходит аннигиляция электронно-позитронной пары и синтез фотона 3.

VI. СЛАБОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ЛЕПТОНАМИ ОДНОГО ПОКОЛЕНИЯ

В чистом слабом взаимодействии участвуют только верхние лептоны – нейтрино ( $\nu$ ) и антинейтрино ( $\bar{\nu}$ ).

Введем представление о слабом заряде как характеристике объектов, участвующих в слабых взаимодействиях. Положим, что слабый заряд существует в

<sup>7</sup> Этот процесс может рассматриваться как рассеяние электрона на электроном.

<sup>8</sup> Скалярные произведения и скалярные взаимодействия здесь не рассматриваются.

двух видах<sup>9</sup>. Один из них назовем *высоким* и обозначим  $\Delta$ , другой назовем *низким* и обозначим  $\nabla$ .

Примем, что нейтрино обладает низким слабым зарядом и будем записывать это обстоятельство следующим образом:

$$\nu_{\nabla}.$$

Примем, что антинейтрино обладает высоким слабым зарядом и будем записывать это обстоятельство следующим образом:

$$\tilde{\nu}^{\Delta}.$$

Для первого поколения верхних лептонов соответственно используем обозначения

$$\begin{aligned} \text{электронное нейтрино} &- \nu_{e\nabla} \\ \text{электронное антинейтрино} &- \tilde{\nu}_e^{\Delta}. \end{aligned}$$

Теперь обратимся к промежуточной частице слабого взаимодействия, благодаря испусканию или обмену которой осуществляется слабое взаимодействие.

### 1. $Z$ -бозон – промежуточная частица слабого взаимодействия

К промежуточной частице слабого взаимодействия –  $Z$ -бозону – придем, рассматривая произведение базисных векторов (28):

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}^I_K + \delta^I_K.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}^I_K$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta^I_K$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае указанное произведение предстает в следующем виде<sup>10</sup>:

$$\mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}^2_2. \quad (43)$$

Введем обозначение для  $Z$ -бозона –  $Z^{\Delta}_{\nabla}$ . Тогда получим соответствие

$$\mathbf{I}^2_2 \sim Z^{\Delta}_{\nabla}. \quad (44)$$

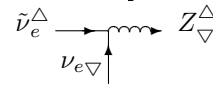
Учитывая соответствия (35), (36) и (44) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (43) и взаимодействия лептонов, приводящего к синтезу  $Z$ -бозона:

$$\tilde{\nu}_e^{\Delta} \bullet \nu_{e\nabla} = Z^{\Delta}_{\nabla} \sim \mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}^2_2. \quad (45)$$

Процесс синтеза  $Z$ -бозона в результате аннигиляции  $\nu_e$ - $\tilde{\nu}_e$  пары записывается следующим образом:

$$\tilde{\nu}_e^{\Delta} + \nu_{e\nabla} \rightarrow \tilde{\nu}_e^{\Delta} \bullet \nu_{e\nabla} = Z^{\Delta}_{\nabla} \rightarrow Z^{\Delta}_{\nabla}.$$

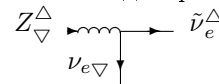
Этот процесс синтеза  $Z$ -бозона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу распада  $Z$ -бозона и образованию  $\nu_e$ - $\tilde{\nu}_e$  пары:

$$Z^{\Delta}_{\nabla} \rightarrow Z^{\Delta}_{\nabla} = \tilde{\nu}_e^{\Delta} \bullet \nu_{e\nabla} \rightarrow \tilde{\nu}_e^{\Delta} + \nu_{e\nabla}.$$

Этот процесс распада  $Z$ -бозона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза  $Z$ -бозона при аннигиляции лептонов второго поколения

$$\tilde{\nu}_\mu^{\Delta} + \nu_{\mu\nabla} \rightarrow \tilde{\nu}_\mu^{\Delta} \bullet \nu_{\mu\nabla} = Z^{\Delta}_{\nabla} \rightarrow Z^{\Delta}_{\nabla}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (43) справа налево соответствует процессу распада  $Z$ -бозона на лептоны второго поколения

$$Z^{\Delta}_{\nabla} \rightarrow Z^{\Delta}_{\nabla} = \tilde{\nu}_\mu^{\Delta} \bullet \nu_{\mu\nabla} \rightarrow \tilde{\nu}_\mu^{\Delta} + \nu_{\mu\nabla}.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза  $Z$ -бозона при аннигиляции лептонов третьего поколения

$$\tilde{\nu}_\tau^{\Delta} + \nu_{\tau\nabla} \rightarrow \tilde{\nu}_\tau^{\Delta} \bullet \nu_{\tau\nabla} = Z^{\Delta}_{\nabla} \rightarrow Z^{\Delta}_{\nabla}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (43) справа налево соответствует процессу распада  $Z$ -бозона на лептоны третьего поколения

$$Z^{\Delta}_{\nabla} \rightarrow Z^{\Delta}_{\nabla} = \tilde{\nu}_\tau^{\Delta} \bullet \nu_{\tau\nabla} \rightarrow \tilde{\nu}_\tau^{\Delta} + \nu_{\tau\nabla}.$$

В заключение этого Раздела отметим, что обозначение  $Z^{\Delta}_{\nabla}$  соответствует представлению о том, что  $Z$ -бозон – это слабый диполь.

### 2. Взаимодействие между лептонами одного поколения и $Z$ -бозоном

#### 2.1. Взаимодействие между электронным нейтрино и $Z$ -бозоном

Взаимодействие между электронным нейтрино и  $Z$ -бозоном рассмотрим, обратившись к произведению базисных векторов (25):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L = \delta^K_I \cdot \mathbf{e}_L.$$

<sup>9</sup> Этот подход аналогичен представлению о положительном и отрицательном электрических зарядах.

<sup>10</sup> Скалярные произведения и скалярные взаимодействия здесь не рассматриваются.



В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_2. \quad (46)$$

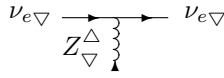
Отсюда с учетом соответствий (35) и (44) имеем соответствие

$$\nu_{e\nabla} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = \delta_2 \cdot \nu_{e\nabla} \quad \sim \quad \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_2.$$

Отсюда процесс поглощения  $Z$ -бозона электронным нейтрино записывается следующим образом:

$$\nu_{e\nabla} + Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow \nu_{e\nabla} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = \delta_2 \cdot \nu_{e\nabla} \rightarrow \nu_{e\nabla}.$$

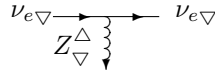
Процесс поглощения  $Z$ -бозона электронным нейтрино иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



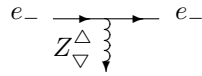
Обратное прочтение произведения приводит к процессу испускания  $Z$ -бозона электронным нейтрино:

$$\nu_{e\nabla} \rightarrow \delta_1 \cdot \nu_{e\nabla} = \nu_{e\nabla} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow \nu_{e\nabla} + Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

Процесс испускания  $Z$ -бозона электронным нейтрино иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Заметим, что прямой процесс испускания или поглощения  $Z$ -бозона электроном



невозможен, так как электрон не обладает слабым зарядом и поэтому не участвует в чисто слабых взаимодействиях.

## 2.2. Взаимодействие между электронным антинейтрино и $Z$ -бозоном

Взаимодействие между электронным антинейтрино и  $Z$ -бозоном рассмотрим, обратившись к произведению базисных векторов (31):

$$\mathbf{I}_{L}^K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^K \cdot \delta_L^I.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{I}_2 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_2^2. \quad (47)$$

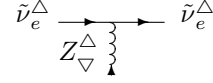
Отсюда с учетом соответствий (36) и (44) имеем соответствие

$$Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet \tilde{\nu}_e^{\Delta} = \tilde{\nu}_e^{\Delta} \cdot \delta_2 \quad \sim \quad \mathbf{I}_2 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_2^2.$$

Отсюда процесс поглощения  $Z$ -бозона электронным антинейтрино записывается следующим образом:

$$Z_{\nabla}^{\Delta} + \tilde{\nu}_e^{\Delta} \rightarrow Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet \tilde{\nu}_e^{\Delta} = \delta_2 \cdot \tilde{\nu}_e^{\Delta} \rightarrow \tilde{\nu}_e^{\Delta}.$$

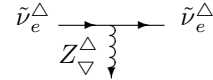
Процесс поглощения  $Z$ -бозона электронным антинейтрино иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу испускания  $Z$ -бозона электронным антинейтрино:

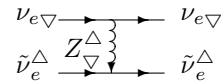
$$\tilde{\nu}_e^{\Delta} \rightarrow \tilde{\nu}_e^{\Delta} \cdot \delta_2 = Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet \tilde{\nu}_e^{\Delta} \rightarrow Z_{\nabla}^{\Delta} + \tilde{\nu}_e^{\Delta}.$$

Процесс испускания  $Z$ -бозона электронным антинейтрино иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

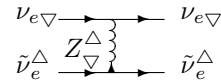


## 2.3. Притяжение между разноименными слабыми зарядами

1. Притяжение между электронным нейтрино и электронным антинейтрино происходит за счет испускания  $Z$ -бозона электронным нейтрино и поглощения его электронным антинейтрино

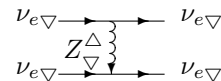


а также за счет испускания  $Z$ -бозона электронным антинейтрино и поглощения его электронным нейтрино

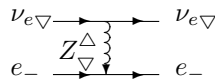


## 2.4. Отталкивание между одноименными слабыми зарядами

Отталкивание между электронными нейтрино происходит за счет испускания  $Z$ -бозона одним из электронных нейтрино и поглощения его другим электронным нейтрино



Заметим, что прямое рассеяние нейтрино на электроне



невозможно, так как электрон не обладает слабым зарядом и поэтому не участвует в чисто слабых взаимодействиях.

### 3. Слабое взаимодействие между $Z$ -бозонами

К слабым взаимодействиям между  $Z$ -бозонами придем, рассматривая произведение базисных векторов (29):

$$\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{I}_N^M = \delta_L^M \cdot \mathbf{I}_N^K + \delta_L^M \cdot \delta_N^K.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_K^I$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta^K_I$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае оно предстает в следующем виде <sup>11</sup>:

$$\mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2. \quad (48)$$

Отсюда с учетом соответствия (44) имеем соответствие

$$Z_{\nabla 1}^\Delta \bullet Z_{\nabla 2}^\Delta = \delta_2 \cdot Z_{\nabla 3}^\Delta \sim \mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2.$$

Отсюда процесс испускания  $Z$ -бозона в результате аннигиляции  $Z$ -бозонной пары записывается следующим образом:

$$Z_{\nabla 1}^\Delta + Z_{\nabla 2}^\Delta \rightarrow Z_{\nabla 1}^\Delta \bullet Z_{\nabla 2}^\Delta = \delta_2 \cdot Z_{\nabla 3}^\Delta \rightarrow Z_{\nabla 3}^\Delta.$$

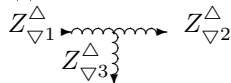
Процесс испускания  $Z$ -бозона в результате аннигиляции  $Z$ -бозонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу распада  $Z$ -бозона и рождения  $Z$ -бозонной пары:

$$Z_{\nabla 1}^\Delta \rightarrow \delta_2 \cdot Z_{\nabla 1}^\Delta = Z_{\nabla 2}^\Delta \bullet Z_{\nabla 3}^\Delta \rightarrow Z_{\nabla 2}^\Delta + Z_{\nabla 3}^\Delta.$$

Процесс распада  $Z$ -бозона и рождения  $Z$ -бозонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



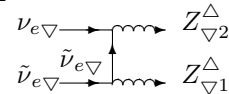
### 3.1. Составные слабые взаимодействия с участием $Z$ -бозонов

1. Процесс взаимодействия  $Z$ -бозонов (процесс рассеяния  $Z$ -бозона на  $Z$ -бозоне)



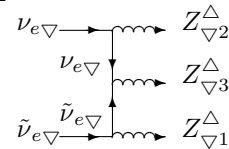
Взаимодействие между  $Z$ -бозоном 1 и  $Z$ -бозоном 2 происходит благодаря испусканию  $Z$ -бозона  $Z$ -бозоном 1 и поглощению этого  $Z$ -бозона  $Z$ -бозоном 2.

2. Двух  $Z$ -бозонная аннигиляция нейтринно-антинейтринной пары



В нижней вершине антинейтрино испускает  $Z$ -бозон 1, в верхней вершине происходит аннигиляция нейтринно-антинейтринной пары и синтез  $Z$ -бозона 2.

3. Трех  $Z$ -бозонная аннигиляция нейтринно-антинейтринной пары



В нижней вершине антинейтрино испускает  $Z$ -бозон 1, в верхней вершине нейтрино испускает  $Z$ -бозон 2, в средней вершине происходит аннигиляция нейтринно-антинейтринной пары и синтез  $Z$ -бозона 3.

## VII. ЭЛЕКТРОСЛАБОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ЛЕПТОНАМИ ОДНОГО ПОКОЛЕНИЯ

Сначала обратимся к электрослабому взаимодействию верхних и нижних лептонов первого поколения.

### 1. $W_-$ -бозон – промежуточная частица электрослабого взаимодействия

К промежуточной частице электрослабого взаимодействия –  $W_-$ -бозону – придем, рассматривая произведение базисных векторов (28):

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}_K^I + \delta^K_I.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_K^I$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta^K_I$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае указанное произведение предстает в следующем виде:

$$\mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^2. \quad (49)$$

<sup>11</sup> Скалярные произведения и скалярные взаимодействия здесь не рассматриваются.

Введем обозначение для  $W_-$ -бозона –  $W_-^\Delta$ . Тогда получим соответствие

$$\mathbf{I}_1^2 \sim W_-^\Delta. \quad (50)$$

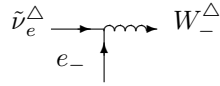
Учитывая соответствия (35), (36) и (50) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (49) и взаимодействия лептонов, приводящего к синтезу  $W_-$ -бозона:

$$\tilde{\nu}_e^\Delta \bullet e_- = W_-^\Delta \sim \mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^2. \quad (51)$$

Процесс синтеза  $W_-$ -бозона  $\tilde{\nu}_e$ - $e_-$  парой записывается следующим образом:

$$\tilde{\nu}_e^\Delta + e_- \rightarrow \tilde{\nu}_e^\Delta \bullet e_- = W_-^\Delta \rightarrow W_-^\Delta.$$

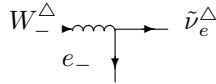
Этот процесс синтеза  $W_-$ -бозона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействия:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу распада  $W_-$ -бозона и образованию  $\tilde{\nu}_e$ - $e_-$  пары:

$$W_-^\Delta \rightarrow W_-^\Delta = \tilde{\nu}_e^\Delta \bullet e_- \rightarrow \tilde{\nu}_e^\Delta + e_-.$$

Этот процесс распада  $W_-$ -бозона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействия:



Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза  $W_-$ -бозона при аннигиляции лептонов второго поколения

$$\tilde{\nu}_\mu^\Delta + \mu_- \rightarrow \tilde{\nu}_\mu^\Delta \bullet \mu_- = W_-^\Delta \rightarrow W_-^\Delta.$$

Прочтение произведения базисных векторов (49) справа налево соответствует процессу распада  $W_-$ -бозона на лептоны второго поколения

$$W_-^\Delta \rightarrow W_-^\Delta = \tilde{\nu}_\mu^\Delta \bullet \mu_- \rightarrow \tilde{\nu}_\mu^\Delta + \mu_-.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза  $W_-$ -бозона при аннигиляции лептонов третьего поколения

$$\tilde{\nu}_\tau^\Delta + \tau_- \rightarrow \tilde{\nu}_\tau^\Delta \bullet \tau_- = W_-^\Delta \rightarrow W_-^\Delta.$$

Прочтение произведения базисных векторов (49) справа налево соответствует процессу распада  $W_-$ -бозона на лептоны третьего поколения

$$W_-^\Delta \rightarrow W_-^\Delta = \tilde{\nu}_\tau^\Delta \bullet \tau_- \rightarrow \tilde{\nu}_\tau^\Delta + \tau_-.$$

В заключение этого Раздела отметим, что обозначение  $W_-^\Delta$  соответствует представлению о том, что  $W_-$ -бозон – это электро-слабый диполь.

## 2. $W^+$ -бозон – промежуточная частица слабо-электрического взаимодействия

К промежуточной частице слабо-электрического взаимодействия –  $W^+$ -бозону – придем, рассматривая произведение базисных векторов (28):

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}_K^I + \delta^K_I.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_K^I$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta^K_I$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае указанное произведение предстает в следующем виде

$$\mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^1. \quad (52)$$

Введем обозначение для  $W^+$ -бозона –  $W_\nabla^+$ . Тогда получим соответствие

$$\mathbf{I}_2^1 \sim W_\nabla^+. \quad (53)$$

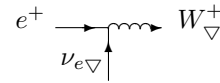
Учитывая соответствия (35), (36) и (53) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (52) и взаимодействия лептонов, приводящего к синтезу  $W^+$ -бозона:

$$e^+ \bullet \nu_{e\nabla} = W_\nabla^+ \sim \mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^1. \quad (54)$$

Процесс синтеза  $W^+$ -бозона  $e^+$ - $\nu_e$  парой записывается следующим образом:

$$e^+ + \nu_{e\nabla} \rightarrow e^+ \bullet \nu_{e\nabla} = W_\nabla^+ \rightarrow W_\nabla^+.$$

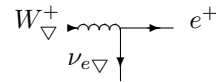
Этот процесс синтеза  $W^+$ -бозона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействия:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу распада  $W^+$ -бозона и образованию  $e^+$ - $\nu_e$  пары:

$$W_\nabla^+ \rightarrow W_\nabla^+ = e^+ \bullet \nu_{e\nabla} \rightarrow e^+ + \nu_{e\nabla}.$$

Этот процесс распада  $W^+$ -бозона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействия:



Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза  $W^+$ -бозона при аннигиляции лептонов второго поколения

$$\mu^+ + \nu_{\mu\nabla} \rightarrow \mu^+ \bullet \nu_{\mu\nabla} = W_\nabla^+ \rightarrow W_\nabla^+.$$

Прочтение произведения базисных векторов (52) справа налево соответствует процессу распада  $W^+$ -бозона на лептоны второго поколения

$$W_\nabla^+ \rightarrow W_\nabla^+ = \mu^+ \bullet \nu_{\mu\nabla} \rightarrow \mu^+ + \nu_{\mu\nabla}.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза  $W^+$ -бозона при аннигиляции лептонов третьего поколения

$$\tau^+ + \nu_{\tau\downarrow} \rightarrow \tau^+ \bullet \nu_{\tau\downarrow} = W_{\downarrow}^+ \rightarrow W_{\downarrow}^+.$$

Прочтение произведения базисных векторов (52) справа налево соответствует процессу распада  $W^+$ -бозона на лептоны третьего поколения

$$W_{\downarrow}^+ \rightarrow W_{\downarrow}^+ = \tau^+ \bullet \nu_{\tau\downarrow} \rightarrow \tau^+ + \nu_{\tau\downarrow}.$$

В заключение этого Раздела отметим, что обозначение  $W_{\downarrow}^+$  соответствует представлению о том, что  $W^+$ -бозон – это слабо-электрический диполь.

### 3. Взаимодействие между лептонами одного поколения и $W_-$ -бозоном

Взаимодействие между лептонами первого поколения и  $W_-$ -бозоном имеет место в двух случаях.

1. Первый случай относится к взаимодействию частиц первого поколения с  $W_-$ -бозоном. Рассмотрим такое взаимодействие, обратившись к произведению базисных векторов (25):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K = \delta_I^K \cdot \mathbf{e}_L.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_L^K$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta_I^K$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае произведение предстает в следующем виде:

$$\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_1. \quad (55)$$

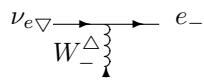
Учитывая соответствия (35), (36) и (50) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (55) и взаимодействия электронного нейтрино с  $W_-$ -бозоном:

$$\nu_{e\downarrow} \bullet W_-^\Delta = e_- \sim \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_1. \quad (56)$$

Отсюда вытекает следующий процесс взаимодействия между лептонами первого поколения и  $W_-$ -бозоном:

$$\nu_{e\downarrow} + W_-^\Delta \rightarrow \nu_{e\downarrow} \bullet W_-^\Delta = e_- \rightarrow e_-.$$

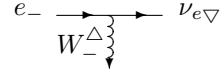
Этот процесс взаимодействия между лептонами первого поколения и  $W_-$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к следующему процессу распада электрона:

$$e_- \rightarrow e_- = \nu_{e\downarrow} \bullet W_-^\Delta \rightarrow \nu_{e\downarrow} + W_-^\Delta.$$

Этот процесс распада электрона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между лептонами второго поколения и  $W_-$ -бозоном:

$$\nu_{\mu\downarrow} + W_-^\Delta \rightarrow \nu_{\mu\downarrow} \bullet W_-^\Delta = \mu_- \rightarrow \mu_-.$$

Прочтение произведения базисных векторов (55) справа налево соответствует следующему процессу распада мюона:

$$\mu_- \rightarrow \mu_- = \nu_{\mu\downarrow} \bullet W_-^\Delta \rightarrow \nu_{\mu\downarrow} + W_-^\Delta.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между лептонами третьего поколения и  $W_-$ -бозоном:

$$\nu_{\tau\downarrow} + W_-^\Delta \rightarrow \nu_{\tau\downarrow} \bullet W_-^\Delta = \tau_- \rightarrow \tau_-.$$

Прочтение произведения базисных векторов (55) справа налево соответствует следующему процессу распада тауона:

$$\tau_- \rightarrow \tau_- = \nu_{\tau\downarrow} \bullet W_-^\Delta \rightarrow \nu_{\tau\downarrow} + W_-^\Delta.$$

2. Второй случай относится к взаимодействию античастиц первого поколения с  $W_-$ -бозоном. Рассмотрим такое взаимодействие, обратившись к произведению базисных векторов (31):

$$\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^K \cdot \delta_L^I.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_1^1. \quad (57)$$

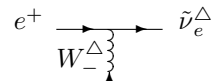
Отсюда с учетом соответствий (36) и (50) имеем соответствие

$$W_-^\Delta \bullet e^+ = \tilde{\nu}_e^\Delta \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_1^1.$$

Отсюда процесс поглощения позитроном  $W^-$ -бозона и синтеза электронного антинейтрино записывается следующим образом:

$$W_-^\Delta + e^+ \rightarrow W_-^\Delta \bullet e^+ = \tilde{\nu}_e^\Delta \cdot \delta_1 \rightarrow \tilde{\nu}_e^\Delta.$$

Процесс поглощения позитроном  $W^-$ -бозона и синтеза электронного антинейтрино иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

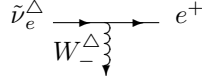


Обратное прочтение произведения базисных векторов (57) приводит к процессу испускания позитрона и

$W_-$ -бозона после распада электронного антинейтрино:

$$\tilde{\nu}_e^\Delta \rightarrow \tilde{\nu}_e^\Delta \cdot \delta_2 = W_-^\Delta \bullet e^+ \rightarrow W_-^\Delta + e^+.$$

Процесс испускания позитрона и  $W_-$ -бозона после распада электронного антинейтрино иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между антилептонами второго поколения и  $W_-$ -бозоном:

$$W_-^\Delta + \mu^+ \rightarrow W_-^\Delta \bullet \mu^+ = \tilde{\nu}_\mu^\Delta \cdot \delta_1 \rightarrow \tilde{\nu}_\mu^\Delta.$$

Прочтение произведения базисных векторов (55) справа налево соответствует следующему процессу распада мюонного антинейтрино:

$$\tilde{\nu}_\mu^\Delta \rightarrow \tilde{\nu}_\mu^\Delta \cdot \delta_2 = W_-^\Delta \bullet \mu^+ \rightarrow W_-^\Delta + \mu^+.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между антилептонами третьего поколения и  $W_-$ -бозоном:

$$W_-^\Delta + \tau^+ \rightarrow W_-^\Delta \bullet \tau^+ = \tilde{\nu}_\tau^\Delta \cdot \delta_1 \rightarrow \tilde{\nu}_\tau^\Delta.$$

Прочтение произведения базисных векторов (55) справа налево соответствует следующему процессу распада тауонного нейтрино:

$$\tilde{\nu}_\tau^\Delta \rightarrow \tilde{\nu}_\tau^\Delta \cdot \delta_2 = W_-^\Delta \bullet \tau^+ \rightarrow W_-^\Delta + \tau^+.$$

#### 4. Взаимодействие между лептонами одного поколения и $W^+$ -бозоном

Взаимодействие между лептонами первого поколения и  $W^+$ -бозоном имеет место в двух случаях.

1. Первый случай относится к взаимодействию частиц первого поколения с  $W^+$ -бозоном. Рассмотрим такое взаимодействие, обратившись к произведению базисных векторов (25):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K = \delta_I^K \cdot \mathbf{e}_L.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_L^K$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta_I^K$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае произведение предстает в следующем виде:

$$\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_2. \quad (58)$$

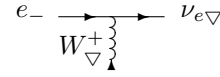
Учитывая соответствия (35), (36) и (53) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (58) и взаимодействия электрона с  $W^+$ -бозоном:

$$e_- \bullet W_\nabla^+ = \nu_{e\nabla} \sim \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_2. \quad (59)$$

Отсюда вытекает следующий процесс взаимодействия между лептонами первого поколения и  $W^+$ -бозоном:

$$e_- + W_\nabla^+ \rightarrow e_- \bullet W_\nabla^+ = \nu_{e\nabla} \rightarrow \nu_{e\nabla}.$$

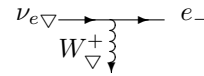
Этот процесс взаимодействия между лептонами первого поколения и  $W^+$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к следующему процессу распада электронного нейтрино:

$$\nu_{e\nabla} \rightarrow \nu_{e\nabla} = e_- \bullet W_\nabla^+ \rightarrow e_- + W_\nabla^+.$$

Этот процесс распада электронного нейтрино иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между лептонами второго поколения и  $W^+$ -бозоном:

$$\mu_- + W_\nabla^+ \rightarrow \mu_- \bullet W_\nabla^+ = \nu_{\mu\nabla} \rightarrow \nu_{\mu\nabla}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (58) справа налево соответствует следующему процессу распада мюонного нейтрино:

$$\nu_{\mu\nabla} \rightarrow \nu_{\mu\nabla} = \mu_- \bullet W_\nabla^+ \rightarrow \mu_- + W_\nabla^+.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между лептонами третьего поколения и  $W^+$ -бозоном:

$$\tau_- + W_\nabla^+ \rightarrow \tau_- \bullet W_\nabla^+ = \nu_{\tau\nabla} \rightarrow \nu_{\tau\nabla}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (58) справа налево соответствует следующему процессу распада тауонного нейтрино:

$$\nu_{\tau\nabla} \rightarrow \nu_{\tau\nabla} = \tau_- \bullet W_\nabla^+ \rightarrow \tau_- + W_\nabla^+.$$

2. Второй случай относится к взаимодействию античастиц первого поколения с  $W^+$ -бозоном. Рассмотрим такое взаимодействие, обратившись к произведению базисных векторов (31):

$$\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^K \cdot \delta_L^I.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_2^2. \quad (60)$$

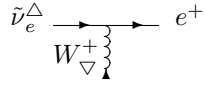
Отсюда с учетом соответствий (36) и (53) имеем соответствие

$$W_\nabla^+ \bullet \tilde{\nu}_e^\Delta = e^+ \cdot \delta_2 \sim \mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_2^2.$$

Отсюда процесс поглощения электронным антинейтрино  $W^+$ -бозона и синтеза позитрона записывается следующим образом:

$$W_{\nabla}^+ + \tilde{\nu}_e^{\Delta} \rightarrow W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{\nu}_e^{\Delta} = e^+ \cdot \delta_1 \rightarrow e^+.$$

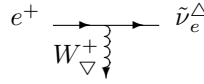
Процесс поглощения электронным антинейтрино  $W^+$ -бозона и синтеза позитрона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения базисных векторов (58) приводит к процессу испускания электронного антинейтрино и  $W^+$ -бозона после распада позитрона:

$$e^+ \rightarrow e^+ \cdot \delta_1 = W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{\nu}_e^{\Delta} \rightarrow W_{\nabla}^+ + \tilde{\nu}_e^{\Delta}.$$

Процесс испускания электронного антинейтрино и  $W^+$ -бозона после распада позитрона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между антилептонами второго поколения и  $W^+$ -бозоном:

$$W_{\nabla}^+ + \tilde{\nu}_{\mu}^{\Delta} \rightarrow W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{\nu}_{\mu}^{\Delta} = \mu^+ \cdot \delta_1 \rightarrow \mu^+.$$

Прочтение произведения базисных векторов (58) справа налево соответствует следующему процессу распада антимюона:

$$\mu^+ \rightarrow \mu^+ \cdot \delta_1 = W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{\nu}_{\mu}^{\Delta} \rightarrow W_{\nabla}^+ + \tilde{\nu}_{\mu}^{\Delta}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между антилептонами третьего поколения и  $W^+$ -бозоном:

$$W_{\nabla}^+ + \tilde{\nu}_{\tau}^{\Delta} \rightarrow W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{\nu}_{\tau}^{\Delta} = \tau^+ \cdot \delta_1 \rightarrow \tau^+.$$

Прочтение произведения базисных векторов (58) справа налево соответствует следующему процессу распада антитауона:

$$\tau^+ \rightarrow \tau^+ \cdot \delta_1 = W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{\nu}_{\tau}^{\Delta} \rightarrow W_{\nabla}^+ + \tilde{\nu}_{\tau}^{\Delta}.$$

#### 4.1. Составные взаимодействия

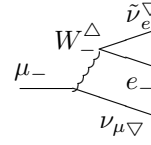
Распад мюона

$$\mu_{-} \rightarrow e_{-} + \tilde{\nu}_{e}^{\Delta} + \nu_{\mu \nabla}$$

включает в себя следующие элементарные взаимодействия

$$\begin{aligned} \mu_{-} \rightarrow \mu_{-} &= \nu_{\mu \nabla} \bullet W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{\mu \nabla} + W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{\mu \nabla} + \tilde{\nu}_{e}^{\Delta} \bullet e_{-} \rightarrow \\ &\rightarrow e_{-} + \tilde{\nu}_{e}^{\Delta} + \nu_{\mu \nabla}. \end{aligned}$$

Этот распад иллюстрируется следующей диаграммой взаимодействий:



Распад мюона

$$\mu_{-} \rightarrow \tau_{-} + \tilde{\nu}_{\tau}^{\Delta} + \nu_{\mu \nabla}$$

записывается через элементарные взаимодействия аналогичным образом

$$\begin{aligned} \mu_{-} \rightarrow \mu_{-} &= \nu_{\mu \nabla} \bullet W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{\mu \nabla} + W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{\mu \nabla} + \tilde{\nu}_{\tau}^{\Delta} \bullet \tau_{-} \rightarrow \\ &\rightarrow \tau_{-} + \tilde{\nu}_{\tau}^{\Delta} + \nu_{\mu \nabla}. \end{aligned}$$

Аналогично записываются распады тауона

$$\begin{aligned} \tau_{-} \rightarrow \tau_{-} &= \nu_{\tau \nabla} \bullet W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{\tau \nabla} + W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{\tau \nabla} + \tilde{\nu}_{e}^{\Delta} \bullet e_{-} \rightarrow \\ &\rightarrow e_{-} + \tilde{\nu}_{e}^{\Delta} + \nu_{\tau \nabla} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tau_{-} \rightarrow \tau_{-} &= \nu_{\tau \nabla} \bullet W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{\tau \nabla} + W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{\tau \nabla} + \tilde{\nu}_{\mu}^{\Delta} \bullet \mu_{-} \rightarrow \\ &\rightarrow \mu_{-} + \tilde{\nu}_{\mu}^{\Delta} + \nu_{\tau \nabla}, \end{aligned}$$

и распады электрона

$$\begin{aligned} e_{-} \rightarrow e_{-} &= \nu_{e \nabla} \bullet W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{e \nabla} + W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{e \nabla} + \tilde{\nu}_{\tau}^{\Delta} \bullet \tau_{-} \rightarrow \\ &\rightarrow \tau_{-} + \tilde{\nu}_{\tau}^{\Delta} + \nu_{e \nabla} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} e_{-} \rightarrow e_{-} &= \nu_{e \nabla} \bullet W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{e \nabla} + W_{-}^{\Delta} \rightarrow \nu_{e \nabla} + \tilde{\nu}_{\mu}^{\Delta} \bullet \mu_{-} \rightarrow \\ &\rightarrow \mu_{-} + \tilde{\nu}_{\mu}^{\Delta} + \nu_{e \nabla}. \end{aligned}$$

Продуктами вышеприведенных слабых распадов лептонов являются лептоны, поэтому назовем такие распады *лептонными*. Далее покажем, что имеют место слабые кварковые распады лептонов, а также слабые лептонные распады кварков и слабые кварковые распады кварков.

## 5. Взаимодействие промежуточных частиц электрослабого взаимодействия между собой

К взаимодействиям промежуточных частиц электрослабого взаимодействия между собой придем, рассматривая произведение базисных векторов (29):

$$\mathbf{I}_{L}^{K} \circ \mathbf{I}_{N}^{M} = \delta_{L}^{M} \cdot \mathbf{I}_{N}^{K} + \delta_{L}^{K} \cdot \delta_{N}^{M}.$$

Приведем все возможные взаимодействия, которые следуют из этого соотношения, за исключением чисто электромагнитных взаимодействий, которые были

приведены в Разделе V.3. и чисто слабых взаимодействий, которые были приведены в Разделе VI.3.

Скалярные произведения и скалярные взаимодействия здесь не рассматриваются.

1. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^1. \quad (61)$$

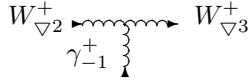
Отсюда с учетом соответствия (38) и (53) имеем соответствие

$$\gamma_{-1}^+ \bullet W_{\nabla 2}^+ = \delta_1 \cdot W_{\nabla 3}^+ \sim \mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^1.$$

Отсюда процесс поглощения фотона  $W^+$ -бозоном записывается следующим образом:

$$\gamma_{-1}^+ + W_{\nabla 2}^+ \rightarrow \gamma_{-1}^+ \bullet W_{\nabla 2}^+ = \delta_1 \cdot W_{\nabla 3}^+ \rightarrow W_{\nabla 3}^+.$$

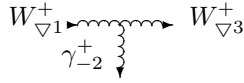
Процесс поглощения фотона  $W^+$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу испускания фотона  $W^+$ -бозоном:

$$W_{\nabla 1}^+ \rightarrow \delta_1 \cdot W_{\nabla 1}^+ = \gamma_{-2}^+ \bullet W_{\nabla 3}^+ \rightarrow \gamma_{-2}^+ + W_{\nabla 3}^+.$$

Процесс испускания фотона  $W^+$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



2. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^1. \quad (62)$$

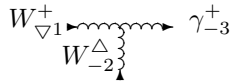
Отсюда с учетом соответствия (38), (50) и (53) имеем соответствие

$$W_{\nabla 1}^+ \bullet W_{-2}^{\Delta} = \delta_1 \cdot \gamma_{-3}^+ \sim \mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^1.$$

Отсюда процесс испускания фотона в результате аннигиляции  $W^+-W_-$  пары записывается следующим образом:

$$W_{\nabla 1}^+ + W_{-2}^{\Delta} \rightarrow W_{\nabla 1}^+ \bullet W_{-2}^{\Delta} = \delta_1 \cdot \gamma_{-3}^+ \rightarrow \gamma_{-3}^+.$$

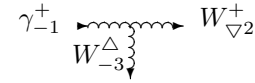
Процесс испускания фотона в результате аннигиляции  $W^+-W_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу распада фотона и рождения  $W^+-W_-$  пары:

$$\gamma_{-1}^+ \rightarrow \delta_1 \cdot \gamma_{-1}^+ = W_{\nabla 2}^+ \bullet W_{-3}^{\Delta} \rightarrow W_{\nabla 2}^+ + W_{-3}^{\Delta}.$$

Процесс распада фотона и рождения  $W^+-W_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



3. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^1. \quad (63)$$

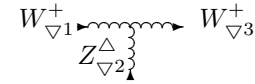
Отсюда с учетом соответствия (44) и (53) имеем соответствие

$$W_{\nabla 1}^+ \bullet Z_{\nabla 2}^{\Delta} = \delta_2 \cdot W_{\nabla 3}^+ \sim \mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^1.$$

Отсюда процесс поглощения  $Z$ -бозона  $W^+$ -бозоном записывается следующим образом:

$$W_{\nabla 1}^+ + Z_{\nabla 2}^{\Delta} \rightarrow W_{\nabla 1}^+ \bullet Z_{\nabla 2}^{\Delta} = \delta_2 \cdot W_{\nabla 3}^+ \rightarrow W_{\nabla 3}^+.$$

Процесс поглощения  $Z$ -бозона  $W^+$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу испускания  $Z$ -бозона  $W^+$ -бозоном:

$$W_{\nabla 1}^+ \rightarrow \delta_1 \cdot W_{\nabla 1}^+ = W_{\nabla 2}^+ \bullet Z_{\nabla 3}^{\Delta} \rightarrow W_{\nabla 2}^+ + Z_{\nabla 3}^{\Delta}.$$

Процесс испускания  $Z$ -бозона  $W^+$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



4. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^2. \quad (64)$$

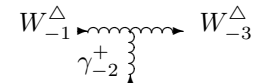
Отсюда с учетом соответствия (38) и (50) имеем соответствие

$$W_{-1}^{\Delta} \bullet \gamma_{-2}^+ = \delta_1 \cdot W_{-3}^{\Delta} \sim \mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^2.$$

Отсюда процесс поглощения фотона  $W_-$ -бозоном записывается следующим образом:

$$W_{-1}^{\Delta} + \gamma_{-2}^+ \rightarrow W_{-1}^{\Delta} \bullet \gamma_{-2}^+ = \delta_1 \cdot W_{-3}^{\Delta} \rightarrow W_{-3}^{\Delta}.$$

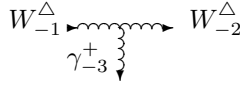
Процесс поглощения фотона  $W_-$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу испускания фотона  $W_-$ -бозоном:

$$W_{-1}^{\Delta} \rightarrow \delta_1 \cdot W_{-1}^{\Delta} = W_{-2}^{\Delta} \bullet \gamma_{-3}^+ \rightarrow W_{-2}^{\Delta} + \gamma_{-3}^+.$$

Процесс испускания фотона  $W_-$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



5. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^2. \quad (65)$$

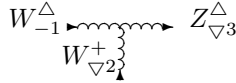
Отсюда с учетом соответствия (44), (50), (53) имеем соответствие

$$W_{-1}^{\Delta} \bullet W_{\nabla 2}^+ = \delta_1 \cdot Z_{\nabla 3}^{\Delta} \sim \mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^2.$$

Отсюда процесс испускания  $Z$ -бозона в результате аннигиляции  $W^+ - W_-$  пары записывается следующим образом:

$$W_{-1}^{\Delta} + W_{\nabla 2}^+ \rightarrow W_{-1}^{\Delta} \bullet W_{\nabla 2}^+ = \delta_1 \cdot Z_{\nabla 3}^{\Delta} \rightarrow Z_{\nabla 3}^{\Delta}.$$

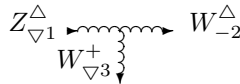
Процесс испускания  $Z$ -бозона в результате аннигиляции  $W^+ - W_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу распада  $Z$ -бозона и рождения  $W^+ - W_-$  пары:

$$Z_{\nabla 1}^{\Delta} \rightarrow \delta_1 \cdot Z_{\nabla 1}^{\Delta} = W_{-2}^{\Delta} \bullet W_{\nabla 3}^+ \rightarrow W_{-2}^{\Delta} + W_{\nabla 3}^+.$$

Процесс распада  $Z$ -бозона и рождения  $W^+ - W_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



6. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^2. \quad (66)$$

Отсюда с учетом соответствия (44), (50) имеем соответствие

$$Z_{\nabla 1}^{\Delta} \bullet W_{-2}^{\Delta} = \delta_1 \cdot W_{-3}^{\Delta} \sim \mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^2.$$

Отсюда процесс поглощения  $Z$ -бозона  $W_-$ -бозоном записывается следующим образом:

$$Z_{\nabla 1}^{\Delta} + W_{-2}^{\Delta} \rightarrow Z_{\nabla 1}^{\Delta} \bullet W_{-2}^{\Delta} = \delta_1 \cdot W_{-3}^{\Delta} \rightarrow W_{-3}^{\Delta}.$$

Процесс поглощения  $Z$ -бозона  $W_-$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу испускания  $Z$ -бозона  $W_-$ -бозоном:

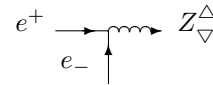
$$W_{-1}^{\Delta} \rightarrow \delta_1 \cdot W_{-1}^{\Delta} = Z_{\nabla 2}^{\Delta} \bullet W_{-3}^{\Delta} \rightarrow Z_{\nabla 2}^{\Delta} + W_{-3}^{\Delta}.$$

Процесс испускания  $Z$ -бозона  $W_-$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

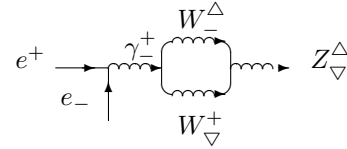


### 5.1. Составные взаимодействия

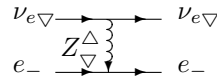
1. Прямая аннигиляция электрон-позитронной пары с испусканием  $Z$ -бозона



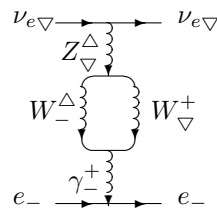
запрещена, так как электрон и позитрон не обладают слабым зарядом. Однако составная аннигиляция такого рода возможна:



2. Отметим, что прямое  $Z$ -рассеяние нейтрино на электроном



невозможно, так как невозможен процесс поглощения  $Z$ -бозона электроном, однако взаимодействие между промежуточными частицами позволяет получить эквивалентное составное взаимодействие:



## VIII. ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ КВАРКАМИ

Обратимся к электрослабому взаимодействию между кварками. Напомним, что это взаимодействие и соответствующие ему произведения базисных векторов



были обозначены как  $\bullet$ -умножение:

$$q_1 \bullet q_2.$$

Обратимся к базисному вектору кварков одного поколения  $\mathbf{e}_I$ . Разобьем индекс  $I$  на две части 1 и 2. Соответственно базисный вектор  $\mathbf{e}_I$  разобьется на две части  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Будем полагать, что базисный вектор  $\mathbf{e}_1$  соответствует нижней частице, а базисный вектор  $\mathbf{e}_2$  соответствует верхней частице того же поколения.

Аналогичные действия выполним для сопряженного базисного вектора  $\mathbf{E}^I$ .

Для кварков первого поколения имеем следующие соответствия:

$$\mathbf{e}_1 \sim d, \quad \mathbf{e}_2 \sim u, \quad (67)$$

а также

$$\mathbf{E}^1 \sim \tilde{d}, \quad \mathbf{E}^2 \sim \tilde{u}. \quad (68)$$

Помимо электрического заряда кварки необходимо снабдить слабым зарядом, иначе нельзя объяснить почему кварки участвуют в электрослабых взаимодействиях.

Напомним, что электрический заряд каждого из нижних кварков равен  $1/3$  электрического заряда электрона. Будем полагать, что каждый из нижних кварков имеет высокий слабый заряд, равный  $1/3$  слабого заряда электронного антинейтрино. Указанные обстоятельства запишем, например, для нижнего кварка первого поколения –  $d$  – следующим образом:

$$d_{-2/3}^{\Delta/3} \sim d.$$

Напомним, что электрический заряд каждого из верхних кварков равен  $2/3$  электрического заряда позитрона. Будем полагать, что каждый из верхних кварков имеет низкий слабый заряд, равный  $1/3$  слабого заряда электронного нейтрино. Указанные обстоятельства запишем, например, для верхнего кварка первого поколения –  $u$  – следующим образом:

$$u_{\nabla 2/3}^{+2/3} \sim u.$$

Из сказанного следует, что кварки не участвуют в чисто электромагнитных и чисто слабых взаимодействиях.

Далее рассмотрим электрослабые взаимодействия, в которых участвуют кварки, на основании таблицы умножения базисных векторов (25)–(32) и соответствий, приведенных в соотношениях (67) и (68). Когда необходимо сделать изложение прозрачным, будем использовать вместо соответствий (67) и (68) следующие соответствия <sup>12</sup>:

$$\mathbf{e}_1 \sim d_{-2/3}^{\Delta/3}, \quad \mathbf{e}_2 \sim u_{\nabla 2/3}^{+2/3}, \quad (69)$$

а также

$$\mathbf{E}^1 \sim \tilde{d}_{\nabla 2/3}^{+3/3}, \quad \mathbf{E}^2 \sim \tilde{u}_{-2/3}^{\Delta/3}. \quad (70)$$

### 1. $W_-$ -бозон – промежуточная частица электрослабого взаимодействия

Сначала обратимся к электрослабому взаимодействию верхних и нижних кварков первого поколения.

К промежуточной частице электрослабого взаимодействия –  $W_-$ -бозону – придем, рассматривая произведение базисных векторов (28):

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}_K^I + \delta^I_K.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_K^I$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta^I_K$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае указанное произведение предстает в следующем виде <sup>13</sup>:

$$\mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^2. \quad (71)$$

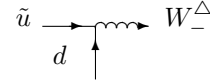
Учитывая соответствия (50), (69) и (70) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (71) и взаимодействия кварков, приводящего к синтезу  $W_-$ -бозона:

$$\tilde{u}_{-2/3}^{\Delta 2/3} \bullet d_{-2/3}^{\Delta/3} = W_-^{\Delta} \sim \mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^2. \quad (72)$$

Процесс синтеза  $W_-$ -бозона  $\tilde{u}$ - $d$  парой записывается следующим образом:

$$\tilde{u} + d \rightarrow \tilde{u} \bullet d = W_-^{\Delta} \rightarrow W_-^{\Delta}.$$

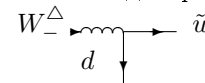
Этот процесс синтеза  $W_-$ -бозона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу распада  $W_-$ -бозона и образованию  $\tilde{u}$ - $d$  пары:

$$W_-^{\Delta} \rightarrow W_-^{\Delta} = \tilde{u} \bullet d \rightarrow \tilde{u} + d.$$

Этот процесс распада  $W_-$ -бозона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения – синтезе  $W_-$ - бозона из кварков второго поколения

$$\tilde{c} + s \rightarrow \tilde{c} \circ s = W_- \rightarrow W_-.$$

<sup>12</sup> Аналогичные соотношения получаются для кварков второго и третьего поколений

<sup>13</sup> Скалярные произведения и скалярные взаимодействия здесь не рассматриваются.

Прочтение произведения базисных векторов (71) справа налево соответствует процессу распада  $W^-$ -бозона на кварки второго поколения

$$W_- \rightarrow W_- = \tilde{c} \circ s \rightarrow \tilde{c} + s.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения – синтезе  $W_-$ - бозона из кварков третьего поколения

$$\tilde{t} + b \rightarrow \tilde{t} \circ b = W_- \rightarrow W_-.$$

Прочтение произведения базисных векторов (71) справа налево соответствует процессу распада  $W_-$ - бозона на кварки третьего поколения

$$W_- \rightarrow W_- = \tilde{t} \circ b \rightarrow \tilde{t} + b.$$

## 2. $W^+$ -бозон – промежуточная частица слабо-электрического взаимодействия

К промежуточной частице слабо-электрического взаимодействия –  $W^+$ -бозону – придем, рассматривая произведение базисных векторов (28):

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}_K^I + \delta^I_K.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_K^I$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta^I_K$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае указанное произведение предстает в следующем виде <sup>14</sup>:

$$\mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^1. \quad (73)$$

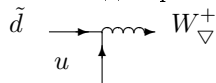
Учитывая соответствия (53), (69) и (70) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (73) и взаимодействия кварков, приводящего к синтезу  $W^+$ -бозона:

$$\tilde{d}^{+3/3} \bullet u^{+2/3} = W_{\nabla}^+ \sim \mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^1. \quad (74)$$

Процесс синтеза  $W^+$ -бозона  $\tilde{d}$ - $u$  парой записывается следующим образом:

$$\tilde{d} + u \rightarrow \tilde{d} \bullet u = W_{\nabla}^+ \rightarrow W_{\nabla}^+.$$

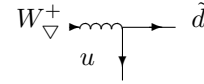
Этот процесс синтеза  $W^+$ -бозона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу распада  $W^+$ -бозона и образованию  $\tilde{d}$ - $u$  пары:

$$W_{\nabla}^+ \rightarrow W_{\nabla}^+ = \tilde{d} \bullet u \rightarrow \tilde{d} + u.$$

Этот процесс распада  $W^+$ -бозона иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения – синтезе  $W^+$ - бозона из кварков второго поколения

$$\tilde{s} + c \rightarrow \tilde{s} \circ c = W^+ \rightarrow W^+.$$

Прочтение произведения базисных векторов (72) справа налево соответствует процессу распада  $W^+$ - бозона на кварки второго поколения

$$W^+ \rightarrow W^+ = \tilde{s} \circ c \rightarrow \tilde{s} + c.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения – синтезе  $W^+$ - бозона из кварков третьего поколения

$$\tilde{b} + t \rightarrow \tilde{b} \circ t = W^+ \rightarrow W^+.$$

Прочтение произведения базисных векторов (72) справа налево соответствует процессу распада  $W^+$ - бозона на кварки третьего поколения

$$W^+ \rightarrow W^+ = \tilde{b} \circ t \rightarrow \tilde{b} + t.$$

## 3. Фотон и $Z$ -бозон – промежуточные частицы электрослабого взаимодействия

Возможны электрослабые взаимодействия кварков, для которых промежуточными частицами являются и фотон и  $Z$ -бозон совместно. Такие взаимодействия кварков назовем  $(\gamma-Z)$ -взаимодействиями.  $(\gamma-Z)$ -взаимодействия соответствуют аннигиляции верхних кварков каждого поколения и аннигиляции нижних кварков каждого поколения. Далее рассмотрим каждую из этих аннигиляций.

### 3.1. Аннигиляция верхних кварков

К  $(\gamma-Z)$ -взаимодействию верхних кварков придем, рассматривая произведение базисных векторов (28):

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}_K^I + \delta^I_K.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_K^I$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta^I_K$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

<sup>14</sup> Скалярные произведения и скалярные взаимодействия здесь не рассматриваются.

В нашем случае указанное произведение предстает в следующем виде <sup>15</sup>:

$$\mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^2. \quad (75)$$

Учитывая соответствия (69) и (70), преобразуем левую часть этого соотношения

$$\tilde{u}_{-2/3}^{\Delta 2/3} \bullet u_{\nabla 2/3}^{+2/3} = \frac{2}{3} \gamma_-^+ \bullet \frac{2}{3} Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

Отсюда следует, что для электрослабого взаимодействия кварков имеет место соответствие

$$\mathbf{I}_2^2 \sim \frac{2}{3} \gamma_-^+ \bullet \frac{2}{3} Z_{\nabla}^{\Delta}. \quad (76)$$

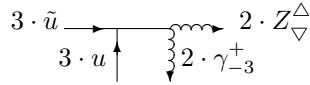
Учитывая соответствия (69), (70) и (76) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (75) и взаимодействия кварков, приводящего к синтезу фотона и  $Z$ -бозона:

$$\tilde{u}_{-2/3}^{\Delta 2/3} \bullet u_{\nabla 2/3}^{+2/3} = \frac{2}{3} \gamma_-^+ \bullet \frac{2}{3} Z_{\nabla}^{\Delta} \sim \mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^2. \quad (77)$$

Процесс синтеза фотонов и  $Z$ -бозонов в результате аннигиляции  $\tilde{u}$ - $u$  пар записывается следующим образом:

$$3 \cdot \tilde{u} + 3 \cdot u \rightarrow 3 \cdot \tilde{u} \bullet 3 \cdot u = 2 \cdot \gamma_-^+ \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 2 \cdot \gamma_-^+ + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

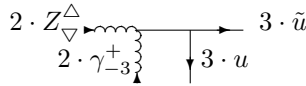
Этот процесс синтеза фотонов и  $Z$ -бозонов иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (75) приводит к процессу распада фотонов и  $Z$ -бозонов и образованию  $\tilde{u}$ - $u$  пар:

$$2 \cdot \gamma_-^+ + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 2 \cdot \gamma_-^+ \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} = 3 \cdot \tilde{u} \bullet 3 \cdot u \rightarrow 3 \cdot \tilde{u} + 3 \cdot u.$$

Этот процесс распада фотонов и  $Z$ -бозонов иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза фотонов и  $Z$ -бозонов при аннигиляции кварков второго поколения

$$3 \cdot \tilde{c} + 3 \cdot c \rightarrow 3 \cdot \tilde{c} \bullet 3 \cdot c = 2 \cdot \gamma_-^+ \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 2 \cdot \gamma_-^+ + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (75) справа налево соответствует процессу распада фотонов и  $Z$ -бозонов на кварки второго поколения

$$2 \cdot \gamma_-^+ + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 2 \cdot \gamma_-^+ \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} = 3 \cdot \tilde{c} \bullet 3 \cdot c \rightarrow 3 \cdot \tilde{c} + 3 \cdot c.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза фотонов и  $Z$ -бозонов при аннигиляции кварков третьего поколения

$$3 \cdot \tilde{t} + 3 \cdot t \rightarrow 3 \cdot \tilde{t} \bullet 3 \cdot t = 2 \cdot \gamma_-^+ \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 2 \cdot \gamma_-^+ + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (75) справа налево соответствует процессу распада фотонов и  $Z$ -бозонов на кварки третьего поколения

$$2 \cdot \gamma_-^+ + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 2 \cdot \gamma_-^+ \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} = 3 \cdot \tilde{t} \bullet 3 \cdot t \rightarrow 3 \cdot \tilde{t} + 3 \cdot t.$$

### 3.2. Аннигиляция нижних кварков

К  $(\gamma$ - $Z$ )-взаимодействию нижних кварков придем, рассматривая произведение базисных векторов (28):

$$\mathbf{E}^I \bullet \mathbf{e}_K = \mathbf{I}_K^I + \delta_K^I.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_K^I$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta_K^I$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае указанное произведение предстает в следующем виде <sup>16</sup>:

$$\mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^1. \quad (78)$$

Учитывая соответствия (69) и (70), преобразуем левую часть этого соотношения

$$\tilde{d}_{\nabla/3}^{+/3} \bullet d_{-/3}^{\Delta/3} = \frac{1}{3} \gamma_-^+ \bullet \frac{1}{3} Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

Отсюда следует, что для электрослабого взаимодействия кварков имеет место соответствие

$$\mathbf{I}_1^1 \sim \frac{1}{3} \gamma_-^+ \bullet \frac{1}{3} Z_{\nabla}^{\Delta}. \quad (79)$$

Учитывая соответствия (69), (70) и (79) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (78) и взаимодействия кварков, приводящего к синтезу фотона и  $Z$ -бозона:

$$\tilde{d}_{\nabla/3}^{+/3} \bullet d_{-/3}^{\Delta/3} = \frac{1}{3} \gamma_-^+ \bullet \frac{1}{3} Z_{\nabla}^{\Delta} \sim \mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^1. \quad (80)$$

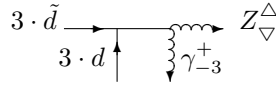
Процесс синтеза фотонов и  $Z$ -бозонов в результате аннигиляции  $\tilde{d}$ - $d$  пар записывается следующим образом:

$$3 \cdot \tilde{d} + 3 \cdot d \rightarrow 3 \cdot \tilde{d} \bullet 3 \cdot d = \gamma_-^+ \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow \gamma_-^+ + Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

<sup>15</sup> Скалярные произведения и скалярные взаимодействия здесь не рассматриваются.

<sup>16</sup> Скалярные произведения и скалярные взаимодействия здесь не рассматриваются.

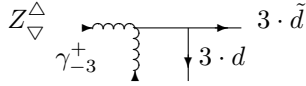
Этот процесс синтеза фотонов и  $Z$ -бозонов иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (78) приводит к процессу распада фотонов и  $Z$ -бозонов и образованию  $d$ - $d$  пар:

$$\gamma_{-3}^+ + Z_{-3}^{\Delta} \rightarrow \gamma_{-3}^+ \bullet Z_{-3}^{\Delta} = 3 \cdot \tilde{d} \bullet 3 \cdot d \rightarrow 3 \cdot \tilde{d} + 3 \cdot d.$$

Этот процесс распада фотонов и  $Z$ -бозонов иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза фотонов и  $Z$ -бозонов при аннигиляции кварков второго поколения

$$3 \cdot \tilde{s} + 3 \cdot s \rightarrow 3 \cdot \tilde{s} \bullet 3 \cdot s = \gamma_{-3}^+ \bullet Z_{-3}^{\Delta} \rightarrow \gamma_{-3}^+ + Z_{-3}^{\Delta}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (78) справа налево соответствует процессу распада фотонов и  $Z$ -бозонов на кварки второго поколения

$$\gamma_{-3}^+ + Z_{-3}^{\Delta} \rightarrow \gamma_{-3}^+ \bullet Z_{-3}^{\Delta} = 3 \cdot \tilde{s} \bullet 3 \cdot s \rightarrow 3 \cdot \tilde{s} + 3 \cdot s.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе синтеза фотонов и  $Z$ -бозонов при аннигиляции кварков третьего поколения

$$3 \cdot \tilde{b} + 3 \cdot b \rightarrow 3 \cdot \tilde{b} \bullet 3 \cdot b = \gamma_{-3}^+ \bullet Z_{-3}^{\Delta} \rightarrow \gamma_{-3}^+ + Z_{-3}^{\Delta}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (78) справа налево соответствует процессу распада фотонов и  $Z$ -бозонов на кварки третьего поколения

$$\gamma_{-3}^+ + Z_{-3}^{\Delta} \rightarrow \gamma_{-3}^+ \bullet Z_{-3}^{\Delta} = 3 \cdot \tilde{b} \bullet 3 \cdot b \rightarrow 3 \cdot \tilde{b} + 3 \cdot b.$$

В заключение этого Раздела заметим, что благодаря фотонной части ( $\gamma$ - $Z$ )-взаимодействия кварков протон открыт для электромагнитного взаимодействия с электроном. Заметим также, что благодаря  $Z$ -бозонной части ( $\gamma$ - $Z$ )-взаимодействия кварков протон открыт для слабого взаимодействия с нейтрино.

#### 4. Взаимодействие между кварками одного поколения и $W_-$ -бозоном

Взаимодействие между кварками первого поколения и  $W_-$ -бозоном имеет место в двух случаях.

1. Первый случай относится к взаимодействию частиц первого поколения с  $W_-$ -бозоном. Рассмотрим

такое взаимодействие, обратившись к произведению базисных векторов (25):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K = \delta^K_I \cdot \mathbf{e}_L.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_L^K$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta^K_I$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае произведение предстает в следующем виде:

$$\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_1. \quad (81)$$

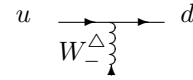
Учитывая соответствия (69) и (50) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (79) и взаимодействия  $u$ -кварка с  $W_-$ -бозоном:

$$u_{\nabla 2/3}^{+2/3} \bullet W_{-3}^{\Delta} = d_{-3}^{\Delta/3} \sim \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_1. \quad (82)$$

Отсюда вытекает следующий процесс взаимодействия между кварками первого поколения и  $W_-$ -бозоном:

$$u + W_{-}^{\Delta} \rightarrow u \bullet W_{-}^{\Delta} = d \rightarrow d.$$

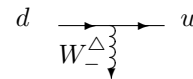
Этот процесс взаимодействия между кварками первого поколения и  $W_-$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к следующему процессу слабого распада  $d$ -кварка:

$$d \rightarrow d = u \bullet W_{-}^{\Delta} \rightarrow u + W_{-}^{\Delta}.$$

Этот процесс распада  $d$ -кварка иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между кварками второго поколения и  $W_-$ -бозоном:

$$c + W_{-}^{\Delta} \rightarrow c \bullet W_{-}^{\Delta} = s \rightarrow s.$$

Прочтение произведения базисных векторов (81) справа налево соответствует следующему процессу распада мюона:

$$s \rightarrow s = c \bullet W_{-}^{\Delta} \rightarrow c + W_{-}^{\Delta}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между кварками третьего поколения и  $W_-$ -бозоном:

$$t + W_{-}^{\Delta} \rightarrow t \bullet W_{-}^{\Delta} = b \rightarrow b.$$

Прочтение произведения базисных векторов (81) справа налево соответствует следующему процессу распада  $b$ -кварка:

$$b \rightarrow b = t \bullet W_{-}^{\Delta} \rightarrow t + W_{-}^{\Delta}.$$

2. Второй случай относится к взаимодействию античастиц первого поколения с  $W_{-}$ -бозоном. Рассмотрим такое взаимодействие, обратившись к произведению базисных векторов (31):

$$\mathbf{I}_{-L}^K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^K \cdot \delta_{-L}^I.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{I}_{-1}^2 \bullet \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_{-1}^1. \quad (83)$$

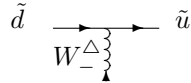
Отсюда с учетом соответствий (70) и (50) имеем соответствие

$$W_{-}^{\Delta} \bullet \tilde{d}_{\nabla/3}^{+2/3} = \tilde{u}_{-2/3}^{\Delta 2/3} \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_{-1}^2 \bullet \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_{-1}^1.$$

Отсюда процесс поглощения  $\tilde{d}$ -кварком  $W_{-}$ -бозона и синтеза  $\tilde{u}$ -кварка записывается следующим образом:

$$W_{-}^{\Delta} + \tilde{d} \rightarrow W_{-}^{\Delta} \bullet \tilde{d} = \tilde{u} \cdot \delta_1 \rightarrow \tilde{u}.$$

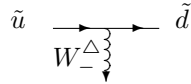
Процесс поглощения  $\tilde{d}$ -кварком  $W_{-}$ -бозона и синтеза  $\tilde{u}$ -кварка иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения базисных векторов (83) приводит к процессу испускания  $\tilde{d}$ -кварка и  $W_{-}$ -бозона после распада  $\tilde{u}$ -кварка:

$$\tilde{u} \rightarrow \tilde{u} \cdot \delta_2 = W_{-}^{\Delta} \bullet \tilde{d} \rightarrow W_{-}^{\Delta} + \tilde{d}.$$

Процесс испускания  $\tilde{d}$ -кварка и  $W_{-}$ -бозона после распада  $\tilde{u}$ -кварка иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между антикварками второго поколения и  $W_{-}$ -бозоном:

$$W_{-}^{\Delta} + \tilde{s} \rightarrow W_{-}^{\Delta} \bullet \tilde{s} = \tilde{c} \cdot \delta_1 \rightarrow \tilde{c}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (83) справа налево соответствует следующему процессу распада  $\tilde{c}$ -кварка:

$$\tilde{c} \rightarrow \tilde{c} \cdot \delta_2 = W_{-}^{\Delta} \bullet \tilde{s} \rightarrow W_{-}^{\Delta} + \tilde{s}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между антилептонами третьего поколения и  $W_{-}$ -бозоном:

$$W_{-}^{\Delta} + \tilde{b} \rightarrow W_{-}^{\Delta} \bullet \tilde{b} = \tilde{t} \cdot \delta_1 \rightarrow \tilde{t}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (83) справа налево соответствует следующему процессу распада  $\tilde{t}$ -кварка:

$$\tilde{t} \rightarrow \tilde{t} \cdot \delta_2 = W_{-}^{\Delta} \bullet \tilde{b} \rightarrow W_{-}^{\Delta} + \tilde{b}.$$

## 5. Взаимодействие между кварками одного поколения и $W^{+}$ -бозоном

Взаимодействие между кварками первого поколения и  $W^{+}$ -бозоном имеет место в двух случаях.

1. Первый случай относится к взаимодействию частиц первого поколения с  $W^{+}$ -бозоном. Рассмотрим такое взаимодействие, обратившись к произведению базисных векторов (25):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_{-L}^K = \delta_{-L}^K \cdot \mathbf{e}_L.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_{-L}^K$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta_{-L}^K$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае произведение предстает в следующем виде:

$$\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_{-2}^1 = \delta_{-2}^1 \cdot \mathbf{e}_2. \quad (84)$$

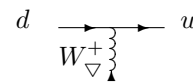
Учитывая соответствия (69) и (53) имеем следующее соответствие произведения базисных векторов (58) и взаимодействия  $d$ -кварка с  $W^{+}$ -бозоном:

$$d_{-1/3}^{\Delta 2/3} \bullet W_{\nabla}^{+} = u_{-2/3}^{+2/3} \sim \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_{-2}^1 = \delta_{-2}^1 \cdot \mathbf{e}_2. \quad (85)$$

Отсюда вытекает следующий процесс взаимодействия между кварками первого поколения и  $W^{+}$ -бозоном:

$$d + W_{\nabla}^{+} \rightarrow d \bullet W_{\nabla}^{+} = u \rightarrow u.$$

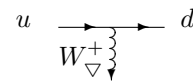
Этот процесс взаимодействия между кварками первого поколения и  $W^{+}$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к следующему процессу распада  $u$ -кварка:

$$u \rightarrow u = d \bullet W_{\nabla}^{+} \rightarrow d + W_{\nabla}^{+}.$$

Этот процесс распада  $u$ -кварка иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между кварками второго поколения и  $W^{+}$ -бозоном:

$$s + W_{\nabla}^{+} \rightarrow s \bullet W_{\nabla}^{+} = c \rightarrow c.$$

Прочтение произведения базисных векторов (84) справа налево соответствует следующему процессу распада  $c$ -кварка:

$$c \rightarrow c = s \bullet W_{\nabla}^+ \rightarrow s + W_{\nabla}^+.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между кварками третьего поколения и  $W^+$ -бозоном:

$$b + W_{\nabla}^+ \rightarrow b \bullet W_{\nabla}^+ = t \rightarrow t.$$

Прочтение произведения базисных векторов (84) справа налево соответствует следующему процессу распада  $t$ -кварка:

$$t \rightarrow t = b \bullet W_{\nabla}^+ \rightarrow b + W_{\nabla}^+.$$

2. Второй случай относится к взаимодействию античастиц первого поколения с  $W^+$ -бозоном. Рассмотрим такое взаимодействие, обратившись к произведению базисных векторов (31):

$$\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^K \cdot \delta_L^I.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_2^2. \quad (86)$$

Отсюда с учетом соответствий (70) и (53) имеем соответствие

$$W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{u}_{-2/3}^{\Delta 2/3} = \tilde{d}_{\nabla/3}^{+2/3} \cdot \delta_2 \sim \mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_2^2.$$

Отсюда процесс поглощения  $\tilde{u}$ -кварком  $W^+$ -бозона и синтеза  $\tilde{d}$ -кварка записывается следующим образом:

$$W_{\nabla}^+ + \tilde{u} \rightarrow W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{u} = \tilde{d} \cdot \delta_1 \rightarrow \tilde{d}.$$

Процесс поглощения  $\tilde{u}$ -кварком  $W^+$ -бозона и синтеза  $\tilde{d}$ -кварка иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

$$\tilde{u} \xrightarrow{\quad} \tilde{d} \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{W_{\nabla}^+}$$

Обратное прочтение произведения базисных векторов (86) приводит к процессу синтеза  $\tilde{u}$ -кварка и  $W^+$ -бозона после распада  $\tilde{d}$ -кварка:

$$\tilde{d} \rightarrow \tilde{d} \cdot \delta_1 = W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{u} \rightarrow W_{\nabla}^+ + \tilde{u}.$$

Процесс испускания  $\tilde{u}$ -кварка и  $W^+$ -бозона после распада  $\tilde{d}$ -кварка иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

$$\tilde{d} \xrightarrow{\quad} \tilde{u} \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{W_{\nabla}^+}$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему процессу взаимодействия между антикварками второго поколения и  $W^+$ -бозоном:

$$W_{\nabla}^+ + \tilde{c} \rightarrow W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{c} = \tilde{s} \cdot \delta_1 \rightarrow \tilde{s}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (86) справа налево соответствует следующему процессу распада  $\tilde{s}$ -кварка:

$$\tilde{s} \rightarrow \tilde{s} \cdot \delta_1 = W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{c} \rightarrow W_{\nabla}^+ + \tilde{c}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к к следующему процессу взаимодействия между антилептонами третьего поколения и  $W^+$ -бозоном:

$$W_{\nabla}^+ + \tilde{t} \rightarrow W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{t} = \tilde{b} \cdot \delta_1 \rightarrow \tilde{b}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (86) справа налево соответствует следующему процессу распада  $\tilde{b}$ -кварка:

$$\tilde{b} \rightarrow \tilde{b} \cdot \delta_1 = W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{t} \rightarrow W_{\nabla}^+ + \tilde{t}.$$

## 6. $(\gamma-Z)$ -взаимодействие верхних кварков

### 6.1. $(\gamma-Z)$ -взаимодействие $u$ -кварка

$(\gamma-Z)$ -взаимодействие  $u$ -кварка рассмотрим, обратившись к произведению базисных векторов (25):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K = \delta_I^K \cdot \mathbf{e}_L.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_2. \quad (87)$$

Отсюда с учетом соответствий (69) и (76) имеем соответствие

$$u_{\nabla/2/3}^{+2/3} \bullet \frac{2}{3} \gamma_{\nabla}^+ \bullet \frac{2}{3} Z_{\nabla}^{\Delta} = \delta_2 \cdot u_{\nabla/2/3}^{+2/3} \sim \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_2.$$

Отсюда процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $u$ -кварками записывается следующим образом:

$$3 \cdot u + 2 \cdot \gamma_{\nabla}^+ + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 3 \cdot u \bullet 2 \cdot \gamma_{\nabla}^+ \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} = \delta_2 \cdot 3 \cdot u \rightarrow 3 \cdot u.$$

Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $u$ -кварками иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

$$3 \cdot u \xrightarrow{\quad} 3 \cdot u \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{2 \cdot \gamma_{\nabla}^+} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta}}$$

Обратное прочтение произведения (87) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $u$ -кварками:

$$3 \cdot u \rightarrow \delta_1 \cdot 3 \cdot u = 3 \cdot u \bullet 2 \cdot \gamma_{\nabla}^+ \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} = 3 \cdot u + 2 \cdot \gamma_{\nabla}^+ + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

Процесс испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $u$ -кварками иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

$$3 \cdot u \xrightarrow{\quad} 3 \cdot u$$

$\left. \begin{array}{c} \downarrow \\ 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{c} \downarrow \\ 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \end{array} \right\}$

Аналогичные рассуждения приводят к аналогичным процессам  $(\gamma-Z)$ -взаимодействия верхнего кварка второго поколения.

Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $c$ -кварками записывается следующим образом:

$$3 \cdot c + 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 3 \cdot c \bullet 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} = \delta_2 \cdot 3 \cdot c \rightarrow 3 \cdot c.$$

Обратное прочтение произведения (87) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $c$ -кварками:

$$3 \cdot c \rightarrow \delta_1 \cdot 3 \cdot c = 3 \cdot c \bullet 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} = 3 \cdot c + 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к аналогичным процессам  $(\gamma-Z)$ -взаимодействия верхнего кварка третьего поколения.

Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $t$ -кварками записывается следующим образом:

$$3 \cdot t + 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 3 \cdot t \bullet 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} = \delta_2 \cdot 3 \cdot t \rightarrow 3 \cdot t.$$

Обратное прочтение произведения (87) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $t$ -кварками:

$$3 \cdot t \rightarrow \delta_1 \cdot 3 \cdot t = 3 \cdot t \bullet 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} = 3 \cdot t + 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

### 6.2. $(\gamma-Z)$ -взаимодействие $\tilde{u}$ -кварка

$(\gamma-Z)$ -взаимодействие  $\tilde{u}$ -кварка рассмотрим, обратившись к произведению базисных векторов (31):

$$\mathbf{I}_{L}^{K} \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^K \cdot \delta_L^I.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{I}_2 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_2^2. \quad (88)$$

Отсюда с учетом соответствий (70) и (76) имеем соответствие

$$\frac{2}{3} \gamma_{\nabla}^{+} \bullet \frac{2}{3} Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet \tilde{u}_{-2/3}^{\Delta 2/3} = \tilde{u}_{-2/3}^{\Delta 2/3} \cdot \delta_2 \quad \sim \quad \mathbf{I}_2 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_2^2.$$

Отсюда процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{u}$ -кварками записывается следующим образом:

$$2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} + 3 \cdot \tilde{u} \rightarrow 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{u} = \delta_2 \cdot 3 \cdot \tilde{u} \rightarrow 3 \cdot \tilde{u}.$$

Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{u}$ -кварками иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

$$3 \cdot \tilde{u} \xrightarrow{\quad} 3 \cdot \tilde{u}$$

$\left. \begin{array}{c} \downarrow \\ 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{c} \downarrow \\ 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \end{array} \right\}$

Обратное прочтение произведения (88) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{u}$ -кварком:

$$\tilde{u} \rightarrow \tilde{u} \cdot \delta_2 = 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{u} \rightarrow 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} + 3 \cdot \tilde{u}.$$

Процесс испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{u}$ -кварком иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

$$3 \cdot \tilde{u} \xrightarrow{\quad} 3 \cdot \tilde{u}$$

$\left. \begin{array}{c} \downarrow \\ 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{c} \downarrow \\ 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \end{array} \right\}$

Аналогичные рассуждения приводят к аналогичным процессам  $(\gamma-Z)$ -взаимодействия верхнего антикварка второго поколения.

Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{c}$ -кварками записывается следующим образом:

$$2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} + 3 \cdot \tilde{c} \rightarrow 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{c} = \delta_2 \cdot 3 \cdot \tilde{c} \rightarrow 3 \cdot \tilde{c}.$$

Обратное прочтение произведения (88) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{c}$ -кварками:

$$\tilde{c} \rightarrow \tilde{c} \cdot \delta_2 = 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{c} \rightarrow 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} + 3 \cdot \tilde{c}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к аналогичным процессам  $(\gamma-Z)$ -взаимодействия верхнего антикварка третьего поколения.

Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{t}$ -кварками записывается следующим образом:

$$2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} + 3 \cdot \tilde{t} \rightarrow 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{t} = \delta_2 \cdot 3 \cdot \tilde{t} \rightarrow 3 \cdot \tilde{t}.$$

Обратное прочтение произведения (88) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{t}$ -кварками:

$$\tilde{t} \rightarrow \tilde{t} \cdot \delta_2 = 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} \bullet 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{t} \rightarrow 2 \cdot \gamma_{\nabla}^{+} + 2 \cdot Z_{\nabla}^{\Delta} + 3 \cdot \tilde{t}.$$

## 7. $(\gamma-Z)$ -взаимодействие нижних кварков

### 7.1. $(\gamma-Z)$ -взаимодействие $d$ -кварка

$(\gamma-Z)$ -взаимодействие  $d$ -кварка рассмотрим, обратившись к произведению базисных векторов (25):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K = \delta_I^K \cdot \mathbf{e}_L.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_1. \quad (89)$$

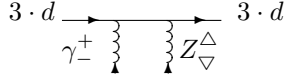
Отсюда с учетом соответствий (69) и (79) имеем соответствие

$$d_{-3}^{\Delta 3} \bullet \frac{1}{3} \gamma_{\nabla}^{+} \bullet \frac{1}{3} Z_{\nabla}^{\Delta} = \delta_1 \cdot d_{-3}^{\Delta 3} \quad \sim \quad \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_1.$$

Отсюда процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $d$ -кварками записывается следующим образом:

$$3 \cdot d + \gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 3 \cdot d \bullet \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = \delta_2 \cdot 3 \cdot d \rightarrow 3 \cdot d.$$

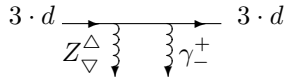
Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $d$ -кварками иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (89) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $d$ -кварками:

$$3 \cdot d \rightarrow \delta_1 \cdot 3 \cdot d = 3 \cdot d \bullet \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = 3 \cdot d + \gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

Процесс испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $u$ -кварками иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Аналогичные рассуждения приводят к аналогичным процессам  $(\gamma-Z)$ -взаимодействия нижнего кварка второго поколения.

Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $s$ -кварками записывается следующим образом:

$$3 \cdot s + \gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 3 \cdot s \bullet \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = \delta_2 \cdot 3 \cdot s \rightarrow 3 \cdot s.$$

Обратное прочтение произведения (89) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $s$ -кварками:

$$3 \cdot s \rightarrow \delta_1 \cdot 3 \cdot s = 3 \cdot s \bullet \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = 3 \cdot s + \gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к аналогичным процессам  $(\gamma-Z)$ -взаимодействия верхнего кварка третьего поколения.

Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $b$ -кварками записывается следующим образом:

$$3 \cdot b + \gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow 3 \cdot b \bullet \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = \delta_2 \cdot 3 \cdot b \rightarrow 3 \cdot b.$$

Обратное прочтение произведения (89) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $b$ -кварками:

$$3 \cdot b \rightarrow \delta_1 \cdot 3 \cdot b = 3 \cdot b \bullet \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = 3 \cdot b + \gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta}.$$

### 7.2. $(\gamma-Z)$ -взаимодействие $\tilde{d}$ -кварка

$(\gamma-Z)$ -взаимодействие  $\tilde{d}$ -кварка рассмотрим, обратившись к произведению базисных векторов (31):

$$\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^K \cdot \delta_L^I.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_1^1. \quad (90)$$

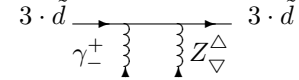
Отсюда с учетом соответствий (70) и (79) имеем соответствие

$$\frac{1}{3} \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet \frac{1}{3} Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet \tilde{d}_{\nabla}^{+/3} = \tilde{d}_{\nabla}^{+/3} \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_1^1.$$

Отсюда процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{d}$ -кварками записывается следующим образом:

$$\gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta} + \tilde{d} \rightarrow \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{d} = \delta_2 \cdot 3 \cdot \tilde{d} \rightarrow 3 \cdot \tilde{d}.$$

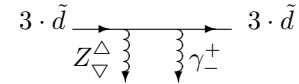
Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{d}$ -кварками иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (90) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{d}$ -кварком:

$$\tilde{d} \rightarrow \tilde{d} \cdot \delta_2 = \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{d} \rightarrow \gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta} + 3 \cdot \tilde{d}.$$

Процесс испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{d}$ -кварком иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Аналогичные рассуждения приводят к аналогичным процессам  $(\gamma-Z)$ -взаимодействия нижнего антикварка второго поколения.

Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{s}$ -кварками записывается следующим образом:

$$\gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta} + 3 \cdot \tilde{s} \rightarrow \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{s} = \delta_2 \cdot 3 \cdot \tilde{s} \rightarrow 3 \cdot \tilde{s}.$$

Обратное прочтение произведения (90) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{s}$ -кварками:

$$\tilde{s} \rightarrow \tilde{s} \cdot \delta_2 = \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{s} \rightarrow \gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta} + 3 \cdot \tilde{s}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к аналогичным процессам  $(\gamma-Z)$ -взаимодействия нижнего антикварка третьего поколения.

Процесс поглощения фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{b}$ -кварками записывается следующим образом:

$$\gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta} + 3 \cdot \tilde{b} \rightarrow \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{b} = \delta_2 \cdot 3 \cdot \tilde{b} \rightarrow 3 \cdot \tilde{b}.$$

Обратное прочтение произведения (90) приводит к процессу испускания фотонов и  $Z$ -бозонов  $\tilde{b}$ -кварками:

$$\tilde{b} \rightarrow \tilde{b} \cdot \delta_2 = \gamma_{\pm}^{\Delta} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet 3 \cdot \tilde{b} \rightarrow \gamma_{\pm}^{\Delta} + Z_{\nabla}^{\Delta} + 3 \cdot \tilde{b}.$$

## IX. ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ЛЕПТОНАМИ И КВАРКАМИ

Приведенные выше взаимодействия являются элементарными, то есть такими, которые не сводятся к



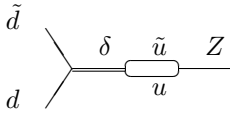
другим взаимодействиям. Напротив следует считать, что они являются слагаемыми более сложных взаимодействий. Элементарные электрослабые взаимодействия между лептонами и кварками не существуют. Электрослабые взаимодействия между лептонами и кварками являются составными. Причем электрослабые взаимодействия между лептонами и электрослабые взаимодействия между кварками связаны между собой через промежуточные частицы, которые являются общими как для лептонных электрослабых взаимодействий, так и для кварковых электрослабых взаимодействий.

Приведем примеры электрослабых взаимодействий между лептонами и кварками.

1. Предварительно напомним, что  $Z$ -бозон синтезируется элементарным взаимодействием верхней кварковой пары каждого поколения. Синтез  $Z$ -бозона элементарным взаимодействием нижней кварковой пары невозможен. Однако, такой синтез возможен в результате составного взаимодействия, частью которого является скалярное взаимодействие нижней кварковой пары. Например, синтез  $\bar{d} + d \rightarrow Z$  включает в себя следующие элементарные взаимодействия:

$$\begin{aligned} \bar{d} + d \rightarrow \bar{d} \cdot d = \delta \rightarrow \delta = \tilde{u} \cdot u \rightarrow \tilde{u} + u \rightarrow \\ \rightarrow \tilde{u} \otimes u = Z \rightarrow Z. \end{aligned}$$

Указанный синтез иллюстрируется следующей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение указанного взаимодействия представляет собой распад  $Z$ -бозона на нижнюю кварковую пару

$$\begin{aligned} Z \rightarrow Z = \tilde{u} \otimes u \rightarrow \tilde{u} + u \rightarrow \tilde{u} \cdot u = \delta \rightarrow \\ \rightarrow \delta = \bar{d} \cdot d \rightarrow \bar{d} + d. \end{aligned}$$

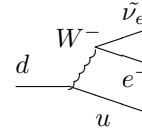
2. К составным взаимодействиям относятся слабые лептонные распады кварков. Примером таких распадов может служить распад

$$d \rightarrow u + e^- + \tilde{\nu}_e.$$

Он включает в себя следующие элементарные взаимодействия:

$$\begin{aligned} d \rightarrow d = u \circ W^- \rightarrow u + W^- \rightarrow u + \tilde{\nu}_e \circ e^- \rightarrow \\ \rightarrow u + e^- + \tilde{\nu}_e. \end{aligned}$$

Этот распад иллюстрируется следующей диаграммой взаимодействий:



3. Слабые лептонные распады кварков входят в состав более сложных взаимодействий.

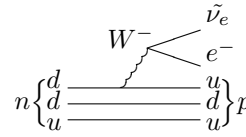
Например, распад  $d$ -кварка входит в распад нейтрона

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e,$$

который включает следующие элементарные взаимодействия<sup>17</sup>:

$$\begin{aligned} n \rightarrow n = u \bullet d \bullet d \rightarrow u \bullet d \bullet (u \circ W^-) \rightarrow (u \bullet d \bullet u) \circ W^- \rightarrow \\ \rightarrow p + W^- \rightarrow p + \tilde{\nu}_e \circ e^- \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e. \end{aligned}$$

Этот распад иллюстрируется следующей диаграммой взаимодействий:



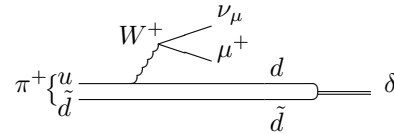
Другой пример: распад  $u$ -кварка входит в распад  $\pi^+$ -мезона

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

Действительно

$$\begin{aligned} \pi^+ \rightarrow \pi^+ = \bar{d} \bullet u \rightarrow \bar{d} \bullet (d \circ W^+) \rightarrow (\bar{d} \bullet d) \circ W^+ \rightarrow \\ \rightarrow \bar{d} \cdot d + W^+ \rightarrow \delta + \tilde{\nu}_\mu \circ \mu \rightarrow \delta + \mu^+ + \nu_\mu. \end{aligned}$$

Этот распад иллюстрируется следующей диаграммой взаимодействий:



4. Приведем пример слабого кваркового распада кварка

$$b \rightarrow t + \tilde{u} + d.$$

Этот распад записывается через элементарные взаимодействия следующим образом:

$$\begin{aligned} b \rightarrow b = t \circ W^- \rightarrow t + W^- \rightarrow t + \tilde{u} \circ d \rightarrow \\ \rightarrow t + \tilde{u} + d. \end{aligned}$$

<sup>17</sup> Смысл  $\bullet$ -умножения указан в следующем Разделе.

## Х. ОСТАТОЧНОЕ СИЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ КВАРКАМИ

Обратимся к остаточному сильному взаимодействию между кварками. Напомним, что это взаимодействие и соответствующие ему произведения базисных векторов были обозначены как  $\bullet$ -умножение<sup>18</sup>:

$$q_1 \bullet q_2.$$

Обратимся к базисному вектору кварков одного поколения  $\mathbf{e}_I$ . Разобьем индекс  $I$  на две части 1 и 2. Соответственно базисный вектор  $\mathbf{e}_I$  разобьется на две части  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Будем полагать, что базисный вектор  $\mathbf{e}_1$  соответствует нижней частице, а базисный вектор  $\mathbf{e}_2$  соответствует верхней частице того же поколения.

Аналогичные действия выполним для сопряженного базисного вектора  $\mathbf{E}^I$ .

Для кварков первого поколения имеем следующие соответствия:

$$\mathbf{e}_1 \sim d, \quad \mathbf{e}_2 \sim u, \quad (91)$$

а также

$$\mathbf{E}^1 \sim \tilde{d}, \quad \mathbf{E}^2 \sim \tilde{u}. \quad (92)$$

Далее рассмотрим остаточные сильные взаимодействия, в которых участвуют кварки, на основании таблицы умножения базисных векторов (25)–(32) и соответствий, приведенных в соотношениях (91) и (92).

Сначала обратимся к остаточному сильному взаимодействию между верхними и нижними кварками первого поколения.

### 1. Промежуточные частицы остаточного сильного взаимодействия

К промежуточным частицам остаточного сильного взаимодействия –  $\pi$ -мезонам – придем рассматривая произведения базисных векторов (28):

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}_K^I + \delta_K^I. \quad (93)$$

В нашем случае оно предстает в следующих четырех видах.

#### 1.1. $\pi_-$ -мезон

В этом случае произведение (93) предстает в следующем виде:

$$\mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^2. \quad (94)$$

Но согласно соответствиям (91) и (92) для правой части этого соотношения имеем соответствие

$$\mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_1 \sim \tilde{u} \bullet d.$$

Отсюда следует, что промежуточной частицей остаточного сильного взаимодействия кварков первого поколения следует считать мезон с электрическим зарядом  $Q = -1$ . Далее необходимо учесть, что возможны два варианта промежуточной частицы.

1. Спин промежуточной частицы равен нулю. Тогда указанная промежуточная частица – это  $\pi_-$ -мезон.

2. Спин промежуточной частицы равен единице. Тогда указанная промежуточная частица – это  $\rho_-$ -мезон.

Мы рассмотрим первый вариант, имея в виду, что переход к второму варианту может быть выполнен путем замены

$$\pi_- \rightarrow \rho_-.$$

Таким образом, мы останавливаемся на соответствии

$$\mathbf{I}_1^2 \sim \pi_-, \quad (95)$$

а произведению базисных векторов (94) поставим в соответствие следующий процесс взаимодействия

$$\tilde{u} + d \rightarrow \tilde{u} \bullet d = \pi_- \rightarrow \pi_-,$$

который представляет собой синтез  $\pi_-$ -мезона из кварков первого поколения.

Прочтение произведения базисных векторов (94) справа налево соответствует процессу распада  $\pi_-$ -мезона на кварки первого поколения

$$\pi_- \rightarrow \pi_- = \tilde{u} \bullet d \rightarrow \tilde{u} + d.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения – синтезе  $F_-$ -мезона из кварков второго поколения

$$\tilde{c} + s \rightarrow \tilde{c} \bullet s = F_- \rightarrow F_-.$$

Прочтение произведения базисных векторов (94) справа налево соответствует процессу распада  $F_-$ -мезона на кварки второго поколения

$$F_- \rightarrow F_- = \tilde{c} \bullet s \rightarrow \tilde{c} + s.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения – синтезе гипотетического  $T_-$ -мезона из кварков третьего поколения

$$\tilde{t} + b \rightarrow \tilde{t} \bullet b = T_- \rightarrow T_-.$$

Прочтение произведения базисных векторов (94) справа налево соответствует процессу распада  $T_-$ -мезона на кварки третьего поколения

$$T_- \rightarrow T_- = \tilde{t} \bullet b \rightarrow \tilde{t} + b.$$

<sup>18</sup> См. Раздел III.

1.2.  $\pi^+$ -мезон

В этом случае произведение (93) предстает в следующем виде:

$$\mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^1. \quad (96)$$

Но согласно соответствиям (91) и (92) для правой части этого соотношения имеем соответствие

$$\mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_2 \sim \tilde{d} \circ u.$$

Отсюда следует, что необходимо положить соответствие

$$\mathbf{I}_2^1 \sim \pi^+, \quad (97)$$

а произведению базисных векторов (96) поставить в соответствие следующий процесс взаимодействия

$$\tilde{d} + u \rightarrow \tilde{d} \bullet u = \pi^+ \rightarrow \pi^+,$$

который представляет собой синтез  $\pi^+$ -мезона из кварков первого поколения.

Прочтение произведения базисных векторов (96) справа налево соответствует процессу распада  $\pi^+$ -мезона на кварки первого поколения

$$\pi^+ \rightarrow \pi^+ = \tilde{d} \bullet u \rightarrow \tilde{d} + u.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения – синтезе  $F^+$ -мезона из кварков второго поколения

$$\tilde{s} + c \rightarrow \tilde{s} \bullet c = F^+ \rightarrow F^+.$$

Прочтение произведения базисных векторов (96) справа налево соответствует процессу распада  $F^+$ -мезона на кварки второго поколения

$$F^+ \rightarrow F^+ = \tilde{s} \bullet c \rightarrow \tilde{s} + c.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения – синтезе гипотетического  $T^+$ -мезона из кварков третьего поколения

$$\tilde{b} + t \rightarrow \tilde{b} \bullet t = T^+ \rightarrow T^+.$$

Прочтение произведения базисных векторов (96) справа налево соответствует процессу распада  $T^+$ -мезона на кварки третьего поколения

$$T^+ \rightarrow T^+ = \tilde{b} \bullet t \rightarrow \tilde{b} + t.$$

1.3.  $\pi^u$ -мезон и скалярная частица  $\delta_2$ 

В этом случае произведение (93) предстает в следующем виде:

$$\mathbf{E}^2 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^2 + \delta_2^2. \quad (98)$$

Это универсальное  $\circ$ -произведение состоит из  $\bullet$ -произведения

$$\mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^2 \quad (99)$$

и скалярного произведения

$$\mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = \delta_2^2. \quad (100)$$

Остановимся на каждом из этих произведений.

1). Сначала рассмотрим  $\bullet$ -произведение (99). Согласно соответствиям (91) и (92) для правой части соотношения (99) имеем соответствие

$$\mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_2 \sim \tilde{u} \bullet u.$$

Мезон, имеющий состав  $\tilde{u} \bullet u$ , обозначим  $\pi^u$

Отсюда следует, что необходимо положить соответствие

$$\mathbf{I}_2^2 \sim \pi^u, \quad (101)$$

а  $\bullet$ -произведению базисных векторов (99) поставить в соответствие следующий процесс  $\bullet$ -взаимодействия

$$\tilde{u} + u \rightarrow \tilde{u} \bullet u = \pi^u \rightarrow \pi^u,$$

который представляет собой синтез  $\pi^u$ -мезона верхней кварковой парой первого поколения.

Прочтение  $\bullet$ -произведения базисных векторов (99) справа налево соответствует процессу распада  $\pi^u$ -мезона на верхнюю кварковую пару первого поколения

$$\pi^u \rightarrow \pi^u = \tilde{u} \bullet u \rightarrow \tilde{u} + u.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения – синтезе  $F_c$ -мезона верхней кварковой парой второго поколения

$$\tilde{c} + c \rightarrow \tilde{c} \bullet c = F_c \rightarrow F_c.$$

Прочтение произведения базисных векторов (99) справа налево соответствует процессу распада  $F_c$ -мезона на верхнюю кварковую пару второго поколения

$$F_c \rightarrow F_c = \tilde{c} \bullet c \rightarrow \tilde{c} + c.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения – синтезе  $T_t$ -мезона верхней кварковой парой третьего поколения

$$\tilde{t} + t \rightarrow \tilde{t} \bullet t = T_t \rightarrow T_t.$$

Прочтение произведения базисных векторов (99) справа налево соответствует процессу распада  $T_t$ -мезона на верхнюю кварковую пару третьего поколения

$$T_t \rightarrow T_t = \tilde{t} \bullet t \rightarrow \tilde{t} + t.$$

2). Теперь рассмотрим скалярное произведение (100). Согласно соответствиям (91) и (92) для правой части соотношения (100) имеем соответствие

$$\mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{e}_2 \sim \tilde{u} \cdot u. \quad (102)$$

Отсюда следует, что скалярному произведению базисных векторов (100) необходимо поставить в соответствие следующий процесс скалярного взаимодействия, приводящий к синтезу скалярной частицы  $\delta_2$  из верхней кварковой пары первого поколения

$$\tilde{u} + u \rightarrow \tilde{u} \cdot u = \delta_2 \rightarrow \delta_2.$$

Прочтение скалярного произведения базисных векторов (100) справа налево соответствует процессу распада скалярной  $\delta_2$ -частицы на верхнюю кварковую пару первого поколения

$$\delta \rightarrow \delta = \tilde{u} \cdot u \rightarrow \tilde{u} + u.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения – синтезе скалярной частицы  $\delta_2$  из верхней кварковой пары второго поколения

$$\tilde{c} + c \rightarrow \tilde{c} \cdot c = \delta \rightarrow \delta.$$

Прочтение произведения базисных векторов (100) справа налево соответствует процессу распада скалярной  $\delta_2$ -частицы на верхнюю кварковую пару второго поколения

$$\delta \rightarrow \delta = \tilde{c} \cdot c \rightarrow \tilde{c} + c.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения – синтезе скалярной частицы  $\delta_2$  из верхней кварковой пары третьего поколения

$$\tilde{t} + t \rightarrow \tilde{t} \cdot t = \delta \rightarrow \delta.$$

Прочтение произведения базисных векторов (100) справа налево соответствует процессу распада скалярной  $\delta_2$ -частицы на верхнюю кварковую пару третьего поколения

$$\delta \rightarrow \delta = \tilde{t} \cdot t \rightarrow \tilde{t} + t.$$

#### 1.4. $\pi_d$ -мезон и скалярная частица $\delta_1$

В этом случае произведение (93) предстает в следующем виде:

$$\mathbf{E}^1 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^1 + \delta_1^1. \quad (103)$$

Это универсальное  $\circ$ -произведение состоит из  $\bullet$ -произведения

$$\mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^1 \quad (104)$$

и скалярного произведения

$$\mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = \delta_1^1. \quad (105)$$

Остановимся на каждом из этих произведений.

1). Сначала рассмотрим  $\bullet$ -произведение (104). Согласно соответствиям (91) и (92) для правой части соотношения (104) имеем соответствие

$$\mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_1 \sim \tilde{d} \bullet d.$$

Мезон, имеющий состав  $\tilde{d} \bullet d$ , обозначим  $\pi_d$ . Отсюда следует, что необходимо положить соответствие

$$\mathbf{I}_1^1 \sim \pi_d, \quad (106)$$

а  $\bullet$ -произведению базисных векторов (104) поставить в соответствие следующий процесс  $\bullet$ -взаимодействия:

$$\tilde{d} + d \rightarrow \tilde{d} \bullet d = \pi_d \rightarrow \pi_d,$$

который представляет собой синтез  $\pi_d$ -мезона нижней кварковой парой первого поколения.

Прочтение произведения базисных векторов (104) справа налево соответствует процессу распада  $\pi_d$ -мезона на нижнюю кварковую пару первого поколения

$$\pi_d \rightarrow \pi_d = \tilde{d} \bullet d \rightarrow \tilde{d} + d.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения – синтезе  $F_s$ -мезона нижней кварковой пары второго поколения

$$\tilde{s} + s \rightarrow \tilde{s} \bullet s = F_s \rightarrow F_s.$$

Прочтение произведения базисных векторов (104) справа налево соответствует процессу распада  $F_s$ -мезона на нижнюю кварковую пару второго поколения

$$F_s \rightarrow F_s = \tilde{s} \bullet s \rightarrow \tilde{s} + s.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения – синтезе  $T_b$ -мезона нижней кварковой парой третьего поколения

$$\tilde{b} + b \rightarrow \tilde{b} \bullet b = T_b \rightarrow T_b.$$

Прочтение произведения базисных векторов (104) справа налево соответствует процессу распада  $T_b$ -мезона на нижнюю кварковую пару третьего поколения

$$T_b \rightarrow T_b = \tilde{b} \bullet b \rightarrow \tilde{b} + b.$$

2). Теперь рассмотрим скалярное произведение (105). Согласно соответствиям (91) и (92) для правой части соотношения (105) имеем соответствие

$$\mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{e}_1 \sim \tilde{d} \cdot d. \quad (107)$$

Отсюда следует, что скалярному произведению базисных векторов (105) необходимо поставить в соответствие следующий процесс скалярного взаимодействия, приводящий к возникновению скалярной частицы  $\delta_1$

$$\tilde{d} + d \rightarrow \tilde{d} \cdot d = \delta_1 \rightarrow \delta_1.$$

Прочтение скалярного произведения базисных векторов (105) справа налево соответствует процессу распада скалярной  $\delta_1$ -частицы на нижнюю кварковую пару первого поколения

$$\delta_1 \rightarrow \delta_1 = \tilde{d} \cdot d \rightarrow \tilde{d} + d.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения

$$\tilde{s} + s \rightarrow \tilde{s} \cdot s = \delta_1 \rightarrow \delta_1.$$

Прочтение произведения базисных векторов (105) справа налево соответствует процессу распада скалярной  $\delta_1$ -частицы на нижнюю кварковую пару второго поколения

$$\delta_1 \rightarrow \delta_1 = \tilde{s} \cdot s \rightarrow \tilde{s} + s.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения

$$\tilde{b} + b \rightarrow \tilde{b} \cdot b = \delta_1 \rightarrow \delta_1.$$

Прочтение произведения базисных векторов (105) справа налево соответствует процессу распада скалярной  $\delta_1$ -частицы на нижнюю кварковую пару третьего поколения

$$\delta \rightarrow \delta = \tilde{b} \cdot b \rightarrow \tilde{b} + b.$$

## 2. Взаимодействия между кварками одного поколения и промежуточными мезонами

Обратимся теперь к произведению базисных векторов (25):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K = \delta_I^K \cdot \mathbf{e}_L. \quad (108)$$

Это произведение предстает в четырех видах. Рассмотрим каждый из них.

### 2.1. Взаимодействия с $\pi_-$ -мезоном

В этом случае произведение (108) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_1. \quad (109)$$

Из (91) и (95) имеем соответствие

$$u \bullet \pi_- = \delta_2 \cdot d \sim \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_1.$$

Отсюда имеем процесс синтеза  $d$ -кварка вследствие поглощения  $u$ -кварком  $\pi_-$ -мезона:

$$u + \pi_- \rightarrow u \bullet \pi_- = \delta_2 \cdot d.$$

Прочтение произведения базисных векторов (109) справа налево соответствует следующему процессу распада  $d$ -кварка:

$$\delta_2 + d \rightarrow \delta_2 \cdot d = u \bullet \pi_- \rightarrow u + \pi_-.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения

$$c + F_- \rightarrow c \bullet F_- = \delta_2 \cdot s.$$

Прочтение произведения базисных векторов (109) справа налево соответствует следующему процессу распада  $s$ -кварка:

$$\delta_2 + s \rightarrow \delta_2 \cdot s = c \bullet F_- \rightarrow c + F_-.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения

$$t + T_- \rightarrow t \bullet T_- = \delta_2 \cdot b.$$

Прочтение произведения базисных векторов (109) справа налево соответствует следующему процессу распада  $b$ -кварка:

$$\delta_2 + b \rightarrow \delta_2 \cdot b = t \bullet T_- \rightarrow t + T_-.$$

### 2.2. Взаимодействия с $\pi^+$ -мезоном

В этом случае произведение (108) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_2. \quad (110)$$

Из (91) и (97) имеем соответствие

$$d \bullet \pi^+ = \delta_1 \cdot u \sim \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_2.$$

Отсюда имеем процесс синтеза  $u$ -кварка вследствие поглощения  $d$ -кварком  $\pi^+$ -мезона:

$$d + \pi^+ \rightarrow d \bullet \pi^+ = \delta_1 \cdot u.$$

Прочтение произведения базисных векторов (110) справа налево соответствует следующему процессу распада  $u$ -кварка:

$$\delta_1 + u \rightarrow \delta_1 \cdot u = d \bullet \pi^+ \rightarrow d + \pi^+.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения

$$s + F^+ \rightarrow s \bullet F^+ = \delta_1 \cdot c.$$

Прочтение произведения базисных векторов (110) справа налево соответствует следующему процессу распада  $s$ -кварка:

$$\delta_1 + c \rightarrow \delta_1 \cdot c = s \bullet F^+ \rightarrow s + F^+.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения

$$b + T^+ \rightarrow b \bullet T^+ = \delta_1 \cdot t.$$

Прочтение произведения базисных векторов (110) справа налево соответствует следующему процессу распада  $t$ -кварка:

$$\delta_1 + t \rightarrow \delta_1 \cdot t = b \bullet T^+ \rightarrow b + T^+.$$

### 2.3. Взаимодействия с $\pi^u$ -мезоном

В этом случае произведение (108) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_2. \quad (111)$$

Из (91) и (101) имеем соответствие

$$u \bullet \pi^u = \delta_2 \cdot u \sim \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_2.$$

Отсюда имеем процесс поглощения  $u$ -кварком  $\pi^u$ -мезона:

$$u + \pi^u \rightarrow u \bullet \pi^u = \delta_2 \cdot u \rightarrow \delta_2 + u.$$

Прочтение произведения базисных векторов (111) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $u$ -кварком  $\pi^u$ -мезона:

$$\delta_2 + u \rightarrow \delta_2 \cdot u = u \bullet \pi^u \rightarrow u + \pi^u.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения

$$c + F_c \rightarrow c \bullet F_c = \delta_2 \cdot c \rightarrow \delta_2 + c.$$

Прочтение произведения базисных векторов (111) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $c$ -кварком  $F_c$ -мезона:

$$\delta_2 + c \rightarrow \delta_2 \cdot c = c \bullet F_c \rightarrow c + F_c.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения

$$t + T_t \rightarrow t \bullet T_t = \delta_2 \cdot t \rightarrow \delta_2 + t.$$

Прочтение произведения базисных векторов (111) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $t$ -кварком  $T_t$ -мезона:

$$\delta_2 + t \rightarrow \delta_2 \cdot t = t \bullet T_t \rightarrow t + T_t.$$

### 2.4. Взаимодействия с $\pi_d$ -мезоном

В этом случае произведение (108) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_1. \quad (112)$$

Из (91) и (106) имеем соответствие

$$d \bullet \pi_d = \delta_1 \cdot d \sim \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_1.$$

Отсюда имеем процесс поглощения  $d$ -кварком  $\pi_d$ -мезона:

$$d + \pi_d \rightarrow d \bullet \pi_d = \delta_1 \cdot d \rightarrow \delta_1 + d.$$

Прочтение произведения базисных векторов (112) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $d$ -кварком  $\pi_d$ -мезона:

$$\delta_1 + d \rightarrow \delta_1 \cdot d = d \bullet \pi_d \rightarrow d + \pi_d.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения

$$s + F_s \rightarrow s \bullet F_s = \delta_1 \cdot s \rightarrow \delta_1 + s.$$

Прочтение произведения базисных векторов (112) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $s$ -кварком  $F_s$ -мезона:

$$\delta_1 + s \rightarrow \delta_1 \cdot s = s \bullet F_s \rightarrow s + F_s.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения

$$b + T_b \rightarrow b \bullet T_b = \delta_1 \cdot b \rightarrow \delta_1 + b.$$

Прочтение произведения базисных векторов (112) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $b$ -кварком  $T_b$ -мезона:

$$\delta_1 + b \rightarrow \delta_1 \cdot b = b \bullet T_b \rightarrow b + T_b.$$

## 3. Взаимодействия между антикварками одного поколения и промежуточными мезонами

Взаимодействия между антикварками одного поколения и промежуточными мезонами рассмотрим, обратившись к произведению базисных векторов (31):

$$\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^K \cdot \delta_L^I. \quad (113)$$

Это произведение предстает в четырех видах. Рассмотрим каждый из них.

3.1. Взаимодействия с  $\pi_-$ -мезоном

В этом случае произведение (113) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_1^1. \quad (114)$$

Отсюда с учетом соответствий (92) и (95) имеем соответствие

$$\pi_- \bullet \tilde{d} = \delta_1 \cdot \tilde{u} \quad \sim \quad \mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_1^1.$$

Отсюда имеем процесс синтеза  $\tilde{u}$ -кварка вследствие поглощения  $\tilde{d}$ -кварком  $\pi_-$ -мезона:

$$\pi_- + \tilde{d} \rightarrow \pi_- \bullet \tilde{d} = \delta_1 \cdot \tilde{u}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (114) справа налево соответствует следующему процессу распада  $\tilde{u}$ -кварка:

$$\delta_1 + \tilde{u} \rightarrow \delta_1 \cdot \tilde{u} = \pi_- \bullet \tilde{d} \rightarrow \pi_- + \tilde{d}.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения

$$F_- + \tilde{s} \rightarrow F_- \bullet \tilde{s} = \delta_1 \cdot \tilde{c}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (114) справа налево соответствует следующему процессу распада  $\tilde{c}$ -кварка:

$$\delta_1 + \tilde{c} \rightarrow \delta_1 \cdot \tilde{c} = F_- \bullet \tilde{s} \rightarrow F_- + \tilde{s}.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения

$$T_- + \tilde{b} \rightarrow T_- \bullet \tilde{b} = \delta_1 \cdot \tilde{t} \rightarrow \delta_1 + \tilde{t}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (114) справа налево соответствует следующему процессу распада  $\tilde{t}$ -кварка:

$$\delta_1 + \tilde{t} \rightarrow \delta_1 \cdot \tilde{t} = T_- \bullet \tilde{b} \rightarrow T_- + \tilde{b}.$$

3.2. Взаимодействия с  $\pi^+$ -мезоном

В этом случае произведение (108) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_2^2. \quad (115)$$

Из (92) и (97) имеем соответствие

$$\pi^+ \bullet \tilde{u} = \delta_2 \cdot \tilde{d} \quad \sim \quad \mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_2^2.$$

Отсюда имеем процесс синтеза  $\tilde{d}$ -кварка вследствие поглощения  $\tilde{u}$ -кварком  $\pi^+$ -мезона:

$$\pi^+ + \tilde{u} \rightarrow \pi^+ \bullet \tilde{u} = \delta_2 \cdot \tilde{d} \rightarrow \delta_2 + \tilde{d}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (115) справа налево соответствует следующему процессу распада  $\tilde{d}$ -кварка:

$$\delta_2 + \tilde{d} \rightarrow \delta_2 \cdot \tilde{d} = \pi^+ \bullet \tilde{u} \rightarrow \pi^+ + \tilde{u}.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения

$$F^+ + \tilde{c} \rightarrow F^+ \bullet \tilde{c} = \delta_2 \cdot \tilde{s} \rightarrow \delta_2 + \tilde{s}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (115) справа налево соответствует следующему процессу распада  $\tilde{s}$ -кварка:

$$\delta_2 + \tilde{s} \rightarrow \delta_2 \cdot \tilde{s} = F^+ \bullet \tilde{c} \rightarrow F^+ + \tilde{c}.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения

$$T^+ + \tilde{t} \rightarrow T^+ \bullet \tilde{t} = \delta_2 \cdot \tilde{b} \rightarrow \delta_2 + \tilde{b}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (115) справа налево соответствует следующему процессу распада  $\tilde{b}$ -кварка:

$$\delta_2 + \tilde{b} \rightarrow \delta_2 \cdot \tilde{b} = T^+ \bullet \tilde{t} \rightarrow T^+ + \tilde{t}.$$

3.3. Взаимодействия с  $\pi^u$ -мезоном

В этом случае произведение (113) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_2^2. \quad (116)$$

Из (92) и (101) имеем соответствие

$$\pi^u \bullet \tilde{u} = \delta_2 \cdot \tilde{u} \quad \sim \quad \mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_2^2.$$

Отсюда имеем процесс поглощения  $\tilde{u}$ -кварком  $\pi^u$ -мезона:

$$\pi^u + \tilde{u} \rightarrow \pi^u \bullet \tilde{u} = \delta_2 \cdot \tilde{u} \rightarrow \delta_2 + \tilde{u}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (116) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $u$ -кварком  $\pi^u$ -мезона:

$$\delta_2 + \tilde{u} \rightarrow \delta_2 \cdot \tilde{u} = \pi^u \bullet \tilde{u} \rightarrow \pi^u + \tilde{u}.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения

$$F_c + \tilde{c} \rightarrow F_c \bullet \tilde{c} = \delta_2 \cdot \tilde{c} \rightarrow \delta_2 + \tilde{c}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (116) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $c$ -кварком  $F_c$ -мезона:

$$\delta_2 + \tilde{c} \rightarrow \delta_2 \cdot \tilde{c} = F_c \bullet \tilde{c} \rightarrow F_c + \tilde{c}.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения

$$T_t + \tilde{t} \rightarrow T_t \bullet \tilde{t} = \delta_2 \cdot \tilde{t} \rightarrow \delta_2 + \tilde{t}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (116) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $t$ -кварком  $T_t$ -мезона:

$$\delta_2 + t \rightarrow \delta_2 \cdot t = t \bullet T_t \rightarrow t + T_t.$$

### 3.4. Взаимодействия с $\pi_d$ -мезоном

В этом случае произведение (113) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_1^1. \quad (117)$$

Из (92) и (106) имеем соответствие

$$\pi_d \bullet \tilde{d} = \delta_1 \cdot \tilde{d} \sim \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_1.$$

Отсюда имеем процесс поглощения  $\tilde{d}$ -кварком  $\pi_d$ -мезона:

$$\pi_d + \tilde{d} \rightarrow \pi_d \bullet \tilde{d} = \delta_1 \cdot \tilde{d} \rightarrow \delta_1 + \tilde{d}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (117) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $\tilde{d}$ -кварком  $\pi_d$ -мезона:

$$\delta_1 + \tilde{d} \rightarrow \delta_1 \cdot \tilde{d} = \pi_d \bullet \tilde{d} \rightarrow \pi_d + \tilde{d}.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков второго поколения

$$F_s + \tilde{s} \rightarrow F_s \bullet \tilde{s} = \delta_1 \cdot \tilde{s} \rightarrow \delta_1 + \tilde{s}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (117) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $\tilde{s}$ -кварком  $F_s$ -мезона:

$$\delta_1 + \tilde{s} \rightarrow \delta_1 \cdot \tilde{s} = F_s \bullet \tilde{s} \rightarrow F_s + \tilde{s}.$$

Такие же рассуждения приводят к представлению об аналогичном процессе с участием кварков третьего поколения

$$T_b + \tilde{b} \rightarrow T_b \bullet \tilde{b} = \delta_1 \cdot \tilde{b} \rightarrow \delta_1 + \tilde{b}.$$

Прочтение произведения базисных векторов (117) справа налево соответствует следующему процессу испускания  $\tilde{b}$ -кварком  $T_b$ -мезона:

$$\delta_1 + \tilde{b} \rightarrow \delta_1 \cdot \tilde{b} = T_b \bullet \tilde{b} \rightarrow T_b + \tilde{b}.$$

## 4. Взаимодействие промежуточных частиц сильного взаимодействия между собой

К взаимодействиям промежуточных частиц ( $\pi$ -мезонов) остаточного сильного взаимодействия между собой придем, рассматривая произведение базисных векторов (29):

$$\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{I}_N^M = \delta_L^M \cdot \mathbf{I}_N^K + \delta_L^M \cdot \delta_N^K.$$

Приведем все возможные взаимодействия, которые следуют из этого соотношения.

1. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_1^1 \circ \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^1 + \delta_1^1 \cdot \delta_1^1. \quad (118)$$

Это универсальное  $\circ$ -произведение состоит из  $\bullet$ -произведения

$$\mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^1 \quad (119)$$

и скалярного произведения

$$\mathbf{I}_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \delta_1^1. \quad (120)$$

Остановимся на каждом из этих произведений.

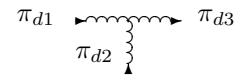
1.1. Сначала рассмотрим  $\bullet$ -произведение (119) С учетом соответствия (106) имеем соответствие

$$\pi_{d1} \bullet \pi_{d2} = \delta_1 \cdot \pi_{d3} \sim \mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^1.$$

Отсюда процесс испускания  $\pi_d$ -мезона в результате аннигиляции  $\pi_d$ -мезонной пары записывается следующим образом:

$$\pi_{d1} + \pi_{d2} \rightarrow \pi_{d1} \bullet \pi_{d2} = \delta_1 \cdot \pi_{d3} \rightarrow \delta_1 + \pi_{d3}.$$

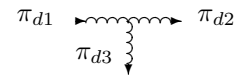
Процесс испускания  $\pi_d$ -мезона в результате аннигиляции  $\pi_d$ -мезонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения приводит к процессу распада  $\pi_d$ -мезона и рождения  $\pi_d$ -мезонной пары:

$$\delta_1 + \pi_{d1} \rightarrow \delta_1 \cdot \pi_{d1} = \pi_{d2} \bullet \pi_{d3} \rightarrow \pi_{d2} + \pi_{d3}.$$

Процесс распада  $\pi_d$ -мезона и рождения  $\pi_d$ -мезонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



1.2. Теперь рассмотрим скалярное произведение (120) С учетом соответствия (106) имеем соответствие

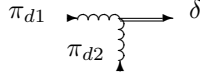
$$\pi_{d1} \cdot \pi_{d2} = \delta_1 \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \delta_1^1.$$



Отсюда процесс испускания скалярной  $\delta$ -частицы в результате аннигиляции  $\pi_d$ -мезонной пары записывается следующим образом:

$$\pi_{d1} + \pi_{d2} \rightarrow \pi_{d1} \bullet \pi_{d2} = \delta_1 \cdot \delta_1 \rightarrow \delta_1.$$

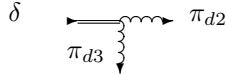
Процесс испускания скалярной  $\delta$ -частицы в результате аннигиляции  $\pi_d$ -мезонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (120) приводит к процессу распада скалярной  $\delta$ -частицы и рождения  $\pi_d$ -мезонной пары:

$$\delta \rightarrow \delta_1 \cdot \delta_1 = \pi_{d2} \bullet \pi_{d3} \rightarrow \pi_{d2} + \pi_{d3}.$$

Процесс распада скалярной  $\delta$ -частицы и рождения  $\pi_d$ -мезонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



2. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^1. \quad (121)$$

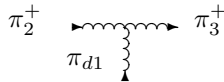
Отсюда с учетом соответствия (106) и (97) имеем соответствие

$$\pi_{d1} \bullet \pi_2^+ = \delta_1 \cdot \pi_3^+ \sim \mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^1.$$

Отсюда процесс поглощения  $\pi_d$ -мезона  $\pi^+$ -мезоном записывается следующим образом:

$$\pi_{d1} + \pi_2^+ \rightarrow \pi_{d1} \bullet \pi_2^+ = \delta_1 \cdot \pi_3^+ \rightarrow \pi_3^+.$$

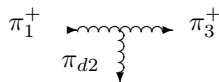
Процесс поглощения  $\pi_d$ -мезона  $\pi^+$ -мезоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (121) приводит к процессу испускания  $\pi_d$ -мезона  $\pi^+$ -мезоном:

$$\pi_1^+ \rightarrow \delta_1 \cdot \pi_1^+ = \pi_{d2} \bullet \pi_3^+ \rightarrow \pi_{d2} + \pi_3^+.$$

Процесс испускания  $\pi_d$ -мезона  $\pi^+$ -мезоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



3. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^2. \quad (122)$$

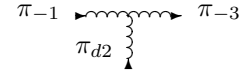
Отсюда с учетом соответствия (95) и (106) имеем соответствие

$$\pi_{-1} \bullet \pi_{d2} = \delta_1 \cdot \pi_{-3} \sim \mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^2.$$

Отсюда процесс поглощения  $\pi_d$ -мезона  $\pi_-$ -мезоном записывается следующим образом:

$$\pi_{-1} + \pi_{d2} \rightarrow \pi_{-1} \bullet \pi_{d2} = \delta_1 \cdot \pi_{-3} \rightarrow \pi_{-3}.$$

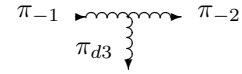
Процесс поглощения  $\pi_d$ -мезона  $\pi_-$ -мезоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (122) приводит к процессу испускания  $\pi_d$ -мезона  $\pi_-$ -мезоном:

$$\pi_{-1} \rightarrow \delta_1 \cdot \pi_{-1} = \pi_{-2} \bullet \pi_{d3} \rightarrow \pi_{-2} + \pi_{d3}.$$

Процесс испускания  $\pi_d$ -мезона  $\pi_-$ -мезоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



4. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^2 + \delta_1^1 \cdot \delta_2^2. \quad (123)$$

Это универсальное  $\circ$ -произведение состоит из  $\bullet$ -произведения

$$\mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^2 \quad (124)$$

и скалярного произведения

$$\mathbf{I}_1^2 \cdot \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \delta_2^2. \quad (125)$$

Остановимся на каждом из этих произведений.

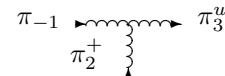
4.1. Сначала рассмотрим  $\bullet$ -произведение (124) C учетом соответствий (95), (97), (101) имеем соответствие

$$\pi_{-1} \bullet \pi_2^+ = \delta_1 \cdot \pi_3^u \sim \mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^2.$$

Отсюда процесс испускания  $\pi^u$ -мезона в результате аннигиляции  $\pi^+$ - $\pi_-$  пары записывается следующим образом:

$$\pi_{-1} + \pi_2^+ \rightarrow \pi_{-1} \bullet \pi_2^+ = \delta_1 \cdot \pi_3^u \rightarrow \pi_3^u.$$

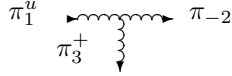
Процесс испускания  $\pi^u$ -мезона в результате аннигиляции  $\pi^+$ - $\pi_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (124) приводит к процессу распада  $\pi^u$ -мезона и рождения  $\pi^+-\pi_-$  пары:

$$\pi_1^u \rightarrow \delta_1 \cdot \pi_1^u = \pi_{-2} \bullet \pi_3^+ \rightarrow \pi_{-2} + \pi_3^+.$$

Процесс распада  $\pi^u$ -мезона и рождения  $\pi^+-\pi_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



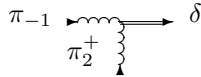
4.2. Теперь рассмотрим скалярное произведение (125) С учетом соответствий (95) и (97) имеем соответствие

$$\pi_{-1} \bullet \pi_2^+ = \delta_1 \cdot \delta_2 \sim \mathbf{I}_1^2 \cdot \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \delta_2^2.$$

Отсюда процесс испускания скалярной  $\delta$ -частицы в результате аннигиляции  $\pi^+-\pi_-$  пары записывается следующим образом:

$$\pi_{-1} + \pi_2^+ \rightarrow \pi_{-1} \bullet \pi_2^+ = \delta_1 \cdot \delta_2 \rightarrow \delta.$$

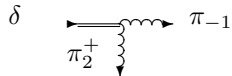
Процесс испускания скалярной  $\delta$ -частицы в результате аннигиляции  $\pi^+-\pi_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (125) приводит к процессу распада скалярной  $\delta$ -частицы и рождения  $\pi_d$ -мезонной пары:

$$\delta \rightarrow \delta_1 \cdot \delta_2 = \pi_{-1} \bullet \pi_2^+ \rightarrow \pi_{-1} + \pi_2^+.$$

Процесс распада скалярной  $\delta$ -частицы и рождения  $\pi^+-\pi_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



5. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^1 + \delta_2^2 \cdot \delta_1^1. \quad (126)$$

Это универсальное  $\circ$ -произведение состоит из  $\bullet$ -произведения

$$\mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^1 \quad (127)$$

и скалярного произведения

$$\mathbf{I}_2^1 \cdot \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \delta_1^1. \quad (128)$$

Остановимся на каждом из этих произведений.

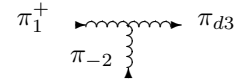
5.1. Сначала рассмотрим  $\bullet$ -произведение (127). С учетом соответствий (97), (95) и (106) имеем соответствие

$$\pi_1^+ \bullet \pi_{-2} = \delta_1 \cdot \pi_{d3} \sim \mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^1.$$

Отсюда процесс испускания  $\pi_d$ -мезона в результате аннигиляции  $\pi^+-\pi_-$  пары записывается следующим образом:

$$\pi_1^+ + \pi_{-2} \rightarrow \pi_1^+ \bullet \pi_{-2} = \delta_1 \cdot \pi_{d3} \rightarrow \pi_{d3}.$$

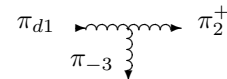
Процесс испускания  $\pi_d$ -мезона в результате аннигиляции  $\pi^+-\pi_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (127) приводит к процессу распада  $\pi_d$ -мезона и рождения  $\pi^+-\pi_-$  пары:

$$\pi_{d1} \rightarrow \delta_1 \cdot \pi_{d1} = \pi_2^+ \bullet \pi_{-3} \rightarrow \pi_2^+ + \pi_{-3}.$$

Процесс распада  $\pi_d$ -мезона и рождения  $\pi^+-\pi_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



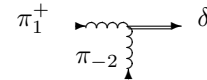
5.2. Теперь рассмотрим скалярное произведение (128) С учетом соответствий (97) и (95) имеем соответствие

$$\pi_1^+ \bullet \pi_{-2} = \delta_2 \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_2^1 \cdot \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \delta_1^1.$$

Отсюда процесс испускания скалярной  $\delta$ -частицы в результате аннигиляции  $\pi^+-\pi_-$  пары записывается следующим образом:

$$\pi_1^+ + \pi_{-2} \rightarrow \pi_1^+ \bullet \pi_{-2} = \delta_2 \cdot \delta_1 \rightarrow \delta.$$

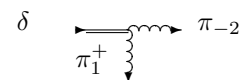
Процесс испускания скалярной  $\delta$ -частицы в результате аннигиляции  $\pi^+-\pi_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (128) приводит к процессу распада скалярной  $\delta$ -частицы и рождения  $\pi^+-\pi_-$  пары:

$$\delta \rightarrow \delta_2 \cdot \delta_2 = \pi_1^+ \bullet \pi_{-2} \rightarrow \pi_1^+ + \pi_{-2}.$$

Процесс распада скалярной  $\delta$ -частицы и рождения  $\pi^+-\pi_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



6. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^1. \quad (129)$$

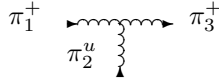
Отсюда с учетом соответствия (97) и (101) имеем соответствие

$$\pi_1^+ \bullet \pi_2^u = \delta_2 \cdot \pi_3^+ \sim \mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^1.$$

Отсюда процесс поглощения  $\pi^u$ -мезона  $\pi^+$ -мезоном записывается следующим образом:

$$\pi_1^+ + \pi_2^u \rightarrow \pi_1^+ \bullet \pi_2^u = \delta_2 \cdot \pi_3^+ \rightarrow \pi_3^+.$$

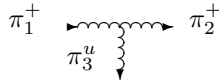
Процесс поглощения  $\pi^u$ -мезона  $\pi^+$ -мезоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (129) приводит к процессу испускания  $\pi^u$ -мезона  $\pi^+$ -мезоном:

$$\pi_1^+ \rightarrow \delta_1 \cdot \pi_1^+ = \pi_2^+ \bullet \pi_3^u \rightarrow \pi_2^+ + \pi_3^u.$$

Процесс испускания  $\pi^u$ -мезона  $\pi^+$ -мезоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



7. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^2. \quad (130)$$

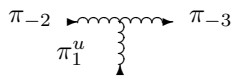
Отсюда с учетом соответствия (101), (95) имеем соответствие

$$\pi_1^u \bullet \pi_{-2} = \delta_1 \cdot \pi_{-3} \sim \mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^2.$$

Отсюда процесс поглощения  $\pi^u$ -мезона  $\pi_-$ -бозоном записывается следующим образом:

$$\pi_1^u + \pi_{-2} \rightarrow \pi_1^u \bullet \pi_{-2} = \delta_1 \cdot \pi_{-3} \rightarrow \pi_{-3}.$$

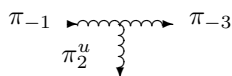
Процесс поглощения  $\pi^u$ -мезона  $\pi_-$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (130) приводит к процессу испускания  $\pi^u$ -мезона  $\pi_-$ -бозоном:

$$\pi_{-1} \rightarrow \delta_1 \cdot \pi_{-1} = \pi_2^u \bullet \pi_{-3} \rightarrow \pi_2^u + \pi_{-3}.$$

Процесс испускания  $\pi^u$ -мезона  $\pi_-$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



8. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2 + \delta_2^2 \cdot \delta_2^2. \quad (131)$$

Это универсальное  $\circ$ -произведение состоит из  $\bullet$ -произведения

$$\mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2 \quad (132)$$

и скалярного произведения

$$\mathbf{I}_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \delta_2^2. \quad (133)$$

Остановимся на каждом из этих произведений.

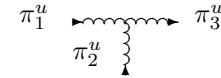
8.1. Сначала рассмотрим  $\bullet$ -произведение (132) С учетом соответствия (101) имеем соответствие

$$\pi_1^u \bullet \pi_2^u = \delta_2 \cdot \pi_3^u \sim \mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2.$$

Отсюда процесс испускания  $\pi^u$ -мезона в результате аннигиляции  $\pi^u$ -мезонной пары записывается следующим образом:

$$\pi_1^u + \pi_2^u \rightarrow \pi_1^u \bullet \pi_2^u = \delta_2 \cdot \pi_3^u \rightarrow \pi_3^u.$$

Процесс испускания  $\pi^u$ -мезона в результате аннигиляции  $\pi^u$ -мезонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (132) приводит к процессу распада  $\pi^u$ -мезона и рождения  $\pi^u$ -мезонной пары:

$$\pi_1^u \rightarrow \delta_2 \cdot \pi_1^u = \pi_2^u \bullet \pi_3^u \rightarrow \pi_2^u + \pi_3^u.$$

Процесс распада  $\pi^u$ -мезона и рождения  $\pi^u$ -мезонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



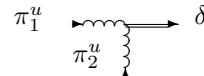
8.2. Теперь рассмотрим скалярное произведение (133) С учетом соответствия (101) имеем соответствие

$$\pi_1^u \cdot \pi_2^u = \delta_2 \cdot \delta_2 \sim \mathbf{I}_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \delta_2^2.$$

Отсюда процесс испускания скалярной  $\delta$ -частицы в результате аннигиляции  $\pi^u$ -мезонной пары записывается следующим образом:

$$\pi_1^u + \pi_2^u \rightarrow \pi_1^u \bullet \pi_2^u = \delta_2 \cdot \delta_2 \rightarrow \delta.$$

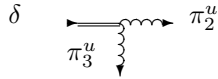
Процесс испускания скалярной  $\delta$ -частицы в результате аннигиляции  $\pi^u$ -мезонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



Обратное прочтение произведения (133) приводит к процессу распада скалярной  $\delta$ -частицы и рождения  $\pi^u$ -мезонной пары:

$$\delta \rightarrow \delta_2 \cdot \delta_2 = \pi_2^u \bullet \pi_3^u \rightarrow \pi_2^u + \pi_3^u .$$

Процесс распада скалярной  $\delta$ -частицы и рождения  $\pi^u$ -мезонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:

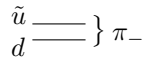


### 5. Простейшие диаграммы элементарных сильных взаимодействий

Взаимодействия, рассмотренные в предыдущем Разделе, являются элементарными. Они иллюстрируются простейшими диаграммами, которые приведем далее.

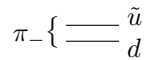
1. Синтез  $\pi_-$ -мезона.

$$\tilde{u} + d \rightarrow \tilde{u} \bullet d = \pi_- \rightarrow \pi_- .$$



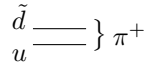
2. Распад  $\pi_-$ -мезона.

$$\pi_- \rightarrow \pi_- = \tilde{u} \bullet d \rightarrow \tilde{u} + d .$$



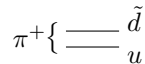
3. Синтез  $\pi^+$ -мезона.

$$\tilde{d} + u \rightarrow \tilde{d} \bullet u = \pi^+ \rightarrow \pi^+ .$$



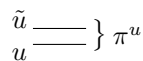
4. Распад  $\pi^+$ -мезона.

$$\pi^+ \rightarrow \pi^+ = \tilde{d} \bullet u \rightarrow \tilde{d} + u .$$



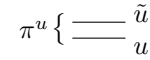
5. Синтез  $\pi^u$ -мезона.

$$\tilde{u} + u \rightarrow \tilde{u} \bullet u = \pi^u \rightarrow \pi^u .$$



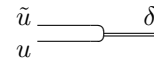
6. Распад  $\pi^u$ -мезона.

$$\pi^u \rightarrow \pi^u = \tilde{u} \bullet u \rightarrow \tilde{u} + u .$$



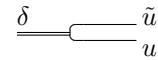
7.  $u$ -синтез скалярной  $\delta$ -частицы.

$$\tilde{u} + u \rightarrow \tilde{u} \bullet u = \delta \rightarrow \delta .$$



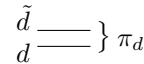
8.  $u$ -распад скалярной  $\delta$ -частицы.

$$\delta \rightarrow \delta = \tilde{u} \bullet u \rightarrow \tilde{u} + u .$$



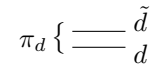
9. Синтез  $\pi_d$ -мезона.

$$\tilde{d} + d \rightarrow \tilde{d} \otimes d = \pi_d \rightarrow \pi_d .$$



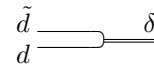
10. Распад  $\pi_d$ -мезона.

$$\pi_d \rightarrow \pi_d = \tilde{d} \cdot d \rightarrow \tilde{d} + d .$$



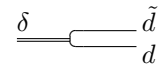
11.  $d$ -синтез скалярной  $\delta$ -частицы.

$$\tilde{d} + d \rightarrow \tilde{d} \cdot d = \delta \rightarrow \delta .$$



12.  $d$ -распад скалярной  $\delta$ -частицы.

$$\delta \rightarrow \delta = \tilde{d} \cdot d \rightarrow \tilde{d} + d .$$



13. Синтез  $d$ -кварка.

$$u + \pi_- \rightarrow u \bullet \pi_- = \delta \cdot d \rightarrow \delta + d ,$$

или подробнее

$$u + \pi_- \rightarrow u \bullet \pi_- = u \bullet (\tilde{u} \bullet d) \rightarrow (u \cdot \tilde{u}) \bullet d = \delta \cdot d \rightarrow \delta + d .$$

$$u \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left. \begin{array}{c} \tilde{u} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \text{---} \delta$$

14. Распад  $d$ -кварка.

$$\delta + d \rightarrow \delta \bullet d = u \bullet \pi_- \rightarrow u + \pi_- .$$

или подробнее

$$\delta + d \rightarrow \delta \cdot d = (u \cdot \tilde{u}) \bullet d \rightarrow u \bullet (\tilde{u} \bullet d) = u \bullet \pi_- \rightarrow u + \pi_- .$$

$$\delta \text{---} \left\{ \begin{array}{c} u \\ \text{---} \\ \tilde{u} \end{array} \right\} \pi^-$$

15. Синтез  $u$ -кварка.

$$d + \pi^+ \rightarrow d \bullet \pi^+ = \delta \cdot u \rightarrow \delta + u ,$$

или подробнее

$$d + \pi^+ \rightarrow d \bullet \pi^+ = d \bullet (\tilde{d} \bullet u) \rightarrow (d \cdot \tilde{d}) \bullet u = \delta \cdot u \rightarrow \delta + u .$$

$$d \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left. \begin{array}{c} \tilde{d} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \text{---} \delta$$

16. Распад  $u$ -кварка.

$$\delta + u \rightarrow \delta \cdot u = d \bullet \pi^+ \rightarrow d + \pi^+ .$$

или подробнее

$$\delta + u \rightarrow \delta \cdot u = (d \cdot \tilde{d}) \bullet u \rightarrow d \bullet (\tilde{d} \bullet u) = d \bullet \pi^+ \rightarrow d + \pi^+ .$$

$$\delta \text{---} \left\{ \begin{array}{c} d \\ \text{---} \\ \tilde{d} \end{array} \right\} \pi^+$$

## 6. Диаграммы составных сильных взаимодействий

Приведенные выше взаимодействия являются *элементарными*, то есть такими, которые не сводятся к другим взаимодействиям. Напротив следует считать, что они являются слагаемыми более сложных взаимодействий. Приведем примеры таких взаимодействий.

1. Напомним, что протон  $p$  и нейтрон  $n$  состоят из трех взаимодействующих кварков

$$p = d \bullet u \bullet u , \quad n = d \bullet u \bullet d$$

и приведем процесс распада протона

$$\delta + p \rightarrow n + \pi^+ .$$

Этот распад включает в себя  $d$ -распад скалярной  $\delta$ -частицы (приведен в предыдущем Разделе, позиция

12) и синтез  $\pi^+$  (приведен в предыдущем Разделе, позиция 3):

$$\begin{aligned} \delta + p &\rightarrow d \bullet u \bullet (\delta) \bullet u \rightarrow d \bullet u \bullet (d \cdot \tilde{d}) \bullet u \rightarrow \\ &\rightarrow (d \bullet u \bullet d) \cdot (\tilde{d} \bullet u) \rightarrow n + \pi^+ . \end{aligned}$$

Указанный распад иллюстрируется следующей диаграммой взаимодействий:

$$p + \delta \left\{ \begin{array}{c} d \\ \text{---} \\ u \\ \text{---} \\ \delta \\ \text{---} \\ d \\ \text{---} \\ u \end{array} \right\} n$$

Из представленного взаимодействия следует, что попытка, затратив энергию (скалярную  $\delta$ -частицу), выбить кварк из бариона заканчивается тем, что этот кварк выбивается вместе с антикварком другого аромата (то есть, выбивается мезон), а на место кварка, на который совершено покушение, встает кварк другого аромата. В результате барион не разрушается, а меняет свой аромат (в рассмотренном случае протон превращается в нейтрон).

Обратное прочтение указанного взаимодействия представляет собой синтез протона

$$\begin{aligned} n + \pi^+ &\rightarrow (d \bullet u \bullet d) \cdot (\tilde{d} \bullet u) \rightarrow d \bullet u \bullet (d \cdot \tilde{d}) \bullet u \rightarrow \\ &\rightarrow d \bullet u \bullet (\delta) \bullet u \rightarrow \delta + p . \end{aligned}$$

2. Напомним, что  $K^0$ -мезон имеет следующий состав:

$$K^0 = d \bullet \bar{s} ,$$

а  $\Lambda^0$ -барион имеет следующий состав:

$$\Lambda^0 = s \bullet u \bullet d ,$$

и приведем процесс взаимодействия

$$\pi_- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0 ,$$

который включает в себя  $u$ -синтез скалярной  $\delta$ -частицы и  $s$ -распад скалярной  $\delta$ -частицы:

$$\begin{aligned} \pi_- + p &\rightarrow d \bullet \tilde{u} + u \bullet u \bullet d \rightarrow d \bullet (\tilde{u} \cdot u) \bullet u \bullet d \rightarrow \\ &\rightarrow d \bullet (\delta) \bullet u \bullet d \rightarrow d \bullet (\tilde{s} \cdot s) \bullet u \bullet d \rightarrow \\ &\rightarrow (d \bullet \tilde{s}) \cdot (s \bullet u \bullet d) \rightarrow K^0 + \Lambda^0 . \end{aligned}$$

Указанный процесс иллюстрируется следующей диаграммой взаимодействий:

$$\pi^- \left\{ \begin{array}{c} d \\ \text{---} \\ u \\ \text{---} \\ \tilde{u} \\ \text{---} \\ d \end{array} \right\} K^0$$

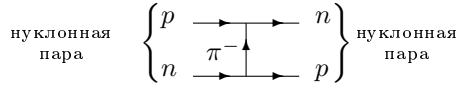
3. Остаточное сильное взаимодействие нуклонов в ядре атома. В качестве примера рассмотрим нуклонную пару, содержащую протон и нейтрон.

$$\text{нуклонная пара} = p \bullet n = (d \bullet u \bullet u) \bullet (d \bullet u \bullet d)$$

Остаточное сильное взаимодействие между протоном и нейтроном сопровождается обменом  $\pi$ -мезоном. Например,

$$\begin{aligned} p \bullet n &= (d \bullet u \bullet u) \bullet (d \bullet (\delta) \bullet u \bullet d) \rightarrow \\ p \bullet n &= (d \bullet u \bullet u) \bullet (d \bullet (\tilde{u}) \bullet u \bullet d) \rightarrow \\ &\rightarrow (d \bullet u \bullet u) \bullet (d \bullet \tilde{u}) \bullet (u \bullet u \bullet d) \rightarrow p \bullet \pi^- \bullet p \rightarrow \\ &\rightarrow (d \bullet u \bullet (u \bullet \tilde{u}) \bullet d \bullet (u \bullet u \bullet d) \rightarrow \\ &(d \bullet u \bullet (\delta) \bullet d \bullet (u \bullet u \bullet d) \rightarrow n \bullet p \end{aligned}$$

Этот процесс иллюстрируется следующей диаграммой взаимодействий:



Таким образом, в рассматриваемом случае остаточное сильное взаимодействие между протоном и нейтроном в ядре атома сопровождается распадом нейтрона на  $\pi^-$ -мезон и протон и синтезом нейтрона из протона и  $\pi^-$ -мезона. Можно представить себе другой пример остаточного сильного взаимодействия, между протоном и нейтроном в ядре атома, который сопровождается распадом протона на  $\pi^+$ -мезон и нейтрон и синтезом протона из нейтрона и  $\pi^+$ -мезона.

Кроме того, заметим, что в результате обмена нуклонами  $\pi$ -мезоном аромат нуклонов меняется.

## XI. ЦВЕТОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ КВАРКАМИ

Согласно общей концепции, развиваемой в этой Главе, элементарная частица определяется вектором действия, а взаимодействиям элементарных частиц ставятся в соответствие произведения векторов действия. Эта концепция упрощается, если от векторов пространства действия перейти к базисным векторам пространства действия и поставить в соответствие элементарным частицам базисные векторы, а взаимодействиям элементарных частиц поставить в соответствие произведения базисных векторов<sup>19</sup>.

Кроме того, отметим, что в этом Разделе для обозначения цветового взаимодействия кварков использован тот же символ, который был использован для обозначения остаточного сильного взаимодействия между кварками –  $\bullet$ -умножение.

### 1. Цветные кварки

Обратимся к базисным векторам  $\mathbf{e}_\alpha$ , которым поставим в соответствие цветные кварки. Пусть индекс

$\alpha$  принимает значения 1, 2, 3. И пусть значение 1 соответствует маркеру синего цвета, значение 2 соответствует маркеру красного цвета, значение 3 соответствует маркеру желтого цвета:

$$1 \sim \bullet, \quad 2 \sim \bullet, \quad 3 \sim \bullet.$$

Тогда базисный вектор  $\mathbf{e}_1$  соответствует кварку синего цвета, базисный вектор  $\mathbf{e}_2$  соответствует кварку красного цвета, базисный вектор  $\mathbf{e}_3$  соответствует кварку желтого цвета. Кварк обозначим буквой  $q$ . Таким образом, имеем

$$\mathbf{e}_1 \sim q_\bullet, \quad \mathbf{e}_2 \sim q_\bullet, \quad \mathbf{e}_3 \sim q_\bullet. \quad (134)$$

Аналогичные действия выполним для сопряженного базисного вектора  $\mathbf{E}^\alpha$ . Сопряженным базисным векторам ставятся в соответствие цветные антикварки. Антикварк обозначим следующим образом  $\tilde{q}$ . В результате имеем соответствие

$$\mathbf{E}^1 \sim \tilde{q}^\bullet, \quad \mathbf{E}^2 \sim \tilde{q}^\bullet, \quad \mathbf{E}^3 \sim \tilde{q}^\bullet. \quad (135)$$

Заметим, что цветовой маркер, расположенный внизу означает *цвет*, а цветовой маркер, расположенный сверху означает *антицвет*. Цвет кварка меняется в антикварке на антицвет.

### 2. Глюоны

К промежуточным частицам цветового взаимодействия кварков – глюонам – придем, рассматривая произведение базисных векторов (28):

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}_K^I + \delta_K^I.$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{I}_K^I$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta_K^I$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае указанное произведение предстает в следующих двух видах.

а)

$$\mathbf{E}^\alpha \bullet \mathbf{e}_\beta = \mathbf{I}_\beta^\alpha. \quad (136)$$

Здесь значения индекса  $\alpha$  отличны от значений индекса  $\beta$ . Учитывая соответствия (134) и (135) и обозначая глюон буквой  $g$ , имеем следующие соответствия произведений базисных векторов (136) и цветовых взаимодействий кварков:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_1 &= \mathbf{I}_1^2 \sim \tilde{q}^\bullet \bullet q_\bullet = g_\bullet^\bullet, \\ \mathbf{E}^3 \bullet \mathbf{e}_2 &= \mathbf{I}_2^3 \sim \tilde{q}^\bullet \bullet q_\bullet = g_\bullet^\bullet, \\ \mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_3 &= \mathbf{I}_3^1 \sim \tilde{q}^\bullet \bullet q_\bullet = g_\bullet^\bullet, \\ \mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_2 &= \mathbf{I}_2^1 \sim \tilde{q}^\bullet \bullet q_\bullet = g_\bullet^\bullet, \\ \mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_3 &= \mathbf{I}_3^2 \sim \tilde{q}^\bullet \bullet q_\bullet = g_\bullet^\bullet, \\ \mathbf{E}^3 \bullet \mathbf{e}_1 &= \mathbf{I}_1^3 \sim \tilde{q}^\bullet \bullet q_\bullet = g_\bullet^\bullet. \end{aligned}$$

<sup>19</sup> Напомним, что произведения базисных векторов сведены в таблицу умножения, например, в (25)–(32)

Отметим, что глюоны  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$ ,  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$  и  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$  являются античастицами по отношению к глюонам  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$ ,  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$  и  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$  соответственно и наоборот. Цвет и антицвет глюона меняются в антиглюоне на антицвет и цвет соответственно.

Для определенности будем обозначать глюоны  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$ ,  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$  и  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$  как частицы, а глюоны  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$ ,  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$  и  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$  как античастицы, для которых будем использовать следующие обозначения:

$$g_{\bullet\bullet}^{\bullet} \equiv \tilde{g}_{\bullet\bullet}^{\bullet}, \quad g_{\bullet\bullet}^{\bullet} \equiv \tilde{g}_{\bullet\bullet}^{\bullet}, \quad g_{\bullet\bullet}^{\bullet} \equiv \tilde{g}_{\bullet\bullet}^{\bullet}.$$

б)

$$\mathbf{E}^{\alpha} \circ \mathbf{e}_{\alpha_1} = \mathbf{I}_{\alpha_1}^{\alpha} + \delta_{\alpha_1}^{\alpha}. \quad (137)$$

Здесь значения индекса  $\alpha$  совпадают со значениями индекса  $\alpha_1$ . Это универсальное о-произведение состоит из  $\bullet$ -произведения

$$\mathbf{E}^{\alpha} \bullet \mathbf{e}_{\alpha_1} = \mathbf{I}_{\alpha_1}^{\alpha} \quad (138)$$

и скалярного произведения

$$\mathbf{E}^{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\alpha_1} = \delta_{\alpha_1}^{\alpha}. \quad (139)$$

Остановимся на каждом из этих произведений.

1. Сначала рассмотрим  $\bullet$ -произведение (138).

Учитывая соответствия (134) и (135), имеем следующие соответствия произведений базисных векторов (138) и цветовых взаимодействий кварков:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^1 &\sim \tilde{q}_{\bullet}^{\bullet} \bullet q_{\bullet} = g_{\bullet\bullet}^{\bullet}, \\ \mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^2 &\sim \tilde{q}_{\bullet}^{\bullet} \bullet q_{\bullet} = g_{\bullet\bullet}^{\bullet}, \\ \mathbf{E}^3 \bullet \mathbf{e}_3 = \mathbf{I}_3^3 &\sim \tilde{q}_{\bullet}^{\bullet} \bullet q_{\bullet} = g_{\bullet\bullet}^{\bullet}. \end{aligned} \quad (140)$$

Таким образом, к шести ранее приведенным глюонам необходимо добавить еще три —  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$ ,  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$  и  $g_{\bullet\bullet}^{\bullet}$ . Эти глюоны являются истинно нейтральными — их античастицы совпадают с ними самими.

Для того, чтобы базисные векторы  $\mathbf{I}_{\beta}^{\alpha}$  коррелировали с генераторами классической группы цветовой симметрии  $SU(3)$ , необходимо положить, что базисные векторы  $\mathbf{I}_1^1$ ,  $\mathbf{I}_2^2$  и  $\mathbf{I}_3^3$  не являются линейно независимыми, а подчиняются линейному уравнению<sup>20</sup>

$$\mathbf{I}_1^1 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^3 = 0.$$

Приведенное выше соответствие (140) позволяет отсюда записать соотношение

$$g_{\bullet\bullet}^{\bullet} + g_{\bullet\bullet}^{\bullet} + g_{\bullet\bullet}^{\bullet} = 0,$$

смысл которого остается неясным.

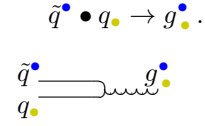
2. Теперь рассмотрим скалярное произведение (139)

Учитывая соответствия (134) и (135), имеем следующие соответствия произведений базисных векторов (139) и цветовых взаимодействий кварков:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = \delta_1^1 &\sim \tilde{q}_{\bullet}^{\bullet} \cdot q_{\bullet} = \delta_1, \\ \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = \delta_2^2 &\sim \tilde{q}_{\bullet}^{\bullet} \cdot q_{\bullet} = \delta_2, \\ \mathbf{E}^3 \cdot \mathbf{e}_3 = \delta_3^3 &\sim \tilde{q}_{\bullet}^{\bullet} \cdot q_{\bullet} = \delta_3. \end{aligned} \quad (141)$$

### 2.1. Пример диаграммы синтеза глюона

Приведем диаграмму синтеза глюона для случая

$$\tilde{q}_{\bullet}^{\bullet} \bullet q_{\bullet} \rightarrow g_{\bullet\bullet}^{\bullet}.$$


## 3. Цветовое взаимодействие кварков и глюонов

К цветовому взаимодействию кварков и глюонов придем, рассматривая произведение базисных векторов (25):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K = \delta_I^K \cdot \mathbf{e}_L.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{e}_{\alpha} \bullet \mathbf{I}_{\beta}^{\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma} \cdot \mathbf{e}_{\beta}. \quad (142)$$

Отсюда для взаимодействия синих кварков имеем

$$\begin{aligned} q_{\bullet} \bullet g_{\bullet\bullet}^{\bullet} = \delta_1 \cdot q_{\bullet} &\sim \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_1, \\ q_{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet\bullet}^{\bullet} = \delta_1 \cdot q_{\bullet} &\sim \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_2, \\ q_{\bullet} \bullet g_{\bullet\bullet}^{\bullet} = \delta_1 \cdot q_{\bullet} &\sim \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_3^3 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Для взаимодействия красных кварков имеем

$$\begin{aligned} q_{\bullet} \bullet g_{\bullet\bullet}^{\bullet} = \delta_2 \cdot q_{\bullet} &\sim \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_1, \\ q_{\bullet} \bullet g_{\bullet\bullet}^{\bullet} = \delta_2 \cdot q_{\bullet} &\sim \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_2, \\ q_{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet\bullet}^{\bullet} = \delta_2 \cdot q_{\bullet} &\sim \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_3^3 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Для взаимодействия желтых кварков имеем

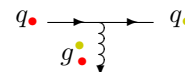
$$\begin{aligned} q_{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet\bullet}^{\bullet} = \delta_3 \cdot q_{\bullet} &\sim \mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{e}_1, \\ q_{\bullet} \bullet g_{\bullet\bullet}^{\bullet} = \delta_3 \cdot q_{\bullet} &\sim \mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{e}_2, \\ q_{\bullet} \bullet g_{\bullet\bullet}^{\bullet} = \delta_3 \cdot q_{\bullet} &\sim \mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{I}_3^3 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Заметим, что записанные здесь взаимодействия представляют собой своего рода синтеза цветных кварков. Прочтение этих взаимодействий справа налево дает своего рода распады цветных кварков.

### 3.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия кварка и глюона

Приведем диаграмму цветового взаимодействия кварка и глюона для случая распада кварка

$$\delta_2 \cdot q_{\bullet} \rightarrow q_{\bullet} \bullet g_{\bullet\bullet}^{\bullet}.$$



<sup>20</sup> То есть, линейно независимыми являются два вектора из трех.

Заметим, что испускание кварком глюона меняет цвет кварка. Также как испускание кварком мезона меняет аромат кварка, а испускание кварком промежуточного бозона меняет уровень кварка (верхний кварк на нижний или наоборот).

#### 4. Цветовое взаимодействие антикварков и глюонов

К цветовому взаимодействию антикварков и глюонов придем, рассматривая произведение базисных векторов (31):

$$\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^K \cdot \delta_L^I.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{I}_\beta^\alpha \bullet \mathbf{E}^\gamma = \mathbf{E}^\alpha \cdot \delta_\beta^\gamma. \quad (143)$$

Отсюда для взаимодействия синих антикварков имеем

$$\begin{aligned} \tilde{q}_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_\bullet^\bullet &= \tilde{q}_\bullet^\bullet \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_1^1 \circ \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_1^1, \\ g_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_\bullet^\bullet &= \tilde{q}_\bullet^\bullet \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_1^2 \circ \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_1^1, \\ \tilde{g}_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_\bullet^\bullet &= \tilde{q}_\bullet^\bullet \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_1^3 \circ \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^3 \cdot \delta_1^1. \end{aligned}$$

Для взаимодействия красных антикварков имеем

$$\begin{aligned} \tilde{g}_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_\bullet^\bullet &= \tilde{q}_\bullet^\bullet \cdot \delta_2 \sim \mathbf{I}_2^1 \circ \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_2^2, \\ g_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_\bullet^\bullet &= \tilde{q}_\bullet^\bullet \cdot \delta_2 \sim \mathbf{I}_2^2 \circ \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_2^2, \\ \tilde{g}_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_\bullet^\bullet &= \tilde{q}_\bullet^\bullet \cdot \delta_2 \sim \mathbf{I}_2^3 \circ \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^3 \cdot \delta_2^2. \end{aligned}$$

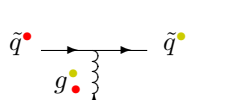
Для взаимодействия желтых антикварков имеем

$$\begin{aligned} g_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_\bullet^\bullet &= \tilde{q}_\bullet^\bullet \cdot \delta_3 \sim \mathbf{I}_3^1 \circ \mathbf{E}^3 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_3^3, \\ \tilde{g}_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_\bullet^\bullet &= \tilde{q}_\bullet^\bullet \cdot \delta_3 \sim \mathbf{I}_3^2 \circ \mathbf{E}^3 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_3^3, \\ g_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_\bullet^\bullet &= \tilde{q}_\bullet^\bullet \cdot \delta_3 \sim \mathbf{I}_3^3 \circ \mathbf{E}^3 = \mathbf{E}^3 \cdot \delta_3^3. \end{aligned}$$

Заметим, что записанные здесь взаимодействия представляют собой своего рода синтеза цветных антикварков. Прочтение этих взаимодействий справа налево дает своего рода распады цветных антикварков.

##### 4.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия антикварка и глюона

Приведем диаграмму цветового взаимодействия антикварка и глюона для случая синтеза антикварка:

$$g_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_\bullet^\bullet \rightarrow \tilde{q}_\bullet^\bullet \cdot \delta_1.$$


## 5. Мезоны

Мезон состоит из кварка и антикварка в общем случае разных ароматов, но с одинаковыми цветом и антицветом. В результате о цвете мезона говорят, что он белый или бесцветный. Таким образом, цветовое взаимодействие кварка и антикварка скрыто внутри мезона. Обозначив мезон буквой  $M$  и выбрав для определенности цвет кварка синим, запишем состав мезона

$$M = q_\bullet \bullet \tilde{q}_1^\bullet.$$

Кварк и антикварк удерживаются друг около друга силой цветового притяжения благодаря обмену глюоном. Здесь возможны два случая.

1. Глюон поставляется кварком при его распаде.

Процесс взаимодействия в этом случае выглядит следующим образом:

$$M = q_\bullet \bullet \tilde{q}_1^\bullet \rightarrow (q_\bullet \bullet \tilde{g}_\bullet^\bullet) \bullet \tilde{q}_1^\bullet \rightarrow q_\bullet \bullet (\tilde{g}_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_1^\bullet) \rightarrow q_\bullet \bullet \tilde{q}_1^\bullet.$$

2. Глюон поставляется антикварком при его распаде.

Процесс взаимодействия в этом случае выглядит следующим образом:

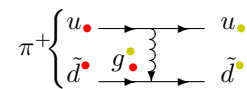
$$M = q_\bullet \bullet \tilde{q}_1^\bullet \rightarrow q_\bullet \bullet (g_\bullet^\bullet \bullet \tilde{q}_1^\bullet) \rightarrow (q_\bullet \bullet g_\bullet^\bullet) \bullet \tilde{q}_1^\bullet \rightarrow q_\bullet \bullet \tilde{q}_1^\bullet.$$

Заметим, что в процессе обмена глюоном цвета кварка и антикварка мезона перестают быть одинаковыми. Однако цвета трех частиц – кварка, глюона и антикварка, из которых в этот момент состоит мезон, компенсируют друг друга и мезон остается белым или бесцветным. Кроме того, заметим, что в результате обмена глюоном цвет кварка и антикварка в мезоне может меняться и принимать любое из трех значений.

##### 5.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия кварка и антикварка в мезоне

Приведем диаграмму цветового взаимодействия кварка и антикварка в мезоне для случая  $\pi^+$ -мезона. Процесс обмена глюоном в  $\pi^+$ -мезоне записывается следующим образом:

$$\pi^+ = u_\bullet \bullet \tilde{d}_1^\bullet \rightarrow (u_\bullet \bullet g_\bullet^\bullet) \bullet \tilde{d}_1^\bullet \rightarrow u_\bullet \bullet (g_\bullet^\bullet \bullet \tilde{d}_1^\bullet) \rightarrow u_\bullet \bullet \tilde{d}_1^\bullet.$$



Таким образом, рассматриваемый здесь процесс обмена глюоном включает в себя распад  $u_\bullet$ -кварка и синтез  $\tilde{d}_1^\bullet$ -антикварка.

## 6. Барионы

Барион состоит из трех кварков разных цветов и в общем случае разных ароматов. В результате о цвете



бариона говорят, что он белый или бесцветный. Таким образом, цветовое взаимодействие кварков скрыто внутри бариона. Обозначив барион буквой  $B$ , запишем состав бариона

$$B = q_{\bullet}^1 \bullet q_{\bullet}^2 \bullet q_{\bullet}^3 \bullet .$$

Здесь цифры подчеркивают, что аромат кварков в барионе в общем случае различен, а последний  $\bullet$ -символ взаимодействия означает, что последний кварк  $q_{\bullet}^3$  взаимодействует с первым  $q_{\bullet}^1$  кварком.

Кварки в барионе удерживаются друг около друга силой цветового притяжения благодаря обмену глюонами. Процесс взаимодействия кварков в барионе, например, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} B &= q_{\bullet}^1 \bullet q_{\bullet}^2 \bullet q_{\bullet}^3 \bullet \rightarrow q_{\bullet}^1 \bullet q_{\bullet}^2 \bullet (\tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet q_{\bullet}^3) \bullet \rightarrow \\ &\rightarrow q_{\bullet}^1 \bullet (q_{\bullet}^2 \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet}) \bullet q_{\bullet}^3 \rightarrow q_{\bullet}^1 \bullet q_{\bullet}^2 \bullet q_{\bullet}^3 \bullet \rightarrow \\ &\rightarrow (q_{\bullet}^1 \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet}) \bullet q_{\bullet}^2 \bullet q_{\bullet}^3 \bullet \rightarrow q_{\bullet}^1 \bullet (\tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet q_{\bullet}^2) \bullet q_{\bullet}^3 \bullet \rightarrow \\ &\rightarrow q_{\bullet}^1 \bullet q_{\bullet}^2 \bullet q_{\bullet}^3 \bullet . \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемый здесь процесс обмена кварков бариона глюонами включает в себя распад  $q_{\bullet}^3$ -кварка, синтез  $q_{\bullet}^2$ -кварка, распад  $q_{\bullet}^1$ -кварка, синтез  $q_{\bullet}^2$ -кварка.

В процессе обмена глюонами цвета кварков перестают быть разными. Однако суммарный цвет четырех частиц – трех кварков и глюона, из которых в этот момент состоит барион, остается белым и барион остается белым или бесцветным. Кроме того, заметим, что в результате обмена глюонами цвета кварка каждого аромата могут меняться и принимать любое из трех значений.

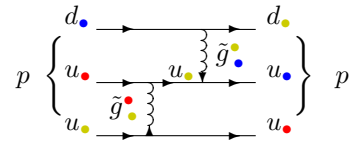
В рассмотренном случае обмена обменный глюон колеблется вдоль кваркового пути между третьим кварком и первым. Можно представить себе более касивый случай обмена, когда обменный глюон движется по замкнутому кварковому пути по или против часовой стрелки, а вместе с ним относительно кварков движется цветовой ряд.

6.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия кварков в барионе

Приведем диаграмму цветового взаимодействия кварков для протона  $p$ . Процесс обмена глюонами в протоне записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} p &= d_{\bullet} \bullet u_{\bullet} \bullet u_{\bullet} \bullet \rightarrow d_{\bullet} \bullet u_{\bullet} \bullet (\tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet u_{\bullet}) \bullet \rightarrow \\ &\rightarrow d_{\bullet} \bullet (u_{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet}) \bullet u_{\bullet} \bullet \rightarrow d_{\bullet} \bullet u_{\bullet} \bullet u_{\bullet} \bullet \rightarrow \\ &\rightarrow (d_{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet}) \bullet u_{\bullet} \bullet u_{\bullet} \bullet \rightarrow d_{\bullet} \bullet (\tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet u_{\bullet}) \bullet u_{\bullet} \bullet \rightarrow \\ &\rightarrow d_{\bullet} \bullet u_{\bullet} \bullet u_{\bullet} \bullet . \end{aligned}$$

Диаграмма, иллюстрирующая взаимодействия кварков в протоне:



7. Мультикварк

Объекту, состоящему из взаимодействующих между собой трех кварков, – бариону – дадим другое название – 3-кварк, имея в виду, что можно представить себе объект, состоящий из взаимодействующих между собой нескольких (многих) троек кварков. Назовем такой объект – мультикварк. В этой терминологии ядро атома – это мультикварк.

7.1. Линейный мультикварк

Назовем мультикварк *линейным*, если его кварки находятся на замкнутой линии. 3-кварк является линейным. Его кварки располагаются на периметре равностороннего треугольника, в его углах (рис.1).



Рис. 1. 3-кварк

7.2. Поверхностный мультикварк

Назовем мультикварк *поверхностным*, если его кварки находятся на замкнутой поверхности. Можно представить, что 6-кварк является поверхностным, причем его кварки располагаются на поверхности треугольной призмы в ее углах (рис.2).

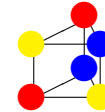


Рис. 2. 6-кварк

Отсюда следует состав 6-кварка:

$$\begin{matrix} q_{\bullet}^1 \bullet & q_{\bullet}^2 \bullet & q_{\bullet}^3 \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ q_{\bullet}^4 \bullet & q_{\bullet}^5 \bullet & q_{\bullet}^6 \bullet \end{matrix}$$

В частности приведенный 6-кварк представляет собой синтез двух нуклонов.

### 8. Цветовые взаимодействия между глюонами

К цветовым взаимодействиям между глюонами придём, рассматривая произведение базисных векторов (29):

$$\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{I}_N^M = \delta^M_L \cdot \mathbf{I}_N^K + \delta^M_N \cdot \delta^K_L.$$

В нашем случае оно предстаёт в следующем виде:

$$\mathbf{I}_{\beta}^{\alpha} \circ \mathbf{I}_{\delta}^{\gamma} = \delta^{\gamma}_{\beta} \cdot \mathbf{I}_{\delta}^{\alpha} + \delta^{\gamma}_{\delta} \cdot \delta^{\alpha}_{\beta}. \quad (144)$$

Это произведение включает в себя  $\bullet$ -произведение

$$\mathbf{I}_{\beta}^{\alpha} \bullet \mathbf{I}_{\delta}^{\gamma} = \delta^{\gamma}_{\beta} \cdot \mathbf{I}_{\delta}^{\alpha} \quad (145)$$

и скалярное произведение базисных векторов

$$\mathbf{I}_{\beta}^{\alpha} \cdot \mathbf{I}_{\delta}^{\gamma} = \delta^{\gamma}_{\beta} \cdot \delta^{\alpha}_{\delta}. \quad (146)$$

Отсюда для взаимодействий сине-синего глюона  $g_{\bullet}^{\bullet}$  имеем

$$\begin{aligned} g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^1, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \cdot g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \delta_1^1, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^2, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{I}_3^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_3^1. \end{aligned}$$

Для взаимодействий сине-красного глюона  $g_{\bullet}^{\bullet}$  имеем

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^1, \\ \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \cdot g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_2^1 \cdot \mathbf{I}_1^1 = \delta_2^2 \cdot \delta_1^1, \\ \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2, \\ \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_3^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_3^2. \end{aligned}$$

Для взаимодействий сине-желтого глюона  $g_{\bullet}^{\bullet}$  имеем

$$\begin{aligned} g_{\bullet}^{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_3^1 \bullet \mathbf{I}_1^3 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{I}_1^1, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_3^1 \cdot \mathbf{I}_1^1 = \delta_3^3 \cdot \delta_1^1, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_3^1 \bullet \mathbf{I}_2^3 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{I}_2^2, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_3^1 \bullet \mathbf{I}_3^3 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{I}_3^3. \end{aligned}$$

Для взаимодействий красно-синего глюона  $g_{\bullet}^{\bullet}$  имеем

$$\begin{aligned} g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^2, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^2, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot \delta_2 \sim \mathbf{I}_1^2 \cdot \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \delta_2^2, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_3^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_3^2. \end{aligned}$$

Для взаимодействий красно-красного глюона  $g_{\bullet}^{\bullet}$  имеем

$$\begin{aligned} g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^2, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \cdot g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot \delta_2 \sim \mathbf{I}_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \delta_2^2, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_3^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_3^2. \end{aligned}$$

Для взаимодействий красно-желтого глюона  $g_{\bullet}^{\bullet}$  имеем

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_3^3 \bullet \mathbf{I}_1^3 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{I}_1^2, \\ \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_3^3 \bullet \mathbf{I}_2^3 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{I}_2^2, \\ \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \cdot g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_3^3 \cdot \mathbf{I}_2^3 = \delta_3^3 \cdot \delta_2^2, \\ \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_3^3 \bullet \mathbf{I}_3^3 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{I}_3^2. \end{aligned}$$

Для взаимодействий желто-синего глюона  $g_{\bullet}^{\bullet}$  имеем

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_1^3 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_3^1, \\ \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_1^3 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^2, \\ \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_1^3 \bullet \mathbf{I}_3^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_3^2, \\ \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \cdot g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_1 \cdot \delta_3 \sim \mathbf{I}_1^3 \cdot \mathbf{I}_3^1 = \delta_1^1 \cdot \delta_3^3. \end{aligned}$$

Для взаимодействий желто-красного глюона  $g_{\bullet}^{\bullet}$  имеем

$$\begin{aligned} g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_2^3 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_3^1, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_2^3 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_2^3 \bullet \mathbf{I}_3^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_3^3, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_2 \cdot \delta_3 \sim \mathbf{I}_2^3 \cdot \mathbf{I}_3^2 = \delta_2^2 \cdot \delta_3^3. \end{aligned}$$

Для взаимодействий желто-желтого глюона  $g_{\bullet}^{\bullet}$  имеем

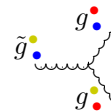
$$\begin{aligned} g_{\bullet}^{\bullet} \bullet \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_3^3 \bullet \mathbf{I}_1^3 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{I}_3^1, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_3^3 \bullet \mathbf{I}_2^3 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{I}_3^2, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot g_{\bullet}^{\bullet} \sim \mathbf{I}_3^3 \bullet \mathbf{I}_3^3 = \delta_3^3 \cdot \mathbf{I}_3^3, \\ g_{\bullet}^{\bullet} \cdot g_{\bullet}^{\bullet} &= \delta_3 \cdot \delta_3 \sim \mathbf{I}_3^3 \cdot \mathbf{I}_3^3 = \delta_3^3 \cdot \delta_3^3. \end{aligned}$$

Заметим, что записанные здесь взаимодействия представляют собой своего рода синтезы глюонов и скалярных частиц. Прочтение этих взаимодействий справа налево даёт своего рода распады глюонов.

#### 8.1. Простейшие диаграммы цветового взаимодействия между глюонами

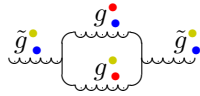
Простейшие диаграммы цветового взаимодействия между глюонами имеют вид, показанный на примере распада

$$\delta_2 \cdot \tilde{g}_{\bullet}^{\bullet} = g_{\bullet}^{\bullet} \bullet g_{\bullet}^{\bullet}.$$



8.2. Двойные диаграммы цветового взаимодействия между глюонами

1). Пример диаграммы распад-синтез



2). Пример диаграммы синтез-распад

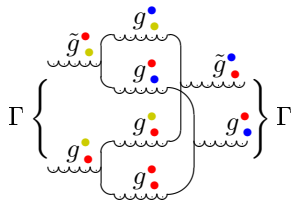


9. Глюболы

Глюболы – это бесцветные частицы, состоящие из глюонов. Их можно назвать глюонными мезонами. Обозначим глюбол буквой  $\Gamma$  и приведем пример глюбола

$$\Gamma = g \cdot \tilde{g}$$

Глюоны, входящие в глюболы, притягиваются друг к другу благодаря обмену глюонами. Приведем пример такого обмена:



XII. ЦВЕТОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЕПТОНОВ

Двухцветные лептоны – белые и черные – были введены в Разделе III Главы 3.4, а цветовое взаимодействие электронов рассматривалось в Главе 4.6. Цветовое взаимодействие электронов объясняет, в частности, существование двухатомных молекул водорода, азота и других.

Здесь мы также придерживаемся концепции, согласно которой элементарным частицам ставятся в соответствие базисные векторы пространства действия, а взаимодействиям элементарных частиц ставятся в

соответствие произведения базисных векторов<sup>21</sup>.

В этом Разделе для обозначения цветового взаимодействия лептонов используем свой символ универсального умножения –  $\bullet$ -умножение.

1. Цветные лептоны

Обратимся к базисным векторам  $e_\alpha$ , которым поставим в соответствие цветные лептоны – белые и черные. Пусть индекс  $\alpha$  принимает значения 1, 2. И пусть значение 1 соответствует маркеру белого цвета, значение 2 соответствует маркеру черного цвета:

$$1 \sim \circ, \quad 2 \sim \bullet.$$

Тогда базисный вектор  $e_1$  соответствует лептону белого цвета, базисный вектор  $e_2$  соответствует лептону черного цвета. Лептон обозначим буквой  $l$ . Таким образом, имеем

$$e_1 \sim l_\circ, \quad e_2 \sim l_\bullet. \quad (147)$$

Аналогичные действия выполним для сопряженного базисного вектора  $E^\alpha$ . Сопряженным базисным векторам ставятся в соответствие цветные антилептоны. Антилептон обозначим следующим образом  $\tilde{l}$ . В результате имеем соответствие

$$E^1 \sim \tilde{l}^\circ, \quad E^2 \sim \tilde{l}^\bullet. \quad (148)$$

Заметим, что цветовой маркер, расположенный внизу означает *цвет*, а цветовой маркер, расположенный сверху означает *антицвет*. Цвет лептона меняется в антилептоне на антицвет.

2. Промежуточные частицы цветового взаимодействия лептонов

Промежуточные частицы цветового взаимодействия лептонов назовем *клеи* (в единственном числе – *клей*). К промежуточным частицам цветового взаимодействия лептонов – клеям – придем, рассматривая произведения базисных векторов (28):

$$E^I \circ e_K = I^I_K + \delta^I_K.$$

Напомним, что базисный вектор  $I^I_K$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta^I_K$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице.

В нашем случае указанное произведение предстает в следующих двух видах.

а)

$$E^\alpha \bullet e_\beta = I^\alpha_\beta. \quad (149)$$

<sup>21</sup> Напомним, что произведения базисных векторов сведены в таблицу умножения, например, в (25)–(32)

Здесь значения индекса  $\alpha$  отличны от значений индекса  $\beta$ . Учитывая соответствия (147) и (148) и обозначая клей буквой  $k$ , имеем следующие соответствия произведений базисных векторов (149) и цветовых взаимодействий лептонов:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_1 &= \mathbf{I}_1^2 \sim \tilde{l}^\bullet \bullet l_\circ = k_\circ^\bullet, \\ \mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_2 &= \mathbf{I}_2^1 \sim \tilde{l}^\circ \bullet l_\bullet = k_\bullet^\circ. \end{aligned}$$

Отметим, что клеи  $k_\circ^\bullet$  и  $k_\bullet^\circ$  являются античастицами по отношению друг к другу. Цвет и антицвет клея меняются в антиклею на антицвет и цвет соответственно.

Для определенности будем обозначать клей  $k_\circ^\bullet$  как частицу, а клей  $k_\bullet^\circ$  как античастицу, для которой будем использовать следующее обозначение:

$$k_\bullet^\circ \equiv \tilde{k}_\bullet^\circ.$$

б)

$$\mathbf{E}^\alpha \circ \mathbf{e}_{\alpha_1} = \mathbf{I}^\alpha_{\alpha_1} + \delta^\alpha_{\alpha_1}. \quad (150)$$

Здесь значения индекса  $\alpha$  совпадают со значениями индекса  $\alpha_1$ . Это  $\circ$ -произведение включает в себя  $\bullet$ -произведение базисных векторов

$$\mathbf{E}^\alpha \bullet \mathbf{e}_{\alpha_1} = \mathbf{I}^\alpha_{\alpha_1} \quad (151)$$

и скалярное произведение базисных векторов

$$\mathbf{E}^\alpha \cdot \mathbf{e}_{\alpha_1} = \delta^\alpha_{\alpha_1}. \quad (152)$$

Учитывая соответствия (147) и (148), имеем следующие соответствия произведений базисных векторов (150) и цветовых взаимодействий лептонов:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^1 \bullet \mathbf{e}_1 &= \mathbf{I}_1^1 \sim \tilde{l}^\circ \bullet l_\circ = k_\circ^\circ, \\ \mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{e}_1 &= \delta_1^1 \sim \tilde{l}^\circ \cdot l_\circ = \delta_1, \\ \mathbf{E}^2 \bullet \mathbf{e}_2 &= \mathbf{I}_2^2 \sim \tilde{l}^\bullet \bullet l_\bullet = k_\bullet^\bullet, \\ \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{e}_2 &= \delta_2^2 \sim \tilde{l}^\bullet \cdot l_\bullet = \delta_2, \end{aligned} \quad (153)$$

Таким образом, к двум ранее приведенным клеям необходимо добавить еще два —  $k_\circ^\circ$  и  $k_\bullet^\bullet$ . Эти клеи являются истинно нейтральными — их античастицы совпадают с ними самими.

Нейтральные  $\delta$ -частицы должны быть сопоставлены скалярным взаимодействиям лептонов

$$\delta_1 = \tilde{l}^\circ \cdot l_\circ, \quad \delta_2 = \tilde{l}^\bullet \cdot l_\bullet.$$

### 2.1. Пример диаграммы синтеза клея

Приведем диаграмму синтеза клея для случая

$$\tilde{l}^\bullet \bullet l_\circ \rightarrow k_\circ^\bullet.$$

### 3. Цветовое взаимодействие лептонов и клеев

К цветовому взаимодействию лептонов и клеев придем, рассматривая произведение базисных векторов (25):

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K = \delta_I^K \cdot \mathbf{e}_L.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{I}_\beta^\gamma = \delta_\alpha^\gamma \cdot \mathbf{e}_\beta. \quad (154)$$

Отсюда для взаимодействия белых лептонов имеем

$$\begin{aligned} l_\circ \bullet k_\circ^\circ &= \delta_1 \cdot l_\circ \sim \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_1, \\ l_\circ \bullet \tilde{k}_\bullet^\circ &= \delta_1 \cdot l_\bullet \sim \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Для взаимодействия черных лептонов имеем

$$\begin{aligned} l_\bullet \bullet k_\circ^\circ &= \delta_2 \cdot l_\circ \sim \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_1, \\ l_\bullet \bullet k_\bullet^\bullet &= \delta_2 \cdot l_\bullet \sim \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Заметим, что записанные здесь взаимодействия представляют собой своего рода синтеза цветных лептонов. Прочтение этих взаимодействий справа налево дает своего рода распады цветных лептонов.

#### 3.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия лептона и клея

Приведем диаграмму цветового взаимодействия лептона и клея для случая распада лептона

$$\delta_1 \cdot l_\bullet \rightarrow l_\circ \bullet \tilde{k}_\bullet^\circ.$$

Заметим, что испускание лептоном клея меняет цвет лептона.

### 4. Цветовое взаимодействие антилептонов и клеев

К цветовому взаимодействию антилептонов и клеев придем, рассматривая произведение базисных векторов (31):

$$\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^K \cdot \delta_L^I.$$

В нашем случае оно предстает в следующем виде:

$$\mathbf{I}_\beta^\alpha \bullet \mathbf{E}^\gamma = \mathbf{E}^\alpha \cdot \delta_\beta^\gamma. \quad (155)$$

Отсюда для взаимодействия белых антилептонов имеем

$$\begin{aligned} k_\circ^\circ \bullet \tilde{l}^\circ &= \tilde{l}^\circ \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_1^1 \circ \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_1^1, \\ k_\bullet^\bullet \bullet \tilde{l}^\circ &= \tilde{l}^\bullet \cdot \delta_1 \sim \mathbf{I}_1^2 \circ \mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_1^1. \end{aligned}$$

Для взаимодействия черных антилептонов имеем

$$\begin{aligned} \tilde{k}_\bullet^\circ \bullet \tilde{l}^\bullet &= \tilde{l}^\circ \cdot \delta_2 \sim \mathbf{I}_2^1 \circ \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^1 \cdot \delta_2^2, \\ k_\bullet^\circ \bullet \tilde{l}^\bullet &= \tilde{l}^\circ \cdot \delta_2 \sim \mathbf{I}_2^2 \circ \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^2 \cdot \delta_2^2. \end{aligned}$$

Заметим, что записанные здесь взаимодействия представляют собой своего рода синтеза цветных антилептонов. Прочтение этих взаимодействий справа налево дает своего рода распады цветных антилептонов.

#### 4.1. Пример диаграммы цветового взаимодействия антилептона и клея

Приведем диаграмму цветового взаимодействия антилептона и клея для случая синтеза антилептона:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_\bullet^\circ \bullet \tilde{l}^\bullet &\rightarrow \tilde{l}^\circ \cdot \delta_2. \\ \tilde{l}^\bullet &\xrightarrow{\tilde{k}_\bullet^\circ} \tilde{l}^\circ \end{aligned}$$

### 5. Лептонно-антилептонные цветовые соединения

Рассмотрим частицы, которые состоят из лептона и антилептона в общем случае разных ароматов, но с одинаковыми цветом и антицветом. Назовем такую частицу *лептонным мезоном*. В результате о цвете таких частиц можно сказать, что он бесцветный. Таким образом, цветовое взаимодействие лептона и антилептона скрыто внутри лептонного мезона. Обозначив лептонный мезон буквами  $LM$  и выбрав для определенности цвет лептона белым, запишем состав лептонного мезона

$$LM = l_\circ \bullet \tilde{l}_1^\circ.$$

Лептон и антилептон удерживаются друг около друга силой цветового притяжения благодаря обмену клеем. Здесь возможны два случая.

1. Клей поставляется лептоном при его распаде.

Процесс взаимодействия в этом случае выглядит следующим образом:

$$LM = l_\circ \bullet \tilde{l}_1^\circ \rightarrow (l_\bullet \bullet k_\circ^\bullet) \bullet \tilde{l}_1^\circ \rightarrow l_\bullet \bullet (k_\circ^\bullet \bullet \tilde{l}_1^\circ) \rightarrow l_\bullet \bullet \tilde{l}_1^\bullet.$$

Приведем диаграмму цветового взаимодействия лептона и антилептона в лептонном мезоне для этого случая

$$LM \left\{ \begin{array}{l} l_\circ \xrightarrow{\quad} l_\bullet \\ \tilde{l}_1^\circ \xrightarrow{\quad} \tilde{l}_1^\bullet \\ \tilde{k}_\circ^\bullet \end{array} \right.$$

2. Клей поставляется антилептоном при его распаде.

Процесс взаимодействия в этом случае выглядит следующим образом:

$$LM = l_\circ \bullet \tilde{l}_1^\circ \rightarrow l_\circ \bullet (\tilde{k}_\bullet^\circ \bullet \tilde{l}_1^\bullet) \rightarrow (l_\circ \bullet \tilde{k}_\bullet^\circ) \bullet \tilde{l}_1^\bullet \rightarrow l_\bullet \bullet \tilde{l}_1^\bullet.$$

Приведем диаграмму цветового взаимодействия лептона и антилептона в лептонном мезоне для этого случая

$$LM \left\{ \begin{array}{l} l_\circ \xrightarrow{\quad} l_\bullet \\ \tilde{l}_1^\circ \xrightarrow{\quad} \tilde{l}_1^\bullet \\ \tilde{k}_\bullet^\circ \end{array} \right.$$

Заметим, что в процессе обмена клеем цвета лептона и антилептона лептонного мезона перестают быть одинаковыми. Однако цвета двух частиц – лептона, клея и антилептона, из которых в этот момент состоит лептонный мезон, компенсируют друг друга и лептонный мезон остается бесцветным. Кроме того, заметим, что в результате обмена клеем цвет лептона и антилептона в лептонном мезоне может меняться и принимать любое из двух значений.

### 6. Лептонные пары

Лептонная пара состоит из двух лептонов разных цветов – белого и черного – и в общем случае разных ароматов. В результате о цвете лептонной пары будем говорить, что он бесцветный. Цветовое взаимодействие лептонов скрыто внутри лептонной пары. Обозначив лептонную пару буквами  $LP$ , запишем состав лептонной пары

$$LP = l_\circ^1 \bullet l_\bullet^2.$$

Здесь цифры подчеркивают, что аромат лептонов в лептонной паре в общем случае различен.

Лептоны в лептонной паре удерживаются друг около друга силой цветового притяжения благодаря обмену клеем. Процесс взаимодействия лептонов в лептонной паре, например, выглядит следующим образом:

$$LP = l_\circ^1 \bullet l_\bullet^2 \rightarrow l_\circ^1 \bullet (\tilde{k}_\bullet^\circ \bullet l_\bullet^2) \rightarrow (l_\circ^1 \bullet \tilde{k}_\bullet^\circ) \bullet l_\bullet^2 \rightarrow l_\bullet^1 \bullet l_\circ^2.$$

Таким образом, рассматриваемый здесь процесс обмена лептонов в лептонной паре клеем включает в себя распад  $l_\bullet^2$ -лептона и синтез  $l_\bullet^1$ -лептона.

В процессе обмена клеем цвета лептонов перестают быть разными. Однако суммарный цвет трех частиц – двух лептонов и клея, из которых в этот момент состоит лептонная пара, остается бесцветным. Кроме того, заметим, что в результате обмена клеем цвета лептонов каждого аромата могут меняться и принимать любое из двух значений.

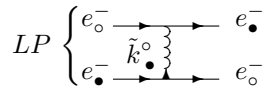
6.1. Электронная пара

Электронную пару обозначим  $EP$  и запишем состав электронной пары

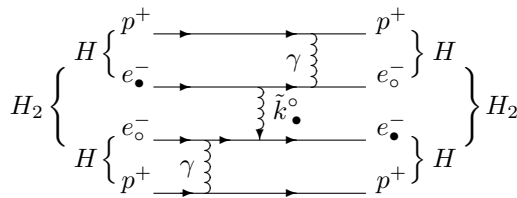
$$EP = e_{\circ}^{-} \bullet e_{\bullet}^{-} .$$

Электроны в электронной паре удерживаются друг около друга силой цветового притяжения благодаря обмену клеем. Когда электроны находятся на определенном расстоянии друг от друга, сила цветового притяжения превосходит электрическую силу отталкивания между электронами.

Диаграмма цветового взаимодействия электронов в электронной паре, например, выглядит следующим образом <sup>22</sup>:



Электронная пара участвует во многих физических явлениях <sup>23</sup>. В частности благодаря возникновению электронной пары существует двухатомная молекула водорода. Приведем диаграмму взаимодействий для этой молекулы.



Ключевой частью этой диаграммы является цветное взаимодействие электронов, благодаря которому атомы водорода притягиваются друг к другу.

7. Мультиэлектрон

Помимо цветового соединения двух разноцветных лептонов можно представить себе соединение четного количества разноцветных лептонов. Назовем такой объект – *мультилептоном*. Здесь мы рассмотрим частный случай мультилептона – мультиэлектрон – объект, который состоит из нескольких (многих) пар разноцветных электронов.

7.1. Линейный мультиэлектрон

1). 4-электрон.

Простейший мультиэлектрон состоит из двух пар разноцветных электронов. Если электронную пару назвать 2-электрон, то указанный мультиэлектрон нужно назвать 4-электрон. Состав 4-электрона записывается следующим образом:

$$4\text{-электрон} = e_{\circ}^{-} \bullet e_{\bullet}^{-} \bullet e_{\circ}^{-} \bullet e_{\bullet}^{-} \bullet .$$

Здесь последний  $\bullet$ -символ взаимодействия означает, что последний черный электрон взаимодействует с первым белым электроном, то есть взаимодействующие электроны образуют замкнутую линию.

В общем случае назовем мультиэлектрон *линейным*, если его электроны находятся на замкнутой линии.

Если 2-электрон символически изобразить так, как показано на рис.1, где электроны (белый и черный) находятся на концах отрезка, то 4-электрон содержит электроны на периметре квадрата в его вершинах (рис.2.).



Рис. 1. 2-электрон



Рис. 2. 4-электрон

Конфигурация 4-электрона определяется двумя факторами по отношению к каждому электрону: цветовым притяжением соседних электронов и отталкиванием остальных электронов от него.

Благодаря возникновению 4-электрона существуют двухатомная молекула кислорода, молекула воды <sup>24</sup>. 2). 6-электрон.

Состав 6-электрона записывается следующим образом:

$$6\text{-электрон} = e_{\circ}^{-} \bullet e_{\bullet}^{-} \bullet e_{\circ}^{-} \bullet e_{\bullet}^{-} \bullet e_{\circ}^{-} \bullet e_{\bullet}^{-} \bullet .$$

Здесь также последний  $\bullet$ -символ взаимодействия означает, что последний черный электрон взаимодействует с первым белым электроном, то есть взаимодействующие электроны находятся на замкнутой линии. Эта линия представляет собой периметр равностороннего шестиугольника, а электроны располагаются в вершинах шестиугольника (рис. 3.).

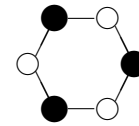


Рис. 3. 6-электрон

Конфигурация 6-электрона определяется двумя факторами по отношению к каждому электрону: цветовым притяжением соседних электронов и отталкиванием остальных электронов от него.

<sup>22</sup> Обмен электронами  $\gamma$ -кванта, приводящий к отталкиванию электронов, не показан.

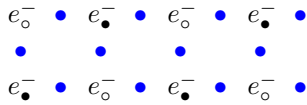
<sup>23</sup> См. Главу 4.6.

<sup>24</sup> См. Раздел IV Главы 4.6.

6-электрон находится в центре двухатомной молекулы азота, в центре молекулы бензола<sup>14</sup>.

7.2. Поверхностный мультиэлектрон

Назовем мультиэлектрон *поверхностным*, если его электроны находятся на замкнутой поверхности. Состав такого мультиэлектрона может выглядеть, например, следующим образом:



1). 8-электрон.

Указанный выше состав поверхностного мультиэлектрона относится к 8-электрону. В этом случае восемь электронов находятся на поверхности куба в его вершинах (рис. 4.).

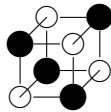


Рис. 4.  
8-электрон

Конфигурация 8-электрона определяется двумя факторами по отношению к каждому электрону: цветовым притяжением соседних электронов и отталкиванием остальных электронов от него.

8-электрон находится в центре молекулы и притягивает к себе атомы в молекуле окиси серы, в молекуле метана<sup>14</sup>.

2). Шаровая молния.

Центральной частью шаровой молнии является гигантский мультиэлектрон<sup>25</sup>. Белые и черные электроны в равных количествах равномерно распределены на сферической поверхности. Конфигурация мультиэлектрона определяется двумя факторами по отношению к каждому электрону: цветовым притяжением соседних электронов и отталкиванием остальных электронов от него.

**ХIII. СКАЛЯРНЫЕ ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

Электрослабые взаимодействия между лептонами и между кварками рассматривались в Разделах V, VI, VII, VIII при существенном ограничении: в них не были включены *скалярные* взаимодействия. Такое ограничение было продиктовано стремлением сделать изложение электрослабых взаимодействий на том этапе

менее громоздким. Вместе с тем нужно иметь в виду, что скалярные взаимодействия являются неотъемлемой частью электрослабых взаимодействий.

Представление об электрослабом взаимодействии между фундаментальными частицами, включающем скалярное взаимодействие, основано на обращении к следующему универсальному о-произведению базисных векторов<sup>26</sup>:

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}^I_K + \delta^I_K. \quad (156)$$

Напомним, что базисный вектор  $\mathbf{e}_K$  соответствует фундаментальной частице, базисный вектор  $\mathbf{E}^I$  соответствует фундаментальной античастице, базисный вектор  $\mathbf{I}^I_K$  соответствует промежуточной частице, а символ Кронекера  $\delta^I_K$  соответствует скалярной  $\delta$ -частице. Универсальное о-произведение (156) состоит из универсального •-произведения

$$\mathbf{E}^I \bullet \mathbf{e}_K = \mathbf{I}^I_K \quad (157)$$

и скалярного произведения

$$\mathbf{E}^I \cdot \mathbf{e}_K = \delta^I_K. \quad (158)$$

Представление об электрослабом взаимодействии между фундаментальной частицей и промежуточной частицей, включающем скалярное взаимодействие, основано на обращении к следующему универсальному о-произведению базисных векторов<sup>27</sup>:

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K_L = \delta^K_I \cdot \mathbf{e}_L. \quad (159)$$

Представление об электрослабом взаимодействии между промежуточной частицей и фундаментальной античастицей, включающем скалярное взаимодействие, основано на обращении к следующему универсальному о-произведению базисных векторов<sup>28</sup>:

$$\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^K \cdot \delta^I_L. \quad (160)$$

Представление об электрослабом взаимодействии между промежуточными частицами, включающем скалярное взаимодействие, основано на обращении к следующему универсальному о-произведению базисных векторов<sup>29</sup>:

$$\mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{I}^M_N = \delta^M_L \cdot \mathbf{I}^K_N + \delta^M_L \cdot \delta^K_N. \quad (161)$$

Универсальное о-произведение (161) состоит из универсального •-произведения

$$\mathbf{I}^K_L \bullet \mathbf{I}^M_N = \delta^M_L \cdot \mathbf{I}^K_N \quad (162)$$

и скалярного произведения

$$\mathbf{I}^K_L \cdot \mathbf{I}^M_N = \delta^M_L \cdot \delta^K_N. \quad (163)$$

<sup>26</sup> См. формулу (28)

<sup>27</sup> См. формулу (25)

<sup>28</sup> См. формулу (31)

<sup>29</sup> См. формулу (29)

<sup>25</sup> См. Раздел VII Главы 4.6.

### 1. Скалярные электрослабые взаимодействия между лептонами

В этом случае отправным является произведение (156), которое сводится к двум соотношениям<sup>30</sup>

$$\mathbf{E}^1 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^1 + \delta_1^1. \quad (164)$$

$$\mathbf{E}^2 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^2 + \delta_2^2. \quad (165)$$

Напомним, что для лептонов первого поколения имеем следующие соответствия<sup>31</sup>:

$$\mathbf{e}_1 \sim e_-, \quad \mathbf{e}_2 \sim \nu_{e\triangledown}, \quad (166)$$

а также

$$\mathbf{E}^1 \sim e^+, \quad \mathbf{E}^2 \sim \tilde{\nu}_e^\Delta. \quad (167)$$

Кроме того для промежуточных частиц имеем следующие соответствия:

$$\mathbf{I}_1^1 \sim \gamma_-^+, \quad \mathbf{I}_2^2 \sim Z_{\triangledown}^\Delta. \quad (168)$$

Кроме того для скалярных частиц имеем следующие соответствия:

$$\delta_1^1 \sim \delta_1, \quad \delta_2^2 \sim \delta_2. \quad (169)$$

Напомним, что скалярная частица имеет единственную динамическую характеристику – массу.

#### 1.1. Бозон Хиггса $H$

Обратимся к  $\circ$ -произведению (165). Воспользовавшись соответствиями (166) – (169), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$\tilde{\nu}_e^\Delta \circ \nu_{e\triangledown} = Z_{\triangledown}^\Delta + \delta_2$$

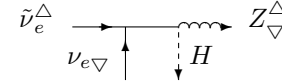
Далее учтем, что обмен скалярной частицей ( $\delta_2$ ) приводит в результате к изменению масс частиц, между которыми осуществляется этот обмен. На этом основании отождествим скалярную частицу  $\delta_2$  с бозоном Хиггса  $H$  и перепишем приведенное выше взаимодействие следующим образом:

$$\tilde{\nu}_e^\Delta \circ \nu_{e\triangledown} = Z_{\triangledown}^\Delta + H.$$

Отсюда процесс синтеза бозона Хиггса  $H$  в результате аннигиляции  $\tilde{\nu}_e$ - $\nu_e$  нейтринной пары записывается следующим образом:

$$\tilde{\nu}_e^\Delta + \nu_{e\triangledown} \rightarrow \tilde{\nu}_e^\Delta \circ \nu_{e\triangledown} = Z_{\triangledown}^\Delta + H \rightarrow Z_{\triangledown}^\Delta + H.$$

Этот процесс синтеза бозона Хиггса  $H$  в результате аннигиляции  $\tilde{\nu}_e$ - $\nu_e$  нейтринной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



#### 1.2. Бозон Хиггса $h$

Обратимся к  $\circ$ -произведению (164). Воспользовавшись соответствиями (166) – (169), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$e^+ \circ e_- = \gamma_-^+ + \delta_1.$$

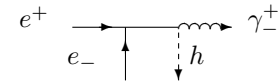
Далее учтем, что обмен скалярной частицей ( $\delta_1$ ) также приводит к изменению масс частиц, между которыми осуществляется этот обмен. На этом основании отождествим скалярную частицу  $\delta_1$  с вторым бозоном Хиггса, который обозначим  $h$  и перепишем приведенное выше взаимодействие следующим образом:

$$e^+ \circ e_- = \gamma_-^+ + h.$$

Отсюда процесс синтеза бозона Хиггса  $h$  в результате аннигиляции электрон-позитронной пары записывается следующим образом:

$$e^+ + e_- \rightarrow e^+ \circ e_- = \gamma_-^+ + h \rightarrow \gamma_-^+ + h.$$

Этот процесс синтеза бозона Хиггса  $h$  в результате аннигиляции электрон-позитронной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



### 2. Скалярные электрослабые взаимодействия между кварками

В этом случае отправным также является произведение (156), которое сводится к двум соотношениям<sup>32</sup>

$$\mathbf{E}^1 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{I}_1^1 + \delta_1^1. \quad (170)$$

$$\mathbf{E}^2 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{I}_2^2 + \delta_2^2. \quad (171)$$

Напомним, что, например, для кварков третьего поколения имеем следующие соответствия<sup>33</sup>:

$$\mathbf{e}_1 \sim b, \quad \mathbf{e}_2 \sim t, \quad (172)$$

<sup>30</sup>  $\circ$ -произведения, не содержащие скалярного умножения, не рассматриваются.

<sup>31</sup> Аналогичные соотношения имеют место для лептонов второго и третьего поколений.

<sup>32</sup>  $\circ$ -произведения, не содержащие скалярного умножения, не рассматриваются.

<sup>33</sup> Аналогичные соотношения имеют место для кварков первого и второго поколений.



а также

$$\mathbf{E}^1 \sim \tilde{b}, \quad \mathbf{E}^2 \sim \tilde{t}. \quad (173)$$

Кроме того для промежуточных частиц имеем следующие соответствия:

$$\mathbf{I}_1^1 \sim \gamma_-^+, \quad \mathbf{I}_2^2 \sim Z_{\nabla}^{\Delta}. \quad (174)$$

Кроме того для скалярных частиц примем ранее постулированное соответствие бозонам Хиггса:

$$\delta_1^1 \sim h, \quad \delta_2^2 \sim H. \quad (175)$$

### 2.1. Бозон Хиггса $H$

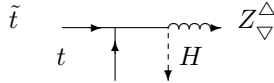
Обратимся к  $\circ$ -произведению (171). Воспользовавшись соответствиями (172) – (175), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$\tilde{t} \circ t = Z_{\nabla}^{\Delta} + H.$$

Отсюда процесс синтеза бозона Хиггса  $H$  в результате аннигиляции  $\tilde{t}$ - $t$  кварковой пары записывается следующим образом:

$$\tilde{t} + t \rightarrow \tilde{t} \circ t = Z_{\nabla}^{\Delta} + H \rightarrow Z_{\nabla}^{\Delta} + H.$$

Этот процесс синтеза бозона Хиггса  $H$  в результате аннигиляции  $\tilde{t}$ - $t$  кварковой пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



### 2.2. Бозон Хиггса $h$

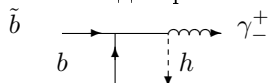
Обратимся к  $\circ$ -произведению (170). Воспользовавшись соответствиями (172) – (175), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$\tilde{b} \circ b = \gamma_-^+ + h.$$

Отсюда процесс синтеза бозона Хиггса  $h$  в результате аннигиляции  $\tilde{b}$ - $b$  кварковой пары записывается следующим образом:

$$\tilde{b} + b \rightarrow \tilde{b} \circ b = \gamma_-^+ + h \rightarrow \gamma_-^+ + h.$$

Этот процесс синтеза бозона Хиггса  $h$  в результате аннигиляции  $\tilde{b}$ - $b$  кварковой пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



## 3. Скалярные электрослабые взаимодействия между лептонами и промежуточными частицами

В этом случае отправным является произведение (159), которое сводится к четырем соотношениям:

$$\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_1, \quad (176)$$

$$\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{e}_2, \quad (177)$$

$$\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_1, \quad (178)$$

$$\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{e}_2. \quad (179)$$

Напомним, что, помимо ранее указанных соответствий для промежуточных частиц имеют место следующие соответствия:

$$\mathbf{I}_2^1 \sim W_{\nabla}^+, \quad \mathbf{I}_1^2 \sim W_{\nabla}^{\Delta}. \quad (180)$$

Кроме того для скалярных частиц примем ранее постулированное соответствие бозонам Хиггса:

$$\delta_1^1 \sim h, \quad \delta_2^2 \sim H. \quad (181)$$

### 3.1. Бозон Хиггса $H$

1.

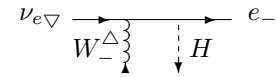
Обратимся к  $\bullet$ -произведению (178). Воспользовавшись соответствиями (166), (180), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$\nu_{e\nabla} \bullet W_{\nabla}^{\Delta} = H \cdot e_-.$$

Отсюда процесс поглощения  $W_{\nabla}^{\Delta}$ -бозона нейтрино записывается следующим образом:

$$\nu_{e\nabla} + W_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow \nu_{e\nabla} \bullet W_{\nabla}^{\Delta} = H \cdot e_- \rightarrow H + e_-$$

Этот процесс поглощения  $W_{\nabla}^{\Delta}$ -бозона нейтрино иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



2.

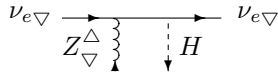
Обратимся к  $\bullet$ -произведению (179). Воспользовавшись соответствиями (166), (168), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$\nu_{e\nabla} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = H \cdot \nu_{e\nabla}.$$

Отсюда процесс поглощения  $Z_{\nabla}^{\Delta}$ -бозона нейтрино записывается следующим образом:

$$\nu_{e\nabla} + Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow \nu_{e\nabla} \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = H \cdot \nu_{e\nabla} \rightarrow H + \nu_{e\nabla}$$

Этот процесс поглощения  $Z_{\nabla}^{\Delta}$ -бозона нейтрино иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



### 3.2. Бозон Хиггса $h$

1.

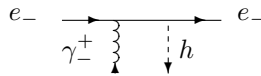
Обратимся к  $\bullet$ -произведению (176). Воспользовавшись соответствиями (166), (168), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$e_{-} \bullet \gamma_{-}^{+} = h \cdot e_{-} .$$

Отсюда процесс поглощения фотона электроном записывается следующим образом:

$$e_{-} + \gamma_{-}^{+} \rightarrow e_{-} \bullet \gamma_{-}^{+} = h \cdot e_{-} \rightarrow h + e_{-}$$

Этот процесс поглощения фотона электроном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



2.

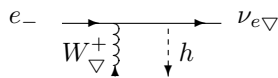
Обратимся к  $\bullet$ -произведению (177). Воспользовавшись соответствиями (166), (180), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$e_{-} \bullet W_{\nabla}^{+} = h \cdot \nu_{e\nabla} .$$

Отсюда процесс поглощения  $W_{\nabla}^{+}$ -бозона электроном записывается следующим образом:

$$e_{-} + W_{\nabla}^{+} \rightarrow e_{-} \bullet W_{\nabla}^{+} = h \cdot \nu_{e\nabla} \rightarrow h + \nu_{e\nabla}$$

Этот процесс поглощения  $W_{\nabla}^{+}$ -бозона электроном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



## 4. Скалярные электрослабые взаимодействия между кварками и промежуточными частицами

В этом случае также отправным является произведение (159), которое сводится к четырем соотношениям (176), (177), (178), (179). Далее рассмотрим скалярные электрослабые взаимодействия между кварками третьего поколения и промежуточными частицами.

### 4.1. Бозон Хиггса $H$

1.

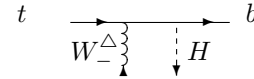
Обратимся к  $\bullet$ -произведению (178). Воспользовавшись соответствиями (172), (180), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$t \bullet W_{-}^{\Delta} = H \cdot b .$$

Отсюда процесс поглощения  $W_{-}^{\Delta}$ -бозона  $t$ -кварком записывается следующим образом:

$$t + W_{-}^{\Delta} \rightarrow t \bullet W_{-}^{\Delta} = H \cdot b \rightarrow H + b .$$

Этот процесс поглощения  $W_{-}^{\Delta}$ -бозона  $t$ -кварком иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



2.

Обратимся к  $\bullet$ -произведению (179). Воспользовавшись соответствиями (172), (174), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$t \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = H \cdot t .$$

Отсюда процесс поглощения  $Z_{\nabla}^{\Delta}$ -бозона  $t$ -кварком записывается следующим образом:

$$t + Z_{\nabla}^{\Delta} \rightarrow t \bullet Z_{\nabla}^{\Delta} = H \cdot t \rightarrow H + t$$

Этот процесс поглощения  $Z_{\nabla}^{\Delta}$ -бозона  $t$ -кварком иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



### 4.2. Бозон Хиггса $h$

1.

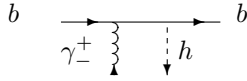
Обратимся к  $\bullet$ -произведению (176). Воспользовавшись соответствиями (172), (174), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$b \bullet \gamma_{-}^{+} = h \cdot b .$$

Отсюда процесс поглощения фотона  $b$ -кварком записывается следующим образом:

$$b + \gamma_{-}^{+} \rightarrow b \bullet \gamma_{-}^{+} = h \cdot b \rightarrow h + b .$$

Этот процесс поглощения фотона  $b$ -кварком иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



2.

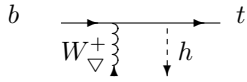
Обратимся к  $\bullet$ -произведению (177). Воспользовавшись соответствиями (172), (180), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$b \bullet W_{\nabla}^+ = h \cdot t.$$

Отсюда процесс поглощения  $W_{\nabla}^+$ -бозона  $b$ -кварком записывается следующим образом:

$$b + W_{\nabla}^+ \rightarrow b \bullet W_{\nabla}^+ = h \cdot t \rightarrow h + t.$$

Этот процесс поглощения  $W_{\nabla}^+$ -бозона  $b$ -кварком иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



### 5. Скалярные электрослабые взаимодействия между антилептонами и промежуточными частицами

В этом случае отправным является произведение (160), которое сводится к четырем соотношениям:

$$\mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{E}^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{E}^1, \quad (182)$$

$$\mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{E}^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{E}^2. \quad (183)$$

$$\mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{E}^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{E}^1. \quad (184)$$

$$\mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{E}^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{E}^2. \quad (185)$$

#### 5.1. Бозон Хиггса $H$

1.

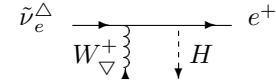
Обратимся к  $\bullet$ -произведению (184). Воспользовавшись соответствиями (167), (180), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{\nu}_e^{\Delta} = H \cdot e^+.$$

Отсюда процесс поглощения  $W_{\nabla}^+$ -бозона антинейтрино записывается следующим образом:

$$W_{\nabla}^+ + \tilde{\nu}_e^{\Delta} \rightarrow W_{\nabla}^+ \bullet \tilde{\nu}_e^{\Delta} = H \cdot e^+ \rightarrow H + e^+$$

Этот процесс поглощения  $W_{\nabla}^+$ -бозона антинейтрино иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



2.

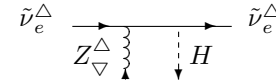
Обратимся к  $\bullet$ -произведению (185). Воспользовавшись соответствиями (167), (168), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet \tilde{\nu}_e^{\Delta} = H \cdot \tilde{\nu}_e^{\Delta}.$$

Отсюда процесс поглощения  $Z_{\nabla}^{\Delta}$ -бозона антинейтрино записывается следующим образом:

$$Z_{\nabla}^{\Delta} + \tilde{\nu}_e^{\Delta} \rightarrow Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet \tilde{\nu}_e^{\Delta} = H \cdot \tilde{\nu}_e^{\Delta} \rightarrow H + \tilde{\nu}_e^{\Delta}.$$

Этот процесс поглощения  $Z_{\nabla}^{\Delta}$ -бозона антинейтрино иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



#### 5.2. Бозон Хиггса $h$

1.

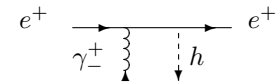
Обратимся к  $\bullet$ -произведению (182). Воспользовавшись соответствиями (167), (168), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$\gamma_{\pm}^+ \bullet e^+ = h \cdot e^+.$$

Отсюда процесс поглощения фотона позитроном записывается следующим образом:

$$\gamma_{\pm}^+ + e^+ \rightarrow \gamma_{\pm}^+ \bullet e^+ = h \cdot e^+ \rightarrow h + e^+.$$

Этот процесс поглощения фотона позитроном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



2.

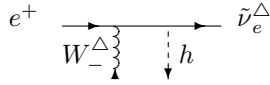
Обратимся к  $\bullet$ -произведению (183). Воспользовавшись соответствиями (167), (180), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$W_{\nabla}^{\Delta} \bullet e^+ = h \cdot \tilde{\nu}_e^{\Delta}.$$

Отсюда процесс поглощения  $W_{\nabla}^{\Delta}$ -бозона позитроном записывается следующим образом:

$$W_{\nabla}^{\Delta} + e^+ \rightarrow W_{\nabla}^{\Delta} \bullet e^+ = h \cdot \tilde{\nu}_e^{\Delta} \rightarrow h + \tilde{\nu}_e^{\Delta}.$$

Этот процесс поглощения  $W_{-}^{\Delta}$ -бозона позитроном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



### 6. Скалярные электрослабые взаимодействия между антикварками и промежуточными частицами

В этом случае также отправным является произведение (160), которое сводится к четырем соотношениям (182), (183), (184), (185). Далее рассмотрим скалярные электрослабые взаимодействия между кварками третьего поколения и промежуточными частицами.

#### 6.1. Бозон Хиггса $H$

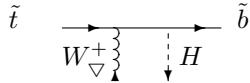
1. Обратимся к  $\bullet$ -произведению (184). Воспользовавшись соответствиями (173), (180), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$W_{\nabla}^{+} \bullet \tilde{t} = H \cdot \tilde{b}.$$

Отсюда процесс поглощения  $W_{\nabla}^{+}$ -бозона  $\tilde{t}$ -кварком записывается следующим образом:

$$W_{\nabla}^{+} + \tilde{t} \rightarrow W_{\nabla}^{+} \bullet \tilde{t} = H \cdot \tilde{b} \rightarrow H + \tilde{b}.$$

Этот процесс поглощения  $W_{\nabla}^{+}$ -бозона  $\tilde{t}$ -кварком иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



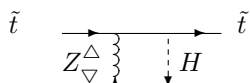
2. Обратимся к  $\bullet$ -произведению (185). Воспользовавшись соответствиями (173), (174), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet \tilde{t} = H \cdot \tilde{t}.$$

Отсюда процесс поглощения  $Z_{\nabla}^{\Delta}$ -бозона  $\tilde{t}$ -кварком записывается следующим образом:

$$Z_{\nabla}^{\Delta} + \tilde{t} \rightarrow Z_{\nabla}^{\Delta} \bullet \tilde{t} = H \cdot \tilde{t} \rightarrow H + \tilde{t}$$

Этот процесс поглощения  $Z_{\nabla}^{\Delta}$ -бозона  $\tilde{t}$ -кварком иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



#### 6.2. Бозон Хиггса $h$

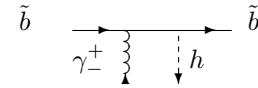
1. Обратимся к  $\bullet$ -произведению (182). Воспользовавшись соответствиями (173), (174), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$\gamma_{-}^{+} \bullet \tilde{b} = h \cdot \tilde{b}.$$

Отсюда процесс поглощения фотона  $\tilde{b}$ -кварком записывается следующим образом:

$$\gamma_{-}^{+} + \tilde{b} \rightarrow \gamma_{-}^{+} \bullet \tilde{b} = h \cdot \tilde{b} \rightarrow h + \tilde{b}.$$

Этот процесс поглощения фотона  $\tilde{b}$ -кварком иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



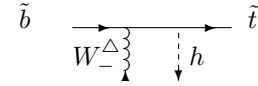
2. Обратимся к  $\bullet$ -произведению (183). Воспользовавшись соответствиями (173), (180), (181), поставим в соответствие этому произведению следующее взаимодействие:

$$W_{-}^{\Delta} \bullet \tilde{b} = h \cdot \tilde{t}.$$

Отсюда процесс поглощения  $W_{-}^{\Delta}$ -бозона  $\tilde{b}$ -кварком записывается следующим образом:

$$W_{-}^{\Delta} + \tilde{b} \rightarrow W_{-}^{\Delta} \bullet \tilde{b} = h \cdot \tilde{t} \rightarrow h + \tilde{t}.$$

Этот процесс поглощения  $W_{-}^{\Delta}$ -бозона  $\tilde{b}$ -кварком иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



### 7. Скалярные электрослабые взаимодействия между промежуточными частицами

В этом случае отправным является произведение (161), которое сводится к восьми вариантам.

1. Исходим из следующих соотношений:

$$\mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^1, \quad (186)$$

$$\mathbf{I}_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \delta_1^1. \quad (187)$$

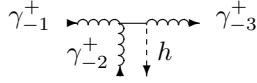
1.1. Из соотношения (186) с учетом соответствий (168) и (181) имеем соответствующее взаимодействие

$$\gamma_{-1}^{+} \bullet \gamma_{-2}^{+} = h \cdot \gamma_{-3}^{+}.$$

Отсюда процесс испускания фотона в результате аннигиляции фотонной пары записывается следующим образом:

$$\gamma_{-1}^{+} + \gamma_{-2}^{+} \rightarrow \gamma_{-1}^{+} \bullet \gamma_{-2}^{+} = h \cdot \gamma_{-3}^{+} \rightarrow h + \gamma_{-3}^{+}.$$

Процесс испускания фотона в результате аннигиляции фотонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



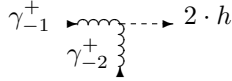
1.2. Из соотношения (187) с учетом соответствий (168) и (181) имеем соответствующее взаимодействие

$$\gamma_{-1}^+ \cdot \gamma_{-2}^+ = h \cdot h.$$

Отсюда процесс испускания бозонов Хиггса  $h$  в результате скалярной аннигиляции фотонной пары записывается следующим образом:

$$\gamma_{-1}^+ + \gamma_{-2}^+ \rightarrow \gamma_{-1}^+ \cdot \gamma_{-2}^+ = h \cdot h \rightarrow h + h.$$

Процесс испускания бозонов Хиггса  $h$  в результате скалярной аннигиляции фотонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



2. Исходим из соотношений

$$\mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2, \quad (188)$$

$$\mathbf{I}_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \delta_2^2. \quad (189)$$

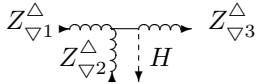
1.1. Из соотношения (188) с учетом соответствий (168) и (181) имеем соответствующее взаимодействие

$$Z_{\nabla 1}^\Delta \bullet Z_{\nabla 2}^\Delta = H \cdot Z_{\nabla 3}^\Delta.$$

Отсюда процесс испускания  $Z$ -бозона в результате аннигиляции  $Z$ -бозонной пары записывается следующим образом:

$$Z_{\nabla 1}^\Delta + Z_{\nabla 2}^\Delta \rightarrow Z_{\nabla 1}^\Delta \bullet Z_{\nabla 2}^\Delta = H \cdot Z_{\nabla 3}^\Delta \rightarrow H + Z_{\nabla 3}^\Delta.$$

Процесс испускания  $Z$ -бозона в результате аннигиляции  $Z$ -бозонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



1.2. Из соотношения (189) с учетом соответствий (168) и (181) имеем соответствующее взаимодействие

$$Z_{\nabla 1}^\Delta \cdot Z_{\nabla 2}^\Delta = H \cdot H.$$

Отсюда процесс испускания  $Z$ -бозона в результате скалярной аннигиляции  $Z$ -бозонной пары записывается следующим образом:

$$Z_{\nabla 1}^\Delta + Z_{\nabla 2}^\Delta \rightarrow Z_{\nabla 1}^\Delta \cdot Z_{\nabla 2}^\Delta = H \cdot H \rightarrow H + H.$$

Процесс испускания  $Z$ -бозона в результате скалярной аннигиляции  $Z$ -бозонной пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



3. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_1^1 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^1. \quad (190)$$

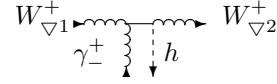
Отсюда с учетом соответствий (168), (180) и (181) имеем соответствующее взаимодействие:

$$\gamma_{-1}^+ \bullet W_{\nabla 1}^+ = h \cdot W_{\nabla 2}^+.$$

Отсюда процесс поглощения фотона  $W^+$ -бозоном записывается следующим образом:

$$\gamma_{-1}^+ + W_{\nabla 1}^+ \rightarrow \gamma_{-1}^+ \bullet W_{\nabla 1}^+ = h \cdot W_{\nabla 2}^+ \rightarrow h + W_{\nabla 2}^+.$$

Процесс поглощения фотона  $W^+$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



4. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^1. \quad (191)$$

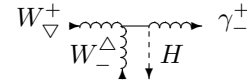
Отсюда с учетом соответствий (168), (180) и (181) имеем соответствующее взаимодействие:

$$W_{\nabla 1}^+ \bullet W_{\nabla 2}^- = H \cdot \gamma_{\nabla 3}^+.$$

Отсюда процесс испускания фотона в результате аннигиляции  $W^+ - W_-$  пары записывается следующим образом:

$$W_{\nabla 1}^+ + W_{\nabla 2}^- \rightarrow W_{\nabla 1}^+ \bullet W_{\nabla 2}^- = H \cdot \gamma_{\nabla 3}^+ \rightarrow H + \gamma_{\nabla 3}^+.$$

Процесс испускания фотона в результате аннигиляции  $W^+ - W_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



5. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_2^1 \bullet \mathbf{I}_2^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_2^1. \quad (192)$$

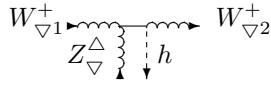
Отсюда с учетом соответствий (168), (180) и (181) имеем соответствующее взаимодействие

$$W_{\nabla 1}^+ \bullet Z_{\nabla 2}^\Delta = H \cdot W_{\nabla 2}^+.$$

Отсюда процесс поглощения  $Z$ -бозона  $W^+$ -бозоном записывается следующим образом:

$$W_{\nabla 1}^+ + Z_{\nabla 2}^\Delta \rightarrow W_{\nabla 1}^+ \bullet Z_{\nabla 2}^\Delta = H \cdot W_{\nabla 2}^+ \rightarrow H + W_{\nabla 2}^+.$$

Процесс поглощения  $Z$ -бозона  $W^+$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



6. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_1^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_1^2. \quad (193)$$

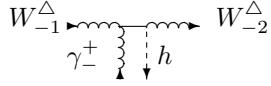
Отсюда с учетом соответствий (168), (180) и (181) имеем соответствующее взаимодействие

$$W_{-1}^\Delta \bullet \gamma_-^+ = h \cdot W_{-2}^\Delta.$$

Отсюда процесс поглощения фотона  $W_-$ -бозоном записывается следующим образом:

$$W_{-1}^\Delta + \gamma_-^+ \rightarrow W_{-1}^\Delta \bullet \gamma_-^+ = h \cdot W_{-2}^\Delta \rightarrow h + W_{-2}^\Delta.$$

Процесс поглощения фотона  $W_-$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



7. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_1^2 \bullet \mathbf{I}_2^1 = \delta_1^1 \cdot \mathbf{I}_2^2. \quad (194)$$

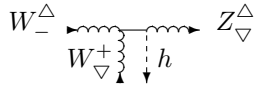
Отсюда с учетом соответствий (168), (180) и (181) имеем соответствующее взаимодействие

$$W_{-}^\Delta \bullet W_{\nabla}^+ = h \cdot Z_{\nabla}^\Delta.$$

Отсюда процесс испускания  $Z$ -бозона в результате аннигиляции  $W^+ - W_-$  пары записывается следующим образом:

$$W_{-}^\Delta + W_{\nabla}^+ \rightarrow W_{-}^\Delta \bullet W_{\nabla}^+ = h \cdot Z_{\nabla}^\Delta \rightarrow h + Z_{\nabla}^\Delta.$$

Процесс испускания  $Z$ -бозона в результате аннигиляции  $W^+ - W_-$  пары иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



8. Исходим из соотношения

$$\mathbf{I}_2^2 \bullet \mathbf{I}_1^2 = \delta_2^2 \cdot \mathbf{I}_1^2. \quad (195)$$

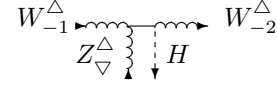
Отсюда с учетом соответствий (168), (180) и (181) имеем соответствующее взаимодействие

$$Z_{\nabla}^\Delta \bullet W_{-1}^\Delta = H \cdot W_{-2}^\Delta.$$

Отсюда процесс поглощения  $Z$ -бозона  $W_-$ -бозоном записывается следующим образом:

$$Z_{\nabla}^\Delta + W_{-1}^\Delta \rightarrow Z_{\nabla}^\Delta \bullet W_{-1}^\Delta = H \cdot W_{-2}^\Delta \rightarrow H + W_{-2}^\Delta.$$

Процесс поглощения  $Z$ -бозона  $W_-$ -бозоном иллюстрируется следующей простейшей диаграммой взаимодействий:



#### XIV. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Действие промежуточного объекта есть оператор линейного преобразования, применяемый к векторам действия фундаментальных объектов. Действие промежуточного антиобъекта есть оператор линейного преобразования, применяемый к векторам действия фундаментальных антиобъектов.
- Векторы действия промежуточных объектов составляют алгебру. Векторы действия промежуточных антиобъектов также составляют алгебру.
- Квантовые уравнения для свободных промежуточных объектов имеют вид (36) и (41). Квантовые уравнения для свободных промежуточных антиобъектов имеют вид (117) и (122).
- Рассмотреть взаимодействующие объекты означает: 1) ввести алгебру действия, общую для взаимодействующих объектов; 2) записать уравнения структуры этой алгебры и 3) перейти от указанных уравнений к системе квантовых уравнений для взаимодействующих объектов.
- Правилам умножения базисных векторов алгебры действия фундаментальных и промежуточных частиц и античастиц соответствуют элементарные акты взаимодействия этих частиц, иллюстрируемые элементарными диаграммами Фейнмана.

## Глава 5.3 Калибровочное поле

### I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Согласно существующей точке зрения взаимодействие между фундаментальными частицами осуществляется с помощью посредника. Эта концепция существует в двух разновидностях: в качестве такого посредника выступает либо *промежуточная частица*, либо *поле*. Поскольку оба вида описания взаимодействия относятся к одному явлению, они должны сводиться друг к другу. В Главе 5.1. было рассмотрено описание взаимодействия фундаментальных объектов с помощью промежуточных объектов. В его основе лежит представление о действии промежуточного объекта  $\mathbf{S}(\ )$  как о линейном операторе. Таким образом, описание взаимодействия с помощью поля должно корреспондироваться с указанным представлением. Целью настоящей Главы является установление связи между действием промежуточного объекта и полем. Решение этой задачи начнем с формулировки представления о *калибровочной группе*.

Напомним, что алгебра действия промежуточных объектов  $\mathbf{S}_1$  считается подобной алгебре линейных преобразований пространства-времени  $\mathbf{L}$ . Следствием этого является то, что по алгебре  $\mathbf{S}_1$  можно построить группу, подобную *кинематической*, рассмотренной в Разделе V. Главы 1.5, то есть по алгебре  $\mathbf{S}_1$  можно построить непрерывную группу, для которой сама алгебра  $\mathbf{S}_1$  является ее линейной частью. Такую непрерывную группу назовем *калибровочной группой* и обозначим ее  $\mathbf{G}_1$ . Далее перейдем к построению этой группы.

### II. КАЛИБРОВОЧНАЯ ГРУППА

Так как умножение в алгебре действия промежуточных объектов некоммутативно, то следует различать левую и правую калибровочные группы.

#### 1. Левая калибровочная группа ${}_i\mathbf{G}_1$

Обратимся к параметрическому представлению левой алгебры действия промежуточных объектов. Пусть вектор  ${}_i\mathbf{S} \in {}_i\mathbf{S}_1$  является функцией *параметров*  $\theta^\alpha$ :

$${}_i\mathbf{S}(\theta^\alpha) = {}_i\mathbf{I}^I_K \cdot {}_i\mathbf{S}^K_I(\theta^\alpha)$$

причем на параметрах  $\theta^\alpha$  действует левый закон композиции

$${}_i\theta^\alpha = {}_i\Theta(\theta_2^\alpha, \theta_1^\alpha)$$

со свойствами группы и имеют место соответствие закона композиции на множестве параметров  $\{\theta^\alpha\}$  и левого закона композиции на  ${}_i\mathbf{S}_1$  (формула (12) Главы

5.1.):

$${}_i\mathbf{S}(\theta^\alpha) = \frac{1}{S_0} {}_i\mathbf{S}(\theta_2^\alpha) \circ {}_i\mathbf{S}(\theta_1^\alpha),$$

и соответствие единиц групп

$${}_i\mathbf{S}(0) = S_0$$

или

$${}_i\mathbf{S}^K_I(\theta^\alpha)|_{\theta^\alpha=0} = \delta^K_I \cdot S_0.$$

Представление о подобии алгебры действия промежуточных объектов  ${}_i\mathbf{S}_1$  и алгебры линейных преобразований пространства-времени  ${}_i\mathbf{L}$  запишем в виде следующего соотношения:

$$d{}_i\mathbf{l}^K_I = -\frac{1}{S_0} \cdot d{}_i\mathbf{S}^K_I. \quad (1)$$

Напомним, что в Разделе V.1. Главы 1.5. было введено параметрическое представление левых линейных преобразований пространства-времени. Согласно ему, вектор  ${}_i\mathbf{l} \in {}_i\mathbf{L}$  является функцией безразмерных параметров  ${}_i\varphi^\alpha$ :

$${}_i\mathbf{l}(\varphi^\alpha) = {}_i\mathbf{I}^I_K \cdot {}_i\mathbf{l}^K_I(\varphi^\alpha).$$

Для группы поворотов параметры  ${}_i\varphi^\alpha$  представляют собой *левые углы поворота*. Для группы растяжений такие параметры представляют собой *коэффициенты растяжения*. Дифференциал  $d{}_i\mathbf{l}$  вблизи единицы группы записывается следующим образом:

$$d{}_i\mathbf{l}(\varphi^\alpha) = {}_i\mathbf{I}^I_K \frac{\partial {}_i\mathbf{l}^K_I(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha} d\varphi^\alpha = {}_i\mathbf{I}^I_K \cdot {}_i\mathbf{K}^K_{I\alpha} \cdot d{}_i\varphi^\alpha, \quad (2)$$

где введено обозначение

$${}_i\mathbf{K}^K_{I\alpha} = \left. \frac{\partial {}_i\mathbf{l}^K_I(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha} \right|_{\varphi^\alpha=0}.$$

Имея в виду вышесказанное, распространим подобие алгебры действия промежуточных объектов  ${}_i\mathbf{S}_1$  и алгебры линейных преобразований пространства-времени  ${}_i\mathbf{L}$  на подобие между параметрами представления  ${}_i\varphi^\alpha$  и  ${}_i\theta^\alpha$ , которое зададим в виде следующего соотношения:

$${}_i\varphi^\alpha = \frac{ig_\alpha}{S_0} \cdot {}_i\theta^\alpha. \quad (3)$$

Здесь  $ig_\alpha$  – постоянные коэффициенты – коэффициенты подобия, называемые *левыми коэффициентами связи* или *левыми калибровочными зарядами*.

С учетом указанных соотношений рассмотрим дифференциал  $d{}_i\mathbf{S}$  вблизи единицы группы

$$d{}_i\mathbf{S}(\theta^\alpha) = {}_i\mathbf{I}^I_K \left. \frac{\partial {}_i\mathbf{S}^K_I(\theta^\alpha)}{\partial \theta^\alpha} \right|_{\theta^\alpha=0} \cdot d\theta^\alpha.$$

Из выражения (1) имеем

$$d_l S^{K_I}(\varphi^\alpha) = -S_0 \cdot d_l l^{K_I}(\varphi^\alpha).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d_l \mathbf{S}(\theta^\alpha) &= d_l \mathbf{S}(\varphi^\alpha(\theta)) = {}_l \mathbf{I}_K^I \frac{\partial_l S^{K_I}(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \theta^\beta} \cdot d\theta^\beta = \\ &= -{}_l \mathbf{I}_K^I \cdot S_0 \cdot \frac{\partial_l l^{K_I}(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \theta^\beta} \cdot d\theta^\beta. \end{aligned}$$

С учетом выражений (2) и (3) получим

$$d_l \mathbf{S}(\theta^\alpha) = -{}_l \mathbf{I}_K^I \cdot {}_l K_{I\alpha}^K \cdot l g_\alpha \cdot d\theta^\alpha.$$

Отсюда следует, что матрицы левой алгебры действия промежуточных объектов можно записать так:

$$d_l S^{K_I} = -l g_\alpha \cdot {}_l K_{I\alpha}^K \cdot d\theta^\alpha.$$

Векторы

$${}_l \mathbf{I}_\alpha = {}_l \mathbf{I}_K^I \cdot {}_l K_{I\alpha}^K \quad (4)$$

представляют собой базисные векторы в пространстве векторов вида

$$d_l \mathbf{S} = -{}_l \mathbf{I}_\alpha \cdot l g_\alpha \cdot d_l \theta^\alpha. \quad (5)$$

На этом пространстве действует закон умножения, определяемый левым умножением базисных векторов

$${}_l \mathbf{I}_\beta \circ {}_l \mathbf{I}_\alpha = {}_l \mathbf{I}_\gamma \cdot {}_l C_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (6)$$

Подставляя сюда значения (4) и учитывая закон умножения базисных векторов (13) Главы 5.1., получим

$${}_l K_{L\alpha}^K \cdot {}_l K_{I\beta}^L = {}_l K_{I\gamma}^K \cdot {}_l C_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (7)$$

Сравнивая это соотношение с выражением (6), заключаем, что базисным векторам  ${}_l \mathbf{I}_\alpha$  можно поставить в соответствие матрицы  ${}_l K_{L\alpha}^K$ . Это соответствие будем называть *параметрическим представлением* левой алгебры действия промежуточных объектов  ${}_l \mathbf{S}_1$  и записывать так:

$${}_l \mathbf{I}_\alpha \sim {}_l K_{L\alpha}^K.$$

Левая алгебра  ${}_l \mathbf{S}_1$  линейных преобразований, зависящих от параметров  $\theta$ , является линейной частью *левой непрерывной группы* линейных преобразований, зависящих от этих параметров. Обозначим ее  ${}_l \mathbf{G}_1$  и назовем *левой калибровочной группой*. Левая калибровочная группа тождественна с точностью до постоянного множителя (подобна) левой кинематической группе  ${}_l \mathbf{G}$ .

Далее рассмотрим дифференциальные уравнения для зависимости координат линейного преобразования калибровочной группы  ${}_l \mathbf{G}_1$  от параметров  $\theta$ . Для

этого запишем уравнение (10) Главы 5.1. в следующем виде:

$${}_l S^M_L(\theta) = \frac{1}{S_0} {}_l S^M_K(\theta_2) \cdot {}_l S^K_L(\theta_1),$$

где  $\theta = {}_l \Theta(\theta_2, \theta_1)$ , и рассмотрим его при замене

$$\theta \rightarrow \theta + d\theta, \quad \theta_2 \rightarrow \theta, \quad \theta_1 \rightarrow \theta + d\theta.$$

Получим

$$\begin{aligned} {}_l S^M_L(\theta) + d_l S^M_L(\theta) &= \\ &= \frac{1}{S_0} {}_l S^M_K(\theta) \cdot \left[ {}_l S^K_L(\theta) + \left( \frac{\partial_l S^K_L(\theta)}{\partial \theta^\alpha} \right) \cdot d\theta^\alpha \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что  ${}_l S^K_L(0) = \delta^K_L \cdot S_0$ , получим

$$d_l S^M_L(\theta) = -\frac{l g_\alpha}{S_0} {}_l S^M_K(\theta) \cdot {}_l K_{L\alpha}^K \cdot d\theta^\alpha. \quad (8)$$

Отсюда следует

$${}_l \tilde{S}^K_M(\theta) \cdot d_l S^M_L(\theta) = -\frac{l g_\alpha}{S_0} {}_l K_{L\alpha}^K \cdot d_l \theta^\alpha. \quad (9)$$

Эти уравнения позволяют определить координаты  ${}_l S^K_L(\theta)$  линейного преобразования левой калибровочной группы  ${}_l \mathbf{G}_1$  в зависимости от параметров  $\theta^\alpha$ .

Выражение

$${}_l \omega^K_L(\theta) \equiv {}_l \tilde{S}^K_M(\theta) \cdot d_l S^M_L(\theta) = -\frac{l g_\alpha}{S_0} {}_l K_{L\alpha}^K \cdot d\theta^\alpha$$

называется *левой дифференциальной формой* алгебры действия промежуточных объектов  ${}_l \mathbf{S}_1$ .

Решение  ${}_l S^K_L(\theta)$  уравнения (9) при начальных условиях

$${}_l S^K_L(0) = \delta^K_L \cdot S_0$$

имеет вид

$${}_l S^K_L = S_0 \cdot \exp \left( -\frac{l g_\alpha}{S_0} {}_l K_{L\alpha}^K \cdot \theta^\alpha \right).$$

## 2. Правая калибровочная группа ${}_r \mathbf{G}_1$

Приведем аналогичные соотношения для параметрического представлению правой алгебры действия промежуточных объектов. Пусть вектор  ${}_r \mathbf{S} \in {}_r \mathbf{S}_1$  является функцией *параметров*  $\theta^\alpha$ :

$${}_r \mathbf{S}(\theta^\alpha) = {}_r \mathbf{I}_K^I \cdot {}_r S^K_I(\theta^\alpha),$$

причем на параметрах  $\theta^\alpha$  действует правый закон композиции

$${}_r \theta^\alpha = {}_r \Theta(\theta_1^\alpha, \theta_2^\alpha)$$

со свойствами группы, и имеют место соответствие закона композиции на множестве параметров  $\{\theta^\alpha\}$  и



правого закона композиции на  ${}_r\mathbf{S}_1$  (формула (17) Главы 5.1.):

$${}_r\mathbf{S}(\theta^\alpha) = \frac{1}{S_0} {}_r\mathbf{S}(\theta_1^\alpha) \circ {}_r\mathbf{S}(\theta_2^\alpha)$$

и соответствие единиц групп

$${}_r\mathbf{S}(0) = S_0$$

или

$${}_rS^K_I(\theta^\alpha)|_{\theta^\alpha=0} = \delta^K_I \cdot S_0.$$

Представление о подобии алгебры действия промежуточных объектов  ${}_r\mathbf{S}_1$  и алгебры линейных преобразований пространства-времени  ${}_r\mathbf{L}$  запишем в виде следующего соотношения:

$$d_r l^K_I = -\frac{1}{S_0} \cdot d_r S^K_I. \quad (10)$$

Напомним, что в Разделе V.2. Главы 1.5. было введено параметрическое представление правых линейных преобразований пространства-времени. Согласно ему вектор  ${}_r\mathbf{1} \in {}_r\mathbf{L}$  является функцией безразмерных параметров  ${}_r\varphi^\alpha$ :

$${}_r\mathbf{1}(\varphi^\alpha) = {}_r\mathbf{I}^I_K \cdot {}_r l^K_I(\varphi^\alpha).$$

Для группы поворотов параметры  ${}_r\varphi^\alpha$  представляют собой *правые углы поворота*. Для группы растяжений такие параметры представляют собой *коэффициенты растяжения*. Дифференциал  $d_r\mathbf{1}$  вблизи единицы группы записывается следующим образом:

$$d_r\mathbf{1}(\varphi^\alpha) = {}_r\mathbf{I}^I_K \frac{\partial {}_r l^K_I(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha} d\varphi^\alpha = {}_r\mathbf{I}^I_K \cdot {}_rK^K_{I\alpha} \cdot d_r\varphi^\alpha, \quad (11)$$

где введено обозначение

$${}_rK^K_{I\alpha} = \left. \frac{\partial {}_r l^K_I(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha} \right|_{\varphi^\alpha=0}.$$

Имея в виду вышесказанное, распространим подобие алгебры действия промежуточных объектов  ${}_r\mathbf{S}_1$  и алгебры линейных преобразований пространства-времени  ${}_r\mathbf{L}$  на подобие между параметрами представления  ${}_r\varphi^\alpha$  и  ${}_r\theta^\alpha$ , которое зададим в виде следующего соотношения:

$${}_r\varphi^\alpha = \frac{{}_r g_\alpha}{S_0} \cdot {}_r\theta^\alpha. \quad (12)$$

Здесь  ${}_r g_\alpha$  – постоянные коэффициенты – коэффициенты подобия, называемые *правыми коэффициентами связи* или *правыми калибровочными зарядами*.

С учетом указанных соотношений рассмотрим дифференциал  $d_r\mathbf{S}$  вблизи единицы группы

$$d_r\mathbf{S}(\theta^\alpha) = {}_r\mathbf{I}^I_K \left. \frac{\partial {}_r S^K_I(\theta^\alpha)}{\partial \theta^\alpha} \right|_{\theta^\alpha=0} \cdot d\theta^\alpha.$$

Из выражения (10) имеем

$$d_r S^K_I(\varphi^\alpha) = -S_0 \cdot d_r l^K_I(\varphi^\alpha).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d_r\mathbf{S}(\theta^\alpha) &= d_r\mathbf{S}(\varphi^\alpha(\theta)) = {}_r\mathbf{I}^I_K \frac{\partial {}_r S^K_I(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \theta^\beta} \cdot d\theta^\beta = \\ &= -{}_r\mathbf{I}^I_K \cdot S_0 \cdot \frac{\partial {}_r l^K_I(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \theta^\beta} \cdot d\theta^\beta. \end{aligned}$$

С учетом выражений (11) и (12) получим

$$d_r\mathbf{S}(\theta^\alpha) = -{}_r\mathbf{I}^I_K \cdot {}_rK^K_{I\alpha} \cdot {}_r g_\alpha \cdot d\theta^\alpha.$$

Отсюда следует, что матрицы правой алгебры действия промежуточных объектов можно записать так:

$$d_r S^K_I = -{}_r g_\alpha \cdot {}_rK^K_{I\alpha} \cdot d_r\theta^\alpha.$$

Векторы

$${}_r\mathbf{I}_\alpha = {}_r\mathbf{I}^I_K \cdot {}_rK^K_{I\alpha} \quad (13)$$

представляют собой базисные векторы в пространстве векторов вида

$$d_r\mathbf{S} = -{}_r\mathbf{I}_\alpha \cdot {}_r g_\alpha \cdot d_r\theta^\alpha. \quad (14)$$

На этом пространстве действует закон умножения, определяемый правым умножением базисных векторов

$${}_r\mathbf{I}_\alpha \circ {}_r\mathbf{I}_\beta = {}_r\mathbf{I}_\gamma \cdot {}_rC^\gamma_{\alpha\beta}. \quad (15)$$

Подставляя сюда соотношение (13) и учитывая закон умножения базисных векторов (18) Главы 5.1., получим

$${}_rK^K_{L\beta} \cdot {}_rK^K_{I\alpha} = {}_rK^K_{I\gamma} \cdot {}_rC^\gamma_{\alpha\beta}. \quad (16)$$

Сравнивая это соотношение с выражением (15), заключаем, что базисным векторам  ${}_r\mathbf{I}_\alpha$  можно поставить в соответствие матрицы  ${}_rK^K_{L\alpha}$ . Это соответствие будем называть *параметрическим представлением* правой алгебры действия промежуточных объектов  ${}_r\mathbf{S}_1$  и записывать так:

$${}_r\mathbf{I}_\alpha \sim {}_rK^K_{L\alpha}.$$

Правая алгебра  ${}_r\mathbf{S}_1$  линейных преобразований, зависящих от параметров  $\theta$ , является линейной частью *правой непрерывной группы* линейных преобразований, зависящих от этих параметров. Обозначим ее  ${}_r\mathbf{G}_1$  и назовем *правой калибровочной группой*. Правая калибровочная группа тождественна с точностью до постоянного множителя (подобна) правой кинематической группе  ${}_r\mathbf{G}$ .

Далее рассмотрим дифференциальные уравнения для зависимости координат линейного преобразования калибровочной группы  ${}_r\mathbf{G}_1$  от параметров  $\theta$ . Для

этого запишем уравнение (15) Главы 5.1. в следующем виде:

$${}_r S^M_L(\theta) = \frac{1}{S_0} {}_r S^M_K(\theta_2) \cdot {}_r S^K_L(\theta_1),$$

где  $\theta = {}_r \Theta(\theta_1, \theta_2)$ , и рассмотрим его при замене

$$\theta \rightarrow \theta + d\theta, \quad \theta_2 \rightarrow \theta, \quad \theta_1 \rightarrow 0 + d\theta.$$

Получим

$$\begin{aligned} & {}_r S^M_L(\theta) + d {}_r S^M_L(\theta) = \\ & = \frac{1}{S_0} {}_r S^M_K(\theta) \cdot \left[ {}_r S^K_L(0) + \left( \frac{\partial {}_r S^K_L(\theta)}{\partial \theta^\alpha} \right)_{\theta=0} \cdot d\theta^\alpha \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что  ${}_r S^K_L(0) = \delta^K_L \cdot S_0$ , получим

$$d {}_r S^M_L(\theta) = -\frac{r g_\alpha}{S_0} {}_r S^M_K(\theta) \cdot {}_r K^K_{L\alpha} \cdot d\theta^\alpha. \quad (17)$$

Отсюда следует

$${}_r \tilde{S}^K_M(\theta) \cdot d {}_r S^M_L(\theta) = -\frac{r g_\alpha}{S_0} {}_r K^K_{L\alpha} \cdot d_r \theta^\alpha. \quad (18)$$

Эти уравнения позволяют определить координаты  ${}_r S^K_L(\theta)$  линейного преобразования правой калибровочной группы  ${}_r \mathbf{G}_1$  в зависимости от параметров  $\theta^\alpha$ .

Выражение

$${}_r \omega^K_L(\theta) \equiv {}_r \tilde{S}^K_M(\theta) \cdot d {}_r S^M_L(\theta) = -\frac{r g_\alpha}{S_0} {}_r K^K_{L\alpha} \cdot d\theta^\alpha$$

называется *правой дифференциальной формой* алгебры действия промежуточных объектов  ${}_r \mathbf{S}_1$ .

Решение  ${}_r S^K_L(\theta)$  уравнения (18) при начальных условиях

$${}_r S^K_L(0) = \delta^K_L \cdot S_0$$

имеет вид

$${}_r S^K_L = S_0 \cdot \exp \left( -\frac{r g_\alpha}{S_0} {}_r K^K_{L\alpha} \cdot \theta^\alpha \right).$$

### 3. Системообразующие постулаты

1. Отождествим *левую калибровочную* группу  ${}_l \mathbf{G}_1$  (наравне с левой кинематической группой  ${}_l \mathbf{G}$ ) с группой *внешней симметрии*, рассматриваемой в современной физике. В частности, группа гравитации относится к группе внешней симметрии и, следовательно, является подгруппой левой калибровочной группы.

2. Левая алгебра действия промежуточных объектов  ${}_l \mathbf{S}_1$  является линейной частью *левой калибровочной* группы  ${}_l \mathbf{G}_1$ . Поэтому отождествим левую алгебру действия промежуточных объектов  ${}_l \mathbf{S}_1$  (наравне с левой алгеброй линейных преобразований  ${}_l \mathbf{L}$ ) с алгеброй *внешней симметрии*.

3. Отождествим *правую калибровочную* группу  ${}_r \mathbf{G}_1$  (наравне с правой кинематической группой  ${}_r \mathbf{G}$ ) с группой *внутренней симметрии*, рассматриваемой в современной физике. В частности, электрическая группа относится к группе внутренней симметрии и, следовательно, является подгруппой правой калибровочной группы.

4. Правая алгебра действия промежуточных объектов  ${}_r \mathbf{S}_1$  является линейной частью *правой калибровочной* группы  ${}_r \mathbf{G}_1$ . Поэтому отождествим правую алгебру действия промежуточных объектов  ${}_r \mathbf{S}_1$  (наравне с правой алгеброй линейных преобразований  ${}_r \mathbf{L}$ ) с алгеброй *внутренней симметрии*.

## III. КАЛИБРОВОЧНОЕ ПОЛЕ

Так как умножение в алгебре действия промежуточных объектов некоммутативно, то следует различать левое и правое калибровочные поля.

### 1. Левое калибровочное поле

Мы хотим воспользоваться подобием алгебры действия промежуточных объектов  ${}_l \mathbf{S}_1$  и алгебры линейных преобразований пространства-времени  ${}_l \mathbf{L}$  и построить левое калибровочное поле подобно левому кинематическому полю, рассмотренному в Разделе III.1. Главы 1.7. Поэтому сначала напомним представление о левом кинематическом поле.

#### 1.1. Левое кинематическое поле

Левое кинематическое поле определяется тремя наборами переменных. Каждая из переменных зависит от точек пространства-времени.

К *первым* переменным левого кинематического поля отнесена зависимость линейного преобразования

$${}_l \mathbf{l}(x) = {}_l \mathbf{I}^K_I \cdot {}_l l^I_K(x),$$

а для параметрического представления – это зависимость

$${}_l \mathbf{l}(\varphi(x)) = {}_l \mathbf{I}^K_I \cdot {}_l l^I_K(\varphi(x)).$$

Таким образом, к *первым* переменным левого кинематического поля отнесены: поле линейного преобразования, поле координат и поле параметров линейного преобразования:

$${}_l \mathbf{l}(x), \quad {}_l l^I_K(x), \quad {}_l \varphi^\alpha(x).$$

Функция  ${}_l \mathbf{l}(x)$  подчиняется дифференциальному соотношению

$$D {}_l \mathbf{l} = d {}_l \mathbf{l} + \delta {}_l \mathbf{l}. \quad (19)$$

Здесь

$D$  – искривленный дифференциал,  
 $d$  – обыкновенный дифференциал,  
 $\delta$  – вариация.

Аналогичные дифференциальные соотношения выполняются для координат линейного преобразования

$$D l^I{}_K = d l^I{}_K + \delta l^I{}_K \quad (20)$$

и для параметров линейного преобразования

$$D l\varphi^\alpha = d l\varphi^\alpha + \delta l\varphi^\alpha. \quad (21)$$

К *вторым* переменным левого кинематического поля отнесена вариационная производная от линейного преобразования

$$\frac{\delta l}{\partial x^L}(x).$$

Она обозначена

$$\Gamma_L = \frac{\delta l}{\partial x^L}(x) = l^K{}_I \cdot \frac{\delta l^I{}_K}{\partial x^L} = l^K{}_I \cdot \Gamma^I{}_{KL}$$

и называется коэффициентами связности левого кинематического поля.

Для параметрического представления

$$\begin{aligned} \Gamma_L(\varphi(x)) &= \frac{\delta l}{\delta l\varphi^\alpha} \cdot \frac{\delta l\varphi^\alpha}{\partial x^L}(x) = \\ &= l^K{}_I \cdot l^I{}_{K\alpha} \cdot \frac{\delta l\varphi^\alpha}{\partial x^L} = l^K{}_I \cdot l^I{}_{K\alpha} \cdot A^{\alpha L}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\Gamma^{\alpha L}$  – параметрические координаты коэффициентов связности.

Таким образом, к *вторым* переменным левого кинематического поля отнесены: поле коэффициентов связности, поле координат коэффициентов связности и поле параметрических координат коэффициентов связности:

$$\Gamma_L(x), \quad \Gamma^I{}_{KL}(x), \quad \Gamma^{\alpha L}(x).$$

К *вторым* переменным левого кинематического поля отнесена также искривленная производная от линейного преобразования

$$\frac{D l}{\partial x^L}(x),$$

которая рассматривается как *преобразованные* коэффициенты связности и которые обозначены

$$\Gamma'_L = \frac{D l}{\partial x^L}(x) = l^K{}_I \cdot \frac{D l^I{}_K}{\partial x^L} = l^K{}_I \cdot \Gamma'^I{}_{KL}.$$

Аналогично для параметрического представления

$$\begin{aligned} \Gamma'_L(\varphi(x)) &= \frac{D l}{D l\varphi^\alpha} \cdot \frac{D l\varphi^\alpha}{\partial x^L}(x) = \\ &= l^K{}_I \cdot l^I{}_{K\alpha} \cdot \frac{D l\varphi^\alpha}{\partial x^L} = l^K{}_I \cdot l^I{}_{K\alpha} \cdot \Gamma'^{\alpha L}, \end{aligned}$$

где  $\Gamma'^{\alpha L}$  – параметрические координаты преобразованных коэффициентов связности.

Тогда из выражения (19) следует соотношение

$$\Gamma'_L = \frac{\partial l}{\partial x^L} + \Gamma_L,$$

называемое *калибровочным преобразованием* коэффициентов связности. Из выражений (20) и (21) следуют разновидности указанного преобразования

$$\Gamma'^I{}_{KL} = \frac{\partial l^I{}_K}{\partial x^L} + \Gamma^I{}_{KL}$$

и

$$\Gamma'^{\alpha L} = \frac{\partial l\varphi^\alpha}{\partial x^L} + \Gamma^{\alpha L}.$$

Кроме первых и вторых переменных левого кинематического поля, в Разделе III.1. Главы 1.7 введены третьи переменные левого кинематического поля, но здесь он не рассматривается.

Перейдем теперь к построению левого калибровочного поля, подобного левому кинематическому.

### 1.2. Левое калибровочное поле

Левое калибровочное поле определяется тремя наборами переменных. Каждая из переменных зависит от точек пространства-времени.

К *первым* переменным левого калибровочного поля отнесена зависимость вектора действия промежуточного объекта

$$lS(x) = l^K{}_I \cdot lS^I{}_K(x),$$

а для параметрического представления – это зависимость

$$lS(\theta(x)) = l^K{}_I \cdot lS^I{}_K(\theta(x)).$$

Таким образом, к *первым* переменным левого калибровочного поля отнесены: поле вектора действия промежуточного объекта, поле координат этого вектора и поле параметров представления этого вектора:

$$lS(x), \quad lS^I{}_K(x), \quad l\theta^\alpha(x).$$

Функция  $lS(x)$  подчиняется дифференциальному соотношению

$$D lS = d lS + \delta lS. \quad (23)$$

Аналогичные дифференциальные соотношения выполняются для координат вектора действия промежуточного объекта

$$D lS^I{}_K = d lS^I{}_K + \delta lS^I{}_K \quad (24)$$

и для параметров этого вектора

$$D l\theta^\alpha = d l\theta^\alpha + \delta l\theta^\alpha. \quad (25)$$

К вторым переменным левого калибровочного поля отнесем выражение

$$-\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\delta_l \mathbf{S}}{\partial x^L}(x)$$

и назовем его коэффициентами связности левого калибровочного поля. Учитывая выражение (1), получим

$$-\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\delta_l \mathbf{S}}{\partial x^L}(x) = \frac{\delta_l \mathbf{l}}{\partial x^L}(x) = \mathbf{\Gamma}_L = {}_l \mathbf{I}^{K_I} \cdot \mathbf{\Gamma}^I_{KL},$$

то есть коэффициенты связности левого калибровочного поля совпадают с коэффициентами связности левого кинематического поля.

Для параметрического представления имеем

$$\mathbf{\Gamma}_L(\varphi(x)) = -\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\delta_l \mathbf{S}}{\delta_l \theta^\alpha} \cdot \frac{\delta_l \theta^\alpha}{\partial x^L}(x) = -\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\delta_l \mathbf{S}}{\delta_l \theta^\alpha} \cdot {}_l A^\alpha_L, \quad (26)$$

где введенные величины

$${}_l A^\alpha_L(x) = \frac{\delta_l \theta^\alpha}{\partial x^L}(x)$$

определим как *потенциалы* левого калибровочного поля. Учитывая выражения (1), (2) и (3), вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\delta_l \mathbf{S}}{\delta_l \theta^\alpha} &= {}_l \mathbf{I}^{K_I} \cdot \frac{\delta_l S^I_K}{\delta_l \theta^\alpha} = {}_l \mathbf{I}^{K_I} \cdot \frac{\delta_l S^I_K}{\delta_l \varphi^\beta} \cdot \frac{\delta_l \varphi^\beta}{\delta_l \theta^\alpha} = \\ &= -{}_l \mathbf{I}^{K_I} \cdot S_0 \frac{\delta_l l^I_K}{\delta_l \varphi^\beta} \cdot \frac{\delta_l \varphi^\beta}{\delta_l \theta^\alpha} = -{}_l \mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_l K^I_{K\alpha} \cdot l g_\alpha. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в соотношение (26), получим

$$\mathbf{\Gamma}_L = {}_l \mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_l K^I_{K\alpha} \cdot \frac{l g_\alpha}{S_0} \cdot {}_l A^\alpha_L.$$

Сравнивая его с соотношением (22), получим соотношение, связывающее параметрические коэффициенты связности левого кинематического поля с потенциалами левого калибровочного поля:

$$\mathbf{\Gamma}^\alpha_L = \frac{l g_\alpha}{S_0} \cdot {}_l A^\alpha_L.$$

В результате к вторым переменным левого калибровочного поля отнесем: поле коэффициентов связности, поле координат коэффициентов связности, поле параметрических координат коэффициентов связности и поле потенциалов:

$$\mathbf{\Gamma}_L(x), \quad \mathbf{\Gamma}^I_{KL}(x), \quad \mathbf{\Gamma}^\alpha_L(x), \quad {}_l A^\alpha_L(x).$$

К вторым переменным левого калибровочного поля отнесем также величины

$$-\frac{1}{S_0} \cdot \frac{D_l \mathbf{S}}{\partial x^L}(x),$$

которые будем рассматривать как *преобразованные* коэффициенты связности и которые обозначены как

$$\mathbf{\Gamma}'_L = -{}_l \mathbf{I}^{K_I} \cdot \frac{1}{S_0} \cdot \frac{D_l S^I_K}{\partial x^L} = {}_l \mathbf{I}^{K_I} \cdot \mathbf{\Gamma}'^I_{KL}.$$

Аналогично для параметрического представления

$$A'^\alpha_L(x) = \frac{D_l \theta^\alpha}{\partial x^L}(x),$$

где  $A'^\alpha_L(x)$  – преобразованные потенциалы левого калибровочного поля.

Тогда из выражения (23) следует соотношение

$$\mathbf{\Gamma}'_L = -\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\partial_l \mathbf{S}}{\partial x^L} + \mathbf{\Gamma}_L,$$

называемое *калибровочным преобразованием* коэффициентов связности. Из выражений (24) и (25) следуют разновидности указанного преобразования

$$\mathbf{\Gamma}'^I_{KL} = -\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\partial_l S^I_K}{\partial x^L} + \mathbf{\Gamma}^I_{KL}$$

и

$${}_l A'^\alpha_L = \frac{\partial_l \theta^\alpha}{\partial x^L} + {}_l A^\alpha_L.$$

## 2. Правое калибровочное поле

Мы хотим воспользоваться подобием алгебры действия промежуточных объектов  ${}_r \mathbf{S}_1$  и алгебры линейных преобразований пространства-времени  ${}_r \mathbf{L}$  и построить правое калибровочное поле подобно правому кинематическому полю, рассмотренному в Разделе III.2. Главы 1.7. Поэтому сначала напомним представление о правом кинематическом поле.

### 2.1. Правое кинематическое поле

Правое кинематическое поле определяется тремя наборами переменных. Каждая из переменных зависит от точек пространства-времени.

К *первым* переменным правого кинематического поля отнесена зависимость линейного преобразования

$${}_r \mathbf{l}(x) = {}_r \mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_r l^I_K(x),$$

а для параметрического представления – это зависимость

$${}_r \mathbf{l}(\varphi(x)) = {}_r \mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_r l^I_K(\varphi(x)).$$

Таким образом, к первым переменным правого кинематического поля отнесены: поле линейного преобразования, поле координат и поле параметров линейного преобразования:

$${}_r \mathbf{l}(x), \quad {}_r l^I_K(x), \quad {}_r \varphi^\alpha(x).$$

Функция  ${}_r\mathbf{l}(x)$  подчиняется дифференциальному соотношению

$$D_r\mathbf{l} = d_r\mathbf{l} + \delta_r\mathbf{l}. \quad (27)$$

Здесь

$D$  – искривленный дифференциал,

$d$  – обыкновенный дифференциал,

$\delta$  – вариация.

Аналогичные дифференциальные соотношения выполняются для координат линейного преобразования

$$D_r l^I_K = d_r l^I_K + \delta_r l^I_K \quad (28)$$

и для параметров линейного преобразования

$$D_r \varphi^\alpha = d_r \varphi^\alpha + \delta_r \varphi^\alpha. \quad (29)$$

К *вторым* переменным правого кинематического поля отнесена вариационная производная от линейного преобразования

$$\frac{\delta_r \mathbf{l}}{\partial x^L}(x).$$

Она обозначена

$$\mathbf{A}_L = \frac{\delta_r \mathbf{l}}{\partial x^L}(x) = {}_r\mathbf{I}^{K_I} \cdot \frac{\delta_r l^I_K}{\partial x^L} = {}_r\mathbf{I}^{K_I} \cdot A^I_{KL}$$

и называется потенциалом правого кинематического поля.

Для параметрического представления

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_L(\varphi(x)) &= \frac{\delta_r \mathbf{l}}{\delta_r \varphi^\alpha} \cdot \frac{\delta_r \varphi^\alpha}{\partial x^L}(x) = \\ &= {}_r\mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_rK^I_{K\alpha} \cdot \frac{\delta_r \varphi^\alpha}{\partial x^L} = {}_r\mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_rK^I_{K\alpha} \cdot A^\alpha_L \end{aligned} \quad (30)$$

где  $A^\alpha_L$  – параметрические потенциалы.

Таким образом, к *вторым* переменным правого кинематического поля отнесены: поле потенциала, поле координат потенциала и поле параметрических потенциалов:

$$\mathbf{A}_L(x), \quad A^I_{KL}(x), \quad A^\alpha_L(x).$$

К *вторым* переменным правого кинематического поля отнесена также искривленная производная от линейного преобразования

$$\frac{D_r \mathbf{l}}{\partial x^L}(x),$$

которая рассматривается как *преобразованный* потенциал и который обозначен

$$\mathbf{A}'_L = \frac{D_r \mathbf{l}}{\partial x^L}(x) = {}_r\mathbf{I}^{K_I} \cdot \frac{D_r l^I_K}{\partial x^L} = {}_r\mathbf{I}^{K_I} \cdot A'^I_{KL}.$$

Аналогично для параметрического представления

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_L(\varphi(x)) &= \frac{D_r \mathbf{l}}{D_r \varphi^\alpha} \cdot \frac{D_r \varphi^\alpha}{\partial x^L}(x) = \\ &= {}_r\mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_rK^I_{K\alpha} \cdot \frac{D_r \varphi^\alpha}{\partial x^L} = {}_r\mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_rK^I_{K\alpha} \cdot A'^\alpha_L, \end{aligned}$$

где  $A'^\alpha_L$  – преобразованные параметрические потенциалы.

Тогда из выражения (27) следует соотношение

$$\mathbf{A}'_L = \frac{\partial_r \mathbf{l}}{\partial x^L} + \mathbf{A}_L,$$

называемое *калибровочным преобразованием* потенциала. Из выражений (28) и (29) следуют разновидности указанного преобразования

$$A'^I_{KL} = \frac{\partial_r l^I_K}{\partial x^L} + A'^I_{KL}$$

и

$$A'^\alpha_L = \frac{\partial_r \varphi^\alpha}{\partial x^L} + A^\alpha_L.$$

Кроме первых и вторых переменных правого кинематического поля, в Разделе III.2. Главы 1.7 введены третьи переменные правого кинематического поля, но здесь он не рассматривается.

Перейдем теперь к построению правого калибровочного поля, подобного правому кинематическому.

## 2.2. Правое калибровочное поле

Правое калибровочное поле определяется тремя наборами переменных. Каждая из переменных зависит от точек пространства-времени.

К *первым* переменным правого калибровочного поля отнесена зависимость вектора действия промежуточного объекта

$${}_r\mathbf{S}(x) = {}_r\mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_rS^I_K(x),$$

а для параметрического представления – это зависимость

$${}_r\mathbf{S}(\theta(x)) = {}_r\mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_rS^I_K(\theta(x)).$$

Таким образом, к *первым* переменным правого калибровочного поля отнесены: поле вектора действия промежуточного объекта, поле координат этого вектора и поле параметров представления этого вектора:

$${}_r\mathbf{S}(x), \quad {}_rS^I_K(x), \quad {}_r\theta^\alpha(x).$$

Функция  ${}_r\mathbf{S}(x)$  подчиняется дифференциальному соотношению

$$D_r\mathbf{S} = d_r\mathbf{S} + \delta_r\mathbf{S}. \quad (31)$$

Аналогичные дифференциальные соотношения выполняются для координат вектора действия промежуточного объекта

$$D_r S^I_K = d_r S^I_K + \delta_r S^I_K \quad (32)$$

и для параметров этого вектора

$$D_r \theta^\alpha = d_r \theta^\alpha + \delta_r \theta^\alpha. \quad (33)$$

К вторым переменным правого калибровочного поля отнесем выражение

$$-\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\delta_r \mathbf{S}}{\partial x^L}(x)$$

и назовем его потенциалом правого калибровочного поля. Учитывая выражение (10), получим

$$-\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\delta_r \mathbf{S}}{\partial x^L}(x) = \frac{\delta_r \mathbf{1}}{\partial x^L}(x) = \mathbf{A}_L = {}_r \mathbf{I}^{K_I} \cdot A^I_{KL},$$

то есть, потенциалы правого калибровочного поля совпадают с потенциалами правого кинематического поля.

Для параметрического представления имеем

$$\mathbf{A}_L(\varphi(x)) = -\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\delta_r \mathbf{S}}{\delta_r \theta^\alpha} \cdot \frac{\delta_r \theta^\alpha}{\partial x^L}(x) = -\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\delta_r \mathbf{S}}{\delta_r \theta^\alpha} \cdot {}_r A^\alpha_L, \quad (34)$$

где введенные величины

$${}_r A^\alpha_L(x) = \frac{\delta_r \theta^\alpha}{\partial x^L}(x)$$

определим как *параметрические потенциалы* правого калибровочного поля. Учтывая выражения (10), (11) и (12), вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\delta_r \mathbf{S}}{\delta_r \theta^\alpha} &= {}_r \mathbf{I}^{K_I} \cdot \frac{\delta_r S^I_K}{\delta_r \theta^\alpha} = {}_r \mathbf{I}^{K_I} \cdot \frac{\delta_r S^I_K}{\delta_r \varphi^\beta} \cdot \frac{\delta_r \varphi^\beta}{\delta_r \theta^\alpha} = \\ &= -{}_r \mathbf{I}^{K_I} \cdot S_0 \frac{\delta_r l^I_K}{\delta_r \varphi^\beta} \cdot \frac{\delta_r \varphi^\beta}{\delta_r \theta^\alpha} = -{}_r \mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_r K^I_{K\alpha} \cdot {}_r g_\alpha. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в соотношение (34), получим

$$\mathbf{A}_L = {}_r \mathbf{I}^{K_I} \cdot {}_r K^I_{K\alpha} \cdot \frac{{}_r g_\alpha}{S_0} \cdot {}_r A^\alpha_L.$$

Сравнивая его с равенством (30), получим соотношение, связывающее параметрические потенциалы правого кинематического поля с параметрическими потенциалами правого калибровочного поля

$$A^\alpha_L = \frac{{}_r g_\alpha}{S_0} \cdot {}_r A^\alpha_L.$$

В результате к вторым переменным правого калибровочного поля отнесем: поле потенциала, поле координат потенциала, поле параметрических потенциалов:

$$\mathbf{A}_L(x), \quad A^I_{KL}(x), \quad {}_r A^\alpha_L(x).$$

К вторым переменным правого калибровочного поля отнесем также величины

$$-\frac{1}{S_0} \cdot \frac{D_r \mathbf{S}}{\partial x^L}(x),$$

которые будем рассматривать как *преобразованные потенциалы* и которые обозначим

$$\mathbf{A}'_L = -{}_r \mathbf{I}^{K_I} \cdot \frac{1}{S_0} \cdot \frac{D_r S^I_K}{\partial x^L} = {}_r \mathbf{I}^{K_I} \cdot A'^I_{KL}.$$

Аналогично для параметрического представления

$$A'^\alpha_L(x) = \frac{D_r \theta^\alpha}{\partial x^L}(x),$$

где  $A'^\alpha_L(x)$  – преобразованные потенциалы правого калибровочного поля.

Тогда из выражения (31) следует соотношение

$$\mathbf{A}'_L = -\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\partial_r \mathbf{S}}{\partial x^L} + \mathbf{A}_L,$$

называемое *калибровочным преобразованием* потенциала. Из соотношений (32) и (33) следуют разновидности указанного преобразования

$$A'^I_{KL} = -\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\partial_r S^I_K}{\partial x^L} + A^I_{KL}$$

и

$${}_r A'^\alpha_L = \frac{\partial_r \theta^\alpha}{\partial x^L} + {}_r A^\alpha_L.$$

Кроме первых и вторых переменных правого калибровочного поля, необходимо ввести третьи переменные правого калибровочного поля, но здесь он не рассматривается.

### 3. Системообразующие постулаты

1. отождествим *левое калибровочное* поле (наравне с левым кинематическим полем) с полем *внешней симметрии*, рассматриваемым в современной физике. В частности, гравитационное поле относится к полю внешней симметрии и, следовательно, является частным случаем левого калибровочного поля.

2. отождествим *правое калибровочное* поле (наравне с правым кинематическим полем) с полем *внутренней симметрии*, рассматриваемым в современной физике. В частности, электромагнитное поле относится к полю внутренней симметрии и, следовательно, является частным случаем правого калибровочного поля.

## IV. ГРУППА ПОВОРОТОВ КАК КАЛИБРОВОЧНАЯ ГРУППА

Линейное преобразование  $\mathbf{S}$  вектора действия фундаментального объекта  $\mathbf{S}$  можно записать в виде произведения двух преобразований, одно из которых поворачивает вектор  $\mathbf{S}$ , не меняя его длины, а другое преобразование, напротив, сохраняет направление вектора  $\mathbf{S}$ , но изменяет его длину. Первое преобразование есть *поворот*, а второе преобразование есть *растяжение*. Далее рассмотрим случай, когда линейные преобразования  $\mathbf{S}$  представляют собой повороты.

Так как умножение в алгебре линейных преобразований  $\mathbf{S}_1$  некоммутативно, то следует различать левые

и правые повороты. В этом Разделе ограничимся рассмотрением *правых* поворотов. Для простоты указания на то, что векторы принадлежат правой алгебре, опустим.

### 1. Скалярное произведение. Длина вектора

На пространстве действия фундаментальных объектов  $\mathbb{S}$  определено скалярное произведение векторов. Для  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in \mathbb{S}$  скалярное произведение

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = (\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_K) (S_1)^I (S_2)^K = g_{IK} \cdot (S_1)^I (S_2)^K.$$

Величина

$$g_{IK} = \mathbf{e}_0 \cdot C^0_{IK}$$

есть *метрический тензор* в пространстве действия фундаментальных объектов  $\mathbb{S}$ .

Скалярное произведение вектора  $\mathbf{S}$  на себя есть квадрат его *длины*:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = g_{IK} \cdot S^I \cdot S^K \equiv S^2.$$

По определению квадрат длины дифференциала вектора действия фундаментального объекта равен нулю (см. Раздел V. Главы 1.3).

### 2. Правая калибровочная группа поворотов

Условие сохранения длины вектора  $\mathbf{S}$  линейным преобразованием  $\mathbf{S}$  группы поворотов записывается так:

$$\mathbf{S}(\mathbf{S}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}.$$

Отсюда

$$(\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_M) \cdot S^L_I \cdot S^M_K \cdot S^I \cdot S^K = (\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_K) \cdot S^I \cdot S^K$$

или

$$g_{LM} \cdot S^L_I \cdot S^M_K = g_{IK}$$

или

$$(g_{LM} \cdot S^M_K \cdot g^{KN}) \cdot S^L_I = \delta^N_I. \quad (35)$$

Если ввести *сопряженную* матрицу  $S^{*N}_L$  в соответствии с определением

$$S^{*N}_L = g_{LM} \cdot S^M_K \cdot g^{KN},$$

то условие принадлежности линейных преобразований к поворотам приобретает вид

$$S^{*N}_L = (S^{-1})^N_L.$$

Повороты составляют группу. Произведение поворотов есть поворот. Действительно, если

$$(\mathbf{S}_1)^{-1} = \mathbf{S}_1^*, \quad (\mathbf{S}_2)^{-1} = \mathbf{S}_2^*,$$

то для правого закона умножения в  $\mathbb{S}_1$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2$$

имеет место

$$\mathbf{S}^{-1} = (\mathbf{S}_2)^{-1} \circ (\mathbf{S}_1)^{-1} = \mathbf{S}_2^* \circ \mathbf{S}_1^* = (\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2)^* = \mathbf{S}^*.$$

Обратимся к параметрическому представлению правой группы поворотов, то есть будем рассматривать векторы  $\mathbf{S} \in \mathbb{S}_1$  в зависимости от безразмерных параметров  $\varphi^\alpha$ . Для группы поворотов такие параметры называются *углы поворота*. Кроме параметров  $\varphi^\alpha$ , будем рассматривать параметры  $\theta^\alpha$ , связанные с  $\varphi^\alpha$  соотношением (12):

$$\varphi^\alpha = \frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}.$$

Рассматривая однопараметрическое представление группы поворотов в соответствии с Разделом II.2, получим повороты вокруг оси, задаваемой базисным вектором  $\mathbf{I}$ . При этом возможны два случая, которым удовлетворяет квадрат базисного вектора  $\mathbf{I}$ . Поворот  $\mathbf{S}(\varphi)$ , где  $\varphi$  угол поворота вокруг оси  $\mathbf{I}$ , принимает вид

$$\mathbf{S}(\varphi) = S_0 \cdot (\mathbf{e}_0 \cdot \cos \varphi - \mathbf{I} \cdot \sin \varphi) \quad (36)$$

для

$$\mathbf{I}^2 = -\mathbf{e}_0$$

и

$$\mathbf{S}(\varphi) = S_0 \cdot (\mathbf{e}_0 \cdot \cosh \varphi - \mathbf{I} \cdot \sinh \varphi) \quad (37)$$

для

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{e}_0.$$

В частном случае, когда ось поворота определяется базисным вектором пространства действия  $\mathbb{S}$ , то есть

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_\alpha,$$

соотношения (36) и (37) преобразуются в следующие:

$$\mathbf{S}(\varphi^\alpha) = S_0 \cdot (\mathbf{e}_0 \cdot \cos \varphi^\alpha - \mathbf{e}_\alpha \cdot \sin \varphi^\alpha) \quad (38)$$

для

$$(\mathbf{e}_\alpha)^2 = -\mathbf{e}_0$$

и

$$\mathbf{S}(\varphi^\alpha) = S_0 \cdot (\mathbf{e}_0 \cdot \cosh \varphi^\alpha - \mathbf{e}_\alpha \cdot \sinh \varphi^\alpha) \quad (39)$$

для

$$(\mathbf{e}_\alpha)^2 = \mathbf{e}_0.$$

От зависимости  $\mathbf{S}(\varphi^\alpha)$  перейдем к зависимости  $\mathbf{S}(\theta^\alpha)$ :

$$\mathbf{S}(\theta^\alpha) = S_0 \cdot \left( \mathbf{e}_0 \cos\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) - \mathbf{e}_\alpha \sin\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) \right) \quad (40)$$

для  $(\mathbf{e}_\alpha)^2 = -1$  ;

$$\mathbf{S}(\theta^\alpha) = S_0 \cdot \left( \mathbf{e}_0 \cosh\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) - \mathbf{e}_\alpha \sinh\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) \right) \quad (41)$$

для  $(\mathbf{e}_\alpha)^2 = 1$ . (Здесь по  $\alpha$  нет суммирования).

Пусть повороты осуществляются в подпространстве пространства действия  $\mathbb{S}$ , построенном на базисных векторах  $\mathbf{e}_\alpha$ . Это подпространство обозначим  $\mathbb{S}_\alpha$ . Углы базисных поворотов обозначаются соответственно  $\varphi^\alpha$ . Оси базисных поворотов определяются базисными векторами  $\mathbf{e}_\alpha$  пространства действия фундаментальных объектов. Подпространство  $\mathbb{S}_\alpha$  является правой алгеброй, для которой закон композиции базисных векторов запишем так:

$$\mathbf{e}_\beta \circ \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\gamma \cdot {}_r C^\gamma_{\beta\alpha}. \quad (42)$$

Повороты  $\mathbf{S}$  представляются векторами этой алгебры. Для этой алгебры из условия ассоциативности имеем

$${}_r C^{\kappa}_{\lambda\alpha} \cdot {}_r C^\lambda_{\mu\beta} = {}_r C^{\kappa}_{\mu\gamma} \cdot {}_r C^\gamma_{\beta\alpha}. \quad (43)$$

Отсюда следует регулярное параметрическое представление алгебры  $\mathbb{S}_\alpha$

$$\mathbf{e}_\alpha \sim {}_r C^\gamma_{\beta\alpha}.$$

Матрицы поворота в алгебре  $\mathbb{S}_\alpha$  имеют вид

$$S^\gamma_{\beta}(\theta^\alpha) = S_0 \cdot \left( \delta^\gamma_{\beta} \cdot \cos\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) - {}_r C^\gamma_{\beta\alpha} \cdot \sin\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) \right) \quad (44)$$

для  $(\mathbf{e}_\alpha)^2 = -1$  ;

$$S^\gamma_{\beta}(\theta^\alpha) = S_0 \cdot \left( \delta^\gamma_{\beta} \cdot \cosh\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) - {}_r C^\gamma_{\beta\alpha} \cdot \sinh\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) \right) \quad (45)$$

для  $(\mathbf{e}_\alpha)^2 = 1$ .

Алгебра  $\mathbb{S}_\alpha$  является пространством неприводимого представления группы поворотов. Матрицы  ${}_r C^\gamma_{\beta\alpha}$  являются *генераторами* правой группы поворотов в пространстве неприводимого представления.

Если пространством представления правой группы поворотов является пространство действия фундаментальных объектов, то соотношение (43) принимает вид

$${}_r C^K_{L\beta} \cdot {}_r C^L_{I\alpha} = {}_r C^K_{I\gamma} \cdot {}_r C^\gamma_{\alpha\beta}. \quad (46)$$

В этом случае *параметрическое представление* алгебры поворотов записывается так

$$\mathbf{e}_\alpha \sim {}_r C^L_{I\alpha}.$$

Матрицы поворота в пространстве действия таковы:

$$S^L_{K}(\theta^\alpha) = S_0 \cdot \left( \delta^L_{K} \cdot \cos\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) - {}_r C^L_{K\alpha} \cdot \sin\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) \right) \quad (47)$$

для  $(\mathbf{e}_\alpha)^2 = -1$  ;

$$\begin{aligned} S^L_{K}(\theta^\alpha) &= \\ &= S_0 \cdot \left( \delta^L_{K} \cdot \cosh\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) - {}_r C^L_{K\alpha} \cdot \sinh\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{S_0}\right) \right) \end{aligned} \quad (48)$$

для  $(\mathbf{e}_\alpha)^2 = 1$ .

Генераторами группы поворотов служат матрицы  ${}_r C^L_{K\alpha}$ .

Рассмотрим дифференциал  $d\mathbf{S}$  вблизи единицы калибровочной подгруппы:

$$d\mathbf{S}(x) = \mathbf{I}^K_L \cdot \frac{\partial S^L_{K}(\theta^\alpha)}{\partial \theta^\alpha} \cdot \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^M} \cdot dx^M. \quad (49)$$

В результате получим

$$d\mathbf{S}(x) = -\mathbf{I}^K_L \cdot {}_r C^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^M} \cdot dx^M. \quad (50)$$

Базисные векторы осей поворотов

$$\mathbf{I}^K_L \cdot {}_r C^L_{K\alpha} \quad (51)$$

представляют собой базисные векторы  $\mathbf{e}_\alpha$  в пространстве действия фундаментальных объектов. С помощью них дифференциал вектора поворота записывается следующим образом:

$$d\mathbf{S}(x) = -\mathbf{e}_\alpha \cdot g_\alpha \cdot \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^M} \cdot dx^M.$$

Рассмотрим теперь вариацию  $\delta\mathbf{S}$  вблизи единицы калибровочной группы:

$$\delta\mathbf{S}(x) = \mathbf{I}^K_L \cdot \frac{\delta S^L_{K}(\theta^\alpha)}{\delta \theta^\alpha} \cdot \frac{\delta \theta^\alpha}{\partial x^M} \cdot dx^M. \quad (52)$$

В результате получим

$$\delta\mathbf{S}(x) = -\mathbf{I}^K_L \cdot {}_r C^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot \frac{\delta \theta^\alpha}{\partial x^M} \cdot dx^M. \quad (53)$$

Функция

$$A^\alpha_M(x) = \frac{\delta \theta^\alpha}{\partial x^M}$$

есть *потенциал* правого калибровочного поля, или поля внутренней симметрии. С учетом введенных величин имеем

$$\delta\mathbf{S}(x) = -\mathbf{I}^K_L \cdot {}_r C^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot dx^M = -\mathbf{e}_\alpha \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot dx^M.$$



Для координат этого вектора

$$\delta S_K^L = - {}_r C_{K\alpha}^L \cdot g_\alpha \cdot A_M^{\alpha} \cdot dx^M. \quad (54)$$

В том случае, когда фундаментальная частица участвует во взаимодействиях нескольких типов, определяемых несколькими группами поворотов, вариация записывается так:

$$\delta S_K^L = - \sum_i g_{\alpha_i} \cdot {}_r C_{K\alpha_i}^L \cdot A_M^{\alpha_i} \cdot dx^M, \quad (55)$$

где индекс  $i$  нумерует типы взаимодействий и соответственно подгруппы калибровочных преобразований;  $A_M^{\alpha_i}$  есть потенциал правого калибровочного поля (поля внутренней симметрии), соответствующего  $i$ -ой подгруппе; суммирование проводится по всем взаимодействиям.

Поворот вокруг произвольной оси  $\mathbf{I}$  может быть разложен по базисным поворотам:

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_\alpha \cdot C^\alpha. \quad (56)$$

Здесь  $C^\alpha$  – "направляющие косинусы" базисного вектора оси поворота  $\mathbf{I}$

$$C^\alpha = \left. \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}.$$

Из выражения (56) вытекает условие, которому удовлетворяют "направляющие косинусы":

$$(\mathbf{I})^2 = (\mathbf{e}_\alpha)^2 \cdot (C^\alpha)^2. \quad (57)$$

В этом случае вариация

$$\delta \mathbf{S}(x^I) = - \mathbf{I}^K \cdot {}_r C_{K\alpha}^L \cdot C^\alpha \cdot g \cdot A_M \cdot dx^M,$$

где потенциал правого калибровочного поля является однокомпонентным

$$A_M = \frac{\delta \varphi}{\partial x^M}.$$

Для координат этого вектора имеем

$$\delta S_K^L = - {}_r C_{K\alpha}^L \cdot C^\alpha \cdot g \cdot A_M \cdot dx^M. \quad (58)$$

В том случае, когда фундаментальный объект участвует во взаимодействиях нескольких типов, определяемых несколькими осями поворотов, вариация записывается так:

$$\delta S_K^L = - \sum_i g_i \cdot {}_r C_{K\alpha_i}^L \cdot C^{\alpha_i} \cdot A_M^i \cdot dx^M, \quad (59)$$

где индекс  $i$  нумерует типы взаимодействий и соответственно оси поворотов;  $A_M^i$  есть потенциал правого калибровочного поля, соответствующий  $i$ -ой оси поворота; суммирование проводится по всем осям поворотов (всем взаимодействиям).

### 3. Повороты в пространстве действия лептонов (алгебре Клиффорда)

Перейдем от пространства действия фундаментальных объектов  $\mathbb{S}$  к пространству действия лептонов  $\mathbb{C}_4$  и к группе поворотов в этом пространстве. Для этого необходимо положить

$$S_0 = \hbar, \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon},$$

а матрицы  ${}_r C_{K\alpha}^L$  отождествить со структурными матрицами правой алгебры Клиффорда.

В результате представление поворотов в алгебре Клиффорда векторами этой алгебры записывается так:

$$\mathbf{S}(\theta^\alpha) = \hbar \cdot \left( \varepsilon_0 \cos\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{\hbar}\right) - \varepsilon_\alpha \sin\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{\hbar}\right) \right) \quad (60)$$

для  $(\varepsilon_\alpha)^2 = -1$  ;

$$\mathbf{S}(\theta^\alpha) = \hbar \cdot \left( \varepsilon_0 \cosh\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{\hbar}\right) - \varepsilon_\alpha \sinh\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{\hbar}\right) \right) \quad (61)$$

для  $(\varepsilon_\alpha)^2 = 1$  .

Таким образом, для базисных векторов осей поворотов имеем

$$\mathbf{I}^K \cdot {}_r C_{K\alpha}^L = \varepsilon_\alpha.$$

Матрицы поворота пространства алгебры Клиффорда вокруг оси, задаваемой вектором  $\varepsilon_\alpha$ , записываются так:

$$S_K^L(\theta^\alpha) = \hbar \cdot \left( \delta_K^L \cdot \cos\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{\hbar}\right) - {}_r C_{K\alpha}^L \cdot \sin\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{\hbar}\right) \right) \quad (62)$$

для  $(\varepsilon_\alpha)^2 = -1$  ;

$$S_K^L(\theta^\alpha) = \hbar \cdot \left( \delta_K^L \cdot \cosh\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{\hbar}\right) - {}_r C_{K\alpha}^L \cdot \sinh\left(\frac{g_\alpha \cdot \theta^\alpha}{\hbar}\right) \right) \quad (63)$$

для  $(\varepsilon_\alpha)^2 = 1$ ; по индексу  $\alpha$  нет суммирования.

Матрицы поворота пространства алгебры Клиффорда вокруг оси, задаваемой вектором  $\mathbf{I}$ , записываются так:

$$S_K^L(\theta) = \hbar \cdot \left( \delta_K^L \cdot \cos\left(\frac{g \cdot \theta}{\hbar}\right) - {}_r C_{K\alpha}^L \cdot C^\alpha \cdot \sin\left(\frac{g \cdot \theta}{\hbar}\right) \right) \quad (64)$$

для  $(\mathbf{I})^2 = -1$  ;

$$S_K^L(\theta) = \hbar \cdot \left( \delta_K^L \cdot \cosh\left(\frac{g \cdot \theta}{\hbar}\right) - {}_r C_{K\alpha}^L \cdot C^\alpha \cdot \sinh\left(\frac{g \cdot \theta}{\hbar}\right) \right) \quad (65)$$

для  $(\mathbf{I})^2 = 1$  .

В дальнейшем нас будут интересовать две калибровочные группы.

1. Поворот в алгебре Клиффорда вокруг оси, задаваемой базисным вектором

$$\varepsilon_{21}.$$

В этом случае пространством неприводимого представления группы поворотов является алгебра Клиффорда  $\mathbb{C}_1$ , построенная на базисных векторах

$$\varepsilon_0, \varepsilon_{21}.$$

Эта алгебра изоморфна алгебре комплексных чисел и, следовательно, рассматриваемая группа поворотов изоморфна группе  $U(1)$ .

Генератором группы поворотов в пространстве действия лептонов является матрица

$$rC_{K21}^L = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \begin{array}{cccc} 13 & 0 & 14 & 34 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 134 \\ & & & 4 \end{array} & & & & \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline -1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & -1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & -1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & & -1 \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & & -1 \\ \hline \end{array} & & & & \\ \end{array} \\ \\ = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 13 & 14 \end{array} & \begin{array}{cc} 123 & 124 \\ 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \\ \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 34 & 124 \\ 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline & & \mathbb{1} \\ \hline & & & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array} \end{array}$$

2. Повороты в алгебре Клиффорда вокруг осей, задаваемых базисными векторами

$$\varepsilon_4, \varepsilon_{123}, \varepsilon_{1324}.$$

В этом случае пространством неприводимого представления группы поворотов является алгебра Клиффорда  $\mathbb{C}_2$ , построенная на базисных векторах

$$\varepsilon_0, \varepsilon_4, \varepsilon_{123}, \varepsilon_{1324},$$

а группа поворотов изоморфна группе  $SU(2)$ .

Генераторами группы поворотов в пространстве действия лептонов являются матрицы

$$rC_{K4}^L = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \begin{array}{cccc} 13 & 0 & 14 & 34 \\ 32 & 21 & 42 & 1324 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 134 \\ & & & 4 \end{array} & & & & \\ \begin{array}{c} 32 \\ 13 \\ 21 \\ 0 \\ 42 \\ 14 \\ 1324 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 123 \\ 134 \\ 234 \\ 4 \\ 124 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 1 \\ \hline & & & -1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline & & & & -1 \\ \hline & & -1 & & \\ \hline & & 1 & & \\ \hline & & & -1 & \\ \hline & & & 1 & \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & & -1 \\ \hline \end{array} & & & & \\ \end{array} \\ \\ = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 34 \\ 13 & 14 \end{array} & \begin{array}{cc} 123 & 124 \\ 2 & 134 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & -1 \\ \hline & -1 & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & -1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & -1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 234 \\ 124 \end{array} \\ \end{array} = i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 34 & 124 \\ 0 & 123 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbb{1} \\ \hline & -\mathbb{1} \\ \hline & & \mathbb{1} \\ \hline & & -\mathbb{1} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 34 \\ 123 \\ 124 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & -1 & & & \\
 13 & & & & & & -1 & & \\
 21 & & & & & & & -1 & \\
 0 & & & & & & & & -1 \\
 42 & & & & & & & 1 & \\
 14 & & & & & & & & 1 \\
 1324 & & & & & & & & 1 \\
 34 & & & & & & & & 1 \\
 1 & 1 & & & & & & & \\
 2 & & 1 & & & & & & \\
 3 & & & 1 & & & & & \\
 123 & & & & 1 & & & & \\
 134 & & & & & -1 & & & \\
 234 & & & & & & -1 & & \\
 4 & & & & & & & -1 & \\
 124 & & & & & & & & -1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & 14 & 2 & 134 & \\
 & & & & -1 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 1 \\
 1 & & & & 1 \\
 & 1 & & & \\
 & & & & -1 \\
 & & & & -1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & 34 & 124 \\
 & 0 & 123 \\
 & & & -1 \\
 & & & 1 \\
 1 & & & \\
 & 1 & & \\
 & & & -1 \\
 & & & -1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 124
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 124
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 = I$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 234 & 124 \\
 & 32 & 21 & 42 & 1324 & 1 & 3 & 134 & 4 \\
 32 & & & & & 1 & & & \\
 13 & & & & & & -1 & & \\
 21 & & & & & & & 1 & \\
 0 & & & & & & & & -1 \\
 42 & & & & & & & & 1 \\
 14 & & & & & & & & 1 \\
 1324 & & & & & & & & 1 \\
 34 & & & & & & & & 1 \\
 1 & & & & & & & & 1 \\
 2 & & & & & & & & -1 \\
 3 & & & & & & & & 1 \\
 123 & & & & & & & & -1 \\
 134 & & & & & & & 1 & \\
 234 & & & & & & & -1 & \\
 4 & & & & & & & & 1 \\
 124 & & & & & & & & -1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\
 13 & 14 & 2 & 134 & \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 1 \\
 1 & & & & 1 \\
 & 1 & & & \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & 34 & 124 \\
 & 0 & 123 \\
 & & & 1 \\
 & & & 1 \\
 1 & & & \\
 & 1 & & \\
 & & & 1 \\
 & & & 1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 124
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 13 \\ 0 \\ 14 \\ 34 \\ 2 \\ 123 \\ 124
 \end{array}
 \end{array}
 = i$$

### V. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ С ПОЛЕМ ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ

#### 1. Алгебра действия фундаментальной частицы и правого калибровочного поля

Считаем, что пространство действия фундаментальной частицы и правого калибровочного поля<sup>1</sup> представляет собой сумму двух векторных пространств: действия фундаментальной частицы  ${}_r\mathbf{S}$  и действия калибровочного поля  ${}_r\mathbf{S}_1$ . Иначе говоря, вектор действия в этом случае представлен суммой двух составляющих

$${}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}.$$

Здесь вектор  ${}_r\mathbf{S} \in {}_r\mathbf{S}$ , а вектор  ${}_r\mathbf{S} \in {}_r\mathbf{S}_1$ .

Векторы  ${}_r\mathbf{S}$  и  ${}_r\mathbf{S}$  допускают разложение по базисным векторам

$${}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rS^K, \quad {}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{I}^L_K \cdot {}_rS^K_L.$$

<sup>1</sup> Напомним, что правое калибровочное поле отождествляется с полем внутренней симметрии.

Таким образом, вектор действия в  $({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}_1)$  может быть разложен по базисным векторам следующим образом:

$${}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rS^K + {}_r\mathbf{I}^L_K \cdot {}_rS^K_L.$$

Закон умножения векторов действия в алгебре  ${}_r\mathbf{T} = {}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}_1$  запишем так:

$${}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} ({}_r\mathbf{S}_1 + {}_r\mathbf{S}_1) \circ ({}_r\mathbf{S}_2 + {}_r\mathbf{S}_2). \quad (66)$$

где  $S_0$  есть постоянная, имеющая размерность действия.

Это умножение определено, если определено умножение пар векторов каждого вида. Эти произведения, в свою очередь, определены, если определены произведения соответствующих базисных векторов. В Разделе I.3. Главы 1.6. мы записали законы умножения базисных векторов  ${}_r\mathbf{e}$  и  ${}_r\mathbf{I}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_I &= {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L_{KI}, \\ {}_r\mathbf{I}^L_K \circ {}_r\mathbf{I}^I_M &= \delta^I_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L_M, \\ {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I_M &= \delta^I_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M, \\ {}_r\mathbf{I}^I_M \circ {}_r\mathbf{e}_K &= 0. \end{aligned} \quad (67)$$

В результате множество векторов  ${}_r\mathbf{T} = {}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}_1$  становится алгеброй, подобной правой кинематической алгебре  ${}_r\mathbf{T} = {}_r\mathbf{X} + {}_r\mathbf{L}$ .

## 2. Уравнение структуры алгебры действия фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии

Как и для всякой алгебры, для алгебры действия  ${}_r\mathbf{T} = {}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}_1$  имеет место уравнение структуры

$$d_2 d_1 ({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}) = \frac{1}{S_0} \cdot d_1 ({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}) \circ d_2 ({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}). \quad (68)$$

Для того чтобы получить из этого уравнения уравнение структуры алгебры действия фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии, необходимо рассмотреть проекцию этого уравнения на пространство действия фундаментальной частицы  ${}_r\mathbf{S}$ . В результате получим

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} \cdot d_1 {}_r\mathbf{S} \circ d_2 ({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}). \quad (69)$$

Далее необходимо учесть, что дифференциал действия поля внутренней симметрии является вариацией, поэтому уравнение (69) нужно переписать так:

$$d_2 d_1 {}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} \cdot d_1 {}_r\mathbf{S} \circ (d_2 {}_r\mathbf{S} + \delta_2 {}_r\mathbf{S}). \quad (70)$$

Подставим в соотношение (70) выражения дифференциалов через дифференциалы координат

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{e}_L \cdot d_2 d_1 {}_rS^L &= \frac{1}{S_0} \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_I) d_1 {}_rS^K d_2 {}_rS^I + \\ &+ \frac{1}{S_0} \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I_M) d_1 {}_rS^K \delta_2 {}_rS^M_I. \end{aligned}$$

Пользуясь законом умножения базисных векторов (??), получим уравнение структуры в координатной форме

$$d_2 d_1 {}_rS^L = \frac{1}{S_0} {}_rC^L_{KI} \cdot d_2 {}_rS^I \cdot d_1 {}_rS^K + \frac{1}{S_0} \delta_2 {}_rS^L_I \cdot d_1 {}_rS^I. \quad (71)$$

## 3. Квантовые постулаты для фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии

Уравнения структуры по существу и есть квантовые постулаты, на которых строится квантовая механика фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии. Перейдем к более привычной записи квантовых постулатов, используя переобозначения

$$d_1 {}_r\mathbf{S} = \psi, \quad d_2 = d, \quad \delta_2 = \delta.$$

Здесь  $\psi$  есть волновая функция фундаментальной частицы, которая представляет собой частный дифференциал вектора действия фундаментальной частицы.

Тогда вместо выражения (70) получим

$$d\psi = \frac{1}{S_0} \psi \circ (d {}_r\mathbf{S} + \delta {}_r\mathbf{S}),$$

а вместо выражения (71) получим

$$d\psi^L = \frac{1}{S_0} {}_rC^L_{KI} \cdot d {}_rS^I \cdot \psi^K + \frac{1}{S_0} \delta {}_rS^L_K \cdot \psi^K. \quad (72)$$

Если учесть, что

$$d {}_r\mathbf{S} = -{}_rP_M \cdot dx^M, \quad \delta {}_r\mathbf{S} = -{}_rM_M \cdot dx^M$$

и

$$d {}_rS^I = -{}_rP^I_M \cdot dx^M,$$

$$\delta {}_rS^L_K = -{}_r g_\alpha \cdot {}_rK^L_{K\alpha} \cdot A^\alpha_M \cdot dx^M,$$

то получим квантовые постулаты в векторном виде

$$d\psi = -\frac{1}{S_0} \psi \circ ({}_rP_M + {}_rM_M) dx^M$$

и в координатном виде

$$\begin{aligned} d\psi^L &= -\frac{1}{S_0} {}_rC^L_{KI} \cdot {}_rP^I_M \cdot dx^M \cdot \psi^K - \\ &- \frac{1}{S_0} {}_r g_\alpha \cdot {}_rK^L_{K\alpha} \cdot A^\alpha_M \cdot dx^M \cdot \psi^K. \end{aligned} \quad (73)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \partial_M \psi^L + \frac{1}{S_0} r g_\alpha \cdot r K^L_{K\alpha} \cdot r g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot \psi^K &= \\ = -\frac{1}{S_0} r C^L_{KI} \cdot r p^I_M \cdot \psi^K. \end{aligned} \quad (74)$$

Эти уравнения есть *квантовые постулаты* для фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии.

Для случая, когда фундаментальная частица участвует во взаимодействиях внутренней симметрии нескольких ( $i$ ) типов, имеем

$$\delta_r S^L_K = - \sum_i r g_{\alpha_i} \cdot r K^L_{K\alpha_i} \cdot A^{\alpha_i}_M \cdot dx^M.$$

В результате получим квантовые постулаты для указанного случая

$$\begin{aligned} \partial_M \psi^L + \frac{1}{S_0} \left( \sum_i r g_{\alpha_i} \cdot r K^L_{K\alpha_i} \cdot A^{\alpha_i}_M \right) \cdot \psi^K &= \\ = -\frac{1}{S_0} r C^L_{KI} \cdot r p^I_M \cdot \psi^K. \end{aligned} \quad (75)$$

#### 4. Квантовое уравнение для фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии

При выводе квантового уравнения для фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии воспользуемся соотношениями (74) и (75). Умножим обе части уравнения (74) на структурные константы  ${}_i C^{MN}_L$ , выполнив соответствующие суммирования. Получим

$$\begin{aligned} {}_i C^{MN}_L \cdot \left( \partial_M \psi^L + \frac{1}{S_0} r g_\alpha \cdot r K^L_{K\alpha} \cdot A^\alpha_M \cdot \psi^K \right) &= \\ = -\frac{1}{S_0} {}_i C^{MN}_L \cdot r C^L_{KI} \cdot r p^I_M \cdot \psi^K. \end{aligned} \quad (76)$$

Это уравнение есть *квантовое уравнение для фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии*.

Из выражения (75) получим квантовое уравнение для фундаментальной частицы, участвующей во взаимодействиях нескольких ( $i$ ) типов:

$$\begin{aligned} {}_i C^{MN}_L \left( \partial_M \psi^L + \frac{1}{S_0} \left( \sum_i r g_{\alpha_i} \cdot r K^L_{K\alpha_i} \cdot A^{\alpha_i}_M \right) \psi^K \right) &= \\ = -\frac{1}{S_0} {}_i C^{MN}_L \cdot r C^L_{KI} \cdot r p^I_M \cdot \psi^K. \end{aligned} \quad (77)$$

#### 5. Квантовое уравнение для лептонов в поле внутренней симметрии

Обратимся к квантовому уравнению для фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии (76).

Перейдем от пространства действия  ${}_r \mathbb{S}$  к пространству действия лептонов  ${}_r \mathbb{C}_4$  и к группе поворотов в этом пространстве (см. Раздел IV.3). Для этого необходимо положить

$$S_0 = \hbar,$$

а матрицы  ${}_r K^L_{K\alpha}$  отождествить со структурными матрицами алгебры Клиффорда:

$${}_r K^L_{K\alpha} = r C^L_{K\alpha}.$$

Далее будем рассматривать два случая.

1. Волновая функция  $\psi(x)$  и потенциалы зависят только от координат пространства-времени СТО  $X$ .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} {}_i C^{mN}_L \cdot \left( \partial_m \psi^L + \frac{r g_\alpha}{\hbar} \cdot r C^L_{K\alpha} \cdot A^\alpha_m \cdot \psi^K \right) &= \\ = -\frac{1}{\hbar} {}_i C^{MN}_L \cdot r C^L_{KI} \cdot r p^I_M \cdot \psi^K. \end{aligned} \quad (78)$$

Здесь  $m = 1, 2, 3, 4$ . В этом уравнении  ${}_i C^{mK}_L$  есть структурные матрицы пространства-времени  $X$  в пространстве лептонов  $\mathbb{C}_4$ .

2. Волновая функция  $\psi(x)$  зависит только от координат пространства-времени СТО  $X$ , а потенциалы зависят от координат обобщенного пространства-времени  $X$ .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} {}_i C^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L + {}_i C^{MN}_L \cdot \frac{r g_\alpha}{\hbar} \cdot r C^L_{K\alpha} \cdot A^\alpha_M \cdot \psi^K &= \\ = -\frac{1}{\hbar} {}_i C^{MN}_L \cdot r C^L_{KI} \cdot r p^I_M \cdot \psi^K. \end{aligned} \quad (79)$$

Это уравнение и есть квантовое уравнение для лептонов в поле внутренней симметрии.

Далее в соответствии с Разделом VIII. Главы 4.4. положим, что обобщенный импульс  $r p^I_M$  имеет только две компоненты

$$p^0_0 = -\partial_0 S^0 = \frac{m c}{2}, \quad p^{34}_0 = -\partial_0 S^{34} = \frac{m c}{2}.$$

Подставив введенные величины в уравнение (78), получим квантовое уравнение для лептонов в поле внутренней симметрии в окончательном виде:

$$\begin{aligned} {}_i C^{mN}_L \cdot \left( \partial_m \psi^L + \frac{r g_\alpha}{\hbar} \cdot r C^L_{K\alpha} \cdot A^\alpha_m \cdot \psi^K \right) &+ \\ + \frac{m c}{2 \hbar} (\delta^N_K + r C^N_{K34}) \psi^K &= 0. \end{aligned} \quad (80)$$

Здесь учтено, что

$${}_i C^{0N}_L = \delta^N_L \quad \text{и} \quad r C^L_{K0} = \delta^L_K.$$

Из выражения (79) получим квантовое уравнение для лептонов, участвующих во взаимодействиях нескольких ( $i$ ) типов, например в электромагнитном и слабом взаимодействиях:

$$\begin{aligned} {}_i C^{mN}_L \cdot \partial_m \psi^L + {}_i C^{MN}_L \cdot \left( \sum_i \frac{r g_{\alpha_i}}{\hbar} \cdot r C^L_{K\alpha_i} \cdot A^{\alpha_i}_M \right) \cdot \psi^K &+ \\ + \frac{m c}{2 \hbar} (\delta^N_K + r C^N_{K34}) \psi^K &= 0. \end{aligned} \quad (81)$$

## VI. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЕПТОНОВ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

### 1. Уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле

В этом Разделе основным будет уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле. Полагаем, что взаимодействие электрона с электромагнитным полем связано с преобразованием действия электрона калибровочной группой специального вида. Будем полагать, что эта группа есть группа поворотов, и будем называть ее *электрической*.

Поставим следующую задачу: путем сравнения уравнения Дирака с уравнением (80) определить (идентифицировать) электрическую группу. Для того, чтобы сравнить уравнение (80) с уравнением Дирака, надо обратиться к первому сжатому представлению уравнения (80). В принятых в Разделе VII. Главы 4.4. обозначениях уравнение (80) в первом сжатом представлении записывается следующим образом:

$${}_i C^{mN_1}_{L_1} \cdot \left( \partial_m \psi^{L_1} + \frac{r g_\alpha}{\hbar} \cdot {}_r C^{L_1}_{K_1 \alpha} \cdot A_m^\alpha \cdot \psi^{K_1} \right) + \frac{m c}{2 \hbar} (\delta^{N_1}_{K_1} + {}_r C^{N_1}_{K_1 34}) \psi^{K_1} = 0. \quad (82)$$

Для *действительного* первого сжатого представления индексы с цифрой 1 внизу ( $A_1, B_1, I_1, K_1, L_1$ ) принимают значения

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

Для *комплексного* первого сжатого представления индексы с цифрой 1 внизу ( $A_1, B_1, I_1, K_1, L_1$ ) принимают значения

$$(13, 0, 2, 123).$$

Для *кватернионного* первого сжатого представления индексы с цифрой 1 внизу ( $A_1, B_1, I_1, K_1, L_1$ ) принимают значения

$$(0, 123).$$

В Разделе IV.1. Главы 4.3. было установлено, что

$${}_r C^{N_1}_{K_1 34} = \delta^{N_1}_{K_1}.$$

Поэтому уравнение (82) принимает следующий вид:

$${}_i C^{mN_1}_{L_1} \cdot \left( \partial_m \psi^{L_1} + \frac{r g_\alpha}{\hbar} \cdot {}_r C^{L_1}_{K_1 \alpha} \cdot A_m^\alpha \cdot \psi^{K_1} \right) + \frac{m c}{\hbar} \psi^{N_1} = 0. \quad (83)$$

Полученное уравнение сравним с уравнением Дирака для электрона в электромагнитном поле, которое запишем в тех же обозначениях:

$${}_i C^{mN_1}_{L_1} \cdot \left( \partial_m \psi^{L_1} + \frac{i \cdot e}{c \cdot \hbar} \cdot A_m \cdot \psi^{L_1} \right) + \frac{m c}{\hbar} \psi^{N_1} = 0, \quad (84)$$

где

$e$  – заряд электрона;

$A_m$  – потенциал электромагнитного поля.

Входящие в уравнение (83) и в уравнение Дирака (84) матрицы  ${}_i C^{mN_1}_{L_1}$  одинаковы. Приведем эти матрицы для кватернионного представления<sup>2</sup>

$$C^{4A_1}_{B_1} \sim -i \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 123 \\ \hline \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 123 \end{array}, \quad C^{1A_1}_{B_1} \sim i \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 123 \\ \hline \sigma^1 & -\sigma^1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 123 \end{array},$$

$$C^{2A_1}_{B_1} \sim i \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 123 \\ \hline \sigma^2 & -\sigma^2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 123 \end{array}, \quad C^{3A_1}_{B_1} \sim i \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 123 \\ \hline \sigma^3 & -\sigma^3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 123 \end{array}.$$

Сравнение уравнения (83) с уравнением Дирака (84) показывает, что эти уравнения совпадут, если, во-первых, положить

$$r g_\alpha = \frac{e}{c}$$

и, во-вторых, положить

$${}_r C^{L_1}_{K_1 \alpha} = i \cdot \delta^{L_1}_{K_1}.$$

После этого задача сводится к тому, чтобы среди матриц алгебры Клиффорда  ${}_r C_4$  в первом сжатом комплексном представлении найти матрицу  ${}_r C^{L_1}_{K_1 \alpha}$ , которая имеет вышеуказанный вид. Из результатов Раздела IV.1. Главы 4.3. следует, что такая матрица существует и это матрица

$${}_r C^{L_1}_{K_1 21},$$

то есть  $\alpha = 21$ . Таким образом, электрическая группа – это группа поворотов в пространстве действия электрона относительно оси  ${}_r \varepsilon_{21}$ . Она имеет вид

$${}_r S(\theta) = \hbar \cdot \left( \varepsilon_0 \cdot \cos \left( \frac{e \cdot \theta}{c \cdot \hbar} \right) - {}_r \varepsilon_{21} \cdot \sin \left( \frac{e \cdot \theta}{c \cdot \hbar} \right) \right)$$

Эта группа изоморфна группе  $U(1)$ .

В заключении этого Раздела запишем уравнение Дирака через правые и левые компоненты волновой функции электрона. Такая запись сделает дальнейшие выкладки менее громоздкими.

Опираясь на Раздел IX.1. Главы 4.4., запишем уравнение Дирака в кватернионном представлении

$$\left( -i \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline \end{array} \left( \partial_4 + \frac{i \cdot e \cdot A_4}{c \cdot \hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline \end{array} \right) + \right. \\ \left. + i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^a \\ \hline \sigma^a & \\ \hline \end{array} \left( \partial_a + \frac{i \cdot e \cdot A_a}{c \cdot \hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline \end{array} \right) + \right. \\ \left. + \frac{m c}{\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline \end{array} \right) \Big|_{\Psi^{123}} \Big|_{\Psi^0} = 0.$$

<sup>2</sup> Они вычислены в Разделе V.1. Главы 4.3.

Отсюда уравнение Дирака можно записать так:

$$\begin{aligned} i(\partial_4 + \frac{i \cdot e \cdot A_4}{c \cdot \hbar})\Psi^{123} + i\sigma^a (\partial_a + \frac{i \cdot e \cdot A_a}{c \cdot \hbar})\Psi^{123} &= \frac{m_e c}{\hbar} \Psi^0, \\ i(\partial_4 + \frac{i \cdot e \cdot A_4}{c \cdot \hbar})\Psi^0 - i\sigma^a (\partial_a + \frac{i \cdot e \cdot A_a}{c \cdot \hbar})\Psi^0 &= \frac{m_e c}{\hbar} \Psi^{123}. \end{aligned} \quad (85)$$

Теперь введем обозначения

$\Psi^{123} = e_R$  – правая компонента волновой функции электрона,

$\Psi^0 = e_L$  – левая компонента волновой функции электрона.

Кроме того, матрицы  $(1, \sigma^a)$  обозначим  $\gamma_1^m$ , а матрицы  $(1, -\sigma^a)$  обозначим  $\gamma_2^m$ , то есть

$$\gamma_1^m = \{\gamma_1^4, \gamma_1^a\} = \{1, \sigma^a\}, \quad \gamma_2^m = \{\gamma_2^4, \gamma_2^a\} = \{1, -\sigma^a\}.$$

Тогда уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле можно записать так:

$$\begin{aligned} i\gamma_1^m \left( \partial_m + \frac{i e A_m}{c \cdot \hbar} \right) e_R &= \frac{m_e c}{\hbar} e_L, \\ i\gamma_2^m \left( \partial_m + \frac{i e A_m}{c \cdot \hbar} \right) e_L &= \frac{m_e c}{\hbar} e_R. \end{aligned}$$

## 2. Квантовое уравнение для лептонов в электромагнитном поле

В предыдущем Разделе на основании уравнения Дирака определена электрическая группа – группа, ответственная за электромагнитное взаимодействие лептонов. Однако в Разделах V. и VIII. Главы 4.4. было показано, что уравнение Дирака (82) записано в первом сжатом представлении и его следует считать приближенным. Поэтому заключение предыдущего Раздела относительно электрической группы следует считать приближенным. Здесь рассмотрим электрическую группу в общем случае. В общем случае квантовым уравнением для лептонов, взаимодействующих с электромагнитным полем, является уравнение (80).

В соответствии с результатами Раздела VIII. Главы 4.4., уравнение (80) относится к двум лептонам одного поколения, например к электрону и его нейтрину. Поэтому в итоге система уравнений должна разделиться на две, одна из которых относится к электрону, а другая к нейтрину. Причем потенциал электромагнитного поля должен входить только в первую систему уравнений. Из этого условия и будем определять электрическую группу. К успеху приводят следующие соображения.

Выделим в пространстве  ${}_r\mathbf{C}_4$  плоскость, построенную на базисных векторах  ${}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{21}$  и  ${}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{1324}$ , и выберем в этой плоскости ось поворота  ${}_r\mathbf{I}$ , равноудаленную от осей  ${}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{21}$  и  ${}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{1324}$ . Группу поворотов относительно оси  ${}_r\mathbf{I}$  будем считать электрической группой в общем случае. Таким образом, электрическая группа определена

на функцией

$${}_r\mathbf{S}(\theta) = \hbar \cdot \left( {}_r\boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \cos\left(\frac{g \cdot \theta}{\hbar}\right) - {}_r\mathbf{I} \cdot \sin\left(\frac{g \cdot \theta}{\hbar}\right) \right). \quad (86)$$

Поворот вокруг оси  ${}_r\mathbf{I}$  может быть разложен на повороты вокруг базисных осей на основании формулы

$${}_r\mathbf{I} = {}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{21} \cdot C^{21} + {}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{1324} \cdot C^{1324}.$$

Здесь  $C^{21}$  и  $C^{1324}$  – соответствующие "направляющие косинусы". По условию

$$C^{21} = C^{1324} = C.$$

Таким образом,

$${}_r\mathbf{I} = ({}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{21} + {}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{1324}) \cdot C.$$

Введенная группа поворотов изоморфна группе  $U(1)$ , так как

$${}_r\mathbf{I} = (({}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{21})^2 + ({}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{1324})^2) \cdot C^2 = -\boldsymbol{\varepsilon}_0$$

при этом нужно учесть, что

$$({}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{21})^2 = -\boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad ({}_r\boldsymbol{\varepsilon}_{1324})^2 = -\boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad C^2 = \frac{1}{2}.$$

Координаты преобразования электрической группы в пространстве  ${}_r\mathbf{C}_4$  приобретают вид

$$\begin{aligned} {}_rS^K_L(\theta) &= \hbar \cdot \left( \delta^K_L \cdot \cos\left(\frac{g \cdot \theta}{\hbar}\right) - \right. \\ &\left. - ({}_rC^K_{L21} + {}_rC^K_{L1324}) \cdot C \cdot \sin\left(\frac{g \cdot \theta}{\hbar}\right) \right). \end{aligned} \quad (87)$$

Отсюда для координат вариационного дифференциала имеем

$$\delta {}_rS^K_L = -({}_rC^K_{L21} + {}_rC^K_{L1324}) \cdot C \cdot g \cdot \frac{\delta\theta}{\partial x^m} \cdot dx^m.$$

Положим, что

$$A_m = \frac{\delta\theta}{\partial x^m}$$

– потенциал электромагнитного поля, а

$$C \cdot g = \frac{e}{2 \cdot c},$$

где  $e$  – электрический заряд электрона; тогда для вариационной производной получим

$$\frac{\delta {}_rS^K_L}{\partial x^m} = -\frac{e \cdot A_m}{2 \cdot c} \cdot ({}_rC^K_{L21} + {}_rC^K_{L1324}),$$

а квантовое уравнение (80) примет вид

$$\begin{aligned} iC^{mN}_L \left( \partial_m \psi^L + \frac{e \cdot A_m}{2 \cdot c \cdot \hbar} \cdot ({}_rC^K_{L21} + {}_rC^K_{L1324}) \cdot \psi^K \right) + \\ + \frac{m c}{2 \hbar} (\delta^N_K + {}_rC^N_{K34}) \psi^K = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

Используя результаты Разделов II.1., II.2. Главы 4.3., перейдем к кватернионному представлению структурных матриц и волновых функций, в котором

$${}_r C^I_{L21} = i \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array}, \quad {}_r C^I_{L1324} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array}.$$

$$\delta^K_L = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array}, \quad {}_r C^I_{L34} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \| {}_l C^{mN}_L \| \left( \partial_m + \frac{i e A_m}{2 \cdot c \cdot \hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 \\ \hline & & & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right) \cdot \begin{array}{|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \end{array} + \\ & + \frac{m c}{2 \hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 \\ \hline & & & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \end{array} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \| {}_l C^{mN}_L \| \left( \partial_m \begin{array}{|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \end{array} + \frac{i e A_m}{2 \cdot c \cdot \hbar} \begin{array}{|c|} \hline \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \hline \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \hline \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \hline \end{array} \right) + \\ & + \frac{m c}{2 \hbar} \begin{array}{|c|} \hline \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \hline \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \hline \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \hline \end{array} = 0. \end{aligned}$$

Здесь матрицы  ${}_l C^{mK}_I = \{ {}_l C^{4K}_I, {}_l C^{aK}_I \}$  ( $a = 1, 2, 3$ ) в кватернионном представлении имеют вид

$${}_r C^{4K}_I = -i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad {}_r C^{aK}_I = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^a \\ \hline \sigma^a & -\sigma^a \\ \hline \sigma^a & \\ \hline & \sigma^a \\ \hline \end{array}.$$

Для того, чтобы перейти к уравнениям относительно правых и левых компонент электрона и его нейтрино, преобразуем эти уравнения так же, как это было

сделано в Разделе IX.2. Главы 4.4. Сначала сложим первое уравнение со вторым и третье с четвертым. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{aligned} & i \begin{array}{|c|} \hline \gamma_1^m \\ \hline \gamma_2^m \\ \hline \gamma_1^m \\ \hline \gamma_2^m \\ \hline \end{array} \left( \partial_m \begin{array}{|c|} \hline \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \hline \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \hline \Psi^0 - \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} - \Psi^{124} \\ \hline \end{array} + \frac{i e A_m}{2 \cdot c \cdot \hbar} \begin{array}{|c|} \hline 2(\Psi^{123} + \Psi^{124}) \\ \hline 2(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \right) = \\ & = \frac{m c}{2 \hbar} \begin{array}{|c|} \hline 2(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ \hline 2(\Psi^{123} + \Psi^{124}) \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \Psi^0 + \Psi^{34} &= e_L && \text{— левая компонента электрона,} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} &= e_R && \text{— правая компонента электрона,} \\ \Psi^{123} - \Psi^{124} &= \nu_{eL} && \text{— левая компонента } e\text{-нейтрино,} \\ \Psi^0 - \Psi^{34} &= \nu_{eR} && \text{— правая компонента } e\text{-нейтрино,} \end{aligned}$$

получим квантовое уравнение для лептонов первого поколения в электромагнитном поле

$$\begin{aligned} i \gamma_1^m \left( \partial_m + \frac{i e A_m}{c \cdot \hbar} \right) e_R &= \frac{m c}{\hbar} e_L, \\ i \gamma_2^m \left( \partial_m + \frac{i e A_m}{c \cdot \hbar} \right) e_L &= \frac{m c}{\hbar} e_R, \\ i \gamma_1^m \partial_m \nu_{eR} &= 0, \\ i \gamma_2^m \partial_m \nu_{eL} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений.

Как и следовало ожидать, правый и левый электроны взаимодействуют с электромагнитным полем с одинаковой константой связи, а нейтрино не взаимодействуют с электромагнитным полем.

## VII. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЕПТОНОВ С ЭЛЕКТРОСЛАБЫМ ПОЛЕМ

В этом Разделе мы хотим отождествить электрослабую группу Салама-Вайнберга с некоторой подгруппой группы поворотов в пространстве действия фундаментальных объектов  $\mathbb{S}$ . Для этого, делая предположения относительно указанной подгруппы и пользуясь уравнениями (81), построим квантовое уравнение для лептонов в электрослабом поле. Мы стремимся к тому, чтобы наше уравнение максимально совпадало с уравнением Салама-Вайнберга. В начале своих рассуждений приведем уравнение Салама-Вайнберга.



## 1. Уравнения Салама–Вайнберга

В соответствии с теорией Салама–Вайнберга лагранжиан взаимодействия лептонов первого поколения с электрослабым полем имеет вид<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i \tilde{e}_R \gamma_1^m \partial_m e_R + i \tilde{e}_L \gamma_2^m \partial_m e_L + i \tilde{\nu}_L \gamma_2^m \partial_m \nu_{eL} - g \sin \theta_w \tilde{e}_R \gamma_1^m e_R A_m - g \sin \theta_w \tilde{e}_L \gamma_2^m e_L A_m + \\ & + \frac{g}{\cos \theta_w} \sin^2 \theta_w \tilde{e}_R \gamma_1^m e_R Z_m - \frac{g}{2 \cos \theta_w} \cos 2\theta_w \tilde{e}_L \gamma_2^m e_L Z_m + \frac{g}{2 \cos \theta_w} \tilde{\nu}_L \gamma_2^m \nu_{eL} Z_m + \\ & + \frac{g}{2} \tilde{\nu}_L \gamma_2^m e_L (W_m^1 + i W_m^2) + \frac{g}{2} \tilde{e}_L \gamma_2^m \nu_{eL} (W_m^1 - i W_m^2) - m \tilde{e}_R e_L - m \tilde{e}_L e_R. \end{aligned}$$

Группируя слагаемые с одинаковыми сопряженными векторами, получим квантовые уравнения для лептонов первого поколения в электрослабом поле в соответствии с теорией Салама–Вайнберга:

$$\begin{aligned} i \gamma_1^m \left( \partial_m + \frac{i g \sin \theta_w A_m}{\hbar} - \frac{i g Z_m}{\hbar} \left[ \frac{\sin^2 \theta_w}{\cos \theta_w} \right] \right) e_R &= \frac{m c}{\hbar} e_L, \\ i \gamma_2^m \left( \partial_m e_L + \frac{i g \sin \theta_w A_m}{\hbar} e_L + \frac{i g Z_m}{2 \hbar} \left[ \cos \theta_w - \frac{\sin^2 \theta_w}{\cos \theta_w} \right] e_L - \frac{i g (W_m^1 - i W_m^2)}{2 \hbar} \nu_{eL} \right) &= \frac{m c}{\hbar} e_R, \\ i \gamma_2^m \left( \partial_m \nu_{eL} - \frac{i g Z_m}{2 \hbar} \left[ \cos \theta_w + \frac{\sin^2 \theta_w}{\cos \theta_w} \right] \nu_{eL} - \frac{i g (W_m^1 + i W_m^2)}{2 \hbar} e_L \right) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\theta_w$  – угол Салама–Вайнберга,  $Z_m$ ,  $W_m^1$ ,  $W_m^2$  – потенциалы слабого поля. В теории Салама–Вайнберга полагается, что волновая функция нейтрино содержит только левые компоненты, то есть  $\nu_{eR} = 0$ .

## 2. Квантовое уравнение для лептонов в электрослабом поле. Первое приближение

В качестве группы, ответственной за слабое взаимодействие лептонов, примем прямое произведение групп правых поворотов в пространстве действия лептонов  $\mathbb{C}_4$ , рассмотренных в Разделе III.3:

1) группы поворотов относительно оси  $\varepsilon_{21}$ :

$${}_r \mathbf{S}(\theta^{21}) = \hbar \cdot \left( \varepsilon_0 \cos\left(\frac{g_{21} \cdot \theta^{21}}{\hbar}\right) - \varepsilon_{21} \sin\left(\frac{g_{21} \cdot \theta^{21}}{\hbar}\right) \right);$$

эта группа изоморфна группе  $U(1)$ ;

2) группы поворотов относительно осей  $\varepsilon_{1324}$ ,  $\varepsilon_{123}$ ,  $\varepsilon_4$ :

$$\begin{aligned} {}_r \mathbf{S}(\theta^{1324}) &= \hbar \cdot \left( \varepsilon_0 \cos\left(\frac{g_{1324} \cdot \theta^{1324}}{\hbar}\right) - \varepsilon_{1324} \sin\left(\frac{g_{1324} \cdot \theta^{1324}}{\hbar}\right) \right), \\ {}_r \mathbf{S}(\theta^4) &= \hbar \cdot \left( \varepsilon_0 \cos\left(\frac{g_4 \cdot \theta^4}{\hbar}\right) - \varepsilon_4 \sin\left(\frac{g_4 \cdot \theta^4}{\hbar}\right) \right), \\ {}_r \mathbf{S}(\theta^{123}) &= \hbar \cdot \left( \varepsilon_0 \cos\left(\frac{g_{123} \cdot \theta^{123}}{\hbar}\right) - \varepsilon_{123} \sin\left(\frac{g_{123} \cdot \theta^{123}}{\hbar}\right) \right). \end{aligned}$$

Эта группа изоморфна группе  $SU(2)$ . Таким образом, электрослабая группа изоморфна прямому произведению  $U(1) \times SU(2)$ .

Отсюда следует, что вариация преобразования электрослабой группы имеет вид

$$\delta {}_r \mathbf{S} = -\varepsilon_{21} g_{21} \delta \theta^{21} - \varepsilon_{1324} g_{1324} \delta \theta^{1324} - \varepsilon_4 g_4 \delta \theta^4 - \varepsilon_{123} g_{123} \delta \theta^{123} + \varepsilon_{34} g_{34} \delta \theta^{34} + \varepsilon_{124} g_{124} \delta \theta^{124} - \varepsilon_3 g_3 \delta \theta^3.$$

Здесь учтено, что

$$\varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{1324} = -\varepsilon_{34}, \quad \varepsilon_{21} \circ \varepsilon_4 = -\varepsilon_{124}, \quad \varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{123} = \varepsilon_3.$$

<sup>3</sup> См., например, Л. Райдер, Квантовая теория поля, М., "Мир" 1987 г., с. 358.

Коэффициент связи электрослабой группы представлен компонентами

$$g_\alpha = \{g_{21}, g_{1234}, g_4, g_{123}, g_{34}, g_{124}, g_3\},$$

а потенциал электрослабого поля имеет компоненты

$$A^{\alpha_i}_M = \frac{\delta\theta^{\alpha_i}}{\partial x^M} = \{A^{21}_M, A^{1324}_M, A^4_M, A^{123}_M, A^{34}_M, A^{124}_M, A^3_M\}.$$

Будем полагать, что параметры  $\theta^{21}$ ,  $\theta^{1324}$ ,  $\theta^4$ ,  $\theta^{123}$  зависят от координат пространства-времени СТО, а параметры  $\theta^{34}$ ,  $\theta^{124}$ ,  $\theta^3$  зависят от координат обобщенного пространства-времени  $x^{234}$ ,  $x^{134}$ ,  $x^{124}$ ,  $x^{123}$ , которые запишем в виде  $x^{m1324}$ . Таким образом, потенциал электрослабого поля имеет компоненты

$$A^{\alpha_i}_M = \frac{\delta\theta^{\alpha_i}}{\partial x^M} = \{A^{21}_m, A^{1324}_m, A^4_m, A^{123}_m, A^{34}_{m1324}, A^{124}_{m1324}, A^3_{m1324}\}.$$

В Разделе V.2, рассматривая взаимодействие лептонов с электромагнитным полем, мы положили

$$g_{21} A^{21}_m \equiv \frac{g}{2} A_m, \quad g_{1324} A^{1324}_m \equiv \frac{g}{2} A_m, \quad \text{где } g = \frac{e}{c},$$

где  $A_m$  потенциалы электромагнитного поля. Здесь обобщим эти соотношения, полагая, что группа поворотов пространства лептонов  $C_4$  относительно оси  $\epsilon_{1324}$

$$rS(\theta^{1324}) = \hbar \cdot \left( \epsilon_0 \cos\left(\frac{g_{1324} \cdot \theta^{1324}}{\hbar}\right) - \epsilon_{1324} \sin\left(\frac{g_{1324} \cdot \theta^{1324}}{\hbar}\right) \right),$$

ответственна не только за электромагнитное, но и за слабое взаимодействие. При этом будем полагать

$$g_{21} A^{21}_m \equiv \frac{g}{2} A_m, \quad g_{1324} A^{1324}_m \equiv \frac{g}{2} A_m + \frac{g_z}{2} Z_m,$$

где  $Z_m$  есть потенциал слабого поля. Коэффициент связи  $g_z$  назовем  $Z$ -компонентой слабого заряда. Относительно остальных компонент калибровочного заряда и потенциала электрослабого взаимодействия постулируем следующие соответствия:

$$g_{34} \equiv \frac{g_z}{2}, \quad g_4 = g_{124} \equiv \frac{g_w}{2}, \quad g_{123} = g_3 \equiv \frac{g_w}{2},$$

$$A^{34}_{m1324} \equiv Z_m, \quad A^4_m = A^{124}_{m1324} \equiv W^1_m, \quad A^{123}_m = A^3_{m1324} \equiv W^2_m,$$

где  $Z_m$ ,  $W^1_m$ ,  $W^2_m$  есть потенциалы слабого поля. Коэффициент связи  $g_w$  мы назовем  $W$ -компонентой слабого заряда.

Подставляя введенные величины в уравнение (81), получим квантовое уравнение для лептонов в электрослабом поле в следующем виде:

$$\begin{aligned} & {}_l C^{mK}_I \partial_m \psi^I + {}_l C^{mK}_I \frac{g A_m}{2\hbar} \left( {}_r C^I_{L21} + {}_r C^I_{L1324} \right) \psi^L + \\ & + {}_l C^{mK}_I \left( \frac{g_z}{2\hbar} Z_m {}_r C^I_{L1324} + \frac{g_w}{2\hbar} W^1_m {}_r C^I_{L4} + \frac{g_w}{2\hbar} W^2_m {}_r C^I_{L123} \right) \psi^L + \\ & + {}_l C^{m1324K}_P \left( -\frac{g_z}{2\hbar} Z_m {}_r C^P_{L34} - \frac{g_w}{2\hbar} W^1_m {}_r C^P_{L124} + \frac{g_w}{2\hbar} W^2_m {}_r C^P_{L3} \right) \psi^L + \\ & + \frac{m c}{2\hbar} \left( \delta^K_L + {}_r C^K_{L34} \right) \psi^L = 0. \end{aligned} \tag{89}$$

Далее в этих уравнениях представим матрицу  ${}_l C^{m1324K}_I$  в виде произведения

$${}_l C^{m1324K}_P = {}_l C^{mK}_I {}_l C^{1324I}_P, \tag{90}$$

где (см. Раздел II.2. Главы 4.3.)

$${}_i C^{1324I}_P = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Кроме того учтем, что в кватернионном представлении (см. Раздел II.1. Главы 4.3.)

$${}_r C^I_{L1234} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}, \quad {}_r C^I_{L4} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \quad {}_r C^I_{L123} = \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & i \\ \hline -i & -i \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline i & \\ \hline \end{array}$$

и

$${}_r C^I_{L34} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}, \quad {}_r C^I_{L124} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad {}_r C^I_{L3} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array}.$$

Отсюда следует

$${}_r C^I_{L34} = -i {}_r C^I_{L1324}, \quad {}_r C^I_{L124} = -i {}_r C^I_{L4}, \quad {}_r C^I_{L3} = i {}_r C^I_{L123}. \quad (91)$$

Преобразуя уравнение (89) с помощью соотношений (90) и (91), получим квантовое уравнение для лептонов в электрослабом поле

$$\begin{aligned} & {}_i C^{mK}_I \left( \partial_m \psi^I + \frac{g A_m}{2\hbar} \left( {}_r C^I_{L21} + {}_r C^I_{L1234} \right) \psi^L + \right. \\ & + \left( \delta^I_P - i {}_i C^{1324I}_P \right) \left( \frac{g_z}{2\hbar} Z_m {}_r C^P_{L1324} + \frac{g_w}{2\hbar} W_m^1 {}_r C^P_{L4} + \frac{g_w}{2\hbar} W_m^2 {}_r C^P_{L123} \right) \psi^L \Big) + \\ & + \frac{m c}{2\hbar} \left( \delta^K_L + {}_r C^K_{L34} \right) \psi^L = 0. \end{aligned} \quad (92)$$

Запишем это уравнение по отношению к кватернионным компонентам. Имеем

$$\begin{aligned} & \| {}_i C^{mK}_I \| \left( \partial_m \begin{array}{|c|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \end{array} + \frac{i g A_m}{2\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \end{array} + \right. \\ & + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 \\ \hline & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \left( \frac{i g_z Z_m}{2\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} + \frac{i g_w W_m^1}{2\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} + \frac{i g_w W_m^2}{2\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline & i \\ \hline -i & -i \\ \hline & \\ \hline i & \\ \hline \end{array} \right) \begin{array}{|c|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \end{array} \Big) + \\ & + \frac{m c}{2\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \end{array} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \| {}_i C^{mK}_I \| \left( \partial_m \begin{array}{|c|c|} \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \end{array} + \frac{i g A_m}{2\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \hline \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \hline \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \hline \end{array} + \right. \\ & + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 \\ \hline & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \left( \frac{i g_z Z_m}{2\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline \Psi^{34} \\ \hline \Psi^0 \\ \hline \Psi^{124} \\ \hline \Psi^{123} \\ \hline \end{array} + \frac{i g_w W_m^1}{2\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline \Psi^{124} \\ \hline -\Psi^{123} \\ \hline -\Psi^{34} \\ \hline \Psi^0 \\ \hline \end{array} + \frac{i g_w W_m^2}{2\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline i \Psi^{123} \\ \hline -i \Psi^{124} \\ \hline -i \Psi^0 \\ \hline i \Psi^{34} \\ \hline \end{array} \right) \Big) + \frac{m c}{2\hbar} \begin{array}{|c|c|} \hline \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \hline \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \hline \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \hline \end{array} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& \left\| \left( \partial_m \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{vmatrix} + \frac{i g A_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{vmatrix} + \right. \\
& \left. + \frac{i g_z Z_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{124} - \Psi^{123} \\ \Psi^{123} - \Psi^{124} \end{vmatrix} + \frac{i g_w W_m^1}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^{124} - \Psi^{123} \\ \Psi^{124} - \Psi^{123} \\ -\Psi^{34} - \Psi^0 \\ \Psi^{34} + \Psi^0 \end{vmatrix} + \frac{i g_w W_m^2}{2 \hbar} \begin{vmatrix} i(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \\ i(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \\ -i(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ i(\Psi^0 + \Psi^{34}) \end{vmatrix} \right) + \frac{m c}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь матрицы  ${}_l C^{mK}_I = \{ {}_l C^{4K}_I, {}_l C^{aK}_I \}$  ( $a = 1, 2, 3$ ) имеют вид (см. Раздел II.2. Главы 4.3.)

$${}_l C^{4K}_I = -i \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}, \quad {}_l C^{aK}_I = i \begin{vmatrix} & & & -\sigma^a \\ & & & -\sigma^a \\ \sigma^a & & & \\ & \sigma^a & & \end{vmatrix}.$$

Для того чтобы перейти к уравнениям относительно правых и левых компонент электрона и его нейтрино, преобразуем эти уравнения следующим образом (см. Раздел IX.2. Главы 4.4.). Сначала сложим первое уравнение со вторым и третье с четвертым. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{aligned}
& i \begin{vmatrix} \gamma_1^m \\ \gamma_2^m \\ \gamma_1^m \\ \gamma_2^m \end{vmatrix} \left( \partial_m \begin{vmatrix} \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 - \Psi^{34} \\ \Psi^{123} - \Psi^{124} \end{vmatrix} + \frac{i g A_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} 2(\Psi^{123} + \Psi^{124}) \\ 2(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \right. \\
& \left. + \frac{i g_z Z_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} 0 \\ 2(\Psi^{34} + \Psi^0) \\ 0 \\ 2(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \end{vmatrix} + \frac{i g_w W_m^1}{2 \hbar} \begin{vmatrix} 0 \\ -2(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \\ 0 \\ 2(\Psi^{34} + \Psi^0) \end{vmatrix} + \frac{i g_w W_m^2}{2 \hbar} \begin{vmatrix} 0 \\ 2i(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \\ 0 \\ 2i(\Psi^0 + \Psi^{34}) \end{vmatrix} \right) = \frac{m c}{2 \hbar} \begin{vmatrix} 2(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ 2(\Psi^{123} + \Psi^{124}) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
\Psi^0 + \Psi^{34} &= e_L && \text{— левая компонента электрона,} \\
\Psi^{123} + \Psi^{124} &= e_R && \text{— правая компонента электрона,} \\
\Psi^{123} - \Psi^{124} &= \nu_{eL} && \text{— левая компонента } e\text{-нейтрино,} \\
\Psi^0 - \Psi^{34} &= \nu_{eR} && \text{— правая компонента } e\text{-нейтрино,}
\end{aligned}$$

запишем квантовое уравнение для лептонов первого поколения в электрослабом поле.

$$\begin{aligned}
i \gamma_1^m \left( \partial_m + \frac{i g A_m}{\hbar} \right) e_R &= \frac{m c}{\hbar} e_L, \\
i \gamma_2^m \left( \partial_m e_L + \frac{i g A_m}{\hbar} e_L + \frac{i g_z Z_m}{\hbar} e_L - \frac{i g_w (W_m^1 - i W_m^2)}{\hbar} \nu_{eL} \right) &= \frac{m c}{\hbar} e_R, \\
i \gamma_1^m \partial_m \nu_{eR} &= 0, \\
i \gamma_2^m \left( \partial_m \nu_{eL} - \frac{i g_z Z_m}{\hbar} \nu_{eL} - \frac{i g_w (W_m^1 + i W_m^2)}{\hbar} e_L \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{93}$$

Правый и левый электроны взаимодействуют с электромагнитным полем с одинаковой константой связи, левый электрон и левое нейтрино взаимодействуют со слабым полем. В рассматриваемом приближении правый электрон, в отличие от левого, не взаимодействует со слабым полем, правое нейтрино не взаимодействует с электрослабым полем. Поэтому на основании рассматриваемого приближения правое нейтрино не может быть обнаружено в электрослабом взаимодействии.

### 3. Квантовое уравнение для лептонов в электрослабом поле. Второе приближение

В предыдущем Разделе был рассмотрен вариант теории взаимодействия лептонов с электрослабым полем, в соответствии с которым только левые частицы взаимодействуют со слабым полем. Для того чтобы, вслед за

теорией электрослабого взаимодействия лептонов Глэшоу-Салама-Вайнберга, учесть взаимодействие правых частиц со слабым  $Z$ -полем, будем считать, что, помимо группы поворотов в пространстве действия лептонов  $\mathbb{C}_4$  относительно оси  $\varepsilon_{1324}$ , группа поворотов в пространстве действия лептонов  $\mathbb{C}_4$  относительно оси  $\varepsilon_{21}$

$$S(\theta^{21}) = \hbar \cdot \left( \varepsilon_0 \cos\left(\frac{g_{21} \cdot \theta^{21}}{\hbar}\right) - \varepsilon_{21} \sin\left(\frac{g_{21} \cdot \theta^{21}}{\hbar}\right) \right)$$

также ответственна как за электромагнитное, так и за слабое взаимодействие. Будем полагать

$$g_{21} A_m^{21} \equiv \frac{g}{2} A_m - \frac{g_1}{2} Z_m,$$

где  $Z_m$  есть потенциал слабого поля. Коэффициент связи  $g_1$  также назовем  $Z$ - компонентой слабого заряда. Подставляя введенные величины в уравнение (81), получим квантовое уравнение для лептонов в электрослабом поле

$$\begin{aligned} & i C^{mK_I} \left( \partial_m \psi^I + \frac{g A_m}{2 \hbar} \left( r C^I_{L21} + r C^I_{L1234} \right) \psi^L - \frac{g_1 Z_m}{2 \hbar} r C^I_{L21} \psi^L + \right. \\ & + \left( \delta^I_P - i {}_l C^{1324 I}_P \right) \left( \frac{g_z}{2 \hbar} Z_m r C^P_{L1324} + \frac{g_w}{2 \hbar} W_m^1 r C^P_{L4} + \frac{g_w}{2 \hbar} W_m^2 r C^P_{L123} \right) \psi^L \left. + \right. \\ & \left. + \frac{m c}{2 \hbar} \left( \delta^K_L + r C^K_{L34} \right) \psi^L = 0. \right. \end{aligned} \quad (94)$$

Запишем квантовое уравнение по отношению к кватернионным компонентам. Имеем

$$\begin{aligned} & \| {}_l C^{mK_I} \| \left( \partial_m \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{vmatrix} + \frac{i g A_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{vmatrix} - \frac{i g_1 Z_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{vmatrix} + \right. \\ & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{vmatrix} \left( \frac{i g_z Z_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} + \frac{i g_w W_m^1}{2 \hbar} \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & & -1 \\ & & -1 & \\ 1 & & & \end{vmatrix} + \frac{i g_w W_m^2}{2 \hbar} \begin{vmatrix} & & & i \\ & & & -i \\ & & -i & \\ & & i & \end{vmatrix} \right) \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{vmatrix} \left. + \right. \\ & \left. + \frac{m c}{2 \hbar} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{vmatrix} = 0 \right. \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & \| {}_l C^{mK_I} \| \left( \partial_m \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{vmatrix} + \frac{i g A_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{vmatrix} - \frac{i g_1 Z_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{vmatrix} + \right. \\ & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{vmatrix} \left( \frac{i g_z Z_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^{34} \\ \Psi^0 \\ \Psi^{124} \\ \Psi^{123} \end{vmatrix} + \frac{i g_w W_m^1}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^{124} \\ -\Psi^{123} \\ -\Psi^{34} \\ \Psi^0 \end{vmatrix} + \frac{i g_w W_m^2}{2 \hbar} \begin{vmatrix} i \Psi^{123} \\ -i \Psi^{124} \\ -i \Psi^0 \\ i \Psi^{34} \end{vmatrix} \right) \left. + \frac{m c}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{vmatrix} = 0 \right. \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & \| {}_l C^{mK_I} \| \left( \partial_m \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{vmatrix} + \frac{i g A_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{vmatrix} - \frac{i g_1 Z_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{vmatrix} + \right. \\ & + \frac{i g_z Z_m}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{124} - \Psi^{123} \\ \Psi^{123} - \Psi^{124} \end{vmatrix} + \frac{i g_w W_m^1}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^{124} - \Psi^{123} \\ \Psi^{124} - \Psi^{123} \\ -\Psi^{34} - \Psi^0 \\ \Psi^{34} + \Psi^0 \end{vmatrix} + \frac{i g_w W_m^2}{2 \hbar} \begin{vmatrix} i(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \\ i(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \\ -i(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ i(\Psi^0 + \Psi^{34}) \end{vmatrix} \left. + \frac{m c}{2 \hbar} \begin{vmatrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{vmatrix} = 0. \right. \end{aligned}$$

Здесь матрицы  ${}_l C^{mK}_I = \{{}_l C^{4K}_I, {}_l C^{aK}_I\}$  ( $a = 1, 2, 3$ ) имеют вид (см. Раздел II.2. Глава 4.3.)

$${}_l C^{4K}_I = -i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad {}_l C^{aK}_I = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -\sigma^a \\ \hline \sigma^a & \\ \hline \end{array}.$$

Для того чтобы перейти к уравнениям относительно правых и левых компонент электрона и его нейтрино, преобразуем эти уравнения следующим образом (см. Раздел IX.2. Глава 4.4.). Сначала сложим первое уравнение со вторым и третье с четвертым. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$i \begin{array}{|c|} \hline \gamma_1^m \\ \hline \gamma_2^m \\ \hline \gamma_1^m \\ \hline \gamma_2^m \\ \hline \end{array} \left( \begin{array}{|c|} \hline \partial_m \begin{array}{|c|} \hline \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \hline \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \hline \Psi^0 - \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} - \Psi^{124} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} + \frac{i g A_m}{2 \hbar} \begin{array}{|c|} \hline 2(\Psi^{123} + \Psi^{124}) \\ \hline 2(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} - \frac{i g_1 Z_m}{2 \hbar} \begin{array}{|c|} \hline \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \hline \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \hline \Psi^0 - \Psi^{34} \\ \hline \Psi^{123} - \Psi^{124} \\ \hline \end{array} + \frac{i g_z Z_m}{2 \hbar} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 2(\Psi^{34} + \Psi^0) \\ \hline 0 \\ \hline 2(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \\ \hline \end{array} + \frac{i g_w W_m^1}{2 \hbar} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline -2(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \\ \hline 0 \\ \hline 2(\Psi^{34} + \Psi^0) \\ \hline \end{array} + \frac{i g_w W_m^2}{2 \hbar} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 2i(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \\ \hline 0 \\ \hline 2i(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ \hline \end{array} \right) = \frac{m c}{2 \hbar} \begin{array}{|c|} \hline 2(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ \hline 2(\Psi^{123} + \Psi^{124}) \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \Psi^0 + \Psi^{34} &= e_L && \text{— левая компонента электрона,} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} &= e_R && \text{— правая компонента электрона,} \\ \Psi^{123} - \Psi^{124} &= \nu_{eL} && \text{— левая компонента } e\text{-нейтрино,} \\ \Psi^0 - \Psi^{34} &= \nu_{eR} && \text{— правая компонента } e\text{-нейтрино,} \end{aligned}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} i \gamma_1^m \left( \partial_m + \frac{i g A_m}{\hbar} - \frac{i g_1 Z_m}{\hbar} \right) e_R &= \frac{m c}{\hbar} e_L, \\ i \gamma_2^m \left( \partial_m e_L + \frac{i g A_m}{\hbar} e_L + \frac{i(g_z - g_1) Z_m}{\hbar} e_L - \frac{i g_w (W_m^1 - i W_m^2)}{\hbar} \nu_{eL} \right) &= \frac{m c}{\hbar} e_R, \\ i \gamma_1^m \left( \partial_m - \frac{i g_1 Z_m}{\hbar} \right) \nu_{eR} &= 0, \\ i \gamma_2^m \left( \partial_m \nu_{eL} - \frac{i(g_z + g_1) Z_m}{\hbar} \nu_{eL} - \frac{i g_w (W_m^1 + i W_m^2)}{\hbar} e_L \right) &= 0. \end{aligned} \tag{95}$$

Правый и левый электроны взаимодействуют с электромагнитным полем с одинаковой константой связи, левый электрон и левое нейтрино взаимодействуют со слабым полем, правый электрон и правое нейтрино взаимодействуют со слабым  $Z$ -полем с одинаковым коэффициентом связи.

#### 4. Сравнение с теорией электрослабого взаимодействия лептонов Салама–Вайнберга

В уравнениях (95) выполним замену

$$g \rightarrow g \sin \theta_w, \quad g_z \rightarrow \frac{g \cos \theta_w}{2}, \quad g_1 \rightarrow \frac{g \sin^2 \theta_w}{2 \cos \theta_w}, \quad g_w \rightarrow \frac{g}{2}.$$

Получим

$$\begin{aligned}
i\gamma_1^m \left( \partial_m + \frac{ig \sin \theta_w A_m}{\hbar} - \frac{ig Z_m}{2\hbar} \left[ \frac{\sin^2 \theta_w}{\cos \theta_w} \right] \right) e_R &= \frac{mc}{\hbar} e_L, \\
i\gamma_2^m \left( \partial_m e_L + \frac{ig \sin \theta_w A_m}{\hbar} e_L + \frac{ig Z_m}{2\hbar} \left[ \cos \theta_w - \frac{\sin^2 \theta_w}{\cos \theta_w} \right] e_L - \frac{ig (W_m^1 - i W_m^2)}{2\hbar} \nu_{eL} \right) &= \frac{mc}{\hbar} e_R, \\
i\gamma_1^m \left( \partial_m - \frac{ig Z_m}{2\hbar} \left[ \frac{\sin^2 \theta_w}{\cos \theta_w} \right] \right) \nu_{eR} &= 0, \\
i\gamma_2^m \left( \partial_m \nu_{eL} - \frac{ig Z_m}{2\hbar} \left[ \cos \theta_w + \frac{\sin^2 \theta_w}{\cos \theta_w} \right] \nu_{eL} - \frac{ig (W_m^1 + i W_m^2)}{2\hbar} e_L \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{96}$$

Сравнение этой системы уравнений с уравнениями Салама–Вайнберга (см. Раздел VIII.1) показывает следующие отличия нашей теории от теории электрослабого взаимодействия лептонов Салама–Вайнберга.

1. Система уравнений дополняется уравнением, относящимся к правому нейтрино.
2. Если считать, что коэффициент связи  $g_1$  соответствует коэффициенту связи  $\frac{g \sin^2 \theta_w}{2 \cos \theta_w}$  в теории Салама–Вайнберга, то в предлагаемой теории коэффициент связи, с которым правый электрон взаимодействует со слабым  $Z$ -полем, в два раза меньше, чем соответствующий коэффициент в теории Салама–Вайнберга.
3. Правое нейтрино взаимодействует только со слабым  $Z$ -полем с тем же коэффициентом связи, что и правый электрон.

В Разделе VI Главы 4.4. было показано, что такое замечательное явление как  $e$ - $\mu$ - $\tau$ -универсальность обязано своим происхождением алгебраической эквивалентности базисных векторов  $\varepsilon_{21}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{32}$  пространства лептонов  $\mathbf{C}_4$ . Напомним, что эти базисные векторы служат для описания трех поколений лептонов. В силу  $e$ - $\mu$ - $\tau$ -универсальности уравнения взаимодействия мюона и  $\tau$ -лептона с электрослабым полем совершенно аналогичны уравнениям приведенным выше. В этом отношении наша теория совпадает с теорией Салама–Вайнберга, с той лишь разницей, что мы даем толкование  $e$ - $\mu$ - $\tau$ -универсальности.

### VIII. ПРАВАЯ И ЛЕВАЯ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ И АНТИЧАСТИЦ

В этом Разделе мы используем результаты Раздела IX.4 Главы 3.3.

#### 1. Волновые функции фундаментальных частиц

##### 1.1. Правая волновая функция фундаментальной частицы

Из Раздела IX.4.1 Главы 3.3 следует, что правое квантовое уравнение для фундаментального объекта представляет собой обобщенное уравнение Дирака. В соответствии с формулой (67) Главы 3.3 это уравнение имеет вид:

$$iC^{MN}{}_L \cdot \frac{\partial_r \psi^L}{\partial x^M} = \frac{1}{S_0} iC^{MN}{}_L \cdot {}_r C^L{}_{KI} \cdot \frac{\partial S^I}{\partial x^M} \cdot {}_r \psi^K. \tag{97}$$

Это уравнение сформулировано по отношению к правой волновой функции фундаментального объекта, так как

$$\psi^K = d_1 {}_r S^K \equiv {}_r \psi^K.$$

Уравнение (97) преобразуется в квантовое уравнение для фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии (76), которое запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
iC^{MN}{}_L \cdot \left( \frac{\partial_r \psi^L}{\partial x^M} + \frac{1}{S_0} {}_r g_\alpha \cdot A^L{}_{KM} \cdot {}_r \psi^K \right) &= \\
= -\frac{1}{S_0} iC^{MN}{}_L \cdot {}_r C^L{}_{KI} \cdot {}_r p^I{}_M \cdot {}_r \psi^K. &\tag{98}
\end{aligned}$$

Здесь  $A^L{}_{KM}$  это потенциалы поля внутренней симметрии

$$A^L{}_{KM} = {}_r K^L{}_{K\alpha} \cdot A^\alpha{}_M.$$

Для электрона в электромагнитном поле это уравнение преобразуется в соотношение (83), которое запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
iC^{mN_1}{}_{L_1} \cdot \left( \frac{\partial_r \psi^{L_1}}{\partial x^m} + \frac{e}{c \cdot \hbar} \cdot {}_r C^{L_1}{}_{K_1 21} \cdot A^{21}{}_m \cdot {}_r \psi^{K_1} \right) &+ \\
+ \frac{mc}{\hbar} {}_r \psi^{N_1} &= 0. \tag{99}
\end{aligned}$$

### 1.2. Левая волновая функция фундаментальной частицы

Вместе с тем в Разделе IX.4.4 Главы 3.3 показано, что наряду с правым квантовым уравнением для фундаментального объекта необходимо ввести левое квантовое уравнение. В соответствии с формулой (74) Главы 3.3 это уравнение имеет вид:

$${}_r C^{MN}{}_L \cdot \frac{\partial {}_l \psi^L}{\partial x^M} = \frac{1}{S_0} {}_r C^{MN}{}_L \cdot {}_l C^L{}_{KI} \cdot \frac{\partial S^I}{\partial x^M} \cdot {}_l \psi^K. \quad (100)$$

Это уравнение сформулировано по отношению к левой волновой функции фундаментального объекта, так как

$$\psi^K = d_1 {}_l S^K \equiv {}_l \psi^K.$$

Уравнение (100) преобразуем в квантовое уравнение для фундаментальной частицы в поле внешней симметрии следующим образом:

$$\begin{aligned} & {}_r C^{MN}{}_L \cdot \left( \frac{\partial {}_l \psi^L}{\partial x^M} + \frac{1}{S_0} {}_l g_\alpha \cdot \Gamma^L{}_{KM} \cdot {}_l \psi^K \right) = \\ & = -\frac{1}{S_0} {}_r C^{MN}{}_L \cdot {}_l C^L{}_{KI} \cdot {}_l p^I{}_M \cdot {}_l \psi^K. \end{aligned} \quad (101)$$

Здесь  $\Gamma^L{}_{KM}$  это коэффициенты связности поля внешней симметрии

$$\Gamma^L{}_{KM} = {}_l K^L{}_{K\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_M.$$

Для электрона в поле внешней симметрии это уравнение преобразуется в соотношение, которое запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} & {}_r C^{mN_1}{}_{L_1} \cdot \left( \frac{\partial {}_l \psi^{L_1}}{\partial x^m} + \frac{\sigma_\alpha}{\hbar} \cdot {}_l C^{L_1}{}_{K_1\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_m \cdot {}_l \psi^{K_1} \right) + \\ & + \frac{m c}{\hbar} {}_l \psi^{N_1} = 0. \end{aligned} \quad (102)$$

Здесь  $\sigma_\alpha$  это компоненты спина электрона.

### 1.3. Заключительное замечание

Уравнения (99) и (102) согласуются с тем фактом, что электрон участвует как в электромагнитных взаимодействиях, так и в спиновых взаимодействиях. Отсюда следует, что *результатирующая* волновая функция электрона, как и других фундаментальных частиц, состоит из двух частей – правой и левой волновых функций. Благодаря правой волновой функции фундаментальная частица взаимодействует с полем внутренней симметрии. Благодаря левой волновой функции фундаментальная частица взаимодействует с полем внешней симметрии.

Изложенные здесь соображения относительно двух частей волновой функции электрона коррелируют с представлением Филипа У. Андерсона (Philip W. Anderson) об электроне как о двух частицах, одна из которых несет электрический заряд, а другая является носителем спина.

## 2. Волновые функции фундаментальных античастиц

### 2.1. Правая волновая функция фундаментальной античастицы

Следуя Разделу IX.4.3 Главы 3.3, выполним операцию сопряжения по отношению к уравнению (100). Получим правое квантовое уравнение для фундаментального антиобъекта. В соответствии с формулой (72) Главы 3.3 это уравнение имеет вид:

$${}_l C^L{}_{NM} \cdot \frac{\partial {}_r \psi^L}{\partial x_M} = \frac{1}{S_0} {}_l C^L{}_{NM} \cdot {}_r C^{IK}{}_L \cdot \frac{\partial S_I}{\partial x_M} \cdot {}_r \psi^K. \quad (103)$$

Это уравнение сформулировано по отношению к правой волновой функции и является обобщенным уравнением Дирака для фундаментального антиобъекта. Оно преобразуется в квантовое уравнение для фундаментальной античастицы в поле внутренней симметрии, которое запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} & {}_l C^L{}_{NM} \cdot \left( \frac{\partial {}_r \psi^L}{\partial x_M} + \frac{1}{S_0} {}_r g^\alpha \cdot A^{MK}{}_L \cdot {}_r \psi^K \right) = \\ & = -\frac{1}{S_0} {}_l C^L{}_{NM} \cdot {}_r C^{IK}{}_L \cdot {}_r p^M{}_I \cdot {}_r \psi^K. \end{aligned} \quad (104)$$

Здесь  $A^{MK}{}_L$  это контравариантные потенциалы поля внутренней симметрии

$$A^{MK}{}_L = A^M{}_\alpha \cdot {}_r K^{\alpha K}{}_L.$$

Для позитрона в электромагнитном поле это уравнение преобразуется в соотношение, которое запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} & {}_l C^{L_1}{}_{N_1 m} \cdot \left( \frac{\partial {}_r \psi^{L_1}}{\partial x_m} + \frac{e}{c \cdot \hbar} \cdot A^m{}_{12} \cdot {}_r C^{12 K_1}{}_{L_1} \cdot {}_r \psi^{K_1} \right) + \\ & + \frac{m c}{\hbar} {}_r \psi^{N_1} = 0. \end{aligned} \quad (105)$$

### 2.2. Левая волновая функция фундаментальной античастицы

Следуя Разделу IX.4.2 Главы 3.3, выполним операцию сопряжения по отношению к обобщенному уравнению Дирака (97). Получим левое квантовое уравнение для фундаментального антиобъекта. В соответствии с формулой (69) Главы 3.3 это уравнение имеет вид:

$${}_r C^L{}_{NM} \cdot \frac{\partial {}_l \psi^L}{\partial x_M} = \frac{1}{S_0} {}_r C^L{}_{NM} \cdot {}_l C^{IK}{}_L \cdot \frac{\partial S_I}{\partial x_M} \cdot {}_l \psi^K. \quad (106)$$

Это уравнение сформулировано по отношению к левой волновой функции. Оно преобразуется в квантовое уравнение для фундаментальной античастицы в



поле внешней симметрии, которое запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_r C^L_{NM} \cdot \left( \frac{\partial {}_l \psi_L}{\partial x_M} + \frac{1}{S_0} {}_l g^\alpha \cdot \Gamma^{MK}_L \cdot {}_l \psi_K \right) = \\ = -\frac{1}{S_0} {}_r C^L_{NM} \cdot {}_l C^{IK}_L \cdot {}_l p^M_I \cdot {}_l \psi_K. \end{aligned} \quad (107)$$

Здесь  $\Gamma^{MK}_L$  это контравариантные коэффициенты связности поля внешней симметрии

$$\Gamma^{MK}_L = \Gamma^M_\alpha \cdot {}_r K^{\alpha K}_L.$$

Для позитрона в поле внешней симметрии это уравнение преобразуется в соотношение, которое запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_r C^{L_1}_{N_1 m} \cdot \left( \frac{\partial {}_l \psi_{L_1}}{\partial x_m} + \frac{\sigma^\alpha}{\hbar} \cdot \Gamma^m_\alpha \cdot {}_l C^{\alpha K_1}_{L_1} \cdot {}_l \psi_{K_1} \right) + \\ + \frac{m c}{\hbar} {}_l \psi_{N_1} = 0. \end{aligned} \quad (108)$$

## IX. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

1. Калибровочное поле определяется через линейные преобразования пространства действия.
2. Калибровочному заряду, в частности электрическому, придается смысл коэффициента связи между параметрами (углами поворотов) подгруппы линейных преобразований (поворотов) и координатами вектора действия.
3. Подгруппы группы поворотов в пространстве действия ставятся в соответствие группам внутренних симметрий, ответственным за взаимодействие.
4. За электромагнитное взаимодействие заряженных лептонов в дираковском приближении ответственна группа поворотов пространства алгебры Клиффорда  $\mathbb{C}_4$  относительно оси  $\epsilon_{21}$ .
5. За электрослабое взаимодействие лептонов ответственна группа, представляющая собой прямое произведение поворотов относительно оси  $\epsilon_{21}$  и поворотов относительно осей  $\epsilon_{1324}$ ,  $\epsilon_4$ ,  $\epsilon_{123}$  пространства алгебры Клиффорда  $\mathbb{C}_4$ .
6. Квантовое уравнение для фундаментальных частиц в калибровочном поле выводится из уравнений структуры для пространства векторов действия, расширенного за счет линейных преобразований. Подчеркнем, что такой вывод не нуждается в калибровочном принципе, применяемом обычно при пролонгации уравнений для свободных частиц на калибровочные взаимодействия.
7. Рассматривается частный случай предлагаемого квантового уравнения для фундаментальных частиц в калибровочном поле – квантовое уравнение для лептонов в электрослабом поле. В отличие от стандартной модели Салама–Вайнберга, система уравнений включает уравнение для правого нейтрино, которое взаимодействует только со слабым  $Z$ -полем.
8. С введением линейных преобразований координаты пространства действия и координаты внутреннего пространства объединяются в координаты одного вектора. Это объединение позволяет рассматривать частицы в калибровочных полях с общих позиций и рассчитывать на то, что развитие предлагаемой теории приведет к построению единой теории взаимодействий.
9. Результирующая волновая функция фундаментального объекта состоит из двух частей – правой и левой волновых функций. Правая волновая функция ответственна за взаимодействие фундаментального объекта с полем внутренней симметрии. Левая волновая функция ответственна за взаимодействие фундаментального объекта с полем внешней симметрии.

## Глава 5.4 Дуализм: промежуточные частицы – калибровочное поле

### I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В Разделе III Главы 5.3 показано, что искривленный дифференциал вектора действия промежуточного объекта содержит два слагаемых:

$$DS = dS + \delta S.$$

Дифференциал  $dS$  связан с представлением о промежуточном объекте. Действительно, согласно Разделу III.2 Главы 5.1 выражение

$$-\frac{\partial S}{\partial x^M} = M_M$$

определяется как момент промежуточного объекта.

Вариация  $\delta S$  связана с представлением о калибровочном поле. Действительно, согласно Разделу III Главы 5.3 в выражение

$$-\frac{1}{S_0} \cdot \frac{\delta I S}{\partial x^M}(x) = \mathbf{I}^K_I \cdot K^I_{K\alpha} \cdot \frac{g_\alpha}{S_0} \cdot A^\alpha_M$$

входят потенциалы калибровочного поля  $A^\alpha_M$ .

Вместе с тем оба дифференциала равноправно участвуют в формировании дифференциала  $DS$ . Поэтому до тех пор, пока не акцентируется внимание на особенностях или различиях дифференциалов  $d$  и  $\delta$ , понятия и явления, связанные с дифференциалами  $dS$  и  $\delta S$ , могут быть изложены одинаковым образом. На этом основании появляется возможность корректировать представление о промежуточной частице, опираясь на представление о калибровочном поле, и наоборот. Кроме того, появляется возможность вывести квантовое уравнение для фундаментальных и промежуточных частиц в калибровочном поле. Необходимые для этого уравнения структуры естественным образом объединяют уравнения структуры, рассмотренные в Разделе IV.3 Главы 5.1 и Разделе V.2 Главы 5.3, соответственно для фундаментальных и промежуточных частиц и для фундаментальных частиц и калибровочного поля.

### II. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ

В Разделе IV.3 Главы 5.1 отмечено, что задача, с которой начиналась квантовая теория – описание перехода электрона с одной орбиты на другую, сопровождаемого излучением фотона – остается нерешенной. Для решения этой задачи необходимо записать систему квантовых уравнений относительно волновой функции фундаментальной частицы (электрона) и волновой функции промежуточной частицы (фотона). Были сформулированы требования, которым должна удовлетворять такая система.

1. Должны иметь место две системы дифференциальных уравнений.

Первая относится к электрону и формулируется по отношению к его волновой функции.

Вторая относится к фотону и формулируется по отношению к его волновой функции.

2. Системы уравнений должны быть взаимосвязаны, то есть в первую систему уравнений должны входить параметры фотона, а во вторую систему уравнений должны входить параметры электрона.

3. Системы уравнений должны зависеть от внешнего поля. Динамическое изменение внешнего поля должно выводить систему уравнений из одного устойчивого состояния и через переходной процесс приводить к другому устойчивому состоянию.

4. В переходном процессе изменяются параметры электрона и фотона. В частности, переходной процесс должен описывать возникновение фотона, то есть переход от состояния, в котором его волновая функция связана с электроном, к состоянию, когда волновая функция описывает свободный фотон, движущийся со скоростью света.

5. В частном случае первая система уравнений, относящаяся к электрону, должна сводиться к системе уравнений квантовой механики.

В этой же Главе было отмечено, что алгебраический подход к действию элементарных частиц позволяет найти такую систему квантовых уравнений. В Разделе IV.3 указанной Главы была выведена искомая система уравнений. Однако в ней отсутствует калибровочное поле (в вышеуказанной задаче – электрическое поле ядра атома).

В настоящем Разделе развивается указанная концепция квантовой теории с целью описания взаимодействия фундаментальной частицы, промежуточной частицы и поля внутренней симметрии.

#### 1. Алгебра действия фундаментальной и промежуточной частиц и поля внутренней симметрии

Обобщая Раздел V Главы 5.3, будем считать, что пространство действия  ${}_r\mathbf{T}$  фундаментальных частиц, с одной стороны, и промежуточных частиц и поля внутренней симметрии, с другой стороны, представляет собой сумму двух векторных пространств: действия фундаментальных частиц  ${}_r\mathbf{S}$  и действия промежуточных частиц и калибровочного поля  ${}_r\mathbf{S}_1$ . Иначе

говоря, вектор действия в этом случае представлен суммой двух составляющих

$${}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}.$$

Здесь вектор  $\mathbf{S} \in {}_r\mathbf{S}$ , а вектор  ${}_r\mathbf{S} \in {}_r\mathbf{S}_1$ .

Дифференциал этого вектора складывается из обыкновенного дифференциала  $d{}_r\mathbf{S}$  и искривленного дифференциала  $D{}_r\mathbf{S}$ :

$$d{}_r\mathbf{S} + D{}_r\mathbf{S} = d{}_r\mathbf{S} + d{}_r\mathbf{S} + \delta{}_r\mathbf{S}.$$

Приведенные дифференциалы выражаются через координаты следующим образом:

$$d{}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{e}_K \cdot d{}_rS^K,$$

$$d{}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{I}^L_K \cdot d{}_rS^K_L,$$

$$\delta{}_r\mathbf{S} = {}_r\mathbf{I}^L_K \cdot \delta{}_rS^K_L = -{}_r\mathbf{I}^L_K \cdot {}_rK^K_{L\alpha} \cdot {}_rg_\alpha \cdot A^\alpha_I \cdot dx^I. \quad (1)$$

Здесь  $A$  – потенциал калибровочного поля,  ${}_rg_\alpha$  – коэффициенты связи.

Запишем дифференциал  $\delta{}_r\mathbf{S}$  в инвариантном векторном виде

$$\delta{}_r\mathbf{S} = -d\mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g. \quad (2)$$

Закон умножения векторов действия в  ${}_r\mathbf{T} = {}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}_1$  запишем так:

$${}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} ({}_r\mathbf{S}_1 + {}_r\mathbf{S}_1) \circ ({}_r\mathbf{S}_2 + {}_r\mathbf{S}_2). \quad (3)$$

Здесь  $S_0$  – постоянная, имеющая размерность действия.

Это умножение определено, если определено умножение пар векторов каждого вида. А эти произведения, в свою очередь, определены, если определены произведения соответствующих базисных векторов. В Разделе I.3 Главы 1.6 записаны законы умножения базисных векторов  ${}_r\mathbf{e}$  и  ${}_r\mathbf{I}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_I &= {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L_{KI}, \\ {}_r\mathbf{I}^L_K \circ {}_r\mathbf{I}^I_M &= \delta^I_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L_M, \\ {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I_M &= \delta^I_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M, \\ {}_r\mathbf{I}^I_M \circ {}_r\mathbf{e}_K &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В результате множество векторов действия  ${}_r\mathbf{T} = {}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}_1$  представляет собой алгебру.

## 2. Уравнения структуры алгебры действия фундаментальной и промежуточной частиц и поля внутренней симметрии

Как и для всякой алгебры, для алгебры действия  ${}_r\mathbf{T} = {}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}_1$  имеет место уравнение структуры

$$d_2d_1({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}) = \frac{1}{S_0} \cdot d_1({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}) \circ d_2({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}). \quad (5)$$

Для того чтобы получить из этого уравнения уравнение структуры алгебры действия фундаментальной и промежуточной частиц в поле внутренней симметрии, необходимо рассмотреть проекцию этого уравнения на пространство действия фундаментальной частицы  ${}_r\mathbf{S}$  и пространство действия промежуточной частицы и поля внутренней симметрии  ${}_r\mathbf{S}_1$ . В результате получим

$$d_2d_1{}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} \cdot d_1{}_r\mathbf{S} \circ d_2({}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}),$$

$$d_2d_1{}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} \cdot d_1{}_r\mathbf{S} \circ d_2{}_r\mathbf{S}. \quad (6)$$

Далее необходимо учесть, что дифференциал действия промежуточной частицы и поля внутренней симметрии является искривленным, поэтому уравнение (6) нужно переписать так:

$$d_2d_1{}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} \cdot d_1{}_r\mathbf{S} \circ (d_2{}_r\mathbf{S} + D_2{}_r\mathbf{S}),$$

$$d_2D_1{}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} \cdot D_1{}_r\mathbf{S} \circ D_2{}_r\mathbf{S}. \quad (7)$$

Здесь

$$D_1{}_r\mathbf{S} = d_1{}_r\mathbf{S} + \delta_1{}_r\mathbf{S}, \quad D_2{}_r\mathbf{S} = d_2{}_r\mathbf{S} + \delta_2{}_r\mathbf{S}.$$

Подставим эти выражения в выражение (7), получим

$$d_2d_1{}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} \cdot d_1{}_r\mathbf{S} \circ (d_2\mathbf{S} + d_2{}_r\mathbf{S} + \delta_2{}_r\mathbf{S}),$$

$$d_2(d_1{}_r\mathbf{S} + \delta_1{}_r\mathbf{S}) = \frac{1}{S_0} \cdot (d_1{}_r\mathbf{S} + \delta_1{}_r\mathbf{S}) \circ (d_2{}_r\mathbf{S} + \delta_2{}_r\mathbf{S}). \quad (8)$$

Переход от уравнений (6) к уравнениям (8) удобно представлять как выполнение замены:

$$d{}_r\mathbf{S} \rightarrow d{}_r\mathbf{S} - d\mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g$$

или для координат

$$d{}_rS^K_L \rightarrow d{}_rS^K_L - {}_rK^K_{L\alpha} \cdot {}_rg_\alpha \cdot A^\alpha_I \cdot dx^I.$$

Далее удобно перейти к одноколоночному формату.

Преобразуем уравнения (8), учитывая выражение (2) для дифференциала  $\delta_r \mathbf{S}$ :

$$\begin{aligned} d_2 d_1 r \mathbf{S} &= \frac{1}{S_0} \cdot d_1 r \mathbf{S} \circ (d_2 r \mathbf{S} + d_2 r \mathbf{S} - (d_2 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g)), \\ d_2(d_1 r \mathbf{S} - (d_1 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g)) &= \frac{1}{S_0} \cdot (d_1 r \mathbf{S} - (d_1 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g)) \circ (d_2 r \mathbf{S} - (d_2 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g)) \end{aligned} \quad (9)$$

или

$$\begin{aligned} d_2 d_1 r \mathbf{S} &= \frac{1}{S_0} \cdot d_1 r \mathbf{S} \circ d_2 r \mathbf{S} + \frac{1}{S_0} \cdot d_1 r \mathbf{S} \circ d_2 r \mathbf{S} - \frac{1}{S_0} \cdot d_1 r \mathbf{S} \circ (d_2 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g), \\ d_2 d_1 r \mathbf{S} - d_2 d_1 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g - d_1 \mathbf{x} \circ d_2 \mathbf{A} \cdot g &= \\ &= \frac{1}{S_0} \cdot (d_1 r \mathbf{S} \circ d_2 r \mathbf{S} - (d_1 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g) \circ d_2 r \mathbf{S}) + \frac{1}{S_0} \cdot (-d_1 r \mathbf{S} \circ (d_2 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g) + (d_1 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g) \circ (d_2 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g)) \end{aligned} \quad (10)$$

Эти уравнения представляют собой уравнения структуры алгебры действия фундаментальной, промежуточной частиц и поля внутренней симметрии в инвариантном векторном виде. Присутствие множителя  $d_2 d_1 \mathbf{x}$  во втором слагаемом в левой части второго уравнения говорит о том, что полученные уравнения структуры должны быть дополнены уравнениями структуры пространства-времени и только с ними составят замкнутую систему уравнений.

Приведем уравнения структуры пространства-времени  ${}_r \mathbb{X}$ , которые получены в Разделе VI.1 Главы 1.2 формулы (53), (57) в инвариантной векторной форме

$$d_2 d_1 \mathbf{x} = \frac{1}{L_0} \cdot d_1 \mathbf{x} \circ d_2 \mathbf{x} \quad (11)$$

и для координат векторов

$$d_2 d_1 x^M = \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^M_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K.$$

Здесь  $L_0$  – постоянная, имеющая размерность длины, а  ${}_r C^M_{KI}$  – постоянные структуры алгебры  ${}_r \mathbb{X}$ . После подстановки  $d_2 d_1 \mathbf{x}$  из уравнений структуры (11) и добавления к рассматриваемой системе уравнения структуры пространства-времени окончательно получим

$$\begin{aligned} d_2 d_1 r \mathbf{S} &= \frac{1}{S_0} \cdot d_1 r \mathbf{S} \circ d_2 r \mathbf{S} + \frac{1}{S_0} \cdot d_1 r \mathbf{S} \circ d_2 r \mathbf{S} - \frac{1}{S_0} \cdot d_1 r \mathbf{S} \circ (d_2 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g), \\ d_2 d_1 r \mathbf{S} - \frac{1}{L_0} \cdot (d_1 \mathbf{x} \circ d_2 \mathbf{x}) \circ \mathbf{A} \cdot g - d_1 \mathbf{x} \circ d_2 \mathbf{A} \cdot g &= \\ &= \frac{1}{S_0} \cdot (d_1 r \mathbf{S} \circ d_2 r \mathbf{S} - (d_1 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g) \circ d_2 r \mathbf{S}) + \frac{1}{S_0} \cdot (-d_1 r \mathbf{S} \circ (d_2 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g) + (d_1 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g) \circ (d_2 \mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g)), \\ d_2 d_1 \mathbf{x} &= \frac{1}{L_0} \cdot d_1 \mathbf{x} \circ d_2 \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Запишем уравнения структуры через координаты векторов. Для этого подставим в выражение (12) выражения векторов через базисные векторы и координаты (1):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_L \cdot d_2 d_1 S^L &= \frac{1}{S_0} \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I) d_1 S^K d_2 S^I + \frac{1}{S_0} \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{I}_L) d_1 S^K d_2 S^L - \frac{1}{S_0} \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{I}_L) d_1 S^K \cdot (K^L_{I\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_2 x^M), \\ \mathbf{I}_I^K \cdot (d_2 d_1 S^I_K - K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_2 d_1 x^M - K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot d_2 A^\alpha_M \cdot d_1 x^M) &= \\ &= \frac{1}{S_0} \cdot (\mathbf{I}_N^K \circ \mathbf{I}_L^I) \cdot (d_1 S^N_K \cdot d_2 S^I_L - (K^N_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_1 x^M) \cdot d_2 S^I_L) + \\ &+ \frac{1}{S_0} \cdot (\mathbf{I}_N^K \circ \mathbf{I}_L^I) \cdot (-d_1 S^N_K \cdot (K^I_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_2 x^M) + (K^N_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_1 x^M) \cdot (K^I_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_N \cdot d_2 x^N)), \\ d_2 d_1 x^M &= \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^M_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее воспользуемся законом умножения базисных векторов (4):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_L \cdot d_2 d_1 S^L &= \frac{1}{S_0} \cdot (\mathbf{e}_L \cdot {}_r C^L_{KI}) d_1 S^K d_2 S^I + \frac{1}{S_0} \cdot (\delta^I_K \cdot \mathbf{e}_L) d_1 S^K d_2 S^L_I - \frac{1}{S_0} \cdot (\delta^I_K \cdot \mathbf{e}_L) d_1 S^K \cdot (K^L_{I\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot dx^M), \\
 \mathbf{I}^{K_I} \cdot (d_2 d_1 S^I_K - K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_2 d_1 x^M - K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot d_2 A^\alpha_M \cdot d_1 x^M) &= \\
 &= \frac{1}{S_0} \cdot (\delta^L_N \cdot \mathcal{J}^{K_I}) \cdot (d_1 S^N_K \cdot d_2 S^I_L - (K^N_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_1 x^M) \cdot d_2 S^I_L) + \\
 &+ \frac{1}{S_0} \cdot (\delta^L_N \cdot \mathbf{I}^{K_I}) \cdot (-d_1 S^N_K \cdot (K^I_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_2 x^M) + (K^N_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_1 x^M) \cdot (K^I_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_N \cdot d_2 x^N)), \\
 d_2 d_1 x^M &= \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^M_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned}
 d_2 d_1 S^L &= \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^L_{KI} d_1 S^K d_2 S^I + \frac{1}{S_0} \cdot d_2 S^L_K \cdot d_1 S^K - \frac{1}{S_0} \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot dx^M) \cdot d_1 S^K, \\
 d_2 d_1 S^I_K - K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_2 d_1 x^M - K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot d_2 A^\alpha_M \cdot d_1 x^M &= \\
 &= \frac{1}{S_0} \cdot (d_2 S^I_L \cdot d_1 S^L_K - d_2 S^I_L \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_1 x^M)) + \\
 &+ \frac{1}{S_0} \cdot (-(K^I_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_2 x^M) \cdot d_1 S^L_K + (K^I_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_N \cdot d_2 x^N) \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_1 x^M)), \\
 d_2 d_1 x^M &= \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^M_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Подставим в это выражение  $d_2 d_1 x^M$  из уравнения структуры пространства–времени:

$$\begin{aligned}
 d_2 d_1 S^L &= \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^L_{KI} d_2 S^I d_1 S^K + \frac{1}{S_0} \cdot d_2 S^L_K \cdot d_1 S^K - \frac{1}{S_0} \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot dx^M) \cdot d_1 S^K, \\
 d_2 d_1 S^I_K - \frac{1}{L_0} \cdot K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_L \cdot {}_r C^L_{NM} \cdot d_2 x^M \cdot d_1 x^N - K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot d_2 A^\alpha_M \cdot d_1 x^M &= \\
 &= \frac{1}{S_0} \cdot (d_2 S^I_L \cdot d_1 S^L_K - d_2 S^I_L \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_1 x^M)) + \\
 &+ \frac{1}{S_0} \cdot (-(K^I_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot d_2 x^M) \cdot d_1 S^L_K + (K^I_{L\beta} \cdot g_\beta \cdot A^\beta_M \cdot d_2 x^M) \cdot (K^L_{K\gamma} \cdot g_\gamma \cdot A^\gamma_N \cdot d_1 x^N)), \\
 d_2 d_1 x^M &= \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^M_{KI} \cdot d_2 x^I \cdot d_1 x^K.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Эти уравнения представляют собой уравнения структуры алгебры действия фундаментальной, промежуточной частиц и поля внутренней симметрии в координатной форме.

### 3. Квантовые постулаты для фундаментальной и промежуточной частиц в поле внутренней симметрии

Уравнения структуры по существу и есть квантовые постулаты, на которых строится динамика фундаментальной и промежуточной частиц в поле внутренней симметрии. Перейдем к более привычной записи квантовых постулатов, используя переобозначения

$$d_1 {}_r \mathbf{S} = \psi, \quad d_1 \mathbf{S} = \psi_1, \quad d_1 {}_r \mathbf{x} = \chi, \quad d_2 = d.$$

Тогда вместо выражения (12) получим квантовые постулаты для фундаментальной и промежуточной частиц в поле внутренней симметрии

$$\begin{aligned}
 d\psi &= \frac{1}{S_0} \cdot \psi \circ d {}_r \mathbf{S} + \frac{1}{S_0} \cdot \psi \circ d {}_r \mathbf{S} - \frac{1}{S_0} \cdot \psi \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g), \\
 d\psi_1 - \frac{1}{L_0} \cdot (\chi \circ d\mathbf{x}) \circ \mathbf{A} \cdot g - \chi \circ d\mathbf{A} \cdot g &= \\
 &= \frac{1}{S_0} \cdot (\psi_1 \circ d {}_r \mathbf{S} - (\chi \circ \mathbf{A} \cdot g) \circ d {}_r \mathbf{S}) + \frac{1}{S_0} \cdot (-\psi_1 \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g) + (\chi \circ \mathbf{A} \cdot g) \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A} \cdot g)), \\
 d\chi &= \frac{1}{L_0} \cdot \chi \circ d\mathbf{x}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Квантовые постулаты в координатной форме получим из выражения (16), если учтем, что

$$d_1 S^I = \psi^I, \quad d_1 S^I_K = \psi^I_K, \quad d_1 x^I = \chi^I, \quad d_2 = d.$$

$$\begin{aligned} d\psi^L &= \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^L_{KI} dS^I \psi^K + \frac{1}{S_0} \cdot dS^L_K \cdot \psi^K - \frac{1}{S_0} \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot dx^M) \cdot \psi^K, \\ d\psi^I_K - \frac{1}{L_0} \cdot K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_L \cdot {}_r C^L_{NM} \cdot dx^M \cdot \chi^N - K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot dA^\alpha_N \cdot \chi^N &= \\ &= \frac{1}{S_0} \cdot (dS^I_L \cdot \psi^L_K - dS^I_L \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_N \cdot \chi^N)) + \\ &+ \frac{1}{S_0} \cdot (-(K^I_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot dx^M) \cdot \psi^L_K + (K^I_{L\beta} \cdot g_\beta \cdot A^\beta_M \cdot dx^M) \cdot (K^L_{K\gamma} \cdot g_\gamma \cdot A^\gamma_N \cdot \chi^N)), \\ d\chi^M &= \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^M_{KI} \cdot dx^I \cdot \chi^K. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее выполним следующие преобразования: учтем, что  $dA^\alpha_N = \partial_M(A^\alpha_N) \cdot dx^M$ , сгруппируем слагаемые так, как это делается при записи уравнения Дирака, и слагаемые, содержащие волновую функцию пространства-времени  $\chi$ , соберем в правой части уравнения:

$$\begin{aligned} d\psi^L + \frac{1}{S_0} \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot dx^M) \cdot \psi^K &= \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^L_{KI} dS^I \psi^K + \frac{1}{S_0} \cdot dS^L_K \cdot \psi^K, \\ d\psi^I_K + \frac{1}{S_0} \cdot (K^I_{L\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot dx^M) \cdot \psi^L_K &= \frac{1}{S_0} \cdot dS^I_L \cdot \psi^L_K - \frac{1}{S_0} \cdot dS^I_L \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_N \cdot \chi^N) + \\ &+ [K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot \partial_M(A^\alpha_N) + \frac{1}{S_0} \cdot (K^I_{L\beta} \cdot g_\beta \cdot A^\beta_M) \cdot (K^L_{K\gamma} \cdot g_\gamma \cdot A^\gamma_N) + \frac{1}{L_0} \cdot K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_L \cdot {}_r C^L_{NM}] \cdot dx^M \cdot \chi^N, \\ d\chi^M &= \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^M_{KI} \cdot dx^I \cdot \chi^K. \end{aligned} \quad (19)$$

#### 4. Тензор Янга–Миллса

Рассмотрим выражение в квадратных скобках в выражении (19)

$$K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot \partial_M A^\alpha_N + \frac{1}{S_0} \cdot (K^I_{L\beta} \cdot g_\beta \cdot A^\beta_M) \cdot (K^L_{K\gamma} \cdot g_\gamma \cdot A^\gamma_N) + \frac{1}{L_0} \cdot K^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_L \cdot {}_r C^L_{NM}.$$

Далее воспользуемся соотношением (16), которое приведено в Разделе II.2 Главы 5.2

$$K^I_{L\beta} \cdot K^L_{K\gamma} = K^I_{K\alpha} \cdot {}_r C^\alpha_{\gamma\beta}$$

и запишем указанное выражение, предполагая, что коэффициенты связи одинаковы, то есть  $g_\alpha = g_\beta = g_\gamma$

$$K^I_{K\alpha} \cdot g \cdot (\partial_M A^\alpha_N + \frac{g_\alpha}{S_0} \cdot {}_r C^\alpha_{\gamma\beta} \cdot A^\beta_M \cdot A^\gamma_N + \frac{1}{L_0} \cdot A^\alpha_L \cdot {}_r C^L_{NM}).$$

Выражение в скобках обозначим  $A^\alpha_{NM}$ :

$$A^\alpha_{MN} = \partial_M A^\alpha_N + \frac{g_\alpha}{S_0} \cdot {}_r C^\alpha_{\gamma\beta} \cdot A^\beta_M \cdot A^\gamma_N + \frac{1}{L_0} \cdot A^\alpha_L \cdot {}_r C^L_{NM}.$$

Далее запишем величину  $A^\alpha_{MN}$  в виде двух слагаемых, одно из которых симметрично, а другое антисимметрично по индексам  $M$  и  $N$ :

$$A^\alpha_{MN} = A^\alpha_{\langle MN \rangle} + A^\alpha_{[MN]},$$

затем положим  $A^\alpha_{\langle MN \rangle} = 0$ , а величину  $A^\alpha_{[MN]}$  переобозначим  $F^\alpha_{MN} = A^\alpha_{[MN]}$ . Тензор

$$F^\alpha_{MN} = \partial_{[M} A^\alpha_{N]} + \frac{g_\alpha}{S_0} \cdot {}_r C^\alpha_{\gamma\beta} \cdot A^\beta_{[M} \cdot A^\gamma_{N]} + \frac{1}{L_0} \cdot A^\alpha_L \cdot {}_r C^L_{[NM]}$$

назовем обобщенным тензором Янга-Миллса. Обобщение заключается в том, что этот тензор распространен на пространство-время  ${}_r\mathbb{X}$ . В том случае, когда пространство-время  ${}_r\mathbb{X}$  сводится к пространству-времени СТО  $X$ , имеем  ${}_rC^L_{[NM]} = 0$  и обобщенный тензор Янга-Миллса сводится к общеизвестному

$$F^{\alpha}_{mn} = \partial_{[m}A^{\alpha}_{n]} + \frac{g_{\alpha}}{S_0} \cdot {}_rC^{\alpha}_{\gamma\beta} \cdot A^{\beta}_{[m} \cdot A^{\gamma}_{n]}.$$

Здесь индексы  $m$  и  $n$  нумеруют векторы в пространстве-времени СТО  $X$ .

Перепишем квантовые постулаты, используя тензор Янга-Миллса:

$$\begin{aligned} d\psi^L + \frac{1}{S_0} \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot A^{\alpha}_M \cdot dx^M) \cdot \psi^K &= \frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^L_{KI} dS^I \psi^K + \frac{1}{S_0} \cdot dS^L_K \cdot \psi^K, \\ d\psi^I_K + \frac{1}{S_0} \cdot (K^I_{L\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot A^{\alpha}_M \cdot dx^M) \cdot \psi^L_K &= \\ &= \frac{1}{S_0} \cdot dS^I_L \cdot (\psi^L_K - (K^L_{K\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot A^{\alpha}_N \cdot \chi^N)) + K^I_{K\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot F^{\alpha}_{MN} \cdot dx^M \cdot \chi^N, \\ d\chi^M &= \frac{1}{L_0} \cdot {}_rC^M_{KI} \cdot dx^I \cdot \chi^K. \end{aligned} \quad (20)$$

Приведенные уравнения есть квантовые постулаты в дифференциалах. Перейдем от этих уравнений к квантовым постулатам в частных производных. При этом нужно учесть, что

$$dS^I = -p^I_M \cdot dx^M, \quad dS^L_K = -m^L_{LM} \cdot dx^M,$$

где

$$\begin{aligned} p^I_M &= -\partial_M S^I \quad \text{— координаты импульса фундаментальной частицы,} \\ m^L_{LM} &= -\partial_M S^L_L \quad \text{— координаты момента промежуточной частицы.} \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} \partial_M \psi^L + \frac{1}{S_0} \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot A^{\alpha}_M) \cdot \psi^K &= -\frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K - \frac{1}{S_0} \cdot m^L_{KM} \cdot \psi^K, \\ \partial_M \psi^L_K + \frac{1}{S_0} \cdot (K^L_{I\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot A^{\alpha}_M) \cdot \psi^I_K &= \\ &= -\frac{1}{S_0} \cdot m^L_{IM} \cdot (\psi^I_K - (K^I_{K\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot A^{\alpha}_N \cdot \chi^N)) + K^L_{K\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot F^{\alpha}_{MN} \cdot \chi^N, \\ \partial_M \chi^L &= \frac{1}{L_0} \cdot {}_rC^L_{KM} \cdot \chi^K. \end{aligned} \quad (21)$$

## 5. Система квантовых уравнений для фундаментальной и промежуточной частиц в поле внутренней симметрии

Для вывода системы квантовых уравнений для фундаментальной и промежуточной частиц в поле внутренней симметрии воспользуемся квантовыми постулатами (21). Умножим первое уравнение на структурные константы  ${}_iC^{MP}_L$ , а второе уравнение — на структурные константы  ${}_iC^{MK}_P$ , выполнив соответствующие суммирования<sup>1</sup>. Получим

$$\begin{aligned} {}_iC^{MP}_L \cdot (\partial_M \psi^L + \frac{1}{S_0} \cdot (K^L_{K\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot A^{\alpha}_M) \cdot \psi^K) &= -\frac{1}{S_0} \cdot {}_iC^{MP}_L \cdot ({}_rC^L_{KI} \cdot p^I_M + m^L_{KM}) \cdot \psi^K, \\ {}_iC^{MK}_P \cdot (\partial_M \psi^L_K + \frac{1}{S_0} \cdot (K^L_{I\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot A^{\alpha}_M) \cdot \psi^I_K) &= \\ &= -\frac{1}{S_0} \cdot {}_iC^{MP}_L \cdot m^L_{IM} \cdot (\psi^I_K - (K^I_{K\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot A^{\alpha}_N \cdot \chi^N)) + {}_iC^{MK}_P \cdot K^L_{K\alpha} \cdot g_{\alpha} \cdot F^{\alpha}_{MN} \cdot \chi^N, \\ \partial_M \chi^L &= \frac{1}{L_0} \cdot {}_rC^L_{KM} \cdot \chi^K. \end{aligned} \quad (22)$$

<sup>1</sup> Обоснование умножений такого рода приведено в Разделе II.6

Эти уравнения и есть *система квантовых уравнений для фундаментальной и промежуточной частиц в поле внутренней симметрии*.

Удобно ввести следующие величины:

$$\begin{aligned} A^L_{KM} &= K^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M \quad - \text{потенциал поля внутренней симметрии,} \\ F^L_{KMN} &= K^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot F^\alpha_{MN} \quad - \text{объект поля внутренней симметрии.} \end{aligned}$$

Для указанных величин тензор поля внутренней симметрии

$$F^L_{K[NM]} = \partial_{[M} A^L_{|K|N]} + \frac{1}{S_0} \cdot A^L_{P[M} \cdot A^P_{|K|N]} + \frac{1}{L_0} \cdot A^L_{KP} \cdot r C^P_{[NM]}.$$

Тогда запись системы квантовых уравнений становится компактной и прозрачной:

$$\begin{aligned} i C^{MP}_L \cdot (\partial_M \psi^L + \frac{1}{S_0} \cdot A^L_{KM} \cdot \psi^K) &= -\frac{1}{S_0} \cdot i C^{MP}_L \cdot (r C^L_{KI} \cdot p^I_M + m^L_{KM}) \cdot \psi^K, \\ i C^{MK}_P \cdot (\partial_M \psi^L_K + \frac{1}{S_0} \cdot A^L_{IM} \cdot \psi^I_K) &= -\frac{1}{S_0} \cdot i C^{MK}_P \cdot m^L_{IM} \cdot (\psi^I_K - A^I_{KN} \cdot \chi^N) + i C^{MK}_P \cdot F^L_{KMN} \cdot \chi^N, \\ \partial_M \chi^L &= \frac{1}{L_0} \cdot r C^L_{KM} \cdot \chi^K. \end{aligned} \quad (23)$$

### 5.1. Система квантовых уравнений для лептонов и промежуточных частиц в поле внутренней симметрии

Обратимся к системе квантовых уравнений для лептонов и промежуточных частиц в поле внутренней симметрии. Для этого в системе уравнений (23) перейдем от пространства действия  $\mathbb{S}$  к пространству действия лептонов  $\mathbb{C}_4$  и к группе поворотов в этом пространстве (см. Раздел V.5 Главы 5.2), положим  $S_0 = \hbar$ , а матрицы  $K^L_{L\alpha}$  отождествим со структурными матрицами правой алгебры Клиффорда. Получим

$$\begin{aligned} i C^{MP}_L \cdot (\partial_M \psi^L + \frac{1}{\hbar} \cdot (r C^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M) \cdot \psi^K) &= -\frac{1}{\hbar} \cdot i C^{MP}_L \cdot (r C^L_{KI} \cdot p^I_M + m^L_{KM}) \cdot \psi^K, \\ i C^{MK}_P \cdot (\partial_M \psi^L_K + \frac{1}{\hbar} \cdot (r C^L_{I\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M) \cdot \psi^I_K) &= \\ = -\frac{1}{\hbar} \cdot i C^{MP}_L \cdot m^L_{IM} \cdot (\psi^I_K - (r C^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_N \cdot \chi^N)) &+ i C^{MK}_P \cdot r C^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot F^\alpha_{MN} \cdot \chi^N, \\ \partial_M \chi^L &= \frac{1}{L_0} \cdot r C^L_{KM} \cdot \chi^K, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{где} \quad F^\alpha_{MN} = \partial_{[M} (A^\alpha_{N]}) + \frac{g}{\hbar} \cdot r C^\alpha_{\gamma\beta} \cdot A^\beta_{[M} \cdot A^\gamma_{N]} + \frac{1}{L_0} \cdot A^\alpha_L \cdot r C^L_{[NM]} -$$

обобщенный тензор Янга–Миллса.

Далее в соответствии с Разделом VIII Главы 4.4 положим, что обобщенный импульс  $p^I_M$  имеет только две компоненты

$$p^0_0 = -\partial_0 S^0 = \frac{m c}{2}, \quad p^{34}_0 = -\partial_0 S^{34} = \frac{m c}{2}.$$

После подстановки введенных величин в уравнение (24) получим систему квантовых уравнений для лептонов и промежуточных частиц в поле внутренней симметрии в окончательном виде:

$$\begin{aligned} i C^{MP}_L \cdot (\partial_M \psi^L + \frac{1}{\hbar} \cdot (r C^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M) \cdot \psi^K) &= -\frac{m c}{2 \hbar} \cdot (r C^P_{K0} + r C^P_{K34}) \cdot \psi^K - \frac{1}{\hbar} \cdot i C^{MP}_L \cdot m^L_{KM} \cdot \psi^K, \\ i C^{MK}_P \cdot (\partial_M \psi^L_K + \frac{1}{\hbar} \cdot (r C^L_{I\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_M) \cdot \psi^I_K) &= \\ = -\frac{1}{\hbar} \cdot i C^{MP}_L \cdot m^L_{IM} \cdot (\psi^I_K - (r C^I_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_N \cdot \chi^N)) &+ i C^{MK}_P \cdot r C^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot F^\alpha_{MN} \cdot \chi^N, \\ \partial_M \chi^L &= \frac{1}{L_0} \cdot r C^L_{KM} \cdot \chi^K. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее удобно перейти к двухколоночному формату изложения.



## 5.2. Частные случаи

1. Фундаментальная частица в поле внутренней симметрии.

В этом случае надо положить волновую функцию и момент промежуточной частицы равными нулю:  $\psi^K = 0$ ,  $m^I_{LM} = 0$ . Тогда система уравнений сводится к уравнению для фундаментальной частицы в поле внутренней симметрии и алгебраическому соотношению

$$\begin{aligned} & {}_i C^{MP}_L \cdot \left( \partial_M \psi^L + \frac{g}{\hbar} \cdot A^L_{KM} \cdot \psi^K \right) = \\ & = -\frac{1}{\hbar} \cdot {}_i C^{MP}_L \cdot \left( {}_r C^L_{KI} \cdot p^I_M \right) \cdot \psi^K, \\ & {}_r C^L_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot F^\alpha_{MN} \cdot \chi^N = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

2. Промежуточная частица в поле внутренней симметрии.

В этом случае надо положить волновую функцию и импульс фундаментальной частицы равными нулю:  $\psi^I = 0$ ,  $p^I_L = 0$ . Тогда система уравнений сводится к уравнению для промежуточной частицы

$$\begin{aligned} & {}_i C^{MP}_I \cdot \left( \partial_M \psi^K + \frac{g}{\hbar} \cdot A^I_{LM} \cdot \psi^K \right) = \\ & = -\frac{1}{\hbar} \cdot {}_i C^{MP}_I \cdot m^I_{LM} \cdot \psi^K. \end{aligned} \quad (27)$$

3. Условие квантования калибровочного заряда.

Из уравнения (27), в частности при условии  $m^I_{LM} = 0$ , следует

$$\frac{\partial \psi^K}{\delta \theta^\alpha} = -\frac{g_\alpha}{\hbar} \cdot K^I_{L\alpha} \cdot \psi^K.$$

В частности, для электрической калибровочной группы имеем

$$g = \frac{e}{c}, \quad K^I_{L\alpha} = {}_r C^I_{L\alpha} = i \cdot \delta^I_L$$

и условие квантования электрического заряда выглядит так:

$$\frac{\partial \psi^K}{\delta \theta} = -i \cdot \frac{e}{c \cdot \hbar} \cdot \psi^K.$$

3. Свободная промежуточная частица.

В этом случае в (27) надо положить потенциал калибровочного поля  $A^I_{LM} = 0$ . Тогда получим квантовые постулаты для свободной промежуточной частицы

$$\partial_M \psi^K = -\frac{1}{\hbar} m^I_{LM} \cdot \psi^K. \quad (28)$$

Возьмем от этого уравнения производную  $\partial^M$ , выполнив соответствующие суммирования, и учтем закон сохранения момента  $\partial^M(m^I_{LM}) = 0$ . Получим обобщенное уравнение Клейна–Гордона для свободных промежуточных частиц

$$\frac{\partial^2 \psi^K}{\partial x_M \partial x^M} = \frac{m^I_{LM} \cdot m^{ML}_N}{\hbar^2} \cdot \psi^K.$$

## 6. Инвариантная форма квантовых уравнений

Здесь обсудим смысл умножения квантовых постулатов на структурные константы  ${}_i C^{MP}_L$  для получения квантовых уравнений. Начнем с того, что приведем уравнение Дирака. В принятых ранее обозначениях (см. Раздел II Главы 4.4) оно имеет вид

$$\left( {}_i C^{iA_1}_{B_1} \partial_i + \frac{m_e c}{\hbar} {}_i C^{0A_1}_{B_1} \right) \cdot \psi^{B_1} = 0.$$

Здесь по индексам  $i$  и  $B_1$  выполняется суммирование. Это уравнение было обобщено и записано в следующем виде (Раздел VIII Главы 4.4)

$${}_i C^{MP}_L \cdot \partial_M \psi^L(x) = -\frac{1}{\hbar} {}_i C^{MP}_L \cdot {}_r C^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K. \quad (29)$$

(По повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Сложная и необъяснимая комбинация индексов содержится в первом слагаемом

$${}_i C^{MP}_L \cdot \partial_M \psi^L.$$

Ситуация немного проясняется, если учесть, что матрицы  ${}_i C^{MP}_L$  представляют не что иное, как ковариантные базисные векторы пространства-времени (см. Раздел I.2 Главы 4.1). Таким образом, оператор дифференцирования

$${}_i C^{MP}_L \cdot \partial_M$$

есть регулярное представление оператора дифференцирования *набла*

$$\nabla = {}_i \mathbf{E}^M \cdot \partial_M.$$

Однако свертка по индексу  $L$  остается непонятной. Попробуем разобраться в этом вопросе.

Ранее в Разделах IV. и VIII. 1.2.Главы были введены базисные векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{e}$  двух типов, которые отличаются только тем, что участвуют в произведениях разного направления – правого и левого, а по сути это одни и те же векторы. Исходный вектор снабжался индексом  $I$ , а тот вектор, который на него умножали, снабжался индексом  $K$ . И таким образом различались умножение справа и умножение слева. Для того, чтобы ярче подчеркнуть разницу в этих произведениях, использовались разные обозначения базисных векторов для этих двух типов. Здесь будем пользоваться одним обозначением базисных векторов и запишем эти умножения следующим образом: умножение слева

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{e}_L \cdot {}_i C^L_{KI} \quad (30)$$

и умножение справа

$$\mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_L \cdot {}_r C^L_{KI}. \quad (31)$$

Но если в выражении (31) поменять обозначения индексов, то приходим к умножению справа следующего вида:

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{e}_L \cdot {}_r C^L_{IK}.$$

А так как это соотношение и выражение (30) – это одно и то же соотношение, то отсюда следует

$${}_r C^L_{IK} = {}_l C^L_{KI}.$$

Также для ковариантных векторов различаются умножение слева

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{E}^K = {}_l C^{IK}_L \cdot \mathbf{E}^L \quad (32)$$

и умножение справа

$$\mathbf{E}^K \circ \mathbf{E}^I = {}_r C^{IK}_L \cdot \mathbf{E}^L. \quad (33)$$

Но если здесь поменять обозначения индексов, то приходим к умножению справа следующего вида:

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{E}^K = {}_r C^{KI}_L \cdot \mathbf{E}^L.$$

Из сравнения с соотношением (32), следует

$${}_r C^{KI}_L = {}_l C^{IK}_L. \quad (34)$$

Теперь поднимем индекс  $K$  в выражении (31), получим

$$\mathbf{E}^K \circ \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_L \cdot {}_r C^{LK}_I$$

и с использованием соотношения (34)

$$\mathbf{E}^K \circ \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_L \cdot {}_l C^{KL}_I. \quad (35)$$

После вышеуказанных выкладок, рассмотрим произведение

$$\nabla \circ \psi,$$

где  $\psi = \mathbf{e}_I \cdot \psi^I$  – вектор волновой функции. Имеем с учетом выражения (35)

$$\nabla \circ \psi = (\mathbf{E}^K \circ \mathbf{e}_I) \cdot \partial_K \psi^I = \mathbf{e}_L \cdot {}_l C^{KL}_I \cdot \partial_K \psi^I.$$

Таким образом, выражения  ${}_l C^{KL}_I \cdot \partial_K \psi^I$  есть проекции (координаты) вектора  $\nabla \circ \psi$  на базисные векторы  $\mathbf{e}_L$ .

Теперь попытаемся раскрыть смысл выражения

$${}_l C^{KP}_L \cdot \partial_K \psi^I_P,$$

которое получено при переходе от квантовых постулатов к волновому уравнению для промежуточной частицы. Рассмотрим произведение

$$\nabla \circ \psi_1,$$

где  $\psi_1 = \mathbf{I}^P_I \cdot \psi^I_P$  – вектор волновой функции промежуточной частицы. Имеем

$$\begin{aligned} \nabla \circ \psi_1 &= (\mathbf{E}^K \circ \mathbf{I}^P_I) \cdot \partial_K \psi^I_P = (\mathbf{E}^K \circ \mathbf{E}^P) \circ \mathbf{e}_I \cdot \partial_K \psi^I_P \\ &= {}_l C^{KP}_L \cdot (\mathbf{E}^L \circ \mathbf{e}_I) \cdot \partial_K \psi^I_P = \mathbf{I}^L_I \cdot {}_l C^{KP}_L \cdot \partial_K \psi^I_P. \end{aligned}$$

Таким образом, выражения  ${}_l C^{KP}_L \cdot \partial_K \psi^I_P$  есть проекции (координаты) вектора  $\nabla \circ \psi_1$  на базисные векторы  $\mathbf{I}^L_I$ .

### III. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯДОВ С УЧАСТИЕМ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЧАСТИЦ

Итак, имеем две модели взаимодействия заряда 1 с зарядом 2: полевою и корпускулярную<sup>2</sup>. В первом случае заряд 1 окружает себя полем, которое непосредственно действует на заряд 2. В случае корпускулярной модели заряд 1 испускает промежуточную частицу, которая непосредственно действует на заряд 2.<sup>3</sup> Если полевая модель не сталкивается с затруднениями, то корпускулярная, напротив, вызывает вопросы, на которые пока нет удовлетворительного ответа.

Некоторые из этих вопросов таковы.

1. Испускает ли статический заряд 1 промежуточную частицу в отсутствии заряда 2? Если да, то какова ее судьба? Этот вопрос особенно актуален для безмассовой промежуточной частицы, которая обязана двигаться со скоростью света. Если да, то теряет ли при этом заряд 1 энергию? Для полевой модели такой вопрос не возникает, так как для нее статичны как заряд 1, так и инициируемое им поле.

2. Каким образом промежуточная частица, выделенная зарядом 1, чувствует заряд 2, если учесть, что калибровочный заряд промежуточной частицы равен нулю (например, фотон электрически нейтрален). Для полевой модели такой вопрос не возникает, так как калибровочный потенциал обладает зарядовым индексом.

3. Обладает ли выделенная зарядом 1 промежуточная частица собственным моментом импульса и передает ли она заряду 2, помимо импульса, еще и момент импульса? Если да, то сопровождается ли этот процесс раскручиванием зарядов 1 и 2 в разные стороны? Для полевой модели такой вопрос не возникает, так как калибровочное поле не наделяется собственным моментом импульса.

Попытка ответить на поставленные вопросы и привести в соответствие корпускулярную и полевою модели взаимодействия заставляет сформулировать следующую точку зрения.

1. Промежуточная частица представляет собой диполь. Выделенная зарядом 1 промежуточная частица ориентирована относительно него. Внешний заряд промежуточной частицы имеет тот же знак, что и заряд 1. Именно этот заряд чувствует заряд 2, отличает его от нейтральной частицы и взаимодействует с ним. В макроотношении промежуточная частица нейтральна.

2. Промежуточная частица, выделяемая статическим зарядом, макронеподвижна. Этот тезис входит

<sup>2</sup> Рассматривая указанные модели, будем обращаться к простому примеру статического взаимодействия электрических зарядов.

<sup>3</sup> Так как речь идет о *взаимодействии*, то заряд 2 ведет себя аналогичным образом по отношению к заряду 1.

в кажущееся противоречие с концепцией безмассовой промежуточной частицы. Однако в Разделе II.1 Главы 1.4 было показано, что возможны два вида движения безмассовой частицы: прямолинейное движение со скоростью света и колебательное движение с частотой

$$\Omega = \frac{1}{T}, \quad \text{где } T = \frac{c}{A},$$

где  $c$  – скорость света,  $A$  – максимальное ускорение. Именно такое движение необходимо приписать промежуточной частице, выделяемой статическим зарядом.

На основании приведенных тезисов модель взаимодействия зарядов с участием промежуточных частиц выглядит следующим образом. Заряд 1 выделяет промежуточные частицы, которые макронеподвижны и ориентированы по отношению к заряду 1 и друг другу. Эти промежуточные частицы выстраиваются вдоль силовых линий калибровочного поля и образуют своего рода щупальцы. Щупальцы заряда 1 входят в непосредственное взаимодействие с аналогичными щупальцами заряда 2. В макроотношении поле промежуточных частиц, окружающих статический заряд, статично.

3. Необходимо допустить существование промежуточных частиц (в частности фотонов) с нулевым спином и предположить, что именно они участвуют во взаимодействии статических зарядов. В этом случае вопрос о передаче момента импульса при взаимодействии статических зарядов снимается.

Благодаря постулированным свойствам промежуточных частиц, картина взаимодействия зарядов с участием промежуточных частиц предельно адекватна полевой модели.

### 1. Корпускулярная модель излучения

Пусть в исходном положении заряд  $(-q)$  неподвижен и находится в начале системы координат (Рис. 1.). Для определенности заряд считается отрицательным. На рисунке показана одна из промежуточных частиц, находящихся вблизи заряда. Промежуточная частица рассматривается как диполь с зарядами  $(+e)$  и  $(-e)$  на концах. В исходном положении диполь ориентирован вдоль оси  $x$ , причем под действием сил Кулона заряд  $(+e)$  находится вблизи заряда  $(-q)$ . В макроотношении промежуточная частица неподвижна, что соответствует представлению о статическом поле заряда  $(-q)$ . В микроотношении промежуточная частица колеблется вдоль оси  $x$  с частотой  $\Omega$ .

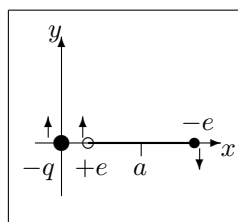


Рис. 1.

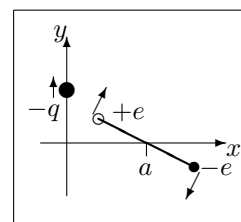


Рис. 2.

Рассматриваемый далее процесс излучения промежуточной частицы связан с колебанием заряда  $(-q)$  относительно начала координат вдоль оси  $y$ . На Рис. 1. показано начало движения заряда  $(-q)$  вверх по оси  $y$ . На Рис. 2. заряд  $(-q)$  сместился по оси  $y$  и продолжает движение вверх. Под действием сил Кулона промежуточная частица поворачивается относительно своего центра  $a$  по часовой стрелке. Вращение промежуточной частицы накладывается на ее колебательное движение.

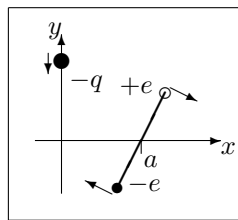


Рис. 3.

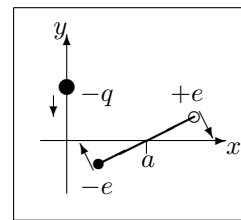


Рис. 4.

На Рис. 3. заряд  $(-q)$  находится в точке максимального отклонения и начинает движение вниз к началу координат. Промежуточная частица под действием приобретенного момента импульса продолжает вращение по часовой стрелке вокруг своего центра  $a$ .

На Рис. 4. заряд  $(-q)$  движется вниз к началу координат, а промежуточная частица продолжает вращение по часовой стрелке вокруг своего центра  $a$ .

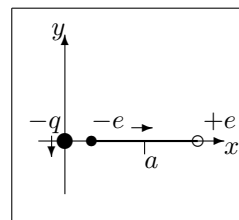


Рис. 5.

На Рис. 5. заряд  $(-q)$  находится в начале координат. Промежуточная частица, повернувшись относительно центра  $a$ , достигает положения, когда ее отрицательный заряд  $(-e)$  сближается с зарядом  $(-q)$ . Далее под действием сил Кулона промежуточная частица отталкивается от заряда  $(-q)$ . Колебательное движение промежуточной частицы вдоль оси  $x$  переходит в поступательное движение вдоль оси  $x$  со скоростью света. Происходит излучение промежуточной

частицы.

Приведенная модель излучения промежуточной частицы находится в согласии с тем фактом, что излучение происходит в направлении, перпендикулярном направлению движения колеблющегося заряда ( $-q$ ).

#### IV. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯДОВ С УЧАСТИЕМ КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ

В предыдущем Разделе рассматривалась необходимость корректировки корпускулярной модели взаимодействия зарядов на основании полевой модели. Но имеет место и обратная тенденция, вызванная необходимостью уточнения полевой модели по корпускулярной.

##### 1. Начала обобщенной электродинамики

Одной из характеристик фотона является собственный момент импульса (спин), но в представлении об электромагнитном поле эта характеристика отсутствует. Вместе с тем согласно нашим общим представлениям взаимодействие зарядов может быть описано двумя эквивалентными способами – как с помощью промежуточной частицы (фотона), так и с помощью электромагнитного поля. Отсюда возникает необходимость обобщения электромагнитного поля с целью включения в его характеристики спина.

Сначала напомним, что теория электромагнитного поля строится на понятии потенциала с компонентами

$$A^4, \quad A^a,$$

где  $a = 1, 2, 3$ . Или в других обозначениях

$$\phi, \quad c \cdot A^1, \quad c \cdot A^2, \quad c \cdot A^3.$$

Здесь  $\phi$  – электрический потенциал,  $A^a$  – компоненты векторного потенциала.

Эти компоненты подобны (преобразуются как) координатам пространства-времени СТО

$$(dx^4, dx^a) \sim (c \cdot dt, dx^1, dx^2, dx^3).$$

Потенциалы  $\phi$  и  $A^a$  связаны между собой уравнением, называемым калибровкой Лоренца:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial A^a}{\partial x^a} = 0$$

или

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(c \cdot A^a)}{\partial x^a} = 0$$

или

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0, \quad (36)$$

где  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Источником электромагнитного поля является четырехмерная плотность тока, компоненты которой также подобны координатам пространства-времени СТО:

$$(j^4, j^a) \sim (c \cdot \rho, j^1, j^2, j^3).$$

По определению  $j^a$  и  $\rho$  связаны условием непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^a}{\partial x^a} = 0,$$

или

$$\frac{\partial(c \cdot \rho)}{\partial(c \cdot t)} + \frac{\partial j^a}{\partial x^a} = 0,$$

или

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0.$$

Далее вводится тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

Здесь этот тензор записан в ковариантных компонентах. Аналогично записывается тензор электромагнитного поля в контравариантных компонентах

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}. \quad (37)$$

Нужно помнить, что операторы дифференцирования в ковариантных компонентах имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^a} \right),$$

а операторы дифференцирования в контравариантных компонентах имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^a} \right).$$

Уравнения электромагнитного поля формулируются по отношению к тензору электромагнитного поля и записываются следующим образом:

$$F^{ik}{}_{,k} \equiv \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = \frac{j^i}{c \cdot \epsilon_0}, \quad (38)$$

Здесь  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Из соотношений (37) и (38) следуют уравнения по отношению к компонентам потенциала

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial A^k}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{j^i}{c \cdot \epsilon_0}.$$

Если учесть калибровку Лоренца (36), то получим волновые уравнения по отношению к компонентам потенциала

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_b \partial x^b} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A^a}{\partial x_b \partial x^b} = \mu_0 \cdot j^a.$$

Здесь

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2 \cdot \varepsilon_0}$$

– магнитная проницаемость вакуума.

Обобщение электродинамики, которое мы ищем, связано с переходом от пространства-времени СТО к пространству алгебры Клиффорда  $\mathbb{C}_4$ . В этом пространстве дифференциалы координат записываются так (см. Раздел IV Главы 1.3):

$$dx^0, dx^4, dx^1, dx^2, dx^3,$$

$$dx^{32}, dx^{13}, dx^{21}, dx^{14}, dx^{24}, dx^{34},$$

$$dx^{123}, dx^{124}, dx^{134}, dx^{234}, dx^{1324}.$$

Среди этих координат координаты  $dx^{32}, dx^{13}, dx^{21}$  пропорциональны углам собственного поворота. Им соответствует собственный момент импульса – спин.

Отсюда следует, что обобщение электродинамики должно быть связано с введением пространственно подобных компонент потенциала

$$\mathcal{A}^0, \mathcal{A}^4, \mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3,$$

$$\mathcal{A}^{32}, \mathcal{A}^{13}, \mathcal{A}^{21}, \mathcal{A}^{14}, \mathcal{A}^{24}, \mathcal{A}^{34},$$

$$\mathcal{A}^{123}, \mathcal{A}^{124}, \mathcal{A}^{134}, \mathcal{A}^{234}, \mathcal{A}^{1324}.$$

Здесь компоненты  $\mathcal{A}^4, \mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3$  соответствуют классической теории электромагнитного поля, а компоненты  $\mathcal{A}^{32}, \mathcal{A}^{13}, \mathcal{A}^{21}$  следует считать ответственными за спин электромагнитного поля.

Далее для простоты ограничимся частью приведенных компонент

$$\mathcal{A}^4, \mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3,$$

$$\mathcal{A}^{32}, \mathcal{A}^{13}, \mathcal{A}^{21}, \mathcal{A}^{14}, \mathcal{A}^{24}, \mathcal{A}^{34},$$

то есть к компонентам потенциала классической теории электромагнитного поля добавим спиновые компоненты и компоненты  $\mathcal{A}^{14}, \mathcal{A}^{24}, \mathcal{A}^{34}$ , которые необходимы для сохранения принципа релятивистской инвариантности теории.

Логику построения теории оставим прежней.

Таким образом, имеем дифференциалы координат  $dx^I$ :

$$dx^4, dx^1, dx^2, dx^3,$$

$$dx^{32}, dx^{13}, dx^{21}, dx^{14}, dx^{24}, dx^{34}$$

или

$$dx^4, dx^a, dx^{ab}, dx^{a4}$$

или в других обозначениях

$$c \cdot dt, dx^1, dx^2, dx^3,$$

$$R \cdot d\varphi^1, R \cdot d\varphi^2, R \cdot d\varphi^3,$$

$$T \cdot dv^1, T \cdot dv^2, T \cdot dv^3.$$

Компоненты потенциала обобщенного электромагнитного поля  $\mathcal{A}^I$  будем записывать также в виде

$$\mathcal{A}^4, \mathcal{A}^a, \mathcal{A}^{ab}, \mathcal{A}^{a4}$$

или в других обозначениях

$$\phi, c \cdot A_x^a, \Omega \cdot A_\varphi^a, A \cdot A_v^a.$$

Здесь  $\phi$  – электрический потенциал,  $A_x^a$  – компоненты векторного потенциала. Напомним, что  $\Omega$  и  $A$  – физические постоянные, соответственно предельная угловая скорость и максимальное ускорение.

Компоненты потенциала свяжем между собой уравнением, которое также будем называть *калибровкой Лоренца*

$$\frac{\partial \mathcal{A}^I}{\partial x^I} = 0 \quad (39)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{A}^4}{\partial x^4} + \frac{\partial \mathcal{A}^a}{\partial x^a} + \frac{\partial \mathcal{A}^{ab}}{\partial x^{ab}} + \frac{\partial \mathcal{A}^{a4}}{\partial x^{a4}} = 0$$

или

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (c \cdot A_x^a)}{\partial x^a} + \frac{1}{R} \frac{(\Omega \cdot A_\varphi^a)}{\partial \varphi^a} + \frac{1}{T} \frac{(A \cdot A_v^a)}{\partial v^a} = 0.$$

или

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial A_x^a}{\partial x^a} + \frac{1}{R^2} \frac{A_\varphi^a}{\partial \varphi^a} + \frac{1}{T^2} \frac{A_v^a}{\partial v^a} = 0.$$

Источником электромагнитного поля является плотность тока  $j^I$ , компоненты которой также подобны координатам обобщенного пространства-времени

$$j^4, j^a, j^{ab}, j^{a4}$$

или

$$c \cdot \rho, j_x^a, R \cdot j_\varphi^a, T \cdot j_v^a.$$

Здесь

$\rho$  – плотность неподвижного заряда,  
 $j_x^a$  – плотность тока равномерно движущегося заряда,  
 $j_\varphi^a$  – плотность тока вращающегося заряда,  
 $j_v^a$  – плотность тока ускоренного заряда.

По определению компоненты плотности тока свяжем условием непрерывности

$$\frac{\partial j^I}{\partial x^I} = 0$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x^a}{\partial x^a} + \frac{\partial j_\varphi^a}{\partial \varphi^a} + \frac{\partial j_v^a}{\partial v^a} = 0.$$

Далее введем тензор электромагнитного поля

$$F_{IK} = \frac{\partial A_K}{\partial x^I} - \frac{\partial A_I}{\partial x^K}.$$

Здесь этот тензор записан в ковариантных компонентах. Аналогично записывается тензор электромагнитного поля в контравариантных компонентах

$$F^{IK} = \frac{\partial A^K}{\partial x_I} - \frac{\partial A^I}{\partial x_K}. \quad (40)$$

Нужно иметь в виду, что операторы дифференцирования в ковариантных компонентах имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x^I} \sim \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi^a}, \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial v^a} \right),$$

а операторы дифференцирования в контравариантных компонентах имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_I} \sim \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_a}, -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi_a}, \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial v_a} \right).$$

Уравнения электромагнитного поля формулируются по отношению к тензору электромагнитного поля и имеют вид

$$F^{IK},_{;K} = \frac{j^I}{c \cdot \varepsilon_0}. \quad (41)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Из соотношений (40) и (41) следуют уравнения по отношению к компонентам потенциала

$$\frac{\partial}{\partial x_I} \frac{\partial A^K}{\partial x^K} - \frac{\partial^2 A^I}{\partial x_K \partial x^K} = \frac{j^I}{c \cdot \varepsilon_0}. \quad (42)$$

Если учесть калибровку Лоренца (39), то получим волновые уравнения по отношению к компонентам потенциала

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_b \partial x^b} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi_b \partial \varphi^b} - \frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_b \partial v^b} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x^a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_x^a}{\partial x_b \partial x^b} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 A_x^a}{\partial \varphi_b \partial \varphi^b} - \frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 A_x^a}{\partial v_b \partial v^b} &= \mu_0 \cdot j_x^a, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_\varphi^a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_\varphi^a}{\partial x_b \partial x^b} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 A_\varphi^a}{\partial \varphi_b \partial \varphi^b} - \frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 A_\varphi^a}{\partial v_b \partial v^b} &= \nu_0 \cdot j_\varphi^a, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_v^a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_v^a}{\partial x_b \partial x^b} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 A_v^a}{\partial \varphi_b \partial \varphi^b} - \frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 A_v^a}{\partial v_b \partial v^b} = \lambda_0 \cdot j_v^a.$$

Здесь

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2 \cdot \varepsilon_0}$$

– магнитная проницаемость вакуума;

$$\nu_0 = \frac{1}{\Omega^2 \cdot \varepsilon_0}$$

– проницаемость вакуума для вращающихся зарядов;

$$\lambda_0 = \frac{1}{A^2 \cdot \varepsilon_0}$$

– проницаемость вакуума для ускоренных зарядов.

На этом закончим изложение обобщенной электродинамики. Важно, что такое обобщение позволяет описать взаимодействие зарядов с помощью полевой модели предельно адекватно корпускулярной модели.

### 1.1. Закрученные электромагнитные волны

Из (42) следует, что в общем виде уравнение электромагнитной волны записывается следующим образом

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}^I}{\partial x_K \partial x^K} = 0. \quad (43)$$

Ему соответствует кинематическое уравнение фронта волны

$$g_{IK} \cdot dx^I \cdot dx^K = 0.$$

Пример. В классическом случае уравнение плоской электромагнитной волны имеет вид

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^i}{\partial t^2} = 0. \quad (44)$$

Ему соответствует кинематическое уравнение фронта плоской волны

$$dx^2 - c^2 dt^2 = 0.$$

Отсюда

$$dx = \pm c \cdot dt.$$

То есть, фронтальная плоскость, перпендикулярная оси  $x$ , движется вдоль этой оси со скоростью  $c$ . Каждая точка фронтальной плоскости движется со скоростью  $c$  вдоль прямой, параллельной оси  $x$ .

Здесь рассмотрим следующий частный случай волнового уравнения (43):

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^i}{\partial t^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 A^i}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Здесь  $\varphi$  – угол в плоскости  $(y, z)$ . Этому уравнению соответствует кинематическое уравнение фронта электромагнитной волны

$$dx^2 - c^2 dt^2 - R^2 d\varphi^2 = 0$$

или

$$c^2 dt^2 = dx^2 - R^2 d\varphi^2$$

или

$$c_1 \cdot c_2 \cdot dt^2 = (dx - Rd\varphi) \cdot (dx + Rd\varphi).$$

Здесь введены две скорости  $c_1$  и  $c_2$  при условии

$$\sqrt{c_1 \cdot c_2} = c.$$

Одна из этих скоростей больше скорости света  $c$ , другая меньше. Отсюда имеем следующие кинематические уравнения движения фронта электромагнитной волны:

$$dx + Rd\varphi = \pm c_1 dt, \quad (45)$$

$$dx - Rd\varphi = \pm c_2 dt. \quad (46)$$

В первом случае фронтальная поверхность движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $c_1$  и закручивается на угол  $\varphi$  по часовой стрелке в плоскости  $(y, z)$ . Каждая точка фронтальной плоскости движется по спирали радиуса  $R$ , закручивающейся вокруг оси  $x$  по часовой стрелке. Фронтальная поверхность электромагнитной волны представляет собой винтовую поверхность или *геликон*, закручивающийся вокруг оси  $x$  по часовой стрелке.

Во втором случае фронтальная поверхность движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $c_2$  и закручивается на угол  $\varphi$  против часовой стрелки в плоскости  $(y, z)$ . Каждая точка фронтальной плоскости движется по спирали радиуса  $R$ , закручивающейся вокруг оси  $x$  против часовой стрелки. Фронтальная поверхность электромагнитной волны представляет собой винтовую поверхность или *геликон*, закручивающийся вокруг оси  $x$  против часовой стрелки.

В 1995 году в световом диапазоне экспериментально обнаружена электромагнитная волна рассмотренного здесь вида<sup>4</sup>. Она названа *закрученный свет*. Установлен случай, когда закрученная электромагнитная волна движется со скоростью, меньшей скорости света<sup>5</sup>. Планируется эксперимент, в котором закрученная электромагнитная волна предположительно будет двигаться со скоростью, большей скорости света.

<sup>4</sup> Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop Phys. Rev. Lett. 75, 826 – Published 31 July 1995.

<sup>5</sup> Observation of subluminal twisted light in vacuum Frederic Bouchard, Jeremie Harris, Harjaspreet Mand, Robert W. Boyd, and Ebrahim Karimi Optica Vol. 3, Issue 4, pp. 351-354 (2016).

В заключение заметим, что в рамках классической теории электромагнитного поля, то есть для волнового уравнения (44), явление закрученной электромагнитной волны не объяснимо.

## 2. Преобразования потенциала и тензора электромагнитного поля при переходе к ускоренной системе отсчета

Так как компоненты потенциала электромагнитного поля подобны координатам пространства-времени, то на основании преобразований координат при переходе от одной системы отсчета к другой устанавливаются преобразования компонент потенциала при этом же преобразовании систем отсчета. Но не только компонент потенциалов, но и тензорных комбинаций, в которых участвуют компоненты потенциала и, в частности тензора электромагнитного поля. В классической теории электромагнитного поля такими преобразованиями являются преобразования Лоренца.

В предыдущем разделе мы расширили число координат пространства-времени и число компонент потенциала электромагнитного поля. И, следовательно, имеем возможность обобщить преобразования Лоренца на более сложные случаи преобразования систем отсчета.

Рассмотрим следующий наиболее простой случай. Пусть потенциал электромагнитного поля представлен классическими четырьмя компонентами

$$\mathcal{A}^i = \{A^4, A^a\}.$$

Здесь индекс  $i = 1, 2, 3, 4$ ; индекс  $a = 1, 2, 3$ ;  $A^4 = \varphi$  есть скалярный потенциал;  $A^a$  – компоненты векторного потенциала. Соответственно имеем классический тензор электромагнитного поля

$$F_k^i = \{F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_2^1, F_1^3, F_3^2\} = \{E^1, E^2, E^3, B^3, B^2, B^1\}.$$

Здесь  $E^a$  есть компоненты вектора напряженности электромагнитного поля,  $B^a$  есть компоненты вектора индукции электромагнитного поля. Но при этом в качестве дифференциалов координат пространства-времени примем

$$dx^4, dx^1, dx^2, dx^3, dx^{14}, dx^{24}, dx^{34}$$

и, более того, будем рассматривать одномерный случай этих координат

$$dx^4, dx^1, dx^{14}.$$

Преобразования координат в этом случае соответствуют ускоренному движению системы отсчета в одном направлении. В качестве примера рассмотрим случай **AV** движения системы отсчета (см. Раздел II.5 Главы 1.4).

Формулы преобразования компонент потенциала и тензора электромагнитного поля следуют из формул (36) Раздела II.5.3 Главы 1.4, если учесть, что потенциал  $\mathcal{A}^i$  преобразуется так же, как преобразуется вектор  $dx^i$ , а тензор электромагнитного поля  $F_k^i$  преобразуется так же, как преобразуется антисимметричное произведение векторов  $dx^i$  и  $dx_k$ . Последнее должно быть согласовано с тем, что компоненты  $F_4^i$  преобразуются так же, как преобразуются компоненты вектора скорости  $dx_4^i = \mathbf{v}$ . Ситуация упрощается вследствие того, что указанные преобразования не затрагивают компонент вектора  $dx^2$  и  $dx^3$ . Поэтому компоненты потенциала  $\mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3$  и тензора электромагнитного поля  $F_3^2 = B^1$  сохраняются при указанных преобразованиях. Кроме того, компоненты

$$\begin{aligned} \{F_2^4, F_2^1\} &= \{-E^2, B^3\}, \\ \{F_3^4, F_3^1\} &= \{-E^3, -B^2\} \end{aligned}$$

преобразуются подобно компонентам вектора  $\{dx^4, dx^1\}$ . Таким образом, имеем для случая  $\mathbf{AV}$  преобразования:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (\mathcal{A}^1)' + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (\phi)' + \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (F_4^1)', \\ \mathcal{A}^1 &= \frac{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (\mathcal{A}^1)' + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (\phi)', \\ F_2^1 &= \frac{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (F_2^1)' + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (F_2^4)', \\ F_2^4 &= \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (F_2^1)' + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (F_2^4)', \\ F_4^1 &= \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (\mathcal{A}^1)' + \\ &\quad + \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (\phi)' + \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (F_4^1)', \\ F_3^1 &= \frac{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (F_3^1)' + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (F_3^4)', \\ F_3^4 &= \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (F_3^1)' + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (F_3^4)' \end{aligned} \quad (47)$$

или в других обозначениях

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (\mathcal{A}^1)' + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (\phi)' - \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (E^1)', \\ \mathcal{A}^1 &= \frac{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (\mathcal{A}^1)' + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (\phi)', \\ B^3 &= \frac{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (B^3)' - \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (E^2)', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^2 &= -\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (B^3)' + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (E^2)', \\ E^1 &= \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (\mathcal{A}^1)' + \\ &\quad + \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (\phi)' + \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (E^1)', \\ B^2 &= \frac{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (B^2)' + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (E^3)', \\ E^3 &= \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (B^2)' + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2-\mathbf{a}^2}} (E^3)'. \end{aligned}$$

Заметим, что в этих соотношениях опущены слагаемые, пропорциональные производным от тензора электромагнитного поля. Кроме того, нужно иметь в виду, что преобразования формул (36) Раздела II.5.3 Главы 1.4 относятся к компонентам вектора и тензора в безразмерной форме, поэтому в соотношениях (42) используются компоненты потенциала и тензора электромагнитного поля в безразмерной форме.

В частном случае, когда скорость  $v$  равна нулю, имеем

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (\phi)' - \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (E^1)', \\ \mathcal{A}^1 &= (\mathcal{A}^1)', \quad B^2 = (B^2)', \quad B^3 = (B^3)', \\ E^1 &= \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (\phi)' + \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (E^1)', \\ E^2 &= \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (E^2)', \quad E^3 = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (E^3)'. \end{aligned}$$

Рассмотрим точечный заряд  $e$ , покоящийся относительно системы отсчета  $K_1$ . Пусть также система отсчета  $K_1$  движется ускоренно относительно системы отсчета  $K_0$ . Тогда в системе отсчета  $K_1$  потенциал поля заряда

$$(\phi)' = \frac{e}{r}, \quad (\mathcal{A}^1)' = 0,$$

а напряженность электрического поля в этой системе

$$(E)' = \frac{e}{r^2}.$$

Здесь  $r$  есть расстояние до заряда.

Напряженность электрического поля в системе отсчета  $K_0$  в направлении ускорения определяется выражением

$$E^1 = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (\phi)' + \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{a}^2}} (E^1)'. \quad (48)$$

Таким образом, для  $a \ll A$  напряженность электрического поля содержит два слагаемых, одно из которых пропорционально ускорению и обратно пропорционально расстоянию от заряда, а другое не зависит от



ускорения и обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда. Это известный результат, который может быть получен с использованием потенциалов Линеара-Вихерта.

## V. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Динамика фундаментальной и промежуточной частиц в калибровочном поле описывается системой квантовых уравнений (22).
- С точки зрения введенного математического аппарата описания взаимодействия с помощью калибровочного поля и промежуточных частиц должны быть согласованными. Отсюда возникает необходимость корректировки корпускулярной модели взаимодействия на основании полевой модели и наоборот.
- Корпускулярная модель взаимодействия становится адекватной полевой модели, если допустить, что промежуточная частица является диполем. Кроме того, необходимо допустить, что безмассовая промежуточная частица может не только двигаться со скоростью света, но и совершать колебательное движение с фундаментальной частотой  $\Omega$ .
- Полевая модель взаимодействия становится адекватной корпускулярной модели, если обобщить представление о потенциале калибровочного поля и, в частности, включить в число компонент потенциала компоненты, наделяющие калибровочное поле спином.

## Глава 5.5 Промежуточные частицы второго рода

### I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Внутренняя логика единой теории поля требует введения новых гипотетических промежуточных частиц. При этом будем руководствоваться соображениями, вытекающими из анализа логической непоследовательности в формировании лагранжиана заряженной частицы и калибровочного поля. Напомним, что в классической физике лагранжиан для электрически заряженной частицы и электромагнитного поля имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{вз}} + \mathcal{L}(F).$$

Первое слагаемое в правой части – это лагранжиан свободной частицы. Второе слагаемое – это лагранжиан взаимодействия частицы и электромагнитного поля

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -\frac{1}{c^2} j^i A_i,$$

где  $A_i$  – потенциал электромагнитного поля,  $j^i$  – плотность тока. Третье слагаемое – это лагранжиан свободного электромагнитного поля

$$\mathcal{L}(F) = -\frac{1}{c} \frac{F_{ik} F^{ik}}{4},$$

где  $F_{ik}$  – тензор электромагнитного поля.

Здесь важно отметить, что лагранжиан  $\mathcal{L}$  формируется волевым путем. Обоснование его истинности заключается в том, что варьирование лагранжиана в соответствии с принципом наименьшего действия приводит к уравнениям движения частицы и уравнениям Максвелла.

В квантовой теории ситуация несколько лучше. Согласно Утияме, формирование лагранжиана взаимодействия подчиняется теоретическим соображениям. А именно, переход от лагранжиана свободной частицы

$$\mathcal{L}_0(\psi, \partial\psi),$$

где  $\psi$  – волновая функция частицы, а  $\partial\psi$  – частная производная от волновой функции по координате, к лагранжиану

$$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{вз}} \quad (1)$$

осуществляется путем перехода от частной производной к ковариантной

$$\partial \rightarrow \partial + A,$$

где через  $A$  обозначен потенциал калибровочного (в нашем случае электромагнитного) поля. Этот алгоритм вытекает из условия инвариантности лагранжиана (1) относительно калибровочного преобразования волновой функции.

Однако формирование лагранжиана свободного поля по-прежнему остается необъяснимым с логической точки зрения. В квантовой теории, так же как и в классической теории, лагранжиан  $\mathcal{L}(F)$  добавляется к лагранжиану (1) волевым путем.

В результате лагранжиан для дираковской заряженной частицы (электрона) и электромагнитного поля в принятых нами ранее обозначениях (см. Раздел VII. Главы 4.4.) имеет вид

$$\mathcal{L} = -\psi_{K_1} \cdot {}_l C^{mK_1}_{I_1} \cdot (\partial_m \psi^{I_1} + \frac{e}{c \cdot \hbar} \cdot r C^{I_1 L_1 21} \cdot A_m \cdot \psi^{L_1}) - \frac{m \cdot c}{\hbar} \psi_{K_1} \cdot \psi^{K_1} - \frac{1}{c} \cdot \frac{F_{ik} \cdot F^{ik}}{4}.$$

Здесь индексы с цифрой 1 внизу ( $I_1, K_1, L_1$ ) для действительного представления принимают значения<sup>1</sup>

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).$$

Обратим внимание на так называемое *массовое* слагаемое

$$-\frac{m c}{\hbar} \psi_{K_1} \psi^{K_1}.$$

Оно будет участвовать в наших дальнейших рассуждениях.

В настоящей Главе покажем, что полевое слагаемое может быть сформировано и введено логическим образом. Однако при этом необходимо допустить существование гипотетических частиц определенного вида. Канва наводящих соображений здесь такова.

В Главе 5.4. показано, что обобщение частной производной до ковариантной, необходимое для формирования лагранжиана (1), связано с двумя обстоятельствами:

- наряду с фундаментальной частицей вводится промежуточная частица, которая характеризуется действием  $S$  и волновой функцией  $\psi_1$ ; дифференциал действия  $S$  является искривленным и состоит из суммы обыкновенного дифференциала и вариации, пропорциональной потенциалу калибровочного поля<sup>2</sup>:

$$DS = dS + \delta S,$$

где

$$\begin{aligned} \delta S &= -\mathbf{I}^K_M \cdot A^M_{KL} \cdot dx^L = \\ &= -\mathbf{I}^K_M \cdot r C^M_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_L \cdot dx^L; \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Иначе говоря, уравнение Дирака относится к первому сжато-представлению алгебры Клиффорда  $\mathbb{C}_4$ .

<sup>2</sup> Напомним, что такое представление делает эквивалентным описание взаимодействия как с помощью промежуточных частиц, так и с помощью калибровочного поля.

- квантовые уравнения (уравнения структуры) содержат  $\circ$ -произведение вектора волновой функции фундаментальной частицы

$$\psi = \mathbf{e}_I \psi^I$$

на вектор вариации  $\delta\mathbf{S}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \psi \circ \delta\mathbf{S} &= -\mathbf{e}_I \frac{1}{\hbar} A^I_{KL} \cdot \psi^K \cdot dx^L = \\ &= -\mathbf{e}_I \frac{g_\alpha}{\hbar} {}_r C^M_{K\alpha} \cdot A^\alpha_L \cdot \psi^K \cdot dx^L, \end{aligned}$$

которое и определяет слагаемое, обобщающее частную производную до ковариантной.

Для того чтобы перейти от лагранжиана свободной частицы  $\mathcal{L}_0$  к лагранжиану (1), необходимо выполнить замену

$$\psi_1 \rightarrow \psi_1 - \chi \circ \mathbf{A}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что входящее в лагранжиан массовое слагаемое для промежуточной частицы, сформированное аналогично массовому слагаемому для фундаментальной частицы, имеет вид

$$m_2((\psi_1^* - \mathbf{A}^* \circ \chi^*) \cdot (\psi_1 - \chi \circ \mathbf{A})).$$

Ключевое значение имеет то обстоятельство, что в массовое слагаемое входит составляющая, квадратичная относительно потенциала калибровочного поля. Это важно потому, что лагранжиан свободного поля, который мы хотим сформировать, также квадратичен, но относительно тензора поля.

Отсюда естественным образом возникает следующее направление в формировании лагранжиана свободного поля:

- Необходимо ввести другие промежуточные частицы (второго рода), действие которых обозначим  $\mathfrak{S}$ , а волновую функцию –  $\psi_2$ . Дифференциал действия  $\mathfrak{S}$  также является искривленным и содержит два слагаемых, одно из которых есть обыкновенный дифференциал, а другое вариация

$$D\mathfrak{S} = d\mathfrak{S} + \delta\mathfrak{S},$$

причем вариация пропорциональна тензору калибровочного поля. Соответственно для волновой функции имеем

$$\psi'_2 = \psi_2 - \chi \circ \mathbf{F}.$$

- Массовое слагаемое, с которым промежуточные частицы второго рода участвуют в лагранжиане взаимодействия, имеет вид

$$m_2((\psi_2^* - \mathbf{F}^* \circ \chi^*) \cdot (\psi_2 - \chi \circ \mathbf{F})).$$

В результате в состав массового слагаемого промежуточной частицы второго рода входит слагаемое, квадратичное относительно тензора поля, которое мы хотим рассматривать как лагранжиан свободного поля.

Таков ход наших рассуждений. Здесь мы не упомянули о ряде условий, которые должны сопровождать указанную логику, об этом будет сказано далее.

## II. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЧАСТИЦЫ ВТОРОГО РОДА

Введем гипотетические частицы, которые будем считать ответственными за взаимодействие фундаментальных и промежуточных частиц. В связи с этим ранее введенные промежуточные частицы назовем промежуточными частицами первого рода, а вновь введенные промежуточные частицы назовем промежуточными частицами второго рода. Вектор действия этих частиц запишем следующим образом:

$$\mathfrak{S} = \mathbf{J}^{ML}_K \cdot S^K_{LM}.$$

Векторное пространство этих векторов обозначим  $\mathbb{S}_2$ .

Введем гипотетические частицы, которые будем считать промежуточными античастицами второго рода. Их также будем считать ответственными за взаимодействие фундаментальных и промежуточных частиц первого рода. Вектор действия этих частиц запишем следующим образом:

$$\mathfrak{S}^* = S^{ML}_K \cdot \mathbf{L}^K_{LM}.$$

Векторное пространство этих векторов обозначим  $\mathbb{S}_2^*$ .

### 1. Алгебра действия фундаментальных частиц и промежуточных частиц первого и второго рода

Далее для рассмотрения взаимодействий понадобится обобщение алгебры действия фундаментальных и промежуточных частиц первого рода, включающее в себя векторное пространство, натянутое на базисные векторы  $\mathbf{J}^{IK}_L$ . Это обобщение назовем алгеброй действия фундаментальных и промежуточных частиц и обозначим следующим образом:

$$\mathbb{T}_2 = \mathbb{S} + \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2.$$

Отметим, что умножение в алгебре  $\mathbb{T}_2$  является некоммутативным, поэтому указанная алгебра существует в двух модификациях – правой  ${}_r\mathbb{T}_2$  и левой  ${}_l\mathbb{T}_2$ . Здесь ограничимся рассмотрением *правой* алгебры действия фундаментальных и промежуточных частиц  ${}_r\mathbb{T}_2$ .

1.1. Правая алгебра действия фундаментальных частиц и промежуточных частиц первого и второго рода  ${}_r\mathbb{T}_2$ 

Таблица умножения базисных векторов алгебры  ${}_r\mathbb{T}_2$  приведена в Разделе I.4.2. Главы 1.7. формула (5). Здесь дадим *вывод* этой таблицы умножения. Для этого необходимо к ранее определенной таблице умножения базисных векторов алгебры действия фундаментальных и промежуточных частиц первого рода  ${}_r\mathbb{T} = {}_r\mathbb{S} + {}_r\mathbb{S}_1$  (смотрите Раздел IV.2.1. Главы 5.1. а также Раздел I.3.2. Главы 1.6. формула (9).) добавить произведения, в которых участвуют базисные векторы  $\mathbf{J}^{IK}_L$ . Эти произведения вычисляются на основании правил тензорной алгебры, исходя из следующих положений.

1. Принимаемых нами конструкций базисных векторов

$${}_r\mathbf{I}^L_K = {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K, \quad {}_r\mathbf{J}^{ML}_K = {}_l\mathbf{E}^M \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K.$$

2. Разложения универсального умножения на тензорную и скалярную части.

3. Из конечных выражений исключаются базисные векторы, выходящие за рамки рассматриваемой алгебры.

4. Сохранения неизменными следующих умножений:

$${}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{e}_K = {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L_{IK} + {}_r\mathbf{I}^M_L \cdot {}_rC^L_{MIK}.$$

Итак,

$${}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{J}^{PI}_M = {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{E}^P \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M = {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^P \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M + ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^P) \cdot {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M = \delta^P_K \cdot {}_r\mathbf{I}^I_M,$$

$${}_r\mathbf{J}^{NL}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M = {}_l\mathbf{E}^N \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M = {}_l\mathbf{E}^N \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{e}_M + {}_l\mathbf{E}^N \otimes {}_l\mathbf{E}^L \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M) = 0,$$

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{I}^L_K \circ {}_r\mathbf{J}^{PI}_M &= {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{E}^P \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M = {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^P \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M + \\ &+ {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^P) + {}_r\mathbf{e}_M \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^P) \cdot ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{E}^I) = {}_r\mathbf{J}^{LI}_M \cdot \delta^P_K + {}_r\mathbf{e}_M \cdot \delta^P_K \cdot g^{LI}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{J}^{NL}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I_M &= {}_l\mathbf{E}^N \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M = {}_l\mathbf{E}^N \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M + \\ &+ {}_l\mathbf{E}^N \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_M \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^I) + {}_l\mathbf{E}^N \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^I) \cdot ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{e}_M) = \\ &= {}_r\mathbf{J}^{NL}_M \cdot \delta^I_K + {}_l\mathbf{E}^N \cdot \delta^I_K \cdot \delta^L_M = {}_r\mathbf{J}^{NL}_M \cdot \delta^I_K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{J}^{NL}_K \circ {}_r\mathbf{J}^{PI}_M &= {}_l\mathbf{E}^N \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{E}^P \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M = \\ &= {}_l\mathbf{E}^N \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^P \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M + {}_l\mathbf{E}^N \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^P) + \\ &+ {}_l\mathbf{E}^N \otimes {}_r\mathbf{e}_M \cdot ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{E}^I) \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^P) + ({}_l\mathbf{E}^N \cdot {}_r\mathbf{e}_M) \cdot ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{E}^I) \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^P) = \\ &= {}_r\mathbf{I}^N_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K + \delta^N_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K. \end{aligned}$$

В результате алгебра действия фундаментальных и промежуточных частиц определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I &= \mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L_{KI} + \mathbf{I}^M_L \cdot {}_rC^L_{MKI}, \\ \mathbf{I}^K_L \circ \mathbf{e}_I &= 0, \\ \mathbf{e}_K \circ \mathbf{I}^I_M &= \delta^I_K \cdot \mathbf{e}_M, \\ \mathbf{I}^L_K \circ \mathbf{I}^I_M &= \delta^I_K \cdot \mathbf{I}^L_M + \delta^I_K \cdot \delta^L_M, \\ \mathbf{e}_K \circ \mathbf{J}^{PI}_M &= \delta^P_K \cdot \mathbf{I}^I_M, \\ \mathbf{J}^{NL}_K \circ \mathbf{e}_M &= 0, \\ \mathbf{I}^L_K \circ \mathbf{J}^{PI}_M &= \mathbf{J}^{LI}_M \cdot \delta^P_K + \mathbf{e}_M \cdot \delta^P_K \cdot g^{LI}, \\ \mathbf{J}^{NL}_K \circ \mathbf{I}^I_M &= \mathbf{J}^{NL}_M \cdot \delta^I_K, \\ \mathbf{J}^{NL}_K \circ \mathbf{J}^{PI}_M &= \mathbf{I}^N_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K + \delta^N_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь для простоты опущены указания на то, что базисные векторы принадлежат правой алгебре.

Из этой таблицы следует, что, в отличие от векторов действия фундаментальных частиц  $\mathbf{e}$  и промежуточных частиц первого рода  $\mathbb{S}$ , векторы действия промежуточных частиц второго рода  $\mathbb{S}$  не составляют подалгебру. Это обстоятельство нужно интерпретировать так: в отличие от фундаментальных и промежуточных частиц первого рода промежуточные частицы второго рода не существуют в свободном состоянии.

## 2. Уравнения структуры правой алгебры действия фундаментальных и промежуточных частиц

Приведем уравнения структуры алгебры  ${}_r\mathbf{T}_2 = {}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}_1 + {}_r\mathbf{S}_2$ . Векторы этой алгебры  ${}_r\mathbf{T} = {}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{S}$  подчиняются уравнению структуры

$$d_2 \circ d_1 {}_r\mathbf{T} = d_1 {}_r\mathbf{T} \circ d_2 {}_r\mathbf{T}.$$

Для того чтобы сделать выкладки менее громоздкими, опустим согласующий множитель  $\frac{1}{S_0}$  перед правой частью уравнения. Иначе говоря, будем рассматривать безразмерное действие. Правило перехода к размерному действию таково: все слагаемые, состоящие из двух множителей, должны быть умножены на  $\frac{1}{S_0}$ . Кроме того, для простоты изложения опустим указание на то, что векторы принадлежат *правой* алгебре.

Таким образом, имеем

$$d_2(d_1\mathbf{S} + d_1\mathbf{S} + d_1\mathbf{S}) = (d_1\mathbf{S} + d_1\mathbf{S} + d_1\mathbf{S}) \circ (d_2\mathbf{S} + d_2\mathbf{S} + d_2\mathbf{S}). \quad (3)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} d_2d_1\mathbf{S} + d_2d_1\mathbf{S} + d_2d_1\mathbf{S} &= d_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{e} + d_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{S} + d_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{S} + \\ &+ d_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{S} + d_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{S} + d_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{S} + d_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{S} + d_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{S} + d_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Запишем уравнения структуры относительно координат векторов. Для этого подставим в уравнения структуры выражения дифференциалов векторов через базисные векторы

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_I \cdot dS^I, \quad d\mathbf{S} = \mathbf{I}^K_I \cdot dS^K, \quad d\mathbf{S} = \mathbf{J}^{LI}_K \cdot dS^K_{IL}.$$

Получим

$$\begin{aligned} (d_2d_1S^I) \cdot \mathbf{e}_I + (d_2d_1S^M_L) \cdot \mathbf{I}^L_M + (d_2d_1S^K_{IL}) \cdot \mathbf{J}^{LI}_M &= \\ &= (d_1S^K \cdot d_2S^M) \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_M) + (d_1S^K \cdot d_2S^M_I) \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{I}^I_M) + (d_1S^K \cdot d_2S^M_{IP}) \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{J}^{PI}_M) + \\ &+ (d_1S^K_L \cdot d_2S^M) \cdot (\mathbf{I}^L_K \circ \mathbf{e}_M) + (d_1S^K_L \cdot d_2S^M_I) \cdot (\mathbf{I}^L_K \circ \mathbf{I}^I_M) + (d_1S^K_L \cdot d_2S^M_{IP}) \cdot (\mathbf{I}^L_K \circ \mathbf{J}^{PI}_M) + \\ &+ (d_1S^K_{LN} \cdot d_2S^M) \cdot (\mathbf{J}^{NL}_K \circ \mathbf{e}_M) + (d_1S^K_{LN} \cdot d_2S^M_I) \cdot (\mathbf{J}^{NL}_K \circ \mathbf{I}^I_M) + (d_1S^K_{LN} \cdot d_2S^M_{IP}) \cdot (\mathbf{J}^{NL}_K \circ \mathbf{J}^{PI}_M). \end{aligned}$$

Далее воспользуемся таблицей умножения (2) базисных векторов. В результате имеем

$$\begin{aligned} (d_2d_1S^I) \cdot \mathbf{e}_I + (d_2d_1S^M_L) \cdot \mathbf{I}^L_M + (d_2d_1S^K_{IL}) \cdot \mathbf{J}^{LI}_M &= \\ &= (d_2S^M \cdot d_1S^K) \cdot (\mathbf{e}_I \cdot {}_rC^I_{KM} + \mathbf{I}^L_I \cdot {}_rC^I_{LKM}) + (d_2S^M_K \cdot d_1S^K) \cdot \mathbf{e}_M + (d_2S^M_{IK} \cdot d_1S^K) \cdot \mathbf{I}^I_M + \\ &+ (d_2S^M_K \cdot d_1S^K_L) \cdot (\mathbf{I}^L_M + \delta^L_M) + (d_2S^M_{IK} \cdot d_1S^K_L) \cdot (\mathbf{J}^{LI}_M + \mathbf{e}_M \cdot g^{LI}) + \\ &+ (d_2S^M_K \cdot d_1S^K_{LN}) \cdot \mathbf{J}^{NL}_M + (d_2S^M_{IK} \cdot d_1S^K_{LN}) \cdot (\mathbf{I}^N_M + \delta^N_M) \cdot g^{LI}. \end{aligned}$$

После разделения уравнений получим уравнения структуры правой алгебры действия:

$$\begin{aligned} d_2d_1S^L &= {}_rC^L_{KI} \cdot d_2S^I \cdot d_1S^K + d_2S^L_K \cdot d_1S^K + d_2S^L_{KN} \cdot d_1S^N_I \cdot g^{IK}, \\ d_2d_1S^L_K &= {}_rC^L_{KQN} \cdot d_2S^N \cdot d_1S^Q + d_2S^L_I \cdot d_1S^I_K + d_2S^L_{KI} \cdot d_1S^I + d_2S^L_{QN} \cdot d_1S^N_{PK} \cdot g^{PQ}, \\ d_2d_1S^L_{KI} &= d_2S^L_{KN} \cdot d_1S^N_I + d_2S^L_N \cdot d_1S^N_{KI}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, получим скалярное алгебраическое соотношение

$$d_2S^L_K \cdot d_1S^K_L + d_2S^M_{IK} \cdot d_1S^K_{LM} \cdot g^{LI} = 0.$$

## 3. Квантовые постулаты для фундаментальной и промежуточных частиц

Как обычно, переходим от уравнений структуры к квантовым постулатам, используя переобозначения

$$d_1S^L = \psi^L, \quad d_1S^L_K = \psi^L_K, \quad d_1S^L_{KI} = \psi^L_{KI}, \quad d_2 = d.$$

Тогда вместо выражения (4) получим

$$\begin{aligned}
d\psi^L &= rC^L_{KI} \cdot dS^I \cdot \psi^K + dS^L_K \cdot \psi^K + dS^L_{KN} \cdot \psi^N_I \cdot g^{IK}, \\
d\psi^L_K &= rC^L_{KQN} \cdot dS^N \cdot \psi^Q + dS^L_I \cdot \psi^I_K + dS^L_{KI} \cdot \psi^I + dS^L_{QN} \cdot \psi^N_{PK} \cdot g^{PQ}, \\
d\psi^L_{KI} &= dS^L_{KN} \cdot \psi^N_I + dS^L_N \cdot \psi^N_{KI}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Алгебраическое условие приобретает вид

$$dS^L_K \cdot \psi^K_L + dS^M_{IK} \cdot \psi^K_{LM} \cdot g^{LI} = 0.$$

Далее в равенстве (5) учтем, что

$$\begin{aligned}
-\partial_M S^I &= p^I_M \quad \text{— координаты импульса фундаментальной частицы,} \\
-\partial_M S^I_L &= m^I_{LM} \quad \text{— координаты момента промежуточной частицы первого рода,} \\
-\partial_M S^I_{LN} &= w^I_{LNM} \quad \text{— координаты второго момента промежуточной частицы второго рода.}
\end{aligned}$$

Тогда получим уравнения

$$\begin{aligned}
d\psi^L &= -rC^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot dx^M \cdot \psi^K - m^L_{KM} \cdot dx^M \cdot \psi^K - w^L_{KNM} \cdot dx^M \cdot \psi^N_I \cdot g^{IK}, \\
d\psi^L_K &= -rC^L_{KQN} \cdot p^N_M \cdot dx^M \cdot \psi^Q - m^L_{IM} \cdot dx^M \cdot \psi^I_K - w^L_{KIM} \cdot dx^M \cdot \psi^I - w^L_{QNM} \cdot dx^M \cdot \psi^N_{PK} \cdot g^{PQ}, \\
d\psi^L_{KI} &= -w^L_{KNM} \cdot dx^M \cdot \psi^N_I - m^L_{NM} \cdot dx^M \cdot \psi^N_{KI},
\end{aligned} \tag{6}$$

которые представляют собой квантовые постулаты в дифференциалах.

Перейдем от этих уравнений к квантовым постулатам в частных производных:

$$\begin{aligned}
\partial_M \psi^L &= -rC^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K - m^L_{KM} \cdot \psi^K - w^L_{KNM} \cdot \psi^N_I \cdot g^{IK}, \\
\partial_M \psi^L_K &= -rC^L_{KQN} \cdot p^N_M \cdot \psi^Q - m^L_{IM} \cdot \psi^I_K - w^L_{KIM} \cdot \psi^I - w^L_{QNM} \cdot \psi^N_{PK} \cdot g^{PQ}, \\
\partial_L \psi^L_{KI} &= -w^L_{KNM} \cdot \psi^N_I - m^L_{NM} \cdot \psi^N_{KI}.
\end{aligned} \tag{7}$$

#### 4. Система квантовых уравнений для фундаментальной и промежуточных частиц

Для вывода системы квантовых уравнений фундаментальной и промежуточных частиц воспользуемся квантовыми постулатами (7). Умножим первое уравнение на структурные константы  ${}_i C^{MP}_L$ , а второе и третье уравнения — на структурные константы  ${}_i C^{MK}_P$ , выполнив соответствующие суммирования<sup>3</sup>. Получим

$$\begin{aligned}
{}_i C^{MP}_L \cdot \partial_M \psi^L &= -{}_i C^{MP}_L \cdot rC^L_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K - {}_i C^{MP}_L \cdot m^L_{KM} \cdot \psi^K - {}_i C^{MP}_L \cdot w^L_{KNM} \cdot \psi^N_I \cdot g^{IK}, \\
{}_i C^{MK}_P \cdot \partial_M \psi^L_K &= -{}_i C^{MK}_P \cdot rC^L_{KQN} \cdot p^N_M \cdot \psi^Q - {}_i C^{MK}_P \cdot m^L_{IM} \cdot \psi^I_K - {}_i C^{MK}_P \cdot w^L_{KIM} \cdot \psi^I - \\
&\quad - {}_i C^{MK}_P \cdot w^L_{QNM} \cdot \psi^N_{PK} \cdot g^{PQ}, \\
{}_i C^{MK}_P \cdot \partial_M \psi^L_{KI} &= -{}_i C^{MK}_P \cdot w^L_{KNM} \cdot \psi^N_I - {}_i C^{MK}_P \cdot m^L_{NM} \cdot \psi^N_{KI}.
\end{aligned} \tag{8}$$

<sup>3</sup> Обоснование умножений такого рода приведены в Разделе II.6. Главы 5.3.

### III. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ, ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЧАСТИЦ И ПОЛЯ ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ

Рассматривая промежуточные частицы первого рода, отмечено, что вектор действия этих частиц  $\mathbf{S}$  зависит от координат пространства-времени  $\mathbb{X}$  и от группового закона композиции калибровочной группы, который, в свою очередь, зависит от координат пространства-времени  $\mathbb{X}$ . Поэтому дифференциал вектора действия  $\mathbf{S}$ , который мы обозначили  $D\mathbf{S}$  и назвали искривленным, состоит из двух слагаемых

$$D\mathbf{S} = d\mathbf{S} + \delta\mathbf{S},$$

где  $d\mathbf{S}$  – обыкновенный дифференциал вектора, а  $\delta\mathbf{S}$  – вариация вектора, учитывающая изменение группового закона композиции с изменением координат пространства-времени. Через координаты вектор  $d\mathbf{S}$  записывается следующим образом:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{I}^K_M \cdot S^M_K,$$

а вектор  $\delta\mathbf{S}$  следующим образом связан с потенциалом калибровочного поля (поля внутренней симметрии):

$$\delta\mathbf{S} = -\mathbf{I}^K_M \cdot A^M_{KL} \cdot dx^L = -\mathbf{I}^K_M \cdot {}_r C^M_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_L \cdot dx^L,$$

где  ${}_r C^M_{K\alpha}$  – структурные постоянные правой калибровочной группы (группы внутренней симметрии),  $g_\alpha$  – коэффициент связи или калибровочный заряд,  $A^\alpha_L$  – потенциал калибровочного поля,

$$A^M_{KL} = {}_r C^M_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot A^\alpha_L. \quad (9)$$

По этой же схеме построим дифференциал вектора действия промежуточной частицы второго рода.

#### 1. Промежуточные частицы второго рода и поле внутренней симметрии

Будем полагать, что вектор действия промежуточных частиц второго рода  $\mathbf{S}$  также зависит от координат пространства-времени  $\mathbb{X}$ . Поэтому дифференциал вектора действия  $\mathbf{S}$  обозначим  $D\mathbf{S}$  и назовем искривленным. Он состоит из двух слагаемых:

$$D\mathbf{S} = d\mathbf{S} + \delta\mathbf{S},$$

где  $d\mathbf{S}$  – обыкновенный дифференциал вектора, а  $\delta\mathbf{S}$  – вариация – инфинитезимальное приращение вектора, учитывающее изменение группового закона композиции с изменением координат пространства-времени. Через координаты вектор  $d\mathbf{S}$  записывается следующим образом:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{I}^{IK}_M \cdot S^M_{KI},$$

а вектор  $\delta\mathbf{S}$  запишем следующим образом:

$$\delta\mathbf{S} = -\mathbf{I}^{IK}_M \cdot F^M_{KIL} \cdot dx^L = -\mathbf{I}^{IK}_M \cdot {}_r C^M_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot F^\alpha_{IL} \cdot dx^L,$$

где  $F^\alpha_{IL}$  – тензор калибровочного поля или тензор Янга-Миллса:

$$F^\alpha_{IL} = \partial_{[I} A^{\alpha}_{L]} + \frac{g_\alpha}{S_0} \cdot {}_r C^\alpha_{\gamma\beta} \cdot A^\beta_{[I} \cdot A^{\gamma}_{L]} + \frac{1}{L_0} \cdot A^\alpha_N \cdot {}_r C^N_{[LI]},$$

$$F^M_{KIL} = {}_r C^M_{K\alpha} \cdot g_\alpha \cdot F^\alpha_{IL}.$$

С учетом выражения (9) имеем

$$F^M_{KIL} = F^M_{K[IL]} = \partial_{[L} A^M_{|K|I]} + \frac{1}{S_0} \cdot A^M_{P[L} \cdot A^P_{|K|I]} + \frac{1}{L_0} \cdot A^M_{KP} \cdot {}_r C^P_{[IL]}$$

или в безразмерном виде

$$F^M_{KIL} = F^M_{K[IL]} = \partial_{[L} A^M_{|K|I]} + A^M_{P[L} \cdot A^P_{|K|I]} + A^M_{KP} \cdot {}_r C^P_{[IL]}. \quad (10)$$

## 2. Уравнения структуры алгебры действия фундаментальных, промежуточных частиц в поле внутренней симметрии

Для того чтобы перейти к уравнению структуры алгебры действия фундаментальных, промежуточных частиц и правого калибровочного поля, необходимо в уравнении (3) выполнить замену

$$d\mathbf{S} \rightarrow d\mathbf{S}, \quad d\mathbf{S} \rightarrow D\mathbf{S} = d\mathbf{S} - d\mathbf{x} \circ \mathbf{A}, \quad d\mathfrak{S} \rightarrow D\mathfrak{S} = d\mathfrak{S} - d\mathbf{x} \circ \mathbf{F}.$$

Тогда уравнение структуры приобретает вид

$$d_2(d_1\mathbf{S} + D_1\mathbf{S} + D_1\mathfrak{S}) = (d_1\mathbf{S} + D_1\mathbf{S} + D_1\mathfrak{S}) \circ (d_2\mathbf{S} + D_2\mathbf{S} + D_2\mathfrak{S}).$$

Перейдем к координатной записи уравнения структуры. Для этого подставим в него выражения дифференциалов векторов через дифференциалы координат и базисные векторы

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_I \cdot dS^I, \quad D\mathbf{S} = \mathbf{I}^K_L \cdot (dS^L_K - A^L_{KN} \cdot dx^N), \quad D\mathfrak{S} = \mathbf{J}^{LK}_I \cdot (dS^I_{KL} - F^I_{KLN} \cdot dx^N).$$

В левой части уравнения структуры получим

$$d_2d_1\mathbf{S} + d_2D_1\mathbf{S} + d_2D_1\mathfrak{S} = \mathbf{e}_I \cdot d_2d_1S^I + \mathbf{I}^K_L \cdot d_2(d_1S^L_K - A^L_{KN} \cdot d_1x^N) + \mathbf{J}^{LK}_I \cdot d_2(d_1S^I_{KL} - F^I_{KLN} \cdot d_1x^N).$$

В правой части уравнения структуры получим

$$\begin{aligned} d_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{S} &= (d_1S^I \cdot d_2S^K) \cdot (\mathbf{e}_I \circ \mathbf{e}_K) = (d_2S^K \cdot d_1S^I) \cdot (\mathbf{e}_L \cdot rC^L_{IK} + \mathbf{I}^M_L \cdot rC^L_{MIK}), \\ d_1\mathbf{S} \circ D_2\mathbf{S} &= (d_1S^K \cdot (d_2S^M_I - A^M_{IN} \cdot d_2x^N)) \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{I}^I_M) = (d_2S^M_K - A^M_{KN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1S^K \cdot \mathbf{e}_M, \\ d_1\mathbf{S} \circ D_2\mathfrak{S} &= (d_1S^K \cdot (d_2S^M_{IK} - F^M_{IKN} \cdot d_2x^N)) \cdot \mathbf{I}^I_M, \\ D_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{S} &= 0, \quad \text{так как } \mathbf{I}^L_K \circ \mathbf{e}_M = 0, \\ D_1\mathbf{S} \circ D_2\mathbf{S} &= (d_1S^K_L - A^K_{LP} \cdot d_1x^P) \cdot (d_2S^M_I - A^M_{IQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (\mathbf{I}^L_K \circ \mathbf{I}^I_M) = \\ &= (d_1S^K_L \cdot d_2S^M_K - A^K_{LP} \cdot d_1x^P \cdot d_2S^M_K - d_1S^K_L \cdot A^M_{KQ} \cdot d_2x^Q + A^K_{LP} \cdot d_1x^P \cdot A^M_{KQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (\mathbf{I}^L_M + \delta^L_M), \\ D_1\mathbf{S} \circ D_2\mathfrak{S} &= ((d_1S^K_L - A^K_{LQ} \cdot d_1x^Q) \cdot (d_2S^M_{IK} - F^M_{IKN} \cdot d_2x^N)) \cdot (\mathbf{J}^{LI}_M + \mathbf{e}_M \cdot g^{LI}), \\ D_1\mathfrak{S} \circ d_2\mathbf{S} &= 0, \quad \text{так как } \mathbf{J}^{NL}_K \circ \mathbf{e}_M = 0, \\ D_1\mathfrak{S} \circ D_2\mathbf{S} &= (d_1S^K_{LN} - F^K_{LNP} \cdot d_1x^P) \cdot (d_2S^M_K - A^M_{KN} \cdot d_2x^N) \cdot \mathbf{J}^{NL}_M, \\ D_1\mathfrak{S} \circ D_2\mathfrak{S} &= ((d_1S^K_{LN} - F^K_{LNP} \cdot d_1x^P) \cdot (d_2S^M_{IK} - F^M_{IKS} \cdot d_2x^S)) \cdot (\mathbf{I}^N_M \cdot g^{LI} + \delta^N_M \cdot g^{LI}). \end{aligned}$$

Каждое слагаемое правой части вычислено с использованием таблицы умножения базисных векторов (2). После разделения уравнений по базисным векторам, получим следующее.

Для фундаментальной частицы

$$d_2d_1S^L = rC^L_{KI} \cdot d_2S^I \cdot d_1S^K + (d_2S^L_K - A^L_{KN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1S^K + (d_2S^L_{KN} - F^L_{KNP} \cdot d_2x^P) \cdot (d_1S^N_I - A^N_{IQ} \cdot d_1x^Q) \cdot g^{IK}. \quad (11)$$

Для промежуточной частицы первого рода

$$\begin{aligned} d_2(d_1S^L_K - A^L_{KN} \cdot d_1x^N) &= \\ &= rC^L_{KIM} \cdot d_2S^M \cdot d_1S^I + (d_2S^L_I - A^L_{IQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (d_1S^I_K - A^I_{KP} \cdot d_1x^P) + \\ &+ (d_2S^L_{KI} - F^L_{KIN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1S^I + (d_2S^L_{QN} - F^L_{QNS} \cdot d_2x^S) \cdot (d_1S^N_{PK} - F^N_{PKI} \cdot d_1x^I) \cdot g^{PQ} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} d_2d_1S^L_K - d_2A^L_{KN} \cdot d_1x^N - A^L_{KN} \cdot d_2d_1x^N &= \\ &= rC^L_{KIM} \cdot d_2S^M \cdot d_1S^I + d_2S^L_I \cdot d_1S^I_K - d_2S^L_I \cdot A^I_{KP} \cdot d_1x^P - \\ &- A^L_{IQ} \cdot d_2x^Q \cdot d_1S^I_K + A^L_{IQ} \cdot d_2x^Q \cdot A^I_{KP} \cdot d_1x^P + \\ &+ (d_2S^L_{KI} - F^L_{KIN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1S^I + (d_2S^L_{QN} - F^L_{QNS} \cdot d_2x^S) \cdot (d_1S^N_{PK} - F^N_{PKI} \cdot d_1x^I) \cdot g^{PQ} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} d_2d_1S^L_K &= rC^L_{KIM} \cdot d_2S^M \cdot d_1S^I + d_2S^L_I \cdot d_1S^I_K - d_2S^L_I \cdot A^I_{KP} \cdot d_1x^P - A^L_{IQ} \cdot d_2x^Q \cdot d_1S^I_K + \\ &+ [\partial_M A^L_{KN} + A^L_{PM} \cdot A^P_{KN} + A^L_{KP} \cdot rC^P_{NM}] \cdot d_2x^M \cdot d_1x^N + \\ &+ (d_2S^L_{KI} - F^L_{KIN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1S^I + (d_2S^L_{QN} - F^L_{QNS} \cdot d_2x^S) \cdot (d_1S^N_{PK} - F^N_{PKI} \cdot d_1x^I) \cdot g^{PQ}. \end{aligned}$$



Выражение в квадратных скобках полагаем антисимметричным по индексам  $N$  и  $M$ . Поэтому в соответствии с выражением (10) оно представляет собой тензор Янга-Миллса. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} d_2 d_1 S^L_K = & {}_r C^L_{KIM} \cdot d_2 S^M \cdot d_1 S^I + d_2 S^L_I \cdot d_1 S^I_K - \\ & - d_2 S^L_I \cdot A^I_{KP} \cdot d_1 x^P - A^L_{IQ} \cdot d_2 x^Q \cdot d_1 S^I_K + F^L_{KNM} \cdot d_2 x^M \cdot d_1 x^N + \\ & + (d_2 S^L_{KI} - F^L_{KIN} \cdot d_2 x^N) \cdot d_1 S^I + (d_2 S^L_{QN} - F^L_{QNS} \cdot d_2 x^S) \cdot (d_1 S^N_{PK} - F^N_{PKI} \cdot d_1 x^I) \cdot g^{PQ}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для промежуточной частицы второго рода

$$\begin{aligned} d_2(d_1 S^L_{KI} - F^L_{KIN} \cdot d_1 x^N) = \\ = (d_2 S^L_{KN} - F^L_{KNP} \cdot d_2 x^P) \cdot (d_1 S^N_I - A^N_{IQ} \cdot d_1 x^Q) + (d_2 S^L_N - A^L_{NQ} \cdot d_2 x^Q) \cdot (d_1 S^N_{KI} - F^N_{KIP} \cdot d_1 x^P) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} d_2 d_1 S^L_{KI} = & d_2 S^L_{KN} \cdot d_1 S^N_I + d_2 S^L_N \cdot d_1 S^N_{KI} - d_2 S^L_{KN} \cdot A^N_{IQ} \cdot d_1 x^Q - A^L_{NQ} \cdot d_2 x^Q \cdot d_1 S^N_{KI} - \\ & - F^L_{KNP} \cdot d_2 x^P \cdot d_1 S^N_I - d_2 S^L_N \cdot F^N_{KIP} \cdot d_1 x^P + \\ & + [\partial_M F^L_{KIN} + F^L_{KPM} \cdot A^P_{IN} + A^L_{PM} \cdot F^P_{KIN} + F^L_{KIP} \cdot {}_r C^P_{NM}] \cdot d_2 x^M \cdot d_1 x^N. \end{aligned}$$

Для выражения в квадратных скобках введем обозначение

$$F^L_{KINM} = \partial_M F^L_{KIN} + F^L_{KPM} \cdot A^P_{IN} + A^L_{PM} \cdot F^P_{KIN} + F^L_{KIP} \cdot {}_r C^P_{NM},$$

с учетом которого получим

$$\begin{aligned} d_2 d_1 S^L_{KI} = & d_2 S^L_{KN} \cdot d_1 S^N_I + d_2 S^L_N \cdot d_1 S^N_{KI} - d_2 S^L_{KN} \cdot A^N_{IQ} \cdot d_1 x^Q - A^L_{NQ} \cdot d_2 x^Q \cdot d_1 S^N_{KI} - \\ & - F^L_{KNP} \cdot d_2 x^P \cdot d_1 S^N_I - d_2 S^L_N \cdot F^N_{KIP} \cdot d_1 x^P + F^L_{KINM} \cdot d_2 x^M \cdot d_1 x^N. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (11), (12), (13) обобщают уравнения (20) Главы 5.3. и уравнение (5) настоящей Главы. Скалярное алгебраическое соотношение приобретает вид

$$(d_2 S^L_K - A^L_{KQ} \cdot d_2 x^Q) \cdot (d_1 S^K_L - A^K_{LP} \cdot d_1 x^P) + (d_2 S^M_{IK} - F^M_{IKS} \cdot d_2 x^S) \cdot (d_1 S^K_{LM} - F^K_{LMP} \cdot d_1 x^P) g^{LI} = 0.$$

### 3. Квантовые постулаты для фундаментальной и промежуточных частиц в поле внутренней симметрии

Как обычно, переходим от уравнений структуры к квантовым постулатам, используя переобозначения

$$d_1 S^L = \psi^L, \quad d_1 S^L_K = \psi^L_K, \quad d_1 S^L_{KI} = \psi^L_{KI}, \quad d_2 = d.$$

Тогда вместо выражений (11), (12), (13) получим следующее.

Для фундаментальной частицы

$$d\psi^L = {}_r C^L_{KI} \cdot dS^I \cdot \psi^K + (dS^L_K - A^L_{KN} \cdot dx^N) \cdot \psi^K + (dS^L_{KN} - F^L_{KNP} \cdot dx^P) \cdot (\psi^N_I - A^N_{IQ} \cdot \chi^Q) \cdot g^{IK}. \quad (14)$$

Для промежуточной частицы первого рода

$$\begin{aligned} d\psi^L_K = & {}_r C^L_{KIM} \cdot dS^M \cdot \psi^I + dS^L_I \cdot \psi^I_K - \\ & - dS^L_I \cdot A^I_{KP} \cdot \chi^P - A^L_{IQ} \cdot dx^Q \cdot \psi^I_K + F^L_{KNM} \cdot dx^M \cdot \chi^N + \\ & + (dS^L_{KI} - F^L_{KIN} \cdot dx^N) \cdot \psi^I + (dS^L_{QN} - F^L_{QNS} \cdot dx^S) \cdot (\psi^N_{PK} - F^N_{PKI} \cdot \chi^I) \cdot g^{PQ}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для промежуточной частицы второго рода

$$\begin{aligned} d\psi^L_{KI} = & dS^L_{KN} \cdot \psi^N_I + dS^L_N \cdot \psi^N_{KI} - dS^L_{KN} \cdot A^N_{IQ} \cdot \chi^Q - A^L_{NQ} \cdot dx^Q \cdot \psi^N_{KI} - \\ & - F^L_{KNP} \cdot dx^P \cdot \psi^N_I - dS^L_N \cdot F^N_{KIP} \cdot \chi^P + F^L_{KINM} \cdot dx^M \cdot \chi^N. \end{aligned} \quad (16)$$

#### 4. Квантовые уравнения для фундаментальной и промежуточных частиц в поле внутренней симметрии

При выводе квантовых уравнений для фундаментальной, промежуточных частиц в поле внутренней симметрии воспользуемся квантовыми постулатами (14), (15), (16). Сначала запишем квантовые постулаты через частные производные, а затем умножим первое уравнение на структурные константы  ${}_l C^{MP}_L$ , а второе и третье уравнения – на структурные константы  ${}_r C^{MK}_P$ , выполнив соответствующие суммирования. Получим для фундаментальной частицы

$${}_l C^{MP}_L \cdot \partial_M \psi^L = -{}_l C^{MP}_L \cdot \left( {}_r C^{LK}_I \cdot p^I_M \cdot \psi^K + (m^L_{KM} + A^L_{KM}) \cdot \psi^K + (w^L_{KNM} + F^L_{KNM}) \cdot (\psi^N_I - A^N_{IQ} \cdot \chi^Q) \cdot g^{IK} \right), \quad (17)$$

для промежуточной частицы первого рода

$${}_l C^{MK}_P \cdot \partial_M \psi^L_K = -{}_l C^{MK}_P \cdot \left( C^L_{KIN} \cdot p^N_M \cdot \psi^I + m^L_{IM} \cdot \psi^I_K - m^L_{IM} \cdot A^I_{KP} \cdot \chi^P + A^L_{IM} \cdot \psi^I_K - F^L_{KNM} \cdot \chi^N + (w^L_{KIM} + F^L_{KIM}) \cdot \psi^I + (w^L_{QNM} + F^L_{QNM}) \cdot (\psi^N_{PK} - F^N_{PKI} \cdot \chi^I) \cdot g^{PQ} \right), \quad (18)$$

для промежуточной частицы второго рода

$${}_l C^{MK}_P \cdot \partial_M \psi^L_{KI} = -{}_l C^{MK}_P \cdot \left( w^L_{KNM} \cdot \psi^N_I + m^L_{NM} \cdot \psi^N_{KI} - w^L_{KNM} \cdot A^N_{IQ} \cdot \chi^Q + A^L_{NM} \cdot \psi^N_{KI} + F^L_{KNM} \cdot \psi^N_I - m^L_{NM} \cdot F^N_{KIP} \cdot \chi^P - F^L_{KINM} \cdot \chi^N \right). \quad (19)$$

### IV. ЧАСТИЦЫ И АНТИЧАСТИЦЫ

Полагаем, что пространство действия частиц и античастиц представляет собой сумму следующих векторных пространств:

$$\mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_2^* = \mathbb{S} + \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}^* + \mathbb{S}_1^* + \mathbb{S}_2^*.$$

Иначе говоря, вектор действия частиц и античастиц представлен суммой следующих составляющих

$$r = \mathbf{T} + \mathbf{T}^* = \mathbf{S} + \mathbf{S} + \mathbf{S} + \mathbf{S}^* + \mathbf{S}^* + \mathbf{S}^*.$$

Вектор действия  $r$  может быть разложен по базисным векторам следующим образом:

$$r = \mathbf{e}_K \cdot S^K + \mathbf{I}^L_K \cdot S^K_L + \mathbf{J}^{ML}_K \cdot S^K_{LM} + S_K \cdot \mathbf{E}^K + S^{*K}_L \cdot \mathbf{K}^L_K + S^{ML}_K \cdot \mathbf{L}^K_{LM}.$$

Скалярное произведение

$$(\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T}) = S_I \cdot S^I + S^{*L}_K \cdot S^K_L + S^{ML}_K \cdot S^K_{LM}$$

будем называть *инвариантом действия*.

#### 1. Алгебра действия частиц и античастиц

Эта алгебра далее положена в основу рассмотрения фундаментальных, первых промежуточных и гипотетических *вторых промежуточных* частиц и их античастиц.

Алгебра будет определена, если к ранее приведенной таблице умножения базисных векторов (2) добавить произведения базисных векторов  $\mathbf{J}^{IK}_L$  с сопряженными векторами  $\mathbf{E}^I$  и  $\mathbf{K}^L_K$ , а также произведения, в которых

участвуют базисные векторы  $\mathbf{L}_{KI}^L$ . Эти произведения вычисляются на основании правил тензорной алгебры:

$$\mathbf{E}^L \circ \mathbf{J}_{M}^{PI} = \mathbf{E}^L \circ \mathbf{E}^P \otimes \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_M = \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{E}^P \otimes \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_M + (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{E}^P) \cdot \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_M = g^{LP} \cdot \mathbf{I}_{M}^I,$$

$$\mathbf{J}_{K}^{NL} \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^N \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^N \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^I + \mathbf{E}^N \otimes \mathbf{E}^L \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{E}^I) = 0,$$

$$\mathbf{K}_{K}^L \circ \mathbf{J}_{M}^{PI} = \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{E}^P \otimes \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_M = \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{E}^P \otimes \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_M + \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_M \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{E}^P) + \\ + \mathbf{e}_M \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{E}^I) \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{E}^P) = \mathbf{e}_M \cdot \delta_{K}^I \cdot g^{LP},$$

$$\mathbf{J}_{K}^{NL} \circ \mathbf{K}_{M}^I = \mathbf{E}^N \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^N \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I + \mathbf{E}^N \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{E}^I \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_M) + \\ + \mathbf{E}^N \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{E}^I) \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_M) = \mathbf{E}^N \cdot g^{LI} \cdot g_{KM},$$

$$\mathbf{J}_{K}^{NL} \circ \mathbf{L}_{MR}^I = \mathbf{E}^N \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^N \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I + \mathbf{E}^N \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_R) + \\ + \mathbf{E}^N \otimes \mathbf{E}^I \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_M) \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_R) + (\mathbf{E}^N \cdot \mathbf{E}^I) \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_M) \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_R) = g^{NI} \cdot \delta_{M}^L \cdot g_{KR},$$

$$\mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{J}_{M}^{PI} = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{E}^P \otimes \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_M = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{E}^P \otimes \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_M + \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_M \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{E}^P) + \\ + \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_M \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{E}^I) \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{E}^P) + (\mathbf{e}_Q \cdot \mathbf{e}_M) \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{E}^I) \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{E}^P) = g_{QM} \cdot \delta_{K}^I \cdot g^{LP},$$

$$\mathbf{e}_K \circ \mathbf{L}_{MR}^I = \mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I = \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I + (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_R) \cdot \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I = g_{KR} \cdot \mathbf{K}_{M}^I,$$

$$\mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{e}_M = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \circ \mathbf{e}_M = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_M + \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_M) = 0,$$

$$\mathbf{L}_{K}^L \circ \mathbf{L}_{MR}^I = \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I + \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_R) + \\ + \mathbf{E}^I \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_M) \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_R) = \mathbf{E}^I \cdot \delta_{M}^L \cdot g_{KR},$$

$$\mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{I}_{M}^I = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \circ \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_M = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{E}^I \otimes \mathbf{e}_M + \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_M \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{E}^I) + \\ + \mathbf{e}_Q \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_M) \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{E}^I) = \mathbf{e}_Q \cdot g_{KM} \cdot g^{LI},$$

$$\mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{E}^I + \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{E}^I) = 0,$$

$$\mathbf{E}^L \circ \mathbf{L}_{MR}^I = \mathbf{E}^L \circ \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I = \mathbf{E}^L \circ \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I + \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_R) = \mathbf{K}_{M}^I \cdot \delta_{R}^L,$$

$$\mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{K}_{M}^I = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \circ \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I + \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^I \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_M) + \\ + \mathbf{e}_Q \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{E}^I) \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_M) = \mathbf{L}_{KQ}^I \cdot \delta_{M}^L + \mathbf{e}_Q \cdot \delta_{K}^I \cdot \delta_{M}^L,$$

$$\mathbf{K}_{K}^L \circ \mathbf{L}_{MR}^I = \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \circ \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I = \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I + \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_R) + \\ + \mathbf{E}^I \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_M) \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_R) = \mathbf{L}_{MK}^I \cdot \delta_{R}^L + \mathbf{E}^I \cdot g_{KM} \cdot \delta_{R}^L,$$

$$\mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{L}_{MR}^I = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \circ \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I = \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{E}^L \otimes \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I + \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{E}^I \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_R) + \\ + \mathbf{e}_Q \otimes \mathbf{E}^I \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_M) \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_R) + (\mathbf{e}_Q \cdot \mathbf{E}^I) \cdot (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_M) \cdot (\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{e}_R) = \mathbf{K}_{Q}^I \cdot g_{KM} \cdot \delta_{R}^L + \delta_{Q}^I \cdot g_{KM} \cdot \delta_{R}^L.$$

Здесь из конечных выражений исключены базисные векторы, выходящие за рамки рассматриваемой алгебры. В результате алгебра действия частиц и античастиц определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{K}_{K}^I + \delta_{K}^I, & \mathbf{E}^L \circ \mathbf{e}_M = \delta_{M}^L + \mathbf{I}_{M}^L, \\ \mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_L \cdot {}_r C_{KI}^L + \mathbf{I}_{M}^L \cdot {}_r C_{MKI}^L, & \mathbf{E}^I \circ \mathbf{E}^K = {}_i C^{IK}_L \cdot \mathbf{E}^L + {}_i C^{IKM}_L \cdot \mathbf{K}_{M}^L, \\ \mathbf{I}_{K}^L \circ \mathbf{e}_M = \mathbf{E}^L \cdot g_{KM}, & \mathbf{K}_{K}^L \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{e}_K \cdot g^{LI}, \\ \mathbf{e}_K \circ \mathbf{I}_{M}^I = \delta_{K}^I \cdot \mathbf{e}_M, & \mathbf{E}^L \circ \mathbf{K}_{M}^I = \delta_{M}^L \cdot \mathbf{E}^I, \\ \mathbf{I}_{K}^L \circ \mathbf{I}_{M}^I = \delta_{K}^I \cdot \delta_{M}^L + \delta_{K}^I \cdot \mathbf{I}_{M}^L, & \mathbf{K}_{K}^L \circ \mathbf{K}_{M}^I = \delta_{M}^L \cdot \delta_{K}^I + \delta_{M}^L \cdot \mathbf{K}_{K}^I, \\ \mathbf{e}_K \circ \mathbf{J}_{M}^{PI} = \delta_{K}^P \cdot \mathbf{I}_{M}^I, & \mathbf{E}^L \circ \mathbf{L}_{MR}^I = \mathbf{K}_{M}^I \cdot \delta_{R}^L, \\ \mathbf{J}_{K}^{NL} \circ \mathbf{e}_M = 0, & \mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{E}^I = 0, \\ \mathbf{I}_{K}^L \circ \mathbf{J}_{M}^{PI} = \mathbf{J}_{M}^{LI} \cdot \delta_{K}^P + \mathbf{e}_M \cdot \delta_{K}^P \cdot g^{LI}, & \mathbf{K}_{K}^L \circ \mathbf{L}_{MR}^I = \mathbf{L}_{MK}^I \cdot \delta_{R}^L + \mathbf{E}^I \cdot g_{KM} \cdot \delta_{R}^L, \\ \mathbf{J}_{K}^{NL} \circ \mathbf{I}_{M}^I = \mathbf{J}_{M}^{NL} \cdot \delta_{K}^I + \delta_{K}^I \cdot \delta_{M}^L \cdot \mathbf{E}^N, & \mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{K}_{M}^I = \mathbf{L}_{KQ}^I \cdot \delta_{M}^L + \mathbf{e}_Q \cdot \delta_{K}^I \cdot \delta_{M}^L, \\ \mathbf{J}_{K}^{NL} \circ \mathbf{J}_{M}^{PI} = \mathbf{I}_{M}^N \cdot g^{LI} \cdot \delta_{K}^P + \delta_{M}^N \cdot g^{LI} \cdot \delta_{K}^P, & \mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{L}_{MR}^I = \mathbf{K}_{Q}^I \cdot g_{KM} \cdot \delta_{R}^L + \delta_{Q}^I \cdot g_{KM} \cdot \delta_{R}^L, \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_K \circ \mathbf{L}_{MR}^I &= g_{KR} \cdot \mathbf{K}_M^I, & \mathbf{E}^L \circ \mathbf{J}_{PI}^M &= g^{LP} \cdot \mathbf{I}_M^I, \\
\mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{e}_M &= 0, & \mathbf{J}_{NL}^K \circ \mathbf{E}^I &= 0, \\
\mathbf{e}_K \circ \mathbf{K}_M^I &= \mathbf{L}_{MK}^I + g_{KM} \cdot \mathbf{E}^I, & \mathbf{E}^L \circ \mathbf{I}_M^I &= \mathbf{J}_{MI}^L + g^{LI} \cdot \mathbf{e}_M, \\
\mathbf{K}_K^L \circ \mathbf{e}_M &= \mathbf{e}_K \cdot \delta_M^L, & \mathbf{I}_K^L \circ \mathbf{E}^I &= \mathbf{E}^L \cdot \delta_K^I, \\
\mathbf{I}_K^L \circ \mathbf{L}_{MR}^I &= \mathbf{E}^I \cdot \delta_M^L \cdot g_{KR}, & \mathbf{K}_K^L \circ \mathbf{J}_{PI}^M &= \mathbf{e}_M \cdot \delta_K^I \cdot g^{LP}, \\
\mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{I}_M^I &= \mathbf{e}_Q \cdot g_{KM} \cdot g^{LI}, & \mathbf{J}_{NL}^K \circ \mathbf{K}_M^I &= \mathbf{E}^N \cdot g^{LI} \cdot g_{KM}, \\
\mathbf{I}_K^L \circ \mathbf{K}_M^I &= g_{KM} \cdot g^{LI}, & \mathbf{K}_K^L \circ \mathbf{I}_M^I &= g^{LI} \cdot g_{KM}, \\
\mathbf{J}_{NL}^K \circ \mathbf{L}_{MR}^I &= g^{NI} \cdot \delta_M^L \cdot g_{KR}, & \mathbf{L}_{KQ}^L \circ \mathbf{J}_{PI}^M &= g_{QM} \cdot \delta_K^I \cdot g^{LP}.
\end{aligned}$$

Далее рассмотрим произведения базисных векторов алгебры действия  $\mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_2^*$  в общем случае и сопоставим им элементарные акты взаимодействий. Фундаментальные частицы обозначим  $F$ , первые промежуточные частицы обозначим  $B$ , вторые промежуточные частицы  $F'$ , скалярные частицы обозначим  $\phi$ . Античастицы обозначим соответственно  $F^*$ ,  $B^*$ ,  $F'^*$ .

В результате имеем соответствие между произведениями базисных векторов и элементарными актами взаимодействия частиц

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I &= \mathbf{e}_L \cdot C_{KI}^L + \mathbf{I}_L^M \cdot C_{MKI}^L, & \sim & F_1 \circ F_2 \rightarrow F_3 \cdot \phi_1 + B \cdot \phi_2, \\
\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}_L^K &= \delta_I^K \cdot \mathbf{e}_L, & \sim & F_1 \circ B \rightarrow \phi \cdot F_2, \\
\mathbf{e}_I \circ \mathbf{J}_{KM}^L &= \delta_I^K \cdot \mathbf{I}_M^L, & \sim & F \circ F'_1 \rightarrow \phi \cdot B,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^I \circ \mathbf{E}^K &= C^{IK}_L \cdot \mathbf{E}^L + C^{IKM}_L \cdot \mathbf{K}_M^L, & \sim & F_1^* \circ F_2^* \rightarrow \phi_1 \cdot F_3^* + B^* \cdot \phi_2, \\
\mathbf{E}^I \circ \mathbf{K}_L^K &= \delta_L^I \cdot \mathbf{E}^K, & \sim & F_1^* \circ B^* \rightarrow \phi \cdot F_2^*, \\
\mathbf{E}^I \circ \mathbf{L}_{ML}^K &= \delta_L^I \cdot \mathbf{K}_M^K, & \sim & F_1^* \circ F'^* \rightarrow \phi \cdot B^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_I \circ \mathbf{E}^K &= \mathbf{K}_I^K + \delta_I^K, & \sim & F \circ F^* \rightarrow B^* + \phi, \\
\mathbf{e}_I \circ \mathbf{K}_L^K &= \mathbf{L}_{LI}^K + g_{IL} \cdot \mathbf{E}^K, & \sim & F \circ B^* \rightarrow F'^* + \phi \cdot F^*, \\
\mathbf{e}_I \circ \mathbf{L}_{ML}^K &= g_{IL} \cdot \mathbf{K}_M^K, & \sim & F \circ F'^* \rightarrow \phi \cdot B^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K &= \mathbf{I}_K^I + \delta_I^K, & \sim & F^* \circ F \rightarrow B + \phi, \\
\mathbf{E}^I \circ \mathbf{I}_L^K &= \mathbf{J}_{LI}^K + g^{IK} \cdot \mathbf{e}_L, & \sim & F^* \circ B \rightarrow F' + \phi \cdot F, \\
\mathbf{E}^I \circ \mathbf{J}_{KM}^L &= g^{IK} \cdot \mathbf{I}_M^L, & \sim & F^* \circ F' \rightarrow \phi \cdot B,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{e}_I &= \mathbf{E}^K \cdot g_{LI}, & \sim & B \circ F \rightarrow F^* \cdot \phi, \\
\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{I}_N^M &= \delta_L^M \cdot \mathbf{I}_N^K + \delta_L^M \cdot \delta_N^K, & \sim & B_1 \circ B_2 \rightarrow \phi_1 \cdot B_3 + \phi_2 \cdot \phi_3, \\
\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{J}_{NM}^I &= \delta_L^I \cdot \mathbf{J}_{NM}^K + \delta_L^I \cdot g^{KM} \cdot \mathbf{e}_N, & \sim & B \circ F'_1 \rightarrow \phi_1 \cdot F'_2 + \phi_2 \cdot \phi_3 \cdot F,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_L^K \circ \mathbf{E}^I &= g^{KI} \cdot \mathbf{e}_L, & \sim & B^* \circ F^* \rightarrow \phi \cdot F, \\
\mathbf{K}_L^K \circ \mathbf{K}_N^M &= \delta_N^K \cdot \mathbf{K}_L^M + \delta_N^K \cdot \delta_L^M, & \sim & B_1^* \circ B_2^* \rightarrow \phi_1 \cdot B_3^* + \phi_2 \cdot \phi_3, \\
\mathbf{K}_L^K \circ \mathbf{L}_{NI}^M &= \delta_I^K \cdot \mathbf{L}_{NL}^M + \delta_I^K \cdot g_{LN} \cdot \mathbf{E}^M, & \sim & B^* \circ F'_1 \rightarrow \phi_1 \cdot F'_2 + \phi_2 \cdot \phi_3 \cdot F^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{E}^I &= \mathbf{E}^K \cdot \delta_L^I, & \sim & B \circ F_1^* \rightarrow F_2^* \cdot \phi, \\
\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{K}_N^M &= g_{LN} \cdot g^{KM}, & \sim & B \circ B^* \rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2, \\
\mathbf{I}_L^K \circ \mathbf{L}_{NI}^M &= g_{LI} \cdot \delta_N^K \cdot \mathbf{E}^M, & \sim & B \circ F'^* \rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot F^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_L^K \circ \mathbf{e}_I &= \delta_I^K \cdot \mathbf{e}_L, & \sim & B^* \circ F_1 \rightarrow \phi \cdot F_2, \\
\mathbf{K}_L^K \circ \mathbf{I}_N^M &= g^{KM} \cdot g_{LN}, & \sim & B^* \circ B \rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2, \\
\mathbf{K}_L^K \circ \mathbf{J}_{NI}^M &= g^{KI} \cdot \delta_L^M \cdot \mathbf{e}_N, & \sim & B^* \circ F' \rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot F,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{KM}_L \circ \mathbf{e}_I &= 0, & \sim & F' \circ F \rightarrow 0, \\
\mathbf{J}^{KM}_L \circ \mathbf{I}^I_N &= \delta^I_L \cdot \mathbf{J}^{KM}_N + \delta^I_L \cdot \delta^M_N \cdot \mathbf{E}^K, & \sim & F' \circ B \rightarrow \phi_1 \cdot F' + \phi_2 \cdot \phi_3 \cdot F^*, \\
\mathbf{J}^{KM}_L \circ \mathbf{J}^{IN}_P &= \delta^I_L \cdot g^{MN} \cdot \mathbf{I}^K_P, & \sim & F'_1 \circ F'_2 \rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot B, \\
\\
\mathbf{L}^K_{ML} \circ \mathbf{E}^I &= 0, & \sim & F'^* \circ F^* \rightarrow 0, \\
\mathbf{L}^K_{ML} \circ \mathbf{K}^I_N &= \delta^K_N \cdot \mathbf{L}^I_{ML} + \delta^K_N \cdot \delta^I_M \cdot \mathbf{e}_L, & \sim & F'^*_1 \circ B^* \rightarrow \phi_1 \cdot F'^*_2 + \phi_2 \cdot \phi_3 \cdot F, \\
\mathbf{L}^K_{ML} \circ \mathbf{L}^I_{NP} &= \delta^K_P \cdot g_{MN} \cdot \mathbf{K}^I_L, & \sim & F'^*_1 \circ F'^*_2 \rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot B^*, \\
\\
\mathbf{J}^{KM}_L \circ \mathbf{E}^I &= 0, & \sim & F' \circ F^* \rightarrow 0, \\
\mathbf{J}^{KM}_L \circ \mathbf{K}^I_N &= g_{LN} \cdot g^{MI} \cdot \mathbf{E}^K, & \sim & F' \circ B^* \rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot F^*, \\
\mathbf{J}^{KM}_L \circ \mathbf{L}^I_{NP} &= g_{LP} \cdot \delta^M_N \cdot g^{KI}, & \sim & F' \circ F'^* \rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \phi_3, \\
\\
\mathbf{L}^K_{ML} \circ \mathbf{e}_I &= 0, & \sim & F'^* \circ F \rightarrow 0, \\
\mathbf{L}^K_{ML} \circ \mathbf{I}^I_N &= g^{KI} \cdot g_{MN} \cdot \mathbf{e}_L, & \sim & F'^* \circ B \rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot F, \\
\mathbf{L}^K_{ML} \circ \mathbf{J}^{IN}_P &= g^{KI} \cdot \delta^N_M \cdot g_{LP}, & \sim & F'^* \circ F' \rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \phi_3.
\end{aligned}$$

## V. ИНВАРИАНТ ДЕЙСТВИЯ, ЛАГРАНЖИАН И ПОЛЕВОЕ СЛАГАЕМОЕ

В этом Разделе вернемся к вопросу, поставленному в начале Главы, в Разделе I., и рассмотрим формирование полевого слагаемого в лагранжиане фундаментального объекта и калибровочного поля.

### 1. Инвариант действия

Вектор действия фундаментальных частиц, промежуточных частиц первого рода и промежуточных частиц второго рода имеет вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{S} + \mathfrak{S}.$$

Вектор действия фундаментальных античастиц, промежуточных античастиц первого рода и промежуточных античастиц второго рода имеет вид

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{S}^* + \mathbf{S}^* + \mathfrak{S}^*.$$

С помощью этих векторов, используя операцию свертки, можно образовать скалярную величину

$$\begin{aligned}
(\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T}) &= (\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}) + (\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}) + (\mathfrak{S}^* \cdot \mathfrak{S}) = \\
&= S_I \cdot S^I + S^{*L}_K \cdot S^K_L + S^{ML}_K \cdot S^K_{LM}.
\end{aligned}$$

Эта величина названа *инвариантом действия*.

Аналогично построим *локальный инвариант действия*. Для этого введем дифференциал

$$d\mathbf{T} = d\mathbf{S} + d\mathbf{S} + d\mathfrak{S},$$

а также сопряженный дифференциал

$$d\mathbf{T}^* = d\mathbf{S}^* + d\mathbf{S}^* + d\mathfrak{S}^*.$$

С помощью этих векторов, используя операцию свертки, образуем скалярную величину – локальный инвариант действия:

$$\begin{aligned}
(d\mathbf{T}^* \cdot d\mathbf{T}) &= (d\mathbf{S}^* \cdot d\mathbf{S}) + (d\mathbf{S}^* \cdot d\mathbf{S}) + (d\mathfrak{S}^* \cdot d\mathfrak{S}) = \\
&= dS_I \cdot dS^I + dS^{*L}_K \cdot dS^K_L + dS^{ML}_K \cdot dS^K_{LM}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Далее напомним, что при дифференцировании векторов алгебры необходимо вводить несколько видов дифференциалов (два и более), определяемых положением вектора в законе умножения. Пусть дифференциал  $d$  в выражении (20) есть дифференциал  $d_1$ , тогда локальный инвариант действия принимает вид

$$\begin{aligned}
(d_1\mathbf{T}^* \cdot d_1\mathbf{T}) &= (d_1\mathbf{S}^* \cdot d_1\mathbf{S}) + (d_1\mathbf{S}^* \cdot d_1\mathbf{S}) + (d_1\mathfrak{S}^* \cdot d_1\mathfrak{S}) = \\
&= d_1S_I \cdot d_1S^I + d_1S^{*L}_K \cdot d_1S^K_L + d_1S^{ML}_K \cdot d_1S^K_{LM}.
\end{aligned}$$

Отсюда, полагая

$$\begin{aligned}
d_1\mathbf{T} &= \Psi, & d_1\mathbf{T}^* &= \Psi^*, \\
d_1\mathbf{S} &= \psi, & d_1\mathbf{S}^* &= \psi^*, \\
d_1\mathbf{S} &= \psi_1, & d_1\mathbf{S}^* &= \psi_1^*, \\
d_1\mathfrak{S} &= \psi_2, & d_1\mathfrak{S}^* &= \psi_2^*,
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
(\Psi^* \cdot \Psi) &= (\psi^* \cdot \psi) + (\psi_1^* \cdot \psi_1) + (\psi_2^* \cdot \psi_2) = \\
&= \psi_I \cdot \psi^I + \psi^{*L}_K \cdot \psi^K_L + \psi^{ML}_K \cdot \psi^K_{LM}.
\end{aligned}$$

Эту свертку будем называть *квантовым инвариантом действия*.

Для того чтобы двигаться дальше, введем упрощающие обозначения, позволяющие сделать выкладки более простыми и прозрачными.

## 2. Упрощающие обозначения

Сначала рассмотрим частицы вне калибровочного поля. Помимо

$$\psi = d_1 \mathbf{S}, \quad \psi_1 = d_1 \mathbf{S}, \quad \psi_2 = d_1 \mathbf{S},$$

будем использовать собирательное обозначение

$$\Psi \equiv (\psi, \psi_1, \psi_2).$$

Эти же обозначения будем использовать для координат волновых функций

$$\psi \equiv \psi^I, \quad \psi_1 \equiv \psi^{K_L}, \quad \psi_2 \equiv \psi^{K_{LM}}$$

и собирательное обозначение

$$\psi \equiv (\psi^I, \psi^{K_L}, \psi^{K_{LM}}).$$

Далее введем операторы

$$\square^P, \quad \square^{L_P}, \quad \square^{L_{PI}}$$

и операторы

$$\nabla^P, \quad \nabla^{L_P}, \quad \nabla^{L_{PI}}.$$

Эти операторы определим тем условием, что квантовые уравнения (8) записываются в следующем виде<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} \square^P(\psi) &\equiv \nabla^P(\psi) - p \cdot \psi^P = 0, \\ \square^{L_P}(\psi) &\equiv \nabla^{L_P}(\psi) - p_1 \cdot \psi^{L_P} = 0, \\ \square^{L_{PI}}(\psi) &\equiv \nabla^{L_{PI}}(\psi) - p_2 \cdot \psi^{L_{PI}} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $p, p_1, p_2$  – импульсы покоя соответственно фундаментальной частицы, промежуточной частицы первого рода, промежуточной частицы второго рода.

Далее выполним дополнительные упрощения, введя обозначения

$$\square = \square^P, \quad \square_1 = \square^{L_P}, \quad \square_2 = \square^{L_{PI}}$$

и операторы

$$\nabla = \nabla^P, \quad \nabla_1 = \nabla^{L_P}, \quad \nabla_2 = \nabla^{L_{PI}}.$$

В этих обозначениях квантовые уравнения для фундаментальной частицы, промежуточной частицы первого рода, промежуточной частицы второго рода (21) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \square(\psi) &\equiv \nabla(\psi) - p \cdot \psi = 0, \\ \square_1(\psi) &\equiv \nabla_1(\psi) - p_1 \cdot \psi_1 = 0, \\ \square_2(\psi) &\equiv \nabla_2(\psi) - p_2 \cdot \psi_2 = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

а в собирательном виде все три уравнения запишутся так:

$$\square(\psi) \equiv \nabla(\psi) - p \cdot \psi = 0.$$

Здесь

$$\square \equiv (\square, \square_1, \square_2), \quad \nabla \equiv (\nabla, \nabla_1, \nabla_2), \quad p \equiv (p, p_1, p_2).$$

Для частиц в калибровочном поле квантовые уравнения получаются из предыдущих путем замены

$$\psi \rightarrow \psi, \quad \psi_1 \rightarrow \psi_1 - \chi \circ \mathbf{A}, \quad \psi_2 \rightarrow \psi_2 - \chi \circ \mathbf{F}.$$

Эти соответствия в собирательном виде запишем так:

$$\psi \rightarrow \psi - \chi \circ \mathcal{A},$$

где

$$\mathcal{A} \equiv (0, \mathbf{A}, \mathbf{F}).$$

После подстановки этих соотношений в выражение (22) получим квантовые уравнения для фундаментальной частицы, промежуточной частицы первого рода, промежуточной частицы второго рода (17), (18), (19) но в новых обозначениях:

$$\begin{aligned} \square(\psi, \mathcal{A}) &\equiv \nabla(\psi, \mathcal{A}) - p \cdot \psi = 0, \\ \square_1(\psi, \mathcal{A}) &\equiv \nabla_1(\psi, \mathcal{A}) - p_1 \cdot (\psi_1 - \chi \circ \mathbf{A}) = 0, \\ \square_2(\psi, \mathcal{A}) &\equiv \nabla_2(\psi, \mathcal{A}) - p_2 \cdot (\psi_2 - \chi \circ \mathbf{F}) = 0. \end{aligned}$$

Смысл операторов  $\square(\psi, \mathcal{A})$  и  $\nabla(\psi, \mathcal{A})$  ясен из приведенной записи квантовых уравнений. В собирательном виде квантовые уравнения запишутся так:

$$\square(\psi, \mathcal{A}) \equiv \nabla(\psi, \mathcal{A}) - p \cdot (\psi - \chi \circ \mathcal{A}) = 0. \quad (23)$$

Кроме того, необходимо использовать преобразование сопряженных волновых функций в калибровочном поле

$$\psi^* \rightarrow \psi^*, \quad \psi_1^* \rightarrow \psi_1^* - \mathbf{A}^* \circ \chi^*, \quad \psi_2^* \rightarrow \psi_2^* - \mathbf{F}^* \circ \chi^*.$$

Эти соответствия в собирательном виде запишем так:

$$\psi^* \rightarrow \psi^* - \mathcal{A}^* \circ \chi^*, \quad (24)$$

где

$$\mathcal{A}^* \equiv (0, \mathbf{A}^*, \mathbf{F}^*).$$

## 3. Лагранжиан и полевое слагаемое

Перейдем к конструированию лагранжиана. Сначала рассмотрим случай частиц вне калибровочного поля. Лагранжиан, точнее квантовый лагранжиан, определим исходя из квантового инварианта действия

$$(\psi^* \cdot \psi)$$

<sup>4</sup> Здесь не следует отождествлять оператор  $\square$  с оператором Даламбера, а оператор  $\nabla$  – с оператором набла.

следующим образом:

$$\mathcal{L} = \square(\psi^* \cdot \psi) = (\psi^* \cdot \square\psi) + (\square\psi^* \cdot \psi).$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой лагранжиан для частиц. Он принимает нулевое значение, если волновая функция  $\psi$  удовлетворяет волновому уравнению для частиц

$$\square\psi = 0.$$

Второе слагаемое представляет собой лагранжиан для античастиц. Он принимает нулевое значение, если волновая функция  $\psi^*$  удовлетворяет волновому уравнению для античастиц

$$\square\psi^* = 0.$$

Далее для простоты будем рассматривать только лагранжиан для частиц

$$\mathcal{L} = (\psi^* \cdot \square\psi) = (\psi^* \cdot (\nabla(\psi) - p \cdot \psi)).$$

Перейдем к лагранжиану для фундаментальной частицы, промежуточной частицы первого рода и промежуточной частицы второго рода в калибровочном поле. Для этого воспользуемся подстановками (23) и (24). Получим

$$\mathcal{L} = ((\psi^* - \mathcal{A}^* \circ \chi^*) \cdot (\nabla(\psi, \mathcal{A}) - p \cdot (\psi - \chi \circ \mathcal{A}))).$$

Выполним соответствующие умножения, раскрыв скобки, и сгруппируем слагаемые так, чтобы выделить слагаемое, указанное ниже стрелками:

$$\mathcal{L} = \overbrace{((\psi^* - \overset{\downarrow}{\mathcal{A}^*} \circ \chi^*) \cdot (\nabla(\psi, \mathcal{A}) - p \cdot (\psi - \chi \circ \overset{\downarrow}{\mathcal{A}})))}.$$

Остальные слагаемые объединим вместе и обозначим  $\mathcal{L}'$ . В результате лагранжиан запишется в следующем виде:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - ((\mathcal{A}^* \circ \chi^*) \cdot (p \cdot \chi \circ \mathcal{A}))$$

или, раскрывая собирательный смысл второго слагаемого

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - ((\mathbf{A}^* \circ \chi^*) \cdot (p_1 \cdot \chi \circ \mathbf{A})) - ((\mathbf{F}^* \circ \chi^*) \cdot (p_2 \cdot \chi \circ \mathbf{F}))$$

или по отношению к координатам потенциала и тензора поля

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \chi_I \cdot A^{IK}_L \cdot p_1 \cdot A^L_{KM} \cdot \chi^M - \chi_I \cdot F^{IKL}_M \cdot p_2 \cdot F^M_{LKN} \cdot \chi^N$$

или

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - g^2 \cdot \chi_I \cdot A^I_\alpha \cdot p_1 \cdot A^\alpha_M \cdot \chi^M - g^2 \cdot \chi_I \cdot F^{IK}_\alpha \cdot p_2 \cdot F^\alpha_{KN} \cdot \chi^N.$$

Далее потребуем, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \chi_I \cdot A^I_\alpha \cdot A^\alpha_M \cdot \chi^M &= (\chi_I \cdot \chi^I) \cdot (A^M_\alpha \cdot A^\alpha_M), \\ \chi_I \cdot F^{IK}_\alpha \cdot F^\alpha_{KN} \cdot \chi^N &= (\chi_I \cdot \chi^I) \cdot (F^{NK}_\alpha \cdot F^\alpha_{KN}), \end{aligned}$$

а также

$$g^2 \cdot (\chi_I \cdot \chi^I) \cdot p_1 = \frac{m_2}{2}, \quad g^2 \cdot (\chi_I \cdot \chi^I) \cdot p_2 = \frac{1}{4}.$$

В этом случае квантовый лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - m_2 \cdot \frac{A^I_\alpha \cdot A^\alpha_I}{2} - \frac{F^{IK}_\alpha \cdot F^\alpha_{KI}}{4}.$$

Последние два слагаемых есть лагранжиан Прока для поля Янга-Миллса. Для электромагнитного поля необходимо положить

$$m_2 = 0, \quad F^\alpha_{KI} = F_{ki},$$

после чего получим лагранжиан для частиц в электромагнитном поле

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \frac{F^{ik} \cdot F_{ki}}{4}.$$

Таким образом, задача, поставленная в Разделе I выполнена. Лагранжиан частиц и поля, включающий лагранжиан свободного поля получен, но ценой постулата о существовании промежуточных частиц второго рода. При этом появление лагранжиана свободного поля в лагранжиане промежуточной частицы и поля подчинено теоретической процедуре ковариантного дифференцирования, которая включается в общий контекст единой теории взаимодействия.

## VI. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Из условия присутствия в лагранжиане частиц и поля лагранжиана свободного поля следует существование промежуточных частиц второго рода. Лагранжиан свободного поля появляется в результате процедуры ковариантного дифференцирования волновой функции этой частицы.
- Взаимодействие фундаментальных частиц и промежуточных частиц второго рода приводит к рождению промежуточных частиц первого рода.
- В отличие от фундаментальных частиц и промежуточных частиц первого рода промежуточные частицы второго рода не существуют в свободном состоянии.

## Глава 5.6 Пятимерная теория гравитации и электромагнетизма

### I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Калуца нетривиальным образом объединил гравитацию и электромагнетизм, предполагая, что пространство-время представляет собой не четырех-, а пятимерный континуум, причем геометрические объекты пятимерного пространства не зависят от пятой координаты<sup>1</sup>. Так как окружающий нас мир является очевидно четырехмерным, то привлечение пятой координаты для решения проблем единства остается неясным и потому неудовлетворительным требованием теории Калуцы.

Представление о кинематическом пространстве, развитое в Главах 1.6. и 1.7., позволяет установить физический смысл пятой координаты и смысл пятимерной концепции вообще. Кинематическое пространство представляет собой сумму векторов пространства-времени и векторов линейных движений (а в общем случае и векторов ускорений, вторых ускорений и так далее). Перейдем от кинематического пространства общего вида, рассмотренного в Главе 1.7., к пятимерному пространству Калуцы. Для этого воспользуемся квадратом линейного элемента кинематической алгебры в калибровочном поле, приведенным в Разделе V.1. Главы 1.7. (формула (37)):

$$ds'^2 = g_{IK} d_r x^I d_r x^K + (D_r l^N_L - A^N_{LI} D x^I) (D_r l^L_N - A^L_{NK} D x^K). \quad (1)$$

Здесь потенциалы кинематического поля – это

$$A^N_{LI} = \frac{\delta_r l^N_L}{\partial x^I}.$$

В приведенной формуле линейный элемент, координаты пространственно-временного вектора и потенциалы являются безразмерными. Для того чтобы обратиться к линейному элементу и координатам размерности длины, нужно умножить соотношение (1) на  $(L_0)^2$  и выполнить переобозначение линейного элемента, координат и потенциалов. Получим

$$ds'^2 = g_{IK} d_r x^I d_r x^K + (L_0 \cdot D_r l^N_L - A^N_{LI} D x^I) (L_0 \cdot D_r l^L_N - A^L_{NK} D x^K).$$

Здесь линейный элемент и координаты пространственно-временного вектора имеют размерность длины, а потенциалы являются безразмерными. В этой формуле выполним замену

$$x^I \rightarrow x^i,$$

предполагая, что координаты относятся не к обобщенному пространству-времени, а к четырехмерному пространству-времени. Здесь и далее строчные индексы  $i, k, l, \dots$  принимают значения 1, 2, 3, 4. Кроме того, перейдем от обобщенных потенциалов калибровочного поля к потенциалам электромагнитного поля и соответственно от обобщенных линейных преобразований к преобразованиям электрической группы. В соответствии с результатом Раздела VII.4. Главы 1.5. электрической группой является группа правых поворотов в плоскости 21. На этом основании выполним замену

$$D_r l^N_L \rightarrow D_r l^{21} \rightarrow D\varphi^{21}, \quad A^N_{LI} \rightarrow A^{21}_i.$$

В результате для квадрата линейного элемента получим

$$d\bar{s}^2 = g_{ik} dx^i dx^k + (L_0 \cdot D\varphi^{21} - A^{21}_i dx^i) (L_0 \cdot D\varphi_{12} - A_{12k} dx^k). \quad (2)$$

Здесь черта над символом линейного элемента означает, что рассматриваемый линейный элемент относится к пятимерному пространству. И в дальнейшем примем, что черта над символом геометрического объекта означает, что этот объект относится к пятимерному пространству. Отсутствие черты означает, что объект относится к четырехмерному пространству. Перепишем выражение (2) иначе, учитывая, что перестановка индексов 12 приводит к изменению знака соответствующего тензора:

$$d\bar{s}^2 = g_{ik} dx^i dx^k + (L_0 \cdot D\varphi^{21} + A^{12}_i dx^i) (-L_0 \cdot D\varphi_{21} - A_{12k} dx^k).$$

Далее введем переобозначения

$$L_0 \cdot D\varphi^{21} \rightarrow x^0, \quad A^{12}_i \rightarrow A^0_i \rightarrow A_i,$$

получим

$$d\bar{s}^2 = (g_{ik} - A^0_i A_{0k}) dx^i dx^k - A_{0k} dx^k dx^0 - A^0_i dx^i dx_0 - dx^0 dx_0. \quad (3)$$

Отождествляя переменную  $x^0$  с пятой координатой, в результате получим квадрат линейного элемента, вводимый в теории Калуцы.

Компоненты с верхним нулевым индексом не отличимы от компонент с нижним нулевым индексом, но для единообразия в обозначениях удобно ввести компоненту метрического тензора

$$g_{00} = 1$$

и считать, например, что

$$x_0 = g_{00} x^0.$$

<sup>1</sup> Это предположение Калуца назвал условием цилиндричности.



В таком обозначении квадрат линейного элемента приобретает вид

$$d\bar{s}^2 = (g_{ik} - g_{00} A_i^0 A_k^0) dx^i dx^k - 2g_{00} A_k^0 dx^k dx^0 - g_{00} dx^0 dx^0. \quad (4)$$

Здесь пятая координата  $x^0$  имеет размерность длины. Коэффициенты  $A_i^0$ , отождествляемые с потенциалами электромагнитного поля, являются безразмерными. В этом состоит особенность кинематического подхода к описанию взаимодействия. В калибровочном подходе потенциалы электромагнитного поля имеют размерность Вольт. Переход от потенциалов электромагнитного поля в кинематическом подходе к потенциалам электромагнитного поля в калибровочном подходе осуществляется путем замены в выражении (4)

$$A_i^0 \rightarrow k A_i^0. \quad (5)$$

Здесь потенциалы  $A_i^0$  слева безразмерны, а потенциалы справа имеют размерность

$$[A_i^0] = B.$$

Отсюда коэффициент  $k$  имеет размерность

$$[k] = B^{-1}.$$

Квадрат линейного элемента (4) можно записать в общем виде:

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{IK} dx^I dx^K.$$

Здесь и далее заглавные индексы принимают значения 1, 2, 3, 4, 0. Из выражения (4) следует, что метрический тензор  $\bar{g}_{IK}$  содержит следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ik} &= g_{ik} - g_{00} A_i^0 A_k^0, \\ \bar{g}_{0k} &= -g_{00} A_k^0, \\ \bar{g}_{00} &= -g_{00} = -1. \end{aligned} \quad (6)$$

Обратный метрический тензор  $\bar{g}^{KL}$ , определяемый из условия

$$\bar{g}_{IK} \bar{g}^{KL} = \delta_K^L,$$

имеет компоненты

$$\begin{aligned} \bar{g}^{kl} &= g^{kl}, \\ \bar{g}^{0l} &= -A_n^0 g^{nl}, \\ \bar{g}^{00} &= -g^{00} + A_n^0 A_m^0 g^{nm}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $g^{kl}$  и  $g^{00}$  определяются из условий

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_k^l, \quad g_{00} g^{00} = 1.$$

Из выражения (6) следует, что поле в теории Калуцы представлено компонентами метрического тензора  $g_{ik}$  и потенциалами электромагнитного поля  $A_i^0$ .

Вместе с тем так же, как от псевдоевклидова пространства с метрическим тензором  $\delta_{ik}$ , переходим к риманову пространству с метрическим тензором  $g_{ik}$ , естественно перейти от пространства Калуцы с компонентой  $g_{00} = 1$  к его обобщению, когда  $g_{00} \neq 1$ . В этом случае поле представлено компонентами метрического тензора  $g_{ik}$ , потенциалами электромагнитного поля  $A_i^0$  и компонентой  $g_{00}$ . Последний случай назовем  $G$ -полем.

Перейдем теперь к уравнениям поля и уравнениям движения, вытекающим из пятимерной теории. Сначала рассмотрим случай без участия  $G$ -поля, когда  $g_{00} = 1$ .<sup>2</sup>

## II. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ I

В теории Калуцы гравитационное и электромагнитное поля выступают как единый объект – поле. Уравнениями этого поля являются уравнения Эйнштейна, обобщенные на пятимерное пространство. Уравнения поля с источниками рассмотрим для трех модификаций: для контравариантных, смешанных и ковариантных компонент.

### 1. Уравнения поля для контравариантных компонент

Для контравариантных компонент уравнения поля с источниками выглядят следующим образом<sup>3</sup>:

$$\bar{R}^{IK} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}^{IK} = \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{IK}.$$

Здесь  $\bar{T}^{IK}$  – тензор энергии-импульса материи в пятимерном пространстве. Для нас пока не важно конкретное содержание тензора энергии-импульса материи, а существенно только то, что мы рассматриваем уравнения Эйнштейна с правой частью. Уравнения поля распадаются на следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{ik} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}^{ik} &= \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{ik}, \\ \bar{R}^{i0} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}^{i0} &= \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{i0}, \\ \bar{R}^{00} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}^{00} &= \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{00}. \end{aligned} \quad (8)$$

<sup>2</sup> Условие цилиндричности, дополненное требованием  $g_{00} = 1$ , называется *усиленным* условием цилиндричности.

<sup>3</sup> Постоянная  $G$  выражается через гравитационную постоянную  $\gamma$  следующим образом:

$$G = 4\pi\gamma, \quad \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Используя соотношения (145), (146) и (109), приведем первое уравнение этой системы к четырехмерному пространству

$$R^{ik} + \frac{1}{2} F^i{}_l F^{kl} - \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l \right) g^{ik} = \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{ik}. \quad (9)$$

Используя соотношения (144), (146) и (109), приведем второе уравнение системы (8) к четырехмерному пространству

$$\begin{aligned} & - \left( R^i{}_p + \frac{1}{2} F^i{}_l F_p{}^l \right) A^p - \frac{1}{2} F^{li}{}_{;l} + \\ & + \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l \right) A^i = \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{i0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя соотношения (143), (146) и (109), приведем третье уравнение системы (8) к четырехмерному пространству

$$\begin{aligned} & A^n \left( R_{np} + \frac{1}{2} F_{nl} F_p{}^l \right) A^p + A^n F^l{}_{n;l} + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l - \\ & - \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l \right) (-1 + A^m A_m) = \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{00}. \end{aligned} \quad (11)$$

Первое уравнение поля – уравнение (9) – перепишем следующим образом:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = \frac{1}{2} \left( -F^i{}_l F^{kl} + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l g^{ik} \right) + \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{ik}. \quad (12)$$

Отсюда видно, что это уравнение есть уравнение гравитационного поля, источниками которого являются тензор  $\bar{T}^{ik}$  и тензор энергии-импульса электромагнитного поля<sup>4</sup>

$$T_3{}^{ik} = -F^i{}_l F^{kl} + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l g^{ik}.$$

Рассмотрим теперь второе уравнение поля – уравнение (10). Запишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} & - \left( R^{ip} - \frac{1}{2} R g^{ip} - \frac{1}{2} \left( -F^i{}_l F_p{}^l + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l g^{ip} \right) \right) A_p - \\ & - \frac{1}{2} F^{li}{}_{;l} = \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{i0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя уравнение (12), приведем это уравнение к виду

$$\frac{1}{2} F^{li}{}_{;l} = -\frac{2G}{c^4} \bar{T}^{i0} - \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{ip} A_p. \quad (14)$$

<sup>4</sup> Нужно иметь в виду, что в этом уравнении тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет размерность

$$[T_3{}^{ik}] = \frac{1}{\text{м}^2}.$$

Это связано с тем, что коэффициенты  $A^i$ , которые отождествляются с потенциалами электромагнитного поля, являются безразмерными.

Это уравнение представляет собой уравнение электромагнитного поля с источниками. Смысл выражений, стоящих в правой части уравнения, рассмотрим далее.

Обратимся теперь к третьему уравнению поля – уравнению (11). Перепишем это уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} & A_n \left( R^{np} - \frac{1}{2} R g^{np} - \frac{1}{2} \left( -F^n{}_l F_p{}^l + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l g^{np} \right) \right) A_p + \\ & + A_n F^{ln}{}_{;l} + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l + \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l \right) = \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{00}. \end{aligned} \quad (15)$$

С использованием предыдущих уравнений (12) и (14) это уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( R + \frac{3}{4} F^m{}_l F_m{}^l \right) = \\ & = \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{00} + 2A_n \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{n0} + A_n \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{np} A_p. \end{aligned} \quad (16)$$

Для понимания смысла этого уравнения необходимо вспомнить, что в общем случае поле представлено компонентами метрического тензора  $g_{ik}$ , потенциалами электромагнитного поля  $A^0_i$  и компонентой  $g_{00}$ . Вариация действия по компонентам метрического тензора  $g_{ik}$  приводит к уравнению гравитационного поля, вариация действия по потенциалам электромагнитного поля  $A^0_i$  приводит к уравнению электромагнитного поля, соответственно вариация действия по компоненте  $g_{00}$  приводит к уравнению  $G$ -поля. Здесь мы остановились на случае, когда  $g_{00} = 1$ . Таким образом, уравнение (16) – это осколок уравнения  $G$ -поля, соответствующий указанному случаю.

И, наконец, сделаем следующее методическое замечание. Уравнение гравитационного поля (12) получено непосредственно из первого уравнения системы (8), уравнение электромагнитного поля (14) получено из второго уравнения системы (8) путем подстановки в него уравнения гравитационного поля (12), уравнение  $G$ -поля (16) получено из третьего уравнения системы (8) путем подстановки в него уравнения гравитационного поля (12) и уравнения электромагнитного поля (14). Имея в виду сказанное, введем понятие *неприводимое уравнение*, под которым будем подразумевать уравнение, не требующее преобразований с привлечением других уравнений. Как будет видно из дальнейшего, в уравнениях поля для контравариантных компонент неприводимым является уравнение гравитационного поля, в уравнениях поля для смешанных компонент неприводимым является уравнение электромагнитного поля, в уравнениях поля для ковариантных компонент неприводимым является третье уравнение – уравнение  $G$ -поля.

## 2. Уравнения поля для смешанных компонент

Уравнения поля в этом случае имеют вид

$$\bar{R}_K^I - \frac{1}{2} \bar{R} \delta^I_K = \frac{2G}{c^4} \bar{T}_K^I$$

и распадаются на следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \bar{R}_k^i - \frac{1}{2} \bar{R} \delta^i_k &= \frac{2G}{c^4} \bar{T}_k^i, \\ \bar{R}_0^i &= \frac{2G}{c^4} \bar{T}_0^i, \\ \bar{R}_k^0 &= \frac{2G}{c^4} \bar{T}_k^0, \\ \bar{R}_0^0 - \frac{1}{2} \bar{R} &= \frac{2G}{c^4} \bar{T}_0^0. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя соотношения (142) и (146), приведем первое уравнение этой системы к четырехмерному пространству

$$\begin{aligned} R^i_k - \frac{1}{2} A_k F^{il}_{;l} + \frac{1}{2} F^i_l F_k{}^l - \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{4} F^m_l F_m{}^l \right) \delta^i_k &= \\ = \frac{2G}{c^4} \left( \bar{T}^{ip} \bar{g}_{pk} + \bar{T}^{i0} \bar{g}_{0k} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Используя соотношения (141) и (146), приведем второе уравнение системы (17) к четырехмерному пространству

$$\frac{1}{2} F^{li}_{;l} = \frac{2G}{c^4} \left( \bar{T}^{ip} \bar{g}_{p0} + \bar{T}^{i0} \bar{g}_{00} \right). \quad (19)$$

Используя соотношения (140) и (146), приведем третье уравнение системы (17) к четырехмерному пространству

$$\begin{aligned} -A^n R_{nk} + \frac{1}{2} A^n A_k (F_n{}^l)_{;l} - \frac{1}{2} A^n F_{nl} F_k{}^l - \frac{1}{2} F^l_{k;l} - \\ - \frac{1}{4} A_k F_l{}^m F^l{}_m = \frac{2G}{c^4} \left( \bar{T}^{0p} \bar{g}_{pk} + \bar{T}^{00} \bar{g}_{0k} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Используя соотношения (139) и (146), приведем четвертое уравнение системы (17) к четырехмерному пространству

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} A^n F^l_{n;l} - \frac{1}{4} F^m_l F_m{}^l - \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{4} F^m_l F_m{}^l \right) &= \\ = \frac{2G}{c^4} \left( \bar{T}^{0p} \bar{g}_{p0} + \bar{T}^{00} \bar{g}_{00} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Второе уравнение поля – уравнение (19) – записывается так:

$$\frac{1}{2} F^{li}_{;l} = \frac{2G}{c^4} \left( -\bar{T}^{ip} A_p - \bar{T}^{i0} \right). \quad (22)$$

Как и следовало ожидать, оно совпадает с полученным ранее уравнением электромагнитного поля с источниками (14). Мы убеждаемся в том, что в смешанных компонентах уравнение электромагнитного поля является неприводимым.

Первое уравнение поля – уравнение (18) – после преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} R^i_k - \frac{1}{2} R \delta^i_k - \frac{1}{2} A_k F^{il}_{;l} = \frac{1}{2} \left( -F^i_l F_k{}^l + \frac{1}{4} F^m_l F_m{}^l \delta^i_k \right) + \\ + \frac{2G}{c^4} \left( \bar{T}^{ip} (g_{pk} - A_p A_k) - \bar{T}^{i0} A_k \right). \end{aligned} \quad (23)$$

После исключения из него второго уравнения (22) оно преобразуется в уравнение для гравитационного поля (12).

Третье уравнение поля – уравнение (21) – записывается так:

$$-\frac{1}{2} A^n F^l_{n;l} - \frac{1}{2} \left( R + \frac{3}{4} F^m_l F_m{}^l \right) = \frac{2G}{c^4} \left( -\bar{T}^{0p} A_p - \bar{T}^{00} \right). \quad (24)$$

Используя второе уравнение (22), получим с точностью до знака ранее выведенное уравнение (16) – уравнение  $G$ -поля.

## 3. Уравнения поля для ковариантных компонент

Уравнения поля в этом случае имеют вид

$$\bar{R}_{IK} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{IK} = \frac{2G}{c^4} \bar{T}_{IK}.$$

Уравнения поля распадаются на следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ik} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{ik} &= \frac{2G}{c^4} \bar{T}_{ik}, \\ \bar{R}_{i0} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{i0} &= \frac{2G}{c^4} \bar{T}_{i0}, \\ \bar{R}_{00} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{00} &= \frac{2G}{c^4} \bar{T}_{00}. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя соотношения (138), (146) и (108), приведем первое уравнение этой системы к четырехмерному пространству

$$\begin{aligned} R_{ik} - \frac{1}{2} A_i (F_k{}^l)_{;l} - \frac{1}{2} A_k (F_i{}^l)_{;l} + \frac{1}{2} F_{il} F_k{}^l + \\ + \frac{1}{4} A_i A_k (F_l{}^m F^l{}_m) - \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{4} F^m_l F_m{}^l \right) \bar{g}_{ik} &= \\ = \frac{2G}{c^4} \bar{T}_{ik}. \end{aligned} \quad (26)$$

Используя соотношения (137), (146) и (108), приведем второе уравнение системы (25) к четырехмерному пространству

$$\frac{1}{2} F^l_{i;l} + A_i \frac{F_l{}^m F^l{}_m}{4} - \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{4} F^m_l F_m{}^l \right) \bar{g}_{i0} = \frac{2G}{c^4} \bar{T}_{i0}. \quad (27)$$

Используя соотношения (136), (146) и (108), приведем третье уравнение системы (25) к четырехмерному пространству

$$\frac{F^m_l F_m{}^l}{4} - \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{4} F^m_l F_m{}^l \right) \bar{g}_{00} = \frac{2G}{c^4} \bar{T}_{00}. \quad (28)$$

В ковариантных компонентах третье уравнение поля – уравнение (28) – является неприводимым. Оно принимает вид

$$\frac{1}{2} \left( R + \frac{3}{4} F^m{}_l F_m{}^l \right) = \frac{2G}{c^4} \bar{T}_{00} \quad (29)$$

и сводится к ранее полученному уравнению  $G$ -поля (16), если учесть, что

$$\bar{T}_{00} = \bar{T}^{np} A_n A_p + 2\bar{T}^{n0} A_n + \bar{T}^{00}.$$

Второе уравнение поля – уравнение (27) – после исключения из него уравнения (29) совпадает с уравнением электромагнитного поля (14) или (22).

Третье уравнение поля – уравнение (26) – после исключения из него уравнений электромагнитного поля и  $G$ -поля совпадает с уравнением гравитационного поля (12).

#### 4. Уравнения поля с учетом размерности потенциалов электромагнитного поля

Коэффициенты  $A_i$ , которые отождествляются с потенциалами электромагнитного поля, до сих пор рассматривались как безразмерные величины. В действительности они измеряются в Вольтах. Для перехода от безразмерных величин к размерным во всех предыдущих соотношениях необходимо выполнить замену

$$A_i \rightarrow k \cdot A_i.$$

Здесь новые коэффициенты  $A_i$  имеют размерность

$$[A_i] = \text{В},$$

а постоянные коэффициенты  $k$  должны иметь размерность

$$[k] = \text{В}^{-1}$$

для того, чтобы произведение  $k \cdot A_i$  оставалось безразмерным. В результате метрический тензор  $\bar{g}_{IK}$  (вместо (108)) приобретает вид

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ik} &= g_{ik} - k^2 A_i A_k, \\ \bar{g}_{0k} &= -k A_k, \\ \bar{g}_{00} &= -1. \end{aligned} \quad (30)$$

Соответственно обратный метрический тензор  $\bar{g}^{IK}$  (вместо (109)) приобретает вид

$$\begin{aligned} \bar{g}^{ik} &= g^{ik}, \\ \bar{g}^{0k} &= -k A^k, \\ \bar{g}^{00} &= -1 + k^2 A_i A^i \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнения поля для размерных потенциалов электромагнитного поля переписываются следующим образом: для гравитационного поля

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = \frac{k^2}{2} \left( -F^i{}_l F^{kl} + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l g^{ik} \right) + \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{ik}, \quad (32)$$

для электромагнитного поля

$$\frac{k}{2} F^{li}{}_{;l} = -\frac{2G}{c^4} \bar{T}^{i0} - \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{ip} k A_p, \quad (33)$$

для  $G$ -поля

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( R + \frac{3k^2}{4} F^m{}_l F_m{}^l \right) &= \\ &= \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{00} + 2k A_n \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{n0} + k^2 A_n \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{np} A_p. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь необходимо вспомнить, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля в размерных единицах имеет вид

$$T_{\nu}{}^{ik} = \varepsilon_0 \left( -F^i{}_l F^{kl} + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l g^{ik} \right),$$

где  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А} \cdot \text{сек}}{\text{В} \cdot \text{м}}$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Размерность тензора энергии-импульса электромагнитного поля при этом равна

$$[T_{\nu}{}^{ik}] = [\varepsilon_0] \cdot [F^i{}_l]^2 = \frac{\text{А} \cdot \text{сек}}{\text{В} \cdot \text{м}} \cdot \frac{\text{В}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Уравнение Эйнштейна для гравитационного поля в том случае, когда источниками являются тензор энергии-импульса электромагнитного поля и тензор энергии-импульса материи, для размерных величин записывается следующим образом:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = \frac{2G}{c^4} \varepsilon_0 \left( -F^i{}_l F^{kl} + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l g^{ik} \right) + \frac{2G}{c^4} \bar{T}^{ik}. \quad (35)$$

Из сравнения уравнений (32) и (35) следует выражение для коэффициента  $k$

$$k = 2 \frac{\sqrt{G \varepsilon_0}}{c^2}. \quad (36)$$

Полезно проверить размерность коэффициента  $k$ :

$$[k] = \sqrt{[G] \cdot [\varepsilon_0]} \cdot [c]^{-2} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \cdot \frac{\text{А} \cdot \text{сек}}{\text{В} \cdot \text{м}} \cdot \frac{\text{сек}^2}{\text{м}^2}} = \text{В}^{-1}$$

как и следовало ожидать.

### III. МАССА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД

#### 1. Принцип наименьшего действия

Принцип наименьшего действия понадобится для дальнейших исследований пятимерной теории. Наша формулировка отличается от общепринятой<sup>5</sup>. Она

<sup>5</sup> См., например, Л.Д.Ландау и Е.М.Лившиц, Теория поля, Наука, М., 1967г.

позволяет преодолеть некоторые противоречия и находится в согласии с соотношениями пятимерной теории. Запишем действие массивной заряженной частицы и электромагнитного поля следующим образом:

$$S = - \int m c ds - 2 \int \frac{e}{c} A_i dx^i - \int \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{F_{ik} F^{ik}}{4} d\Omega.$$

Здесь  $d\Omega = c dt dx^1 dx^2 dx^3$  – элемент четырехмерного объема, а линейный элемент  $ds$  определяется соотношением

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k.$$

От общепринятой эта запись отличается множителем 2 перед вторым слагаемым. Вариация действия распадается на две части:

$$\delta S_1 = -\delta \left( \int m c ds + \int \frac{e}{c} A_i dx^i \right)$$

и

$$\delta S_2 = -\delta \left( \int \frac{e}{c} A_i dx^i + \int \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{F_{ik} F^{ik}}{4} d\Omega \right).$$

Условие равенства нулю первой вариации по координатам приводит к уравнению движения частицы, условие равенства нулю второй вариации по потенциалам приводит к уравнению электромагнитного поля.

Для массы и заряда, распределенных по объему, действие приобретает вид

$$S = - \int \left( \mu \frac{dx_i}{ds} \frac{dx^i}{dt} + 2 \frac{1}{c^2} A_i j^i + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{F_{ik} F^{ik}}{4} \right) d\Omega.$$

Представленная форма принципа наименьшего действия имеет то преимущество, что позволяет ввести, помимо тензора энергии-импульса частицы

$$T_M^{ik} = \mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt}$$

и тензора энергии-импульс электромагнитного поля

$$T_3^{ik} = \varepsilon_0 \left( -F^i_l F^{kl} + \frac{1}{4} F^m_l F_m^l g^{ik} \right),$$

тензор энергии-импульса взаимодействия

$$T_B^{ik} = \frac{1}{2} (A^i j^k + A^k j^i)$$

и на основании закона сохранения полного тензора энергии-импульса

$$(T_M^{ik} + 2T_B^{ik} + T_3^{ik})_{;k} = 0,$$

разделенного на две части

$$(T_M^{ik} + T_B^{ik})_{;k} = 0$$

и

$$(T_B^{ik} + T_3^{ik})_{;k} = 0,$$

получить уравнения движения и уравнения поля.

## 2. Квадрат линейного элемента

Обратимся к квадрату линейного элемента в пятимерном пространстве

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{IK} dx^I dx^K$$

и запишем его для случая, когда электромагнитные потенциалы, входящие в метрический тензор, являются размерными (формула (30)),

$$d\bar{s}^2 = (g_{ik} - k^2 A_i A_k) dx^i dx^k - 2k A_i dx^i dx^0 - dx^0 dx^0.$$

Используя это выражение, сформируем следующий линейный элемент:

$$-\frac{d\bar{s}^2}{ds} = -ds + k^2 A_i A_k \frac{dx^i dx^k}{ds} + 2k A_i dx^i \frac{dx^0}{ds} + dx^0 \frac{dx^0}{ds}. \quad (37)$$

Далее линейный элемент (37) будем рассматривать совместно с дифференциалом действия заряженной массивной частицы в электромагнитном поле, рассмотренного в предыдущем Разделе:

$$dS = -m c ds - 2 \frac{e}{c} A_i dx^i - d \int \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{F_{ik} F^{ik}}{4} d\Omega. \quad (38)$$

При этом исходим из того, что кинематический и динамический подходы к описанию взаимодействий эквивалентны. В частности, кинематический инвариант можно поставить в соответствие динамическому и наоборот. Для нас этот тезис означает, что линейный элемент, определяемый соотношением (37), и дифференциал действия (38) должны быть с точностью до множителя тождественны друг другу. Для согласования размерностей соотношений (37) и (38) введем множитель  $W$ , имеющий размерность энергии, и умножим соотношение (37) на  $W|c$ . Получим

$$-\frac{W}{c} \frac{d\bar{s}^2}{ds} = -\frac{W}{c} ds + \frac{W}{c} k^2 A_i A_k \frac{dx^i dx^k}{ds} + \frac{W}{c} 2k A_i dx^i \frac{dx^0}{ds} + \frac{W}{c} dx^0 \frac{dx^0}{ds}. \quad (39)$$

Будем полагать, что полученное выражение и есть дифференциал действия (38), обобщенный в пятимерной теории. Из сравнения соотношений (38) и (39) следует, что в (39) присутствуют два слагаемых, структура которых повторяет слагаемые в дифференциале действия. Кроме того, в соотношении (39) присутствуют два слагаемых, которых нет в дифференциале действия. Следует сказать, что, по существу, эти два слагаемых и есть то новое качество, которое вносится в наши представления о гравитации и электромагнетизме пятимерной теорией, пренебрегающей  $G$ -полем. Относительно последнего слагаемого в дифференциале действия (38) следует сказать, что как в классической теории поля, так и в пятимерной теории это слагаемое вводится волевым путем, что, конечно, является недостатком как той, так и другой теории.

Из сравнения выражений (38) и (39) следует, что

$$\text{дифференциал действия частицы } dS = -\frac{W}{c} \frac{ds^2}{ds},$$

$$\text{масса частицы } m = \frac{W}{c^2},$$

$$\text{заряд частицы } e = -Wk \frac{dx^0}{ds}.$$

Отсюда следует, что масса эквивалентна энергии, движущейся в четырехмерном пространстве, а электрический заряд эквивалентен энергии, движущейся по пятой координате.

Используя вышеприведенное соответствие, дифференциал действия массивной заряженной частицы в поле для пятимерной теории можно записать в виде

$$dS = -m c ds + m c k^2 A_i A_k \frac{dx^i dx^k}{ds} - 2 \frac{e}{c} A_i dx^i - \frac{e}{c k} dx^0. \quad (40)$$

### 3. Плотность массы и электрического заряда

Введем плотность энергии  $w$  как отношение энергии  $W$ , распределенной в объеме  $V$ , к величине этого объема. Тогда

$$\text{плотность массы } \mu = \frac{w}{c^2}, \quad (41)$$

$$\text{плотность электрического заряда } \rho = -w k \frac{dx^0}{ds}. \quad (42)$$

С учетом вышеуказанного действие для массы и заряда, распределенных по объему, приобретает вид

$$S = - \int \left( \mu \frac{dx_i}{ds} \frac{dx^i}{dt} - \mu k^2 A_i A_k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} + 2 \frac{\rho}{c^2} A_i \frac{dx^i}{dt} + \frac{\rho}{c^2 k} \frac{dx^0}{dt} \right) d\Omega. \quad (43)$$

Далее учтем, что

$$\frac{dx^i}{dt} = (c, v^1, v^2, v^3),$$

где  $v$  – координаты трехмерной скорости, а

$$\frac{dx^0}{dt}$$

– скорость движения по пятой координате. Тогда

$$\rho \frac{dx^i}{dt} = j^i \quad (44)$$

– плотность тока, а

$$\rho \frac{dx^0}{dt} = j^0 \quad (45)$$

– плотность тока по пятой координате. Поэтому действие для массы и заряда, распределенных по объему, записывается так:

$$S = - \int \left( \mu \frac{dx_i}{ds} \frac{dx^i}{dt} - \mu k^2 A_i A_k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} + \frac{2}{c^2} A_i j^i + \frac{1}{c^2 k} j^0 \right) d\Omega. \quad (46)$$

### 4. Калибровочное преобразование

Обратимся к выражению (37), имея в виду, что оно представляет собой форму записи дифференциала действия, и рассмотрим сумму последних трех слагаемых, зависящих от потенциала и от дифференциала пятой координаты

$$k^2 A_i A_k \frac{dx^i dx^k}{ds} + 2 k A_i dx^i \frac{dx^0}{ds} + dx^0 \frac{dx^0}{ds}.$$

В этой сумме выполним замены переменных в соответствии со следующими преобразованиями:

$$A_i = A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad (47)$$

$$dx^0 = dx'^0 - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m.$$

Указанные преобразования назовем *калибровочными*. После подстановки имеем

$$\begin{aligned}
 k^2 A_i A_k \frac{dx^i dx^k}{ds} + 2k A_i dx^i \frac{dx^0}{ds} + dx^0 \frac{dx^0}{ds} &= k^2 \left( A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \left( A'_k + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \frac{dx^i dx^k}{ds} + \\
 &+ 2k \left( A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \left( dx^{i0} - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m \right) \frac{dx^i}{ds} + \left( dx^{i0} - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m \right) \left( dx^{i0} - \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \right) \frac{1}{ds} = \\
 &= \left( k^2 A'_i A'_k dx^i dx^k + k \frac{\partial f}{\partial x^i} A'_k dx^i dx^k + k A'_i \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^i dx^k + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^i dx^k \right) \frac{1}{ds} + \\
 &+ \left( 2k A'_i dx^{i0} dx^i + 2 \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^{i0} dx^i - 2k A'_i \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m dx^i - 2 \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m dx^i \right) \frac{1}{ds} + \\
 &+ \left( dx^{i0} dx^{i0} - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m dx^{i0} - dx^{i0} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n + \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \right) \frac{1}{ds} = \\
 &= k^2 A'_i A'_k \frac{dx^i dx^k}{ds} + 2k A'_i dx^i \frac{dx^{i0}}{ds} + dx^{i0} \frac{dx^{i0}}{ds} .
 \end{aligned} \tag{48}$$

Отсюда следует вывод о том, что калибровочные преобразования сохраняют дифференциал действия частицы. Для действия, записанного в виде выражения (40), калибровочные преобразования необходимо записать так:

$$\begin{aligned}
 A_i &= A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i} , \\
 dx^0 &= dx^{i0} - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m , \\
 e &= e' + Wk \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} .
 \end{aligned} \tag{49}$$

Последнее преобразование можно записать иначе:

$$e = e' + mc^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} .$$

Отсюда особенно ясно, что заряд эквивалентен массе, движущейся по пятой координате. Сейчас существует способ превращения массы в энергию. Не исключено, что когда-нибудь будет найден способ превращения заряда в энергию. Для действия, записанного в виде выражения (46), калибровочные преобразования необходимо записать так:

$$\begin{aligned}
 A_i &= A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i} , \\
 dx^0 &= dx^{i0} - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m , \\
 j^i &= j'^i + \mu c^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^i}{dt} , \\
 j^0 &= j'^0 + \mu c^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^0}{dt} .
 \end{aligned} \tag{50}$$

Если уравнения Максвелла

$$F^{li}{}_{;l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i$$

подвергнуть калибровочному преобразованию, то получим

$$F'^{li}{}_{;l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j'^i + \frac{1}{\varepsilon_0 c} \mu c^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^i}{dt} ,$$

то есть уравнения Максвелла не являются калибровочно инвариантными. Для устранения этого несовершенства в пятимерной теории уравнения Максвелла должны быть скорректированы.

### 5. Тензор энергии-импульса материи

Тензор энергии-импульса материи в пятимерном пространстве будем рассматривать как простое обобщение тензора энергии-импульса в четырехмерном пространстве, именно

$$\bar{T}^{IK} = \frac{w}{c} \frac{dx^I}{ds} \frac{dx^K}{dt} = \frac{w}{c} \frac{dx^I}{ds} \frac{dx^K}{dt} . \tag{51}$$

Очевидно, что размерность этого тензора, как и следует, равна Дж/м<sup>3</sup>.

Компоненты тензора энергии-импульса материи таковы:

$$\begin{aligned}
 \bar{T}^{ik} &= \frac{w}{c} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} , \\
 \bar{T}^{i0} &= \frac{w}{c} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^0}{dt} , \\
 \bar{T}^{00} &= \frac{w}{c} \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{dt} .
 \end{aligned} \tag{52}$$

В этих соотношениях учтем выражения (41) и (42). Получим

$$\begin{aligned}
 \bar{T}^{ik} &= \mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} = T^{ik} , \\
 \bar{T}^{i0} &= -\frac{1}{kc} \rho \frac{dx^i}{dt} , \\
 \bar{T}^{00} &= -\frac{1}{kc} \rho \frac{dx^0}{dt} .
 \end{aligned} \tag{53}$$

или, учитывая выражения (44) и (45),

$$\begin{aligned}\bar{T}^{ik} &= \mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} = T^{ik}, \\ \bar{T}^{i0} &= -\frac{1}{kc} j^i, \\ \bar{T}^{00} &= -\frac{1}{kc} j^0.\end{aligned}\quad (54)$$

Полученные выражения компонент тензора энергии-импульса материи используем для записи уравнений поля с источниками.

#### IV. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ II

##### 1. Уравнения поля с источниками

Для удобства введем обозначение

$$\frac{2G}{c^4} = \chi.$$

Тогда соотношение (36) переписывается так:

$$k^2 = 2\chi\varepsilon_0. \quad (55)$$

Полученные выражения для тензора энергии-импульса материи подставим в уравнения поля (32), (33), (34). Получим уравнения гравитационного поля

$$R^k - \frac{1}{2}Rg^{ik} = \frac{k^2}{2}(-F^i_l F^{kl} + \frac{1}{4}F^m_l F_m^l g^{ik}) + \chi\mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt}, \quad (56)$$

уравнения электромагнитного поля

$$\frac{k}{2}F^{li}{}_{;l} = \chi \frac{1}{kc} j^i - \chi\mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} k A_p, \quad (57)$$

уравнения  $G$ -поля

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(R + \frac{3k^2}{4}F^m_l F_m^l) &= \\ = -\chi \frac{1}{kc} j^0 - 2k A_n \chi \frac{1}{kc} j^n + k^2 A_n \chi \mu c \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^p}{dt} A_p.\end{aligned}\quad (58)$$

Первое уравнение – это общеизвестное уравнение Эйнштейна для гравитационного поля, источниками которого являются тензоры энергии-импульса электромагнитного поля и материи. Остановимся на втором уравнении – уравнении электромагнитного поля. После подстановки коэффициента  $k$  оно приобретает вид

$$F^{li}{}_{;l} + \chi 2\mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^p}{dt} A_p = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i \quad (59)$$

или

$$F^{li}{}_{;l} + \chi 2T^{ip} A_p = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i. \quad (60)$$

Из сравнения этого уравнения с уравнением Максвелла

$$F^{li}{}_{;l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i$$

следует, что полученное уравнение отличается от него дополнительным слагаемым в левой части. Из сравнения полученного уравнения с уравнением Прока для массивных промежуточных частиц

$$F^{li}{}_{;l} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} A^i = 0$$

следует, что полученное уравнение соответствует массивному фотону, масса которого определяется соотношением

$$\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} g^{ip} = \chi 2\mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^p}{dt}.$$

Необычно то, что квадрат массы фотона пропорционален тензору энергии-импульса излучающей частицы.

Сделаем следующее замечание. Связь гравитационного поля с электромагнитным установлена уравнениями Эйнштейна. Об обратной связи электромагнитного поля с гравитационным ничего не известно<sup>6</sup>. Уравнение (60) показывает, что такая связь существует. Это наглядно видно, если из уравнения (56) выразить тензор энергии-импульса материи и подставить его в уравнение (60):

$$F^{li}{}_{;l} + 2 \left( R^{ip} - \frac{1}{2} R g^{ip} - \frac{k^2}{2} (-F^i_l F^{pl} + \frac{1}{4} F^m_l F_m^l g^{ip}) \right) A_p = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i \quad (61)$$

Для случая, когда величина тензора энергии-импульса электромагнитного поля значительно меньше величины тензора энергии-импульса материи, такая связь выгладит особенно просто:

$$F^{li}{}_{;l} + 2(R^{ip} - \frac{1}{2} R g^{ip}) A_p = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i.$$

Таким образом, пятимерная теория обобщает уравнение Максвелла. Обобщенное уравнение является инвариантным по отношению к калибровочным преобразованиям, установленным в предыдущем разделе. Действительно, выполним в уравнении (59) преобразования

$$\begin{aligned}A_i &= A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \\ j^i &= j'^i + \mu c^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^i}{dt}.\end{aligned}\quad (62)$$

<sup>6</sup> Если не считать замену в уравнении Максвелла частной производной на ковариантную при описании электромагнитных явлений в гравитационном поле.



Получим

$$\begin{aligned} F^{li}{}_{;l} + \chi 2\mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^p}{dt} A'_p + \chi \frac{1}{k} 2\mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^p}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^p} = \\ = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j'^i + \frac{1}{\varepsilon_0 c} \mu c^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^i}{dt}. \end{aligned}$$

Используя соотношение (55), получим

$$F^{li}{}_{;l} + \chi 2\mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^p}{dt} A'_i = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j'^i,$$

что и требовалось доказать.

О третьем уравнении можно сказать, что смысл его для нас скрыт. Это уравнение является уравнением поля по отношению к компоненте метрического тензора  $g_{00}$ . Однако пока мы придерживаемся усиленного условия цилиндричности, это уравнение поля сводится к алгебраическому соотношению.

## 2. Закон сохранения заряда

Закон сохранения заряда получим, взяв дивергенцию от уравнения электромагнитного поля (60)

$$j^i{}_{;i} = 2\chi\varepsilon_0 c (T^{ip} A_p)_{;i} \quad (63)$$

или

$$j^i{}_{;i} = k^2 c (T^{ip}{}_{;i} A_p + T^{ip} (A_p)_{;i}). \quad (64)$$

Преобразуем это выражение, учитывая, что из уравнения гравитационного поля (56) следует

$$T^{ip}{}_{;i} = -T_{\mathfrak{s}}{}^{ip}{}_{;i},$$

где

$$T_{\mathfrak{s}}{}^{ip} = \varepsilon_0 (-F^i{}_l F^{pl} + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l g^{ip})$$

- тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Далее учтем, что

$$T_{\mathfrak{s}}{}^{ip}{}_{;i} = -\varepsilon_0 (F^{il}{}_{;i} F^p{}_l).$$

Кроме того, здесь используем уравнения электромагнитного поля (60):

$$F^{il}{}_{;i} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^l - \chi 2T^{ln} A_n.$$

Получим

$$T_{\mathfrak{s}}{}^{ip}{}_{;i} = -\varepsilon_0 \left( \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^l - \chi 2T^{ln} A_n \right) F^p{}_l.$$

Отсюда

$$T^{ip}{}_{;i} = \left( \frac{1}{c} j^l - k^2 T^{ln} A_n \right) F^p{}_l.$$

Подставляя это выражение в соотношение (64), получим закон сохранения заряда в следующем виде:

$$j^i{}_{;i} = k^2 c \left( \left( \frac{1}{c} j^l - k^2 T^{ln} A_n \right) F^p{}_l A_p + T^{ip} (A_p)_{;i} \right)$$

или

$$j^i{}_{;i} = k^2 A_p F^p{}_l j^l - k^4 c A_p F^p{}_l T^{ln} A_n + k^2 c T^{ip} (A_p)_{;i}. \quad (65)$$

В заключение этого раздела запишем закон сохранения заряда в компактном виде:

$$(j^i - k^2 c T^{ip} A_p)_{;i} = 0. \quad (66)$$

Отсюда следует эквивалентность между плотностью электрического тока и тензором энергии-импульса в комбинации  $k^2 c T^{ip} A_p$ . Если ввести *обобщенную* плотность тока

$$j''^i = j^i - k^2 c T^{ip} A_p,$$

то для нее уравнение электромагнитного поля принимает вид уравнения Максвелла

$$F^{li}{}_{;l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j''^i. \quad (67)$$

## 3. Калибровка Лоренца

Для простоты калибровку Лоренца будем рассматривать для случая плоского пространства-времени, когда ковариантная производная сводится к частной производной.

Калибровка Лоренца – это уравнение

$$A^i{}_{;i} = 0, \quad (68)$$

которое добавляется к уравнению Максвелла

$$F^{li}{}_{;l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i.$$

Обоснование этого уравнения не существует за исключением того обстоятельства, что, применяя калибровку Лоренца, уравнение Максвелла можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^l \partial x_l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i,$$

подтверждающему существование электромагнитных волн. В отличие от уравнения Максвелла калибровка Лоренца и уравнение электромагнитных волн не являются калибровочно инвариантными относительно калибровочного преобразования

$$A_i = A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Обратимся теперь к пятимерной теории. Калибровка Лоренца (68) позволяет записать уравнение электромагнитного поля (67) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^l \partial x_l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} (j^i - k^2 c T^{ip} A_p). \quad (69)$$

Здесь калибровка Лоренца (68) и уравнение электромагнитных волн (69) также не являются калибровочно инвариантными относительно калибровочно-го преобразования (62). Этот недостаток может быть устранен, если предположить, что калибровка Лоренца имеет вид

$$A^i_{,i} = Q, \quad (70)$$

где  $Q$  – некоторая функция, имеющая размерность Вольт и участвующая в калибровочном преобразовании, причем полная система калибровочных преобра-

зований имеет вид

$$\begin{aligned} A_i &= A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \\ j^i &= j'^i + \mu c^2 k \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^i}{dt}, \\ Q &= Q' + \frac{1}{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x_i}. \end{aligned} \quad (71)$$

В этом случае уравнение электромагнитного поля приобретает вид

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^l \partial x_l} - \frac{\partial Q}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} (j^i - k^2 c T^{ip} A_p). \quad (72)$$

Построенные таким образом уравнение калибровки (70) и уравнение электромагнитного поля (72) являются калибровочно инвариантными относительно калибровочных преобразований (71).

## V. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнение движения в пятимерной теории представляет собой уравнение геодезической, обобщенное на пятимерное пространство

$$\frac{d^2 x^I}{ds^2} + \bar{\Gamma}^I_{KL} \frac{dx^K}{ds} \frac{dx^L}{ds} = 0.$$

Для движения в четырехмерном пространстве имеем

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \bar{\Gamma}^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} + 2\bar{\Gamma}^i_{k0} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0.$$

После подстановки коэффициентов связности (134), (135) и приведения их к размерным потенциалам, получим

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left( \Gamma^i_{kl} - \frac{k^2}{2} A_k F_l^i - \frac{k^2}{2} A_l F_k^i \right) \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} + k F^i_k \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0. \quad (73)$$

Умножим это уравнение на коэффициент  $\frac{w}{c}$  и запишем его в следующем виде:

$$\frac{w}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) \frac{dt}{ds} + \frac{w}{c} \left( \Gamma^i_{kl} - \frac{k^2}{2} A_k F_l^i - \frac{k^2}{2} A_l F_k^i \right) \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt} \frac{dt}{ds} + \frac{w}{c} k F^i_k \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^0}{ds} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (74)$$

Учитывая соотношения (41), (42) и (44), после умножения на  $c$  получим

$$\mu c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) + \mu c \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt} - \mu c \left( \frac{k^2}{2} A_k F_l^i + \frac{k^2}{2} A_l F_k^i \right) \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt} - \frac{1}{c} F^i_k j^k = 0. \quad (75)$$

Если учесть, что тензор энергии-импульса

$$T^{kl} = \mu c \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt}$$

симметричен по индексам, то выражение (75) приобретает вид

$$\mu c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) + \mu c \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt} - k^2 A_k F_l^i T^{kl} - \frac{1}{c} F^i_{kj} j^k = 0. \quad (76)$$

Сравнение полученного уравнения с классическим уравнением движения массивной заряженной частицы в электромагнитном и гравитационном полях

$$\mu c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) + \mu c \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt} - \frac{1}{c} F^i_{kj} j^k = 0$$

показывает, что пятимерная теория предсказывает появление дополнительного слагаемого

$$-k^2 A_k F_l^i T^{kl}$$

в уравнении движения.

Для движения по пятой координате имеем

$$\frac{d^2 x^0}{ds^2} + \bar{\Gamma}^0_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} + 2\bar{\Gamma}^0_{k0} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0.$$

После подстановки коэффициентов связности (132), (133) и приведения их к размерным потенциалам, получим

$$\frac{d^2 x^0}{ds^2} - \left( k A_m (\Gamma^m_{kl} - \frac{k^2}{2} A_k F_l^m - \frac{k^2}{2} A_l F_k^m) - \frac{k}{2} \psi_{kl} \right) \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} - k^2 (A^m F_{mk}) \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0. \quad (77)$$

Умножим это уравнение на коэффициент  $(-kw)$  и запишем его в следующем виде:

$$-\frac{d}{dt} \left( kw \frac{dx^0}{ds} \right) \frac{dt}{ds} + \left( k A_m (\Gamma^m_{kl} - \frac{k^2}{2} A_k F_l^m - \frac{k^2}{2} A_l F_k^m) - \frac{k}{2} \psi_{kl} \right) kw \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt} \frac{dt}{ds} + k^2 (A^m F_{mk}) \frac{dx^k}{dt} kw \frac{dx^0}{ds} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (78)$$

Учитывая соотношения (41), (42) и (44), получим

$$\frac{d\rho}{dt} + \left( k A_m (\Gamma^m_{kl} - \frac{k^2}{2} A_k F_l^m - \frac{k^2}{2} A_l F_k^m) - \frac{k}{2} \psi_{kl} \right) k \mu c^2 \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt} - k^2 (A^m F_{mk}) j^k = 0. \quad (79)$$

Учитывая, что тензор энергии-импульса

$$T^{kl} = \mu c \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt}$$

симметричен по индексам, запишем это соотношение следующим образом:

$$\frac{d\rho}{dt} = k^2 c T^{kl} (A_{k;l}) + k^4 c T^{kl} A_l F_k^m A_m + k^2 A^m F_{mk} j^k. \quad (80)$$

Из сравнения этого соотношения с равенством (65) видно, что оно представляет собой форму записи закона сохранения заряда. Таким образом, уравнение движения по пятой координате в динамической интерпретации есть модифицированный закон сохранения заряда.

## VI. G-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ

рат линейного элемента общего вида

Усиленное условие цилиндричности  $g_{00} = 1$  выделяет из поля пятимерной теории гравитационное и электромагнитное поля. В общем случае поле пятимерной теории представлено компонентами метрического тензора  $g_{ik}$ , определяющими гравитационное поле, потенциалами электромагнитного поля  $A^0_i$  и компонентой  $g_{00}$ , определяющей  $G$ -поле. Здесь мы рассмотрим случай, когда  $g_{00} = g_{00}(x^i, x^0)$ . Ему соответствует квад-

$$d\bar{s}^2 = (g_{ik} - g_{00} \cdot A^0_i \cdot A^0_k) \cdot dx^i \cdot dx^k - 2g_{00} \cdot A^0_k \cdot dx^k \cdot dx^0 - g_{00} \cdot dx^0 \cdot dx^0. \quad (81)$$

Ему в свою очередь соответствует дифференциал

действия, обобщающий выражение (40)<sup>7</sup>

$$dS = -mc ds + m c k^2 g_{00} A^0_i A^0_k \frac{dx^i dx^k}{ds} - \frac{2}{c} g_{00} e^0 A^0_i dx^i - \frac{1}{ck} g_{00} e^0 dx^0. \quad (82)$$

Для массы и заряда, распределенных по объему, действие, обобщающее выражение (46), записывается так:

$$S = - \int \left( \mu \frac{dx_i}{ds} \frac{dx^i}{dt} - \mu k^2 g_{00} A^0_i A^0_k \frac{dx^i dx^k}{ds dt} + \frac{2}{c^2} g_{00} A^0_i j^{0i} + \frac{1}{c^2 k} g_{00} j^{00} \right) d\Omega. \quad (83)$$

Последние слагаемые в формулах (82) и (83) указывают на то, что заряд, движущийся по пятой координате (а попросту, вращающийся заряд), взаимодействует с  $G$ -полем. Конструкция этих слагаемых аналогична конструкции слагаемого, описывающего взаимодействие заряда с электромагнитным полем. Кроме того, вторые и третьи слагаемые в приведенных формулах указывают на то, что  $G$ -поле взаимодействует с электромагнитным полем. Более того, заряд взаимодействует с электромагнитным полем с помощью  $G$ -поля как посредника. Здесь этот вопрос оставим в стороне и остановимся на  $G$ -взаимодействии электрических зарядов. Для того, чтобы выделить это взаимодействие в "чистом" виде, положим, что гравитационное поле отсутствует, то есть риманова метрика четырехмерного пространства сводится к псевдоевклидовой метрике

$$g_{ik} = \delta_{ik},$$

а также отсутствует электромагнитное поле, то есть  $A^0_i = 0$ . В этом случае квадрат линейного элемента приобретает простейший вид:

$$d\bar{s}^2 = \delta_{ik} \cdot dx^i \cdot dx^k - g_{00} \cdot dx^0 \cdot dx^0,$$

а дифференциал действия упрощается до следующего:

$$dS = -mc ds - \frac{1}{ck} g_{00} e^0 dx^0.$$

Рассматривать  $G$ -взаимодействие начнем с вывода уравнения  $G$ -поля.

## 1. Уравнение $G$ -поля

Уравнения поля в ковариантных компонентах имеют вид

$$\bar{R}_{IK} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{IK} = \chi \bar{T}_{IK}. \quad (84)$$

Они распадаются на следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ik} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{ik} &= \chi \bar{T}_{ik}, \\ \bar{R}_{i0} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{i0} &= \chi \bar{T}_{i0}, \\ \bar{R}_{00} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{00} &= \chi \bar{T}_{00}. \end{aligned} \quad (85)$$

Из этих трех уравнений нас интересует последнее, так как первое уравнение – это уравнение гравитационного поля, а второе уравнение – это уравнение электромагнитного поля.

Так как в дальнейшем нас будет интересовать предельный переход к частицам, медленно движущимся в геометрическом пространстве, то запишем интересующее нас уравнение в другом виде. Для этого сначала запишем общее уравнение (84) в другом виде. Начнем с того, что выполним свертку этого уравнения

$$\bar{R}_{IK} \bar{g}^{IK} - \frac{1}{2} \bar{R} \bar{g}_{IK} \bar{g}^{IK} = \chi \bar{T}_{IK} \bar{g}^{IK}$$

или

$$\bar{R} - \frac{5}{2} \bar{R} = \chi \bar{T}.$$

Отсюда

$$\bar{R} = -\chi \frac{2}{3} \bar{T}.$$

Подставляя это выражение в выражение (84), получим уравнение поля в следующем виде:

$$\bar{R}_{IK} = \chi \left( \bar{T}_{IK} - \frac{1}{3} \bar{T} \bar{g}_{IK} \right). \quad (86)$$

Третье уравнение системы (85) приобретает вид

$$\bar{R}_{00} = \chi \left( \bar{T}_{00} - \frac{1}{3} \bar{T} \bar{g}_{00} \right). \quad (87)$$

Раскроем содержание каждого из слагаемых, входящих в это уравнение.

Рассмотрим компоненту тензора энергии-импульса  $\bar{T}_{00}$ :

$$\bar{T}_{00} = \bar{g}_{00} \bar{T}^{np} A^0_n A^0_p + 2\bar{g}_{00} \bar{T}^{n0} A^0_n + \bar{T}^{00} \bar{g}_{00} \bar{g}_{00}.$$

В нашем случае

$$\bar{T}_{00} = \bar{T}^{00} \bar{g}_{00} \bar{g}_{00}.$$

<sup>7</sup> Символ заряда снабжен индексом "0" в соответствии с выражением

$$e^0 = -Wk \frac{dx^0}{ds}.$$

Используя (147) и выражение (54), имеем

$$\bar{T}_{00} = -g_{00} g_{00} \frac{1}{kc} j^{00}. \quad (88)$$

Рассмотрим свертку тензора энергии-импульса  $\bar{T}$ :

$$\bar{T} = \bar{g}_{IK} \bar{T}^{IK} = \bar{g}_{ik} \bar{T}^{ik} + 2\bar{g}_{i0} \bar{T}^{i0} + \bar{T}^{00} \bar{g}_{00}.$$

Учитывая формулы (147), имеем

$$\bar{T} = \delta_{ik} \bar{T}^{ik} - \bar{T}^{00} g_{00}.$$

Используя выражение (54), имеем<sup>8</sup>

$$\bar{T} = \mu c^2 + \frac{1}{kc} j^{00} g_{00}.$$

В этом выражении пренебрежем первым слагаемым, полагая

$$\mu c^2 \ll \frac{1}{kc} j^{00} g_{00}.$$

Это предположение вполне разумно (см. приложение 4). Таким образом,

$$\bar{T} \approx \frac{1}{kc} j^{00} g_{00}. \quad (89)$$

Подставляя соотношения (88), (89) и (153) в выражение (87), получим уравнение *G*-поля в следующем виде:

$$\frac{1}{2} g_{00}{}^{,m}{}_{,m} - \frac{1}{2} g_{00}{}^{,m} \frac{1}{2} g^{00} g_{00,m} = -\chi \frac{2}{3} g_{00} g_{00} \frac{1}{kc} j^{00}. \quad (90)$$

Удобно ввести функцию  $\phi$  из условия

$$g_{00} = 1 - 2\phi$$

и рассматривать ее как потенциал *G*-поля. Для потенциала  $\phi$  уравнение *G*-поля принимает вид

$$\phi^{,m}{}_{,m} + \phi^{,m} \cdot \phi_{,m} (1 + 2\phi) = -\chi \frac{2}{3} (1 - 2\phi)^2 \frac{1}{kc} j^{00}. \quad (91)$$

Уравнение упрощается, если положить

$$2\phi \ll 1$$

<sup>8</sup> Здесь учтено, что

$$\delta_{ik} \bar{T}^{ik} = \delta_{ik} T^{ik} = \mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx_i}{dt} = \mu c \frac{ds}{dt} \approx \mu c^2,$$

при этом для медленных движений частицы в геометрическом пространстве

$$\frac{ds}{dt} \approx \frac{\partial s}{\partial t} = c.$$

и рассматривать медленно меняющееся поле, для которого

$$\frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x_m} = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a} \approx -\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a}.$$

Здесь индекс *a* принимает значения 1, 2, 3 и  $x^a = x_a$ . Также

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} = \frac{\partial}{c \partial t} \cdot \frac{\partial}{c \partial t} - \frac{\partial}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial}{\partial x_a} \approx -\frac{\partial}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial}{\partial x_a}.$$

В этом случае уравнение *G*-поля принимает вид

$$\phi^{,a}{}_{,a} + \phi^{,a} \cdot \phi_{,a} = -\chi \frac{2}{3} \frac{j^{00}}{kc}. \quad (92)$$

Поле, удаленное от источника, подчиняется уравнению

$$\phi^{,a}{}_{,a} = -\chi \frac{2}{3} \frac{j^{00}}{kc}. \quad (93)$$

Это общеизвестное уравнение Пуассона. Его сферически симметричное решение имеет вид

$$\phi = \frac{2}{3} \chi \int \left( \frac{j^{00}}{kc} \right) \frac{dV}{4\pi r}.$$

Здесь интегрирование выполняется по трехмерному объему, а *r* – это расстояние от точки с плотностью тока  $j^{00}$  до точки определения поля. Для сосредоточенного заряда решение принимает вид

$$\phi = \frac{2}{3} \chi \left( \frac{e^0 v^0}{k c} \right) \frac{1}{4\pi r}. \quad (94)$$

Здесь  $v^0$  – скорость движения заряда по пятой координате.

## 2. Движение заряда под действием *G*-поля

Уравнение движения заряда под действием *G*-поля есть уравнение геодезической в пятимерном пространстве, спроецированное на четырехмерное пространство:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \bar{\Gamma}_{00}^i \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0.$$

После подстановки коэффициентов связности (150) получим

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \frac{1}{2} g_{00}{}^{,i} \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} \quad (95)$$

Умножим это уравнение на коэффициент  $\frac{w'}{c}$  и запишем его в следующем виде:

$$\frac{w'}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) \frac{dt}{ds} + \frac{w'}{c} \left( \frac{1}{2} g_{00}{}^{,i} \right) \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{dt} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (96)$$

Учитывая соотношения (41), (42) и (44), получим

$$\mu' c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) = \left( \frac{j'^{00}}{kc} \right) \left( \frac{1}{2} g_{00}{}^i \right). \quad (97)$$

Штрихованные величины относятся к среде, взаимодействующей с  $G$ -полем. Для медленно движущейся частицы  $dc \approx cdt$  и уравнения движения принимают вид

$$m' \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \left( \frac{e'^0 v'^0}{k c} \right) \left( \frac{1}{2} g_{00}{}^i \right) \quad (98)$$

или с использованием потенциала  $G$ -поля

$$m' \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \left( \frac{e'^0 v'^0}{k c} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \quad (99)$$

Отсюда сила, действующая на заряд со стороны  $G$ -поля,

$$F^i = - \left( \frac{e'^0 v'^0}{k c} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i},$$

что соответствует представлению о  $\phi$  как о потенциале  $G$ -поля. Подставляя сюда решение уравнения Пуассона (94), получим выражение для силы  $G$ -взаимодействия между двумя точечными зарядами:

$$F^i = \frac{2}{3} \chi \left( \frac{e'^0 v'^0}{k c} \right) \left( \frac{e^0 v^0}{k c} \right) \frac{1}{4\pi r^2}. \quad (100)$$

### 3. Замечание к полученному результату

Пятая координата – это координата, пропорциональная правому углу поворота в геометрическом пространстве (в теоретическом плане это поворот в плоскости 21).

Масса является параметром движения энергетического пакета вдоль интервала четырехмерного пространства. Электрический заряд – это параметр вращения энергетического пакета вдоль пятой координаты.

Вращение самого заряда вдоль пятой координаты есть электрический ток вдоль этой координаты.  $G$ -взаимодействие электрических зарядов это взаимодействие токов, протекающих по пятой координате.

Если считать, что вращение энергетического пакета и вращение заряда независимы друг относительно друга, то изменение направления вращения заряда приводит к изменению знака тока по пятой координате. А из выражений (99) и (100) следует, что токи одного направления отталкиваются, а токи разных направлений притягиваются, при том что сами заряды являются одноименными. Внешне это выглядит

так. В результате  $G$ -взаимодействия зарядов *одного* знака в одном случае эти заряды отталкиваются, а в другом притягиваются. Заметим, что свойства  $G$ -взаимодействия аналогичны свойствам взаимодействия разноцветных одноименных зарядов, которое рассматривалось в Главах 3.4. и 4.6.

## VII. ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ I

В этом Разделе вычислим *физические постоянные*, введенные в Главах 1.2, 1.3, 1.4. Это, прежде всего, *постоянная длины* –  $L_0$  и *постоянная времени* –  $T$ .

Начнем с того, что введем физическую постоянную с размерностью электрического потенциала

$$\Phi = \frac{1}{k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{\pi} \cdot \gamma \cdot \epsilon_0}. \quad (101)$$

Назовем эту величину *постоянной потенциала*. Вычислим значение постоянной потенциала, подставив в выражение (101) значения

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2},$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Получим

$$\Phi = \frac{1}{4} \frac{3^2 \cdot 10^{16}}{\sqrt{\pi} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 5,23 \cdot 10^{26} \text{ В}.$$

Далее обратим внимание на то, что потенциал электромагнитного поля записан в трех формах: *безразмерный* потенциал, *кинематический* потенциал и *калибровочный* потенциал. Для того чтобы избежать путаницы, введем для этих форм потенциала специальные обозначения:

1) безразмерный потенциал

$$(A_i)_{\text{безраз}} = \frac{\delta x^0}{\partial x^i},$$

2) кинематический потенциал

$$(A_i)_{\text{кинем}} = \frac{\delta \varphi_{12}}{\partial x^i},$$

3) калибровочный потенциал

$$(A_i)_{\text{калибр}} = \frac{\delta \theta_{12}}{\partial x^i}.$$

Эти формы потенциала связаны между собой постоянными коэффициентами. Так как

$$x^0 = L_0 \cdot \varphi_{12},$$

то

$$(A_i)_{\text{безраз}} = L_0 \cdot (A_i)_{\text{кинем}}. \quad (102)$$

Так как в общем случае

$$\varphi_\alpha = \frac{g_\alpha \cdot \theta_\alpha}{S_0},$$

а в нашем случае

$$\alpha = 12, \quad g_\alpha = \frac{e}{c}, \quad S_0 = \hbar$$

и

$$\varphi_{12} = \frac{e}{c \cdot \hbar} \cdot \theta_{12},$$

то

$$(A_i)_{\text{кинем}} = \frac{e}{c \cdot \hbar} \cdot (A_i)_{\text{калибр}}. \quad (103)$$

Кроме того

$$(A_i)_{\text{безраз}} = \frac{(A_i)_{\text{калибр}}}{\Phi}. \quad (104)$$

Из выражений (103) и (104) имеем

$$(A_i)_{\text{безраз}} = \frac{c \cdot \hbar}{e \cdot \Phi} \cdot (A_i)_{\text{кинем}}. \quad (105)$$

Из сравнения выражений (102) и (105) получим выражение для постоянной длины

$$L_0 = \frac{c \cdot \hbar}{e \cdot \Phi} = \frac{4 \cdot \hbar}{e \cdot c} \cdot \sqrt{\pi \cdot \gamma \cdot \varepsilon_0}. \quad (106)$$

Вычислим значение постоянной длины, подставив в выражение (106)

$$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{сек}, \quad e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, \quad c, \quad \Phi.$$

Получим

$$L_0 = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 1,054 \cdot 10^{-34}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,23 \cdot 10^{26}} = 3,78 \cdot 10^{-34} \text{ м}.$$

Постоянную времени

$$T = \frac{L_0}{c}$$

получим, учитывая выражение (106):

$$T = \frac{4 \cdot \hbar}{e \cdot c^2} \cdot \sqrt{\pi \cdot \gamma \cdot \varepsilon_0}. \quad (107)$$

Ее значение равно

$$T = \frac{3,78 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^8} = 1,26 \cdot 10^{-42} \text{ сек}.$$

Расчет физических постоянных можно выполнить из других соображений. Пусть  $W$  – это работа, выполнение которой в течение времени  $T$  приводит к действию, равному постоянной Планка, то есть

$$W \cdot T = \hbar.$$

Приравняем эту работу работе, совершаемой зарядом  $e$  при размещении его в поле  $\Phi$ , то есть

$$e \cdot \Phi \cdot T = \hbar.$$

Отсюда

$$T = \frac{\hbar}{e \cdot \Phi} = \frac{\hbar}{e} \cdot \frac{4\sqrt{\pi \cdot \gamma \cdot \varepsilon_0}}{c^2},$$

что совпадает с выражением (107).

Вычислим значение максимального ускорения

$$A = \frac{c}{T} = \frac{e}{\hbar} \cdot \frac{c^3}{4\sqrt{\pi \cdot \gamma \cdot \varepsilon_0}}.$$

Значение максимального ускорения равно

$$A = \frac{3 \cdot 10^8}{1,26 \cdot 10^{-42}} = 2,38 \cdot 10^{50} \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Вычислим значение постоянной угловой скорости

$$\Omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{e}{\hbar} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot c^2}{4\sqrt{\pi \cdot \gamma \cdot \varepsilon_0}}.$$

Значение постоянной угловой скорости равно

$$\Omega = \frac{2 \cdot \pi}{1,26 \cdot 10^{-42}} = 4,98 \cdot 10^{42} \text{ Гц}.$$

Отметим, что рассмотренные физические постоянные следует отнести к Лептонному Миру. Физические постоянные Кваркового Мира и Суперсимметричных Миров вероятно имеют другие значения.

### 1. Замечание относительно постоянной длины $L_0$

С помощью физических постоянных скорости света  $c$ , гравитационной постоянной  $\gamma$  и постоянной Планка  $\hbar$  можно построить постоянную величину, имеющую размерность длины,

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar \cdot \gamma}{c^3}},$$

называемую планковской длиной. Значение планковской длины таково

$$l_p = \sqrt{\frac{1,054 \cdot 10^{-34} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}}{(3 \cdot 10^8)^3}} = 1,61 \cdot 10^{-35} \text{ м}.$$

Сравним планковскую длину с постоянной длины  $L_0$  (106). Получим

$$l_p^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar \cdot c} \right) \cdot L_0^2.$$

Учтем, что выражение в скобках это постоянная тонкой структуры

$$\alpha = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar \cdot c}.$$

Таким образом, введенная нами постоянная длины связана с планковской длиной соотношением

$$l_p^2 = \frac{\alpha}{4} \cdot L_0^2.$$

## VIII. ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ II

В этом Разделе рассмотрим *физические постоянные* в более последовательном и развернутом виде. Формирование физических постоянных рассмотрим в четыре этапа.

1. На первом этапе исходными являются физические постоянные, сопутствующие электрическим и магнитным явлениям:

$$\begin{aligned} \text{диэлектрическая постоянная } \varepsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}}, \\ \text{магнитная постоянная } \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{В} \cdot \text{сек}}{\text{А} \cdot \text{м}}. \end{aligned}$$

2. На втором этапе круг физических постоянных расширяется за счет присоединения к ранее указанным исходным физическим постоянным ( $\varepsilon_0, \mu_0$ )

$$\text{гравитационной постоянной } \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

3. На третьем этапе круг физических постоянных расширяется за счет присоединения к ранее указанным исходным физическим постоянным ( $\varepsilon_0, \mu_0, \gamma$ ) постоянной действия или

$$\text{постоянной Планка } \hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{Дж} \cdot \text{сек}.$$

4. На четвертом этапе круг физических постоянных расширяется за счет присоединения к ранее указанным исходным физическим постоянным ( $\varepsilon_0, \mu_0, \gamma, \hbar$ ) постоянной электрического заряда или

$$\text{электрического заряда электрона } e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{Кл}.$$

1. Исходные физические постоянные ( $\varepsilon_0, \mu_0$ )

1. Постоянная скорости (скорость света)  $c$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}.$$

Отсюда

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$$

2. Постоянная электрического сопротивления  $R^9$

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{\text{В} \cdot \text{сек}}{\text{А} \cdot \text{м}} \cdot \frac{\text{В} \cdot \text{м}}{\text{Кл}} = \\ &= 14,2 \cdot 10^4 \text{Ом}^2. \end{aligned}$$

<sup>9</sup> Если величина  $\sqrt{\frac{1}{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$ , имеющая размерность скорости, рассматривается как физическая постоянная (постоянная скорости), то естественно величину  $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ , имеющую размерность электрического сопротивления, также рассматривать как физическую постоянную (постоянную электрического сопротивления). Вопрос о том, в каких процессах эта величина сохраняется, требует специального рассмотрения.

Отсюда<sup>10</sup>

$$R = 380 \text{ Ом}.$$

2. Исходные физические постоянные ( $\varepsilon_0, \mu_0, \gamma$ )

3. Эйнштейновская гравитационная постоянная<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{2 \cdot G}{c^4} = \frac{8 \cdot \pi \cdot \gamma}{c^4} = \\ &= \frac{8 \cdot \pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}}{3^4 \cdot 10^{32}} \cdot \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \cdot \frac{\text{сек}^4}{\text{м}^4} = 2,07 \cdot 10^{-43} \frac{\text{м}}{\text{Дж}}. \end{aligned}$$

4. Постоянная электрического потенциала  $\Phi$

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= \frac{1}{2 \cdot \chi \cdot \varepsilon_0} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2,07 \cdot 10^{-43} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{В} \cdot \text{м}}{\text{Кл}} = \\ &= 28 \cdot 10^{52} \text{В}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Phi = 5,23 \cdot 10^{26} \text{ В}.$$

5. Постоянная электрического напряжения  $U$ .

Положим

$$U \equiv \Phi = 5,23 \cdot 10^{26} \text{ В}.$$

6. Постоянная электрического тока  $I$

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2 \cdot \chi \cdot \mu_0} = \frac{U^2}{R^2} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2,07 \cdot 10^{-43} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{В} \cdot \text{сек}} = \\ &= 1,93 \cdot 10^{48} \text{А}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I = 1,39 \cdot 10^{24} \text{ А}.$$

<sup>10</sup> Большинство физических постоянных, рассматриваемых далее, имеют либо необыкновенно большое, либо необыкновенно малое значения. В отличие от таких физических постоянных постоянная электрического сопротивления имеет вполне "земное" значение.

<sup>11</sup> При вычислении учтено, что

$$\text{кг}^2 \cdot \frac{\text{м}^4}{\text{сек}^4} = \text{Дж}^2, \quad \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$



3. Исходные физические постоянные  $(\varepsilon_0, \mu_0, \gamma, \hbar)$ 

Физические постоянные, сформированные с помощью постоянной Планка, будем называть *планковскими* а их обозначение снабжать индексом  $p$ .

7. Планковская постоянная длины  $l_p$

$$\begin{aligned}(l_p)^2 &= \frac{\hbar \cdot \gamma}{c^3} = \frac{\hbar \cdot \chi \cdot c}{8 \cdot \pi} = \\ &= \frac{1,054 \cdot 10^{-34} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}}{3^3 \cdot 10^{24}} \text{Дж} \cdot \text{сек} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \cdot \frac{\text{сек}^3}{\text{м}^3} = \\ &= 2,6 \cdot 10^{-70} \text{ м}^2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$l_p = 1,61 \cdot 10^{-35} \text{ м}.$$

8. Планковская постоянная времени  $T_p$

$$(T_p)^2 = \frac{(l_p)^2}{c^2} = \frac{\hbar \cdot \gamma}{c^5} = \frac{\hbar \cdot \chi}{8 \cdot \pi \cdot c}.$$

Отсюда

$$T_p = \frac{1,61 \cdot 10^{-35}}{3 \cdot 10^8} \text{ сек} = 5,37 \cdot 10^{-42} \text{ сек}.$$

8. Планковская постоянная электрического заряда  $Q_p$

$$\begin{aligned}(Q_p)^2 &= I^2 \cdot (T_p)^2 = \frac{1}{2 \cdot \chi \cdot \mu_0} \cdot \frac{\hbar \cdot \gamma}{c^5} = \frac{\hbar}{16 \cdot \pi \cdot c \cdot \mu_0} = \\ &= \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{16 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} \text{Дж} \cdot \text{сек} \frac{\text{сек}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{В} \cdot \text{сек}} = \\ &= 0,557 \cdot 10^{-30} \text{ Кл}^2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$Q_p = 0,75 \cdot 10^{-15} \text{ Кл}.$$

8. Планковская постоянная магнитного потока  $\Phi_p$

$$(\Phi_p)^2 = U^2 \cdot (T_p)^2 = \frac{1}{2 \cdot \chi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\hbar \cdot \gamma}{c^5} = \frac{\hbar}{16 \cdot \pi \cdot c \cdot \varepsilon_0}.$$

Для постоянных  $\Phi_p$  и  $Q_p$  выполняется соотношение

$$(\Phi_p)^2 \cdot (Q_p)^2 = \frac{\hbar^2}{(16 \cdot \pi)^2 \cdot c^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu_0} = \frac{\hbar^2}{(16 \cdot \pi)^2}.$$

Отсюда

$$\Phi_p = \frac{\hbar}{16 \cdot \pi \cdot Q_p}.$$

9. Планковская постоянная емкости  $C_p$

$$(C_p)^2 = \frac{(Q_p)^2}{U^2} = \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \cdot \frac{\hbar \cdot \gamma}{c^5} = \frac{(T_p)^2}{R^2}.$$

9. Планковская постоянная индуктивности  $L_p$

$$(L_p)^2 = \frac{(\Phi_p)^2}{I^2} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\hbar \cdot \gamma}{c^5} = (T_p)^2 \cdot R^2.$$

Для постоянных  $C_p$  и  $L_p$  выполняется соотношение

$$C_p \cdot L_p = (T_p)^2.$$

## 4. Исходные физические постоянные

$(\varepsilon_0, \mu_0, \gamma, \hbar, e)$

10. Постоянная времени  $T$

Постоянная времени  $T$  определяется из условия

$$e \cdot U \cdot T = \hbar.$$

Отсюда

$$T^2 = \frac{\hbar^2}{e^2 \cdot U^2} = \frac{\hbar^2}{e^2} \cdot 2 \cdot \chi \cdot \varepsilon_0.$$

Сравнивая это выражение с  $(T_p)^2$ , получим

$$\begin{aligned}\frac{(T_p)^2}{T^2} &= \frac{\hbar \cdot \gamma}{c^5} \cdot \frac{e^2}{\hbar^2 \cdot 2 \cdot \chi \varepsilon_0} = \frac{\gamma \cdot e^2}{c^5 \cdot \hbar} \cdot \frac{c^4}{2 \cdot 8 \cdot \pi \cdot \gamma} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} = \\ &= \left( \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar \cdot c} \right) \frac{1}{4} = \frac{\alpha}{4}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$T^2 = \frac{4}{\alpha} (T_p)^2.$$

11. Постоянная длины  $L_0$

$$(L_0)^2 = T^2 \cdot c^2.$$

Так как  $(l_p)^2 = (T_p)^2 \cdot c^2$ , то имеем

$$(L_0)^2 = \frac{4}{\alpha} (l_p)^2.$$

12. Постоянная электрического заряда  $Q$

$$\begin{aligned}Q^2 &= I^2 \cdot T^2 = I^2 \cdot (T_p)^2 \frac{4}{\alpha} = (Q_p)^2 \frac{4}{\alpha} = \\ &= \frac{\hbar}{16 \cdot \pi \cdot \mu_0} \cdot 4 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar \cdot c}{e^2} = \frac{\hbar^2}{e^2} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} = \frac{\hbar^2 \cdot (\varepsilon_0)^2 \cdot c^2}{e^2}.\end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение, которое мы используем далее

$$\frac{Q \cdot e}{\varepsilon_0} = \hbar \cdot c.$$

13. Магнитный монополю  $g_0$

Согласно Дираку минимальное значение магнитного монополя равно

$$g_0 = \frac{\hbar \cdot c}{2 \cdot e}.$$

Используя вышеприведенное соотношение, получим

$$g_0 = \frac{Q}{2 \cdot \varepsilon_0}.$$

14. Постоянная магнитного потока  $\Phi_0$

Постоянная магнитного потока  $\Phi_0$  определяется соотношением

$$\Phi_0 = \frac{\hbar}{e}.$$

Сравнивая поток  $\Phi_0$  с планковской постоянной магнитного потока  $\Phi_p$ , получим

$$\frac{(\Phi_p)^2}{(\Phi_0)^2} = \frac{\hbar}{16 \cdot \pi \cdot c \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar^2} = \frac{\alpha}{4}.$$

Отсюда

$$(\Phi_0)^2 = \frac{4}{\alpha} (\Phi_p)^2.$$

### 5. Замечания относительно физических постоянных

Физические постоянные – это доступный нам след от физического мира, составляющего *фундамент* реальности, в которой мы живем. Физические постоянные свидетельствуют о необычности, загадочности и мощи указанного фундамента. Единственный способ проникновения в структуру указанного фундамента состоит в поиске понятийной и математической гармонии связей между реальностью, в которой мы живем, и указанным фундаментом.

## IX. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Пятимерная геометрия Калуцы – это частный случай геометрии Римана, построенной на кинематической алгебре в калибровочном поле.
- Масса – это характеристика энергетического пакета, движущегося в четырехмерном пространстве-времени. Заряд – это характеристика энергетического пакета, движущегося (вращающегося) вдоль пятой координаты.
- Пятимерная теория корректирует уравнения Максвелла. Уравнения электромагнитного поля приобретают вид

$$F^{li}{}_{;l} + \chi 2T^{ip} A_p = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i.$$

- Пятимерная теория корректирует условия калибровочной инвариантности уравнений физики. Калибровочные преобразования принимают

вид

$$\begin{aligned} A_i &= A'_i + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \\ dx^0 &= dx'^0 - \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m, \\ j^i &= j'^i + \mu c^2 k \frac{df}{ds} \frac{dx^i}{dt}, \\ j^0 &= j'^0 + \mu c^2 k \frac{df}{ds} \frac{dx^0}{dt}. \end{aligned}$$

- Отказ от усиленного условия цилиндричности приводит к необходимости введения нового поля –  $G$ -поля и нового взаимодействия между заряженными частицами.

## X. ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ГЕОМЕТРИЯ ПЯТИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

### 1. Метрический тензор

Метрический тензор  $\bar{g}_{IK}$  содержит следующие компоненты:

$$\bar{g}_{ik} = g_{ik} - A_i A_k, \quad \bar{g}_{0k} = -A_k, \quad \bar{g}_{00} = -1. \quad (108)$$

### 2. Обратный метрический тензор

Обратный метрический тензор  $\bar{g}^{IK}$  содержит следующие компоненты:

$$\bar{g}^{ik} = g^{ik}, \quad \bar{g}^{0k} = -A^k, \quad \bar{g}^{00} = -1 + A_i A^i. \quad (109)$$

Легко проверить, что

$$\bar{g}_{IM} \cdot \bar{g}^{MK} = \delta^K_I.$$

### 3. Коэффициенты связности

*Символы Кристоффеля первого рода*

$$\bar{\Gamma}_{I,KL} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{IK,L} + \bar{g}_{LI,K} - \bar{g}_{KL,I}).$$

Компоненты этих коэффициентов принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{0,00} &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{00,0} + \bar{g}_{00,0} - \bar{g}_{00,0}) = 0, \\ \bar{\Gamma}_{i,00} &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{i0,0} + \bar{g}_{0i,0} - \bar{g}_{00,i}) = 0, \\ \bar{\Gamma}_{0,0l} &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{00,l} + \bar{g}_{l0,0} - \bar{g}_{0l,0}) = 0, \\ \bar{\Gamma}_{0,k0} &= 0 \end{aligned} \quad (110)$$

вследствие усиленного условия цилиндричности.

следует

Из

$$\bar{\Gamma}_{0,KL} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0K,L} + \bar{g}_{L0,K} - \bar{g}_{KL,0}) = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0K,L} + \bar{g}_{L0,K})$$

$$\bar{\Gamma}_{i,k0} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0i,k} - \bar{g}_{k0,i}) = \frac{1}{2}(-A_{i,k} + A_{k,i}) = -F_{ik}.$$

следует

Здесь введено обозначение<sup>12</sup>

$$\bar{\Gamma}_{0,kl} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0k,l} + \bar{g}_{l0,k}) = \frac{1}{2}(-A_{k,l} - A_{l,k}) = -\psi_{kl}.$$

$$F_{ik} = \frac{1}{2}(A_{i,k} - A_{k,i}).$$

Здесь введено обозначение

$$\psi_{kl} = \frac{1}{2}(A_{k,l} + A_{l,k}).$$

Аналогично

$$\bar{\Gamma}_{i,0l} = \frac{1}{2}(-A_{i,l} + A_{l,i}) = -F_{il}.$$

Из

$$\bar{\Gamma}_{I,K0} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{IK,0} + \bar{g}_{0I,K} - \bar{g}_{K0,I}) = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0I,K} - \bar{g}_{K0,I})$$

И, наконец,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{i,kl} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{ik,l} + \bar{g}_{li,k} - \bar{g}_{kl,i}) = \frac{1}{2}((g_{ik} - A_i A_k)_l + (g_{li} - A_l A_i)_k - (g_{kl} - A_k A_l)_i) = \\ &= \Gamma_{i,kl} - \frac{1}{2}((A_i A_k)_l + (A_l A_i)_k - (A_k A_l)_i) = \Gamma_{i,kl} - A_i \psi_{kl} + A_k F_{li} - A_l F_{ik}. \end{aligned} \quad (111)$$

#### Символы Кристоффеля второго рода

Символы Кристоффеля второго рода вычисляются так:

$$\bar{\Gamma}_{KL}^I = \bar{g}^{IM} \cdot \bar{\Gamma}_{M,KL} = \bar{g}^{Im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,KL} + \bar{g}^{I0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,KL}.$$

Отсюда с учетом (110) следует

$$\bar{\Gamma}_{00}^0 = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,00} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,00} = 0.$$

$$\bar{\Gamma}_{00}^i = \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,00} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,00} = 0.$$

$$\bar{\Gamma}_{k0}^0 = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,k0} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,k0} = A^m F_{mk}.$$

Также

$$\bar{\Gamma}_{0l}^0 = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,0l} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,0l} = A^m F_{ml}.$$

$$\bar{\Gamma}_{kl}^0 = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,kl} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,kl} = -A_m \Gamma_{kl}^m - A_k F_{lm} A^m - A_l F_{km} A^m + \psi_{kl}. \quad (112)$$

$$\bar{\Gamma}_{0l}^i = \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,0l} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,0l} = -F^i_l.$$

В частном случае

$$\bar{\Gamma}_{0l}^l = 0.$$

$$\bar{\Gamma}_{kl}^i = \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,kl} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,kl} = \Gamma_{kl}^i + A_k F_l^i + A_l F_k^i.$$

В частном случае

$$\bar{\Gamma}_{kl}^l = \bar{g}^{lm} \cdot \bar{\Gamma}_{m,kl} + \bar{g}^{l0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,kl} = \Gamma_{kl}^l + F_k^l A_l.$$

<sup>12</sup> Заметим, что, если коэффициенты  $A_i$  рассматривать как электромагнитные потенциалы, то введенный тензор  $F_{ik}$  связан с тензором электромагнитного поля (ТЭП) следующим соотношением:

$$F_{ik} = -\frac{\text{ТЭП}}{2}.$$

## 4. Тензор Риччи

Тензор Риччи. Оба индекса опущены

В этом случае тензор Риччи вычисляется так

$$\bar{R}_{IK} = \bar{\Gamma}_{IK,L}^L - \bar{\Gamma}_{IL,K}^L + \bar{\Gamma}_{IK}^L \bar{\Gamma}_{LM}^M - \bar{\Gamma}_{IL}^M \bar{\Gamma}_{KM}^L.$$

Отсюда для компонент тензора имеем

Компонента  $\bar{R}_{00}$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{00} &= \bar{\Gamma}_{00,L}^L - \bar{\Gamma}_{0L,0}^L + \bar{\Gamma}_{00}^L \bar{\Gamma}_{LM}^M - \bar{\Gamma}_{0L}^M \bar{\Gamma}_{0M}^L = \\ &= \bar{\Gamma}_{00,l}^l - \bar{\Gamma}_{0l,0}^l + \bar{\Gamma}_{00}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m - \bar{\Gamma}_{0l}^m \bar{\Gamma}_{0m}^l + \bar{\Gamma}_{00,0}^0 - \bar{\Gamma}_{00,0}^0 + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{0M}^M - \bar{\Gamma}_{00}^M \bar{\Gamma}_{0M}^0 = \\ &= \bar{\Gamma}_{00,l}^l - \bar{\Gamma}_{0l,0}^l + \bar{\Gamma}_{00}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m - \bar{\Gamma}_{0l}^m \bar{\Gamma}_{0m}^l + \bar{\Gamma}_{00,0}^0 - \bar{\Gamma}_{00,0}^0 + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{0m}^m - \bar{\Gamma}_{00}^m \bar{\Gamma}_{0m}^0 + \bar{\Gamma}_{00}^l \bar{\Gamma}_{l0}^0 - \bar{\Gamma}_{0l}^0 \bar{\Gamma}_{00}^l + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0 - \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0. \end{aligned} \quad (113)$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим<sup>13</sup>

$$\bar{R}_{00} = -\bar{\Gamma}_{0l}^m \bar{\Gamma}_{0m}^l = -F^m_l F^l_m.$$

Компонента  $\bar{R}_{i0}$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{i0} &= \bar{\Gamma}_{i0,L}^L - \bar{\Gamma}_{iL,0}^L + \bar{\Gamma}_{i0}^L \bar{\Gamma}_{LM}^M - \bar{\Gamma}_{iL}^M \bar{\Gamma}_{0M}^L = \\ &= \bar{\Gamma}_{i0,l}^l - \bar{\Gamma}_{il,0}^l + \bar{\Gamma}_{i0}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m - \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\Gamma}_{0m}^l + \bar{\Gamma}_{i0,0}^0 - \bar{\Gamma}_{i0,0}^0 + \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{0M}^M - \bar{\Gamma}_{i0}^M \bar{\Gamma}_{0M}^0 = \\ &= \bar{\Gamma}_{i0,l}^l - \bar{\Gamma}_{il,0}^l + \bar{\Gamma}_{i0}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m - \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\Gamma}_{0m}^l + \bar{\Gamma}_{i0,0}^0 - \bar{\Gamma}_{i0,0}^0 + \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{0m}^m - \bar{\Gamma}_{i0}^m \bar{\Gamma}_{0m}^0 + \bar{\Gamma}_{i0}^l \bar{\Gamma}_{l0}^0 - \bar{\Gamma}_{il}^0 \bar{\Gamma}_{00}^l + \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0 - \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0. \end{aligned} \quad (114)$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим

$$\begin{aligned} \bar{R}_{i0} &= \bar{\Gamma}_{i0,l}^l + \bar{\Gamma}_{i0}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m - \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\Gamma}_{0m}^l = \\ &= -F^l_{i,l} + (-F^l_i)(\Gamma^m_{lm} + A_m F_l^m) - (\Gamma^m_{il} + A_i F_l^m + A_l F_i^m) \cdot (-F^l_m) = -F^l_{i;l} + A_i F_l^m F^l_m. \end{aligned} \quad (115)$$

Компонента  $\bar{R}_{ik}$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ik} &= \bar{\Gamma}_{ik,L}^L - \bar{\Gamma}_{iL,k}^L + \bar{\Gamma}_{ik}^L \bar{\Gamma}_{LM}^M - \bar{\Gamma}_{iL}^M \bar{\Gamma}_{kM}^L = \\ &= \bar{\Gamma}_{ik,l}^l - \bar{\Gamma}_{il,k}^l + \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m - \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\Gamma}_{km}^l + \bar{\Gamma}_{ik,0}^0 - \bar{\Gamma}_{i0,k}^0 + \bar{\Gamma}_{ik}^0 \bar{\Gamma}_{0M}^M - \bar{\Gamma}_{i0}^M \bar{\Gamma}_{kM}^0 = \\ &= \bar{\Gamma}_{ik,l}^l - \bar{\Gamma}_{il,k}^l + \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m - \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\Gamma}_{km}^l + \bar{\Gamma}_{ik,0}^0 - \bar{\Gamma}_{i0,k}^0 + \bar{\Gamma}_{ik}^0 \bar{\Gamma}_{0m}^m - \bar{\Gamma}_{i0}^m \bar{\Gamma}_{km}^0 + \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{l0}^0 - \bar{\Gamma}_{il}^0 \bar{\Gamma}_{k0}^l + \bar{\Gamma}_{ik}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0 - \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{k0}^0. \end{aligned} \quad (116)$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим

$$\bar{R}_{ik} = \bar{\Gamma}_{ik,l}^l - \bar{\Gamma}_{il,k}^l + \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m - \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\Gamma}_{km}^l - \bar{\Gamma}_{i0,k}^0 - \bar{\Gamma}_{i0}^m \bar{\Gamma}_{km}^0 + \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{l0}^0 - \bar{\Gamma}_{il}^0 \bar{\Gamma}_{k0}^l - \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{k0}^0. \quad (117)$$

Вычислим каждое из слагаемых в отдельности:

<sup>13</sup> Заметим, что если тензор электромагнитного поля обозначить  $F$ , то

$$\bar{R}_{00} = \frac{F^{ml} \cdot F_{ml}}{4}.$$

$$\bar{\Gamma}_{ik,l}^l = \Gamma_{ik,l}^l + (A_i F_k^l + A_k F_i^l)_{,l},$$

$$-\bar{\Gamma}_{il,k}^l = -\Gamma_{il,k}^l - (F_i^l A_l)_{,k},$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m &= (\Gamma_{ik}^l + A_i F_k^l + A_k F_i^l) \cdot (\Gamma_{lm}^m + F_l^m A_m) = \\ &= \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m + (A_i F_k^l + A_k F_i^l) \Gamma_{lm}^m + (\Gamma_{ik}^l + A_i F_k^l + A_k F_i^l) F_l^m A_m, \end{aligned} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} -\bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\Gamma}_{km}^l &= -(\Gamma_{il}^m + A_i F_l^m + A_l F_i^m) \cdot (\Gamma_{km}^l + A_k F_m^l + A_m F_k^l) = \\ &= -(\Gamma_{il}^m + A_i F_l^m + A_l F_i^m) \cdot \Gamma_{km}^l - (\Gamma_{il}^m + A_i F_l^m + A_l F_i^m) \cdot (A_k F_m^l + A_m F_k^l) = \\ &= -\Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - (A_i F_l^m + A_l F_i^m) \cdot \Gamma_{km}^l - \Gamma_{il}^m (A_k F_m^l + A_m F_k^l) - (A_i F_l^m + A_l F_i^m) \cdot (A_k F_m^l + A_m F_k^l), \end{aligned} \quad (119)$$

$$-\bar{\Gamma}_{i0,k}^0 = -(F_{mi} A^m)_{,k},$$

$$-\bar{\Gamma}_{i0}^m \bar{\Gamma}_{km}^0 = -(F^m_i) \cdot (A_l \Gamma_{km}^l + A_k F_{ml} A^l + A_m F_{kl} A^l - \psi_{km}), \quad (120)$$

$$+\bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{l0}^0 = (\Gamma_{ik}^l + A_i F_k^l + A_k F_i^l) \cdot (F_{ml} A^m),$$

$$-\bar{\Gamma}_{il}^0 \bar{\Gamma}_{k0}^l = -(A_m \Gamma_{il}^m + A_i F_{lm} A^m + A_l F_{im} A^m - \psi_{il}) \cdot F^l_k, \quad (121)$$

$$-\bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{k0}^0 = -(F_{mi} A^m) \cdot (F_{nk} A^n).$$

После подстановки и преобразований получим

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ik} &= R_{ik} + (A_i)_{,l} F_k^l + A_i (F_k^l)_{,l} + (A_k)_{,l} F_i^l + A_k (F_i^l)_{,l} - (A_i F_l^m + A_l F_i^m) \cdot (A_k F_m^l + A_m F_k^l) - \\ &- (F^m_i) \cdot (A_k F_{ml} A^l + A_m F_{kl} A^l - \psi_{km}) - (A_i F_{lm} A^m + A_l F_{im} A^m - \psi_{il}) \cdot F^l_k - (F_{mi} A^m) \cdot (F_{nk} A^n). \end{aligned} \quad (122)$$

После дальнейших преобразований с учетом того, что

$$(A_i)_{,l} F_k^l + \psi_{il} F^l_k = F_{il} F_k^l,$$

получим

$$\bar{R}_{ik} = R_{ik} + A_i (F_k^l)_{,l} + A_k (F_i^l)_{,l} + 2F_{il} F_k^l - A_i A_k (F_l^m F_m^l). \quad (123)$$

*Тензор Риччи. Один индекс поднят*

В этом случае тензор Риччи вычисляется так:

$$\bar{R}_K^l = \bar{g}^{lN} \cdot \bar{R}_{NK} = \bar{g}^{ln} \cdot \bar{R}_{nK} + \bar{g}^{l0} \cdot \bar{R}_{0K}.$$

Отсюда для компонент тензора имеем

*Компонента  $\bar{R}_0^0$*

$$\bar{R}_0^0 = \bar{g}^{0n} \cdot \bar{R}_{n0} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{R}_{00} = (-A^n) (-F^l_{n;l} + A_n F_l^m F^l_m) + (-1 + A^n A_n) (-F^m_l F^l_m) = A^n F^l_{n;l} - F^m_l F_m^l. \quad (124)$$

Компонента  $\bar{R}_k^0$

$$\begin{aligned} \bar{R}_k^0 &= \bar{g}^{0n} \cdot \bar{R}_{nk} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{R}_{0k} = (-A^n)(R_{nk} + A_n(F_k^l)_{;l} + A_k(F_n^l)_{;l} + 2F_{nl}F_k^l - A_nA_k(F_l^mF_m^l)) + \\ &+ (-1 + A^nA_n)(-F^l_{k;l} + A_kF_l^mF^l_m) = -A^nR_{nk} - A^nA_k(F_n^l)_{;l} - 2A^nF_{nl}F_k^l + F^l_{k;l} - A_kF_l^mF^l_m. \end{aligned} \quad (125)$$

Компонента  $\bar{R}_0^i$

$$\bar{R}_0^i = \bar{g}^{in} \cdot \bar{R}_{n0} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{R}_{00} = g^{in}(-F^l_{n;l} + A_nF_l^mF^l_m) + (-A^i)(-F^m_lF^l_m) = -F^{li}_{;l}. \quad (126)$$

Компонента  $\bar{R}_k^i$

$$\begin{aligned} \bar{R}_k^i &= \bar{g}^{in} \cdot \bar{R}_{nk} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{R}_{0k} = g^{in}(R_{nk} + A_n(F_k^l)_{;l} + A_k(F_n^l)_{;l} + 2F_{nl}F_k^l - A_nA_k(F_l^mF_m^l)) + \\ &+ (-A^i)(-F^l_{k;l} + A_kF_l^mF^l_m) = R^i_k + A_kF^{il}_{;l} + 2F^i_lF_k^l. \end{aligned} \quad (127)$$

Тензор Риччи. Оба индекса подняты

В этом случае тензор Риччи вычисляется так:

$$\bar{R}^{IK} = \bar{R}_P^I \cdot \bar{g}^{KP}.$$

Отсюда для компонент тензора имеем

Компонента  $\bar{R}^{00}$

$$\begin{aligned} \bar{R}^{00} &= \bar{R}_p^0 \cdot \bar{g}^{0p} + \bar{R}_0^0 \cdot \bar{g}^{00} = (-A^nR_{np} - A^nA_p(F_n^l)_{;l} - 2A^nF_{nl}F_p^l + F^l_{p;l} - A_pF_l^mF^l_m)(-A^p) + \\ &+ (A^nF^l_{n;l} - F^m_lF_m^l)(-1 + A^pA_p) = A^n(R_{np} + 2F_{nl}F_p^l)A^p - 2A^nF^l_{n;l} + F^m_lF_m^l. \end{aligned} \quad (128)$$

Компонента  $\bar{R}^{i0}$

$$\bar{R}^{i0} = \bar{R}_p^i \cdot \bar{g}^{0p} + \bar{R}_0^i \cdot \bar{g}^{00} = (R^i_p + A_pF^{il}_{;l} + 2F^i_lF_p^l)(-A^p) + (-F^{li}_{;l})(-1 + A_pA^p) = -(R^i_p + 2F^i_lF_p^l)A^p + F^{li}_{;l}. \quad (129)$$

Компонента  $\bar{R}^{ik}$

$$\bar{R}^{ik} = \bar{R}_p^i \cdot \bar{g}^{kp} + \bar{R}_0^i \cdot \bar{g}^{k0} = (R^i_p + A_pF^{il}_{;l} + 2F^i_lF_p^l)g^{kp} + (-A^k)(-F^{li}_{;l}) = R^{ik} + 2F^i_lF^{kl}. \quad (130)$$

## 5. Скалярная кривизна

$$\bar{R} = \bar{R}_I^I = \bar{R}_i^i + \bar{R}_0^0 = R^i_i + A_iF^{il}_{;l} + 2F^i_lF_i^l + A^nF^l_{n;l} - F^m_lF_m^l = R + F^i_lF_i^l. \quad (131)$$

## XI. ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ПРИВЕДЕНИЕ К ТЕНЗОРУ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Введенный тензор  $F_{ik}$  имеет вид

$$F_{ik} = \frac{1}{2}(A_{i,k} - A_{k,i}),$$

в то время как тензор электромагнитного поля записывается как  $A_{k,i} - A_{i,k}$ . Поэтому для приведения полученных коэффициентов связности и компонент тензора Риччи к тензору электромагнитного поля необходимо выполнить замену (см. замечание на стр. 424)

$$F_{ik} \rightarrow -\frac{1}{2}F_{ik}.$$

По тем же причинам такое приведение необходимо сопроводить заменой

$$\psi_{ik} \rightarrow \frac{1}{2}\psi_{ik}.$$

## 1. Символы Кристоффеля первого рода

$$\bar{\Gamma}_{0,k0} = 0, \quad \bar{\Gamma}_{0,00} = 0, \quad \bar{\Gamma}_{0,kl} = -\frac{1}{2}\psi_{kl}.$$

Здесь введено обозначение

$$\psi_{kl} = A_{k,l} + A_{l,k}.$$

$$\bar{\Gamma}_{i,k0} = \frac{1}{2}F_{ik}.$$

Аналогично

$$\bar{\Gamma}_{i,0l} = \frac{1}{2}F_{il}.$$

И, наконец,

$$\bar{\Gamma}_{i,kl} = \Gamma_{i,kl} - \frac{1}{2}A_i\psi_{kl} - \frac{1}{2}A_kF_{li} + \frac{1}{2}A_lF_{ik}.$$

## 2. Символы Кристоффеля второго рода

$$\bar{\Gamma}_{00}^0 = 0, \quad \bar{\Gamma}_{00}^i = 0.$$

$$\bar{\Gamma}_{k0}^0 = -\frac{1}{2}A^m F_{mk}. \quad (132)$$

Также

$$\bar{\Gamma}_{0l}^0 = -\frac{1}{2}A^m F_{ml}.$$

$$\bar{\Gamma}_{kl}^0 = -A_m \Gamma_{i,kl}^m + \frac{1}{2}A_k F_{lm} A^m + \frac{1}{2}A_l F_{km} A^m + \frac{1}{2}\psi_{kl}. \quad (133)$$

$$\bar{\Gamma}_{0l}^i = \frac{1}{2}F^i_l. \quad (134)$$

$$\bar{\Gamma}_{kl}^i = \Gamma^i_{kl} - \frac{1}{2}A_k F_l^i - \frac{1}{2}A_l F_k^i. \quad (135)$$

### 3. Тензор Риччи

Тензор Риччи. Оба индекса опущены

$$\bar{R}_{00} = \frac{F^m{}_l F_m{}^l}{4}. \quad (136)$$

$$\bar{R}_{i0} = +\frac{1}{2} F^l{}_{i;l} + A_i \frac{F_l{}^m F_m{}^l}{4}. \quad (137)$$

$$\bar{R}_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} A_i (F_k{}^l)_{;l} - \frac{1}{2} A_k (F_i{}^l)_{;l} + \frac{1}{2} F_{il} F_k{}^l + \frac{1}{4} A_i A_k (F_l{}^m F_m{}^l). \quad (138)$$

Тензор Риччи. Один индекс поднят

$$\bar{R}_0^0 = -\frac{1}{2} A^n F^l{}_{n;l} - \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l. \quad (139)$$

$$\bar{R}_k^0 = -A^n R_{nk} + \frac{1}{2} A^n A_k (F_n{}^l)_{;l} - \frac{1}{2} A^n F_{nl} F_k{}^l - \frac{1}{2} F^l{}_{k;l} - \frac{1}{4} A_k F_l{}^m F_m{}^l. \quad (140)$$

$$\bar{R}_0^i = \frac{1}{2} F^{li}{}_{;l}. \quad (141)$$

$$\bar{R}_k^i = R^i{}_k - \frac{1}{2} A_k F^{il}{}_{;l} + \frac{1}{2} F^i{}_l F_k{}^l. \quad (142)$$

Тензор Риччи. Оба индекса подняты

$$\bar{R}^{00} = A^n (R_{np} + \frac{1}{2} F_{nl} F_p{}^l) A^p + A^n F^l{}_{n;l} + \frac{1}{4} F^m{}_l F_m{}^l. \quad (143)$$

$$\bar{R}^{i0} = -(R^i{}_p + \frac{1}{2} F^i{}_l F_p{}^l) A^p - \frac{1}{2} F^{li}{}_{;l}. \quad (144)$$

$$\bar{R}^{ik} = R^{ik} + \frac{1}{2} F^i{}_l F^{kl}. \quad (145)$$

### 4. Скалярная кривизна

$$\bar{R} = R + \frac{1}{4} F^i{}_l F_i{}^l. \quad (146)$$



**XII. ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ГЕОМЕТРИЯ ПЯТИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА С  $G$ -ПОЛЕМ**

**1. Метрический тензор**

Метрический тензор  $\bar{g}_{IK}$  содержит следующие компоненты:

$$\bar{g}_{ik} = \delta_{ik}, \quad \bar{g}_{0k} = 0, \quad \bar{g}_{00} = -g_{00}. \quad (147)$$

**2. Обратный метрический тензор**

Обратный метрический тензор  $\bar{g}^{IK}$  содержит следующие компоненты:

$$\bar{g}^{ik} = \delta^{ik}, \quad \bar{g}^{0k} = 0, \quad \bar{g}^{00} = -g^{00}. \quad (148)$$

Легко проверить, что

$$\bar{g}_{IM} \cdot \bar{g}^{MK} = \delta^K_I.$$

**3. Коэффициенты связности**

*Символы Кристоффеля первого рода*

$$\bar{\Gamma}_{I,KL} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{IK,L} + \bar{g}_{LI,K} - \bar{g}_{KL,I})$$

Компоненты этих коэффициентов принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{0,00} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{00,0} + \bar{g}_{00,0} - \bar{g}_{00,0}) = -\frac{1}{2}g_{00,0}, \\ \bar{\Gamma}_{i,00} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{i0,0} + \bar{g}_{0i,0} - \bar{g}_{00,i}) = \frac{1}{2}g_{00,i}, \\ \bar{\Gamma}_{0,0l} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{00,l} + \bar{g}_{l0,0} - \bar{g}_{0l,0}) = -\frac{1}{2}g_{00,l}, \\ \bar{\Gamma}_{0,k0} &= -\frac{1}{2}g_{00,k}. \end{aligned} \quad (149)$$

Из

$$\bar{\Gamma}_{0,KL} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0K,L} + \bar{g}_{L0,K} - \bar{g}_{KL,0})$$

следует

$$\bar{\Gamma}_{0,kl} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{0k,l} + \bar{g}_{l0,k} - \bar{g}_{kl,0}) = 0.$$

Из

$$\bar{\Gamma}_{I,K0} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{IK,0} + \bar{g}_{0I,K} - \bar{g}_{K0,I})$$

следует

$$\bar{\Gamma}_{i,k0} = 0.$$

Аналогично

$$\bar{\Gamma}_{i,0l} = 0.$$

И, наконец,

$$\bar{\Gamma}_{i,kl} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ik,l} + \bar{g}_{li,k} - \bar{g}_{kl,i}) = 0.$$

## Символы Кристоффеля второго рода

Символы Кристоффеля второго рода вычисляются так:

$$\bar{\Gamma}_{KL}^I = \bar{g}^{IM} \cdot \bar{\Gamma}_{M,KL} = \bar{g}^{Im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,KL} + \bar{g}^{I0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,KL}.$$

Отсюда с учетом (149) следует

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{00}^0 &= \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,00} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,00} = \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,00} = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,0}. \\ \bar{\Gamma}_{00}^i &= \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,00} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,00} = \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,00} = \frac{1}{2} g_{00}{}^{,i}. \end{aligned} \quad (150)$$

$$\bar{\Gamma}_{k0}^0 = \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,k0} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,k0} = \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,k0} = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,k}.$$

Также

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{0l}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} g_{00,l}, \\ \bar{\Gamma}_{kl}^0 &= \bar{g}^{0m} \cdot \bar{\Gamma}_{m,kl} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{\Gamma}_{0,kl} = 0, \\ \bar{\Gamma}_{0l}^i &= \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,0l} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,0l} = 0, \\ \bar{\Gamma}_{kl}^i &= \bar{g}^{im} \cdot \bar{\Gamma}_{m,kl} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{\Gamma}_{0,kl} = 0, \end{aligned} \quad (151)$$

## 4. Тензор Риччи

Тензор Риччи. Оба индекса опущены

В этом случае тензор Риччи вычисляется так:

$$\bar{R}_{IK} = \bar{\Gamma}_{IK,L}^L - \bar{\Gamma}_{IL,K}^L + \bar{\Gamma}_{IK}^L \bar{\Gamma}_{LM}^M - \bar{\Gamma}_{IL}^M \bar{\Gamma}_{KM}^L.$$

Отсюда для компонент тензора имеем

Компонента  $\bar{R}_{00}$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{00} &= \bar{\Gamma}_{00,L}^L - \bar{\Gamma}_{0L,0}^L + \bar{\Gamma}_{00}^L \bar{\Gamma}_{LM}^M - \bar{\Gamma}_{0L}^M \bar{\Gamma}_{0M}^L = \bar{\Gamma}_{00,l}^l - \bar{\Gamma}_{0l,0}^l + \bar{\Gamma}_{00}^l \bar{\Gamma}_{lM}^M - \bar{\Gamma}_{0l}^M \bar{\Gamma}_{0M}^l + \bar{\Gamma}_{00,0}^0 - \bar{\Gamma}_{00,0}^0 + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{0M}^M - \bar{\Gamma}_{00}^M \bar{\Gamma}_{0M}^0 = \\ &= \bar{\Gamma}_{00,l}^l - \bar{\Gamma}_{0l,0}^l + \bar{\Gamma}_{00}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m - \bar{\Gamma}_{0l}^m \bar{\Gamma}_{0m}^l + \bar{\Gamma}_{00,0}^0 - \bar{\Gamma}_{00,0}^0 + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{0m}^m - \bar{\Gamma}_{00}^m \bar{\Gamma}_{0m}^0 + \bar{\Gamma}_{00}^l \bar{\Gamma}_{l0}^0 - \bar{\Gamma}_{0l}^0 \bar{\Gamma}_{00}^l + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0 - \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0. \end{aligned} \quad (152)$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим

$$\bar{R}_{00} = \bar{\Gamma}_{00,m}^m - \bar{\Gamma}_{00}^m \bar{\Gamma}_{0m}^0 = \frac{1}{2} g_{00}{}^{,m}{}_{,m} - \frac{1}{2} g_{00}{}^{,m} \cdot \frac{1}{2} g^{00} g_{00,m}. \quad (153)$$

Компонента  $\bar{R}_{i0}$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{i0} &= \bar{\Gamma}_{i0,L}^L - \bar{\Gamma}_{iL,0}^L + \bar{\Gamma}_{i0}^L \bar{\Gamma}_{LM}^M - \bar{\Gamma}_{iL}^M \bar{\Gamma}_{0M}^L = \bar{\Gamma}_{i0,l}^l - \bar{\Gamma}_{il,0}^l + \bar{\Gamma}_{i0}^l \bar{\Gamma}_{lM}^M - \bar{\Gamma}_{il}^M \bar{\Gamma}_{0M}^l + \bar{\Gamma}_{i0,0}^0 - \bar{\Gamma}_{i0,0}^0 + \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{0M}^M - \bar{\Gamma}_{i0}^M \bar{\Gamma}_{0M}^0 = \\ &= \bar{\Gamma}_{i0,l}^l - \bar{\Gamma}_{il,0}^l + \bar{\Gamma}_{i0}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m - \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\Gamma}_{0m}^l + \bar{\Gamma}_{i0,0}^0 - \bar{\Gamma}_{i0,0}^0 + \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{0m}^m - \bar{\Gamma}_{i0}^m \bar{\Gamma}_{0m}^0 + \bar{\Gamma}_{i0}^l \bar{\Gamma}_{l0}^0 - \bar{\Gamma}_{il}^0 \bar{\Gamma}_{00}^l + \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0 - \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0. \end{aligned} \quad (154)$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим

$$\bar{R}_{i0} = 0. \quad (155)$$

Компонента  $\bar{R}_{ik}$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ik} &= \bar{\Gamma}_{ik,L}^L - \bar{\Gamma}_{iL,k}^L + \bar{\Gamma}_{ik}^L \bar{\Gamma}_{LM}^M - \bar{\Gamma}_{iL}^M \bar{\Gamma}_{kM}^L = \bar{\Gamma}_{ik,l}^l - \bar{\Gamma}_{il,k}^l + \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{lM}^M - \bar{\Gamma}_{il}^M \bar{\Gamma}_{kM}^l + \bar{\Gamma}_{ik,0}^0 - \bar{\Gamma}_{i0,k}^0 + \bar{\Gamma}_{ik}^0 \bar{\Gamma}_{0M}^M - \bar{\Gamma}_{i0}^M \bar{\Gamma}_{kM}^0 = \\ &= \bar{\Gamma}_{ik,l}^l - \bar{\Gamma}_{il,k}^l + \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{lm}^m - \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\Gamma}_{km}^l + \bar{\Gamma}_{ik,0}^0 - \bar{\Gamma}_{i0,k}^0 + \bar{\Gamma}_{ik}^0 \bar{\Gamma}_{0m}^m - \bar{\Gamma}_{i0}^m \bar{\Gamma}_{km}^0 + \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{l0}^0 - \bar{\Gamma}_{il}^0 \bar{\Gamma}_{k0}^l + \bar{\Gamma}_{ik}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0 - \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{k0}^0.\end{aligned}\quad (156)$$

Используя выведенные символы Кристоффеля, получим

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ik} &= -\bar{\Gamma}_{i0,k}^0 - \bar{\Gamma}_{i0}^0 \bar{\Gamma}_{k0}^0 = -\frac{1}{2}(g^{00} g_{00,i})_{,k} - \frac{1}{2}g^{00} g_{00,i} \frac{1}{2}g^{00} g_{00,k} = \\ &= -\frac{1}{2}g^{00}{}_{,k} g_{00,i} - \frac{1}{2}g^{00} g_{00,i,k} - \frac{1}{2}g^{00} g_{00,i} \frac{1}{2}g^{00} g_{00,k} = -\frac{1}{2}g^{00} g_{00,i,k} + \frac{1}{2}g^{00} g_{00,i} \frac{1}{2}g^{00} g_{00,k}.\end{aligned}\quad (157)$$

Здесь использовано

$$g^{00}{}_{,k} g_{00} + g^{00} g_{00,k} = 0.$$

Тензор Риччи. Один индекс поднят

В этом случае тензор Риччи вычисляется так:

$$\bar{R}_K^I = \bar{g}^{IN} \cdot \bar{R}_{NK} = \bar{g}^{In} \cdot \bar{R}_{nK} + \bar{g}^{I0} \cdot \bar{R}_{0K}.$$

Отсюда для компонент тензора имеем

Компонента  $\bar{R}_0^0$

$$\bar{R}_0^0 = \bar{g}^{0n} \cdot \bar{R}_{n0} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{R}_{00} = \bar{g}^{00} \cdot \bar{R}_{00} = -g^{00} \left( \frac{1}{2} g_{00}{}^{,m}{}_{,m} - \frac{1}{2} g_{00}{}^{,m} \cdot \frac{1}{2} g^{00} g_{00,m} \right).\quad (158)$$

Компонента  $\bar{R}_k^0$

$$\bar{R}_k^0 = \bar{g}^{0n} \cdot \bar{R}_{nk} + \bar{g}^{00} \cdot \bar{R}_{0k} = 0.\quad (159)$$

Компонента  $\bar{R}_0^i$

$$\bar{R}_0^i = \bar{g}^{in} \cdot \bar{R}_{n0} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{R}_{00} = 0.\quad (160)$$

Компонента  $\bar{R}_k^i$

$$\bar{R}_k^i = \bar{g}^{in} \cdot \bar{R}_{nk} + \bar{g}^{i0} \cdot \bar{R}_{0k} = \delta^{in} \cdot \bar{R}_{nk} = -\frac{1}{2}g^{00} g_{00}{}^{,i}{}_{,k} + \frac{1}{2}g^{00} g_{00}{}^{,i} \frac{1}{2}g^{00} g_{00,k}.\quad (161)$$

### ХIII. ПРИЛОЖЕНИЕ 4. СРАВНЕНИЕ СЛАГАЕМЫХ СВЕРТКИ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

На примере электрона покажем, что в свертке тензора энергии-импульса

$$\bar{T} = \mu c^2 + \frac{1}{kc} j^{00} g_{00}$$

второе слагаемое много больше первого, то есть

$$\mu c^2 \ll \frac{1}{kc} \rho^0 \frac{dx^0}{dt} g_{00}. \quad (162)$$

При сравнении слагаемых будем полагать

$$\frac{dx^0}{dt} = c, \quad g_{00} = 1.$$

Для частиц с сосредоточенной массой и зарядом неравенство (162) приобретает вид

$$m c^2 \ll \frac{e}{k}. \quad (163)$$

Учтем, что

$$k = \frac{\sqrt{2G\varepsilon_0}}{c^2}.$$

Тогда неравенство (163) сводится к

$$m \ll \frac{e}{\sqrt{2G\varepsilon_0}}. \quad (164)$$

Здесь

$$G = 4\pi\gamma = 4\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{М}^2}{\text{кг}^2}, \quad \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}}.$$

Для электрона

$$m = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{кг}, \quad e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{Кл}.$$

Подставляя приведенные данные в (164), убеждаемся в том, что число, стоящее слева, меньше правого в  $10^{21}$  раз.

## Глава 5.7 Сильная гравитация и слабый электромагнетизм

### 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Наряду с другими единая теория взаимодействий должна прояснить следующий вопрос. Существует невероятное различие между силами гравитационного взаимодействия и других взаимодействий, в первую очередь электрического взаимодействия. С другой стороны оба взаимодействия, гравитационное и электрическое, подчиняются закону обратных квадратов, что можно расценить, как указание на единство природы гравитации и электромагнетизма. Настоящая Глава посвящена решению указанной проблемы. При этом мы отталкиваемся от уравнений полей внешней и внутренней симметрий, полученных в Разделе IV. Главы 3.2.

#### 1. Уравнения поля внешней симметрии

##### 1.1. Первое уравнение поля внешней симметрии

В соответствии с Разделом VI.1. Главы 3.2. первое уравнение поля внешней симметрии имеет вид (формула (89) Раздела VI.1. Главы 3.2.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^K} \Gamma^{KK_1 K_2} - \Gamma^{KK_1 K_3} \cdot \Gamma^{K_3 K_2 K} &= \\ = \frac{1}{C_2} (T^{K_1 K_2} + C_1 \cdot l^{K_1 I} \cdot l^I_{K_2}). \end{aligned}$$

Это уравнение формулируется по отношению к первой производной от коэффициентов связности поля внешней симметрии  $\Gamma^{KK_1 K_2}$ . Источником поля коэффициентов связности является тензор энергии-импульса  $T^{K_1 K_2}$ .

##### 1.2. Второе уравнение поля внешней симметрии

В соответствии с Разделом VI.2. Главы 3.2. второе уравнение поля внешней симметрии имеет вид (формула (101) Раздела VI.2. Главы 3.2.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^K} R^{KK_2 K_1 K_3} - R^{KK_2 K_1 K_4} \cdot \Gamma^{K_4 K_3 K} &= \\ = \frac{1}{C_3} (m^{K_2 K_1 K_3} + C_2 \cdot \Gamma^{K_2 K_1 K_3}). \end{aligned}$$

Это уравнение формулируется по отношению ко второй производной от коэффициентов связности поля внешней симметрии  $\Gamma^{KK_1 K_2}$  или первой производной от объекта (тензора) кривизны  $R^{KK_2 K_1 K_3}$ . Источником поля объекта (тензора) кривизны является момент  $m^{K_2 K_1 K_3}$ .

### 2. Уравнения поля внутренней симметрии

#### 2.1. Первое уравнение поля внутренней симметрии

В соответствии с Разделом V.1. Главы 3.2. первое уравнение поля внутренней симметрии имеет вид (формула (70) Раздела V.1. Главы 3.2.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^K} A^{KK_1 K_2} - A^{KK_1 K_3} \cdot A^{K_3 K_2 K} &= \\ = \frac{1}{K_2} (Q^{K_1 K_2} + K_1 \cdot L^{K_1 I} \cdot L^I_{K_2}). \end{aligned}$$

Оно формулируется по отношению к первой производной от потенциала поля внутренней симметрии  $A^{KK_1 K_2}$ . Источником поля потенциала является тензор заряда  $Q^{K_1 K_2}$ .

Записанное уравнение соответствует группе и алгебре внутренней симметрии самого общего вида. Его можно переписать, если речь идет о подгруппе и подалгебре. При этом нужно перейти от потенциалов общего вида к потенциалам частного поля и от тензора заряда к заряду частного вида. В этом случае первое уравнение поля внутренней симметрии записывается следующим образом (формула (77) Раздела V.1. Главы 3.2.):

$$\frac{\partial}{\partial x^K} A^K_\alpha - {}_\tau C^\beta_{\gamma\alpha} \cdot A^K_\beta \cdot A^\gamma_K = \frac{1}{K_2} (Q_\alpha + K_1 \cdot L_\alpha).$$

#### 2.2. Второе уравнение поля внутренней симметрии

В соответствии с Разделом V.2. Главы 3.2. второе уравнение поля внутренней симметрии имеет вид (формула (81) Раздела V.2. Главы 3.2.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^K} F^{KK_2 K_1 K_3} - F^{KK_2 K_1 K_4} \cdot A^{K_4 K_3 K} &= \\ = \frac{1}{K_3} (I^{K_2 K_1 K_3} + K_2 \cdot A^{K_2 K_1 K_3}). \end{aligned}$$

Это уравнение формулируется по отношению ко второй производной от потенциала поля внутренней симметрии  $A^{KK_1 K_2}$  или первой производной от объекта (тензора) поля внутренней симметрии  $F^{KK_2 K_1 K_3}$ . Источником поля объекта  $F^{KK_2 K_1 K_3}$  является ток  $I^{K_2 K_1 K_3}$ .

Записанное уравнение соответствует группе и алгебре внутренней симметрии самого общего вида. Его можно переписать, если речь идет о подгруппе и подалгебре. При этом нужно перейти от потенциалов общего вида к потенциалам частного поля, от объекта поля общего вида к объекту поля частного поля и от тока общего вида к току частного вида. В этом случае

второе уравнение поля внутренней симметрии записывается следующим образом (формула (84) Раздела V.2. Главы 3.2.):

$$\frac{\partial}{\partial x^K} F^{KK_2}_\alpha - r C^\beta_{\gamma\alpha} \cdot F^{KK_2}_\beta \cdot A^\gamma_K = \frac{1}{K_3} (I^{K_2}_\alpha + K_2 \cdot A^{K_2}_\alpha).$$

### 3. Сильная гравитация и слабый электромагнетизм

На основании вышесказанного исходим из предположения о том, что поля, как гравитационное, так и электромагнитное, описываются уравнениями двух типов. Уравнения первого типа формулируются по отношению к первой производной от коэффициентов связности гравитационного поля  $\Gamma^i_{kl}$  или потенциалов электромагнитного поля  $A_i$ . Уравнения второго типа формулируются по отношению к второй производной от указанных величин или по отношению к первой производной от тензора кривизны или тензора электромагнитного поля. При этом первому типу уравнений соответствует *слабая* гравитация и *слабый* электромагнетизм, а второму типу уравнений соответствует *сильная* гравитация и *сильный* электромагнетизм. Пользуясь этой терминологией, отметим, что современной физике сильная гравитация и слабый электромагнетизм неизвестны, она оперирует только со слабой гравитацией и сильным электромагнетизмом. Отсюда и возникает столь разительное различие между известными силами гравитационного и электрического взаимодействий. Причина того, что сильная гравитация нам неизвестна, видимо, состоит в том, что в своей практической деятельности мы не сталкиваемся с природным источником сильной гравитации в концентрированном виде. Причина того, что слабый электромагнетизм нам неизвестен, состоит, видимо, в том, что мы не имеем средств для обнаружения столь малых сил на фоне сильного электромагнитного взаимодействия.

### 4. Исходные представления о гравитации и электромагнетизме

Известное нам гравитационное взаимодействие (в нашей терминологии *слабое* гравитационное взаимодействие) описывается уравнением<sup>1</sup>

$$\mu c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) + \mu c \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt} = 0. \quad (1)$$

Коэффициенты связности  $\Gamma^i_{kl}$ , зависящие от источников гравитационного поля, с которыми взаимодействует плотность массы  $\mu$ , определяются уравнением

Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \chi T_{ik}. \quad (2)$$

Здесь

$$\chi = \frac{2G}{c^4},$$

где

$$G = 80 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} - \text{гравитационная постоянная},$$

$c$  – скорость света.

Если гравитационное поле вызвано распределенной плотностью массы, тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{ik} = \mu_1 c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt}, \quad (3)$$

где  $\mu_1$  плотность массы, с которой взаимодействует плотность массы  $\mu$ .

Уравнение движения (1) следует из вариационного принципа

$$\delta S = -\delta \int \left( \mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^i}{dt} \right) \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega = 0 \quad (4)$$

при варьировании координат плотности массы.

Уравнение гравитационного поля (2) следует из вариационного принципа

$$\delta(S_g + S_{mg}) \quad (5)$$

при варьировании метрического тензора. Здесь  $S_g$  – действие гравитационного поля. Для него

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\chi} \int \left( R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega. \quad (6)$$

$S_{mg}$  – действие, ответственное за взаимодействие гравитационного поля и материи. Для него

$$\delta S_{mg} = \frac{1}{2} \int T_{ik} \delta g^{ik} \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega. \quad (7)$$

Известное нам электромагнитное взаимодействие (в нашей терминологии *сильное* электромагнитное взаимодействие) описывается уравнением движения

$$\mu c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) - \frac{1}{c} F^i_{\ k} j^k = 0. \quad (8)$$

Тензор электромагнитного поля  $F^i_{\ k}$ , зависящий от источников электромагнитного поля, с которыми взаимодействует плотность тока  $j^k$ , определяется уравнением Максвелла

$$F^{li}_{\ ,l} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^i. \quad (9)$$

<sup>1</sup> уравнением движения.

Здесь  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А} \cdot \text{сек}}{\text{В} \cdot \text{м}}$  – диэлектрическая постоянная,  $j_1^i$  – плотность тока, с которой взаимодействует плотность тока  $j^i$ .

Уравнение движения (8) следует из вариационного принципа

$$\delta S = -\delta \int \left( \mu c \frac{dx_i}{ds} \frac{dx^i}{dt} + \frac{1}{c} A_i j^i \right) \frac{1}{c} d\Omega = 0 \quad (10)$$

при варьировании координат плотности массы и заряда.

Уравнение электромагнитного поля (9) следует из вариационного принципа

$$\delta S = -\delta \int \left( \frac{1}{c} A_i j_1^i + \varepsilon_0 \frac{F_{ik} F^{ik}}{4} \right) \frac{1}{c} d\Omega = 0 \quad (11)$$

при варьировании потенциалов электромагнитного поля.

Из вариационного принципа следует выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{ik} = \varepsilon_0 \left( -F_{il} F_k^l + g_{ik} \frac{F_{lm} F^{lm}}{4} \right). \quad (12)$$

В настоящей Главе остановимся на сильной гравитации и слабом электромагнетизме. Для нашего исследования ключевой является *аналогия* между электромагнитным и гравитационным взаимодействиями, которую мы сформулируем, исходя из групп электромагнитного и гравитационного взаимодействий.

## II. ГРУППА ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ГРУППА

Согласно существующим представлениям каждому типу взаимодействий соответствует определенная группа – группа взаимодействия. Здесь мы будем говорить о двух типах взаимодействий – гравитационном и электромагнитном – и соответственно о двух группах – гравитационной и электрической.

### 1. Группа гравитации

С нашей точки зрения группы взаимодействий являются подгруппами общей группы линейных преобразований, применяемых к обобщенному пространству действия и обобщенному пространству-времени. Необходимо отметить, что наше представление о группах внешней и внутренней симметрий состоит в том, что необходимо различать левую группу линейных преобразований, когда последующее преобразование (2) умножено на исходное (1) слева

$${}_l \mathbf{l} = \mathbf{l}_2 \circ \mathbf{l}_1,$$

и правую группу линейных преобразований, когда последующее преобразование (2) умножено на исходное (1) справа

$${}_r \mathbf{l} = \mathbf{l}_1 \circ \mathbf{l}_2.$$

При этом внешние симметрии составляют левую группу линейных преобразований и, напротив, внутренние симметрии составляют правую группу линейных преобразований. Такой вывод следует из результатов Раздела V.3. Главы 1.5.

Согласно Эйнштейну гравитация изменяет длину пространственно-временного вектора. Отсюда группа, изменяющая длину вектора, то есть группа гравитации, не может быть ортогональной. Таким образом, группа гравитации – это левая группа неортогональных преобразований  $\mathbf{H}$ . Обозначим матрицу неортогональных преобразований

$$h^i_k,$$

где индексы  $i, k$  принимают значения 1, 2, 3, 4.

### 2. Электрическая группа

Из Раздела VI.2. Главы 1.5. следует, что электрической группой следует считать правую группу поворотов в четырехмерном пространстве-времени. Матрица преобразований электрической группы имеет вид

$$u^i_k,$$

где индексы  $i, k$  принимают значения 1, 2, 3, 4. В частном случае электрическая группа – это группа правых поворотов в плоскости 12. В этом случае матрица преобразования имеет вид <sup>2</sup>

$$u^1_2.$$

Участие электрической группы  $u^i_k$  и гравитационной группы  $h^i_k$  "на равных" в группе линейных преобразований, с нашей точки зрения, есть форма, в которую воплощается мысль о единстве электромагнетизма и гравитации.

<sup>2</sup> Насколько нам известно, только привлекая правое умножение, можно вывести матрицу

$$i \cdot \delta^K_L,$$

ответственную за электромагнитное взаимодействие в теории Дирака. Здесь  $i$  – мнимая единица, индексы  $K, L$  нумеруют компоненты вектора в алгебре Клиффорда. Именно эта матрица представляет базисный вектор

$e_{12}$ .

### III. ГРАВИТАЦИЯ И СЛАБЫЙ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

#### 1. Геометрия гравитации и слабого электромагнетизма

##### 1.1. Коэффициенты связности

Запишем

$$\Gamma_{ikl} = \{ikl\} + [ikl],$$

где

$$\{ikl\} = \Gamma_{\langle ik \rangle l} + \Gamma_{\langle li \rangle k} - \Gamma_{\langle kl \rangle i},$$

$$\Gamma_{\langle ik \rangle l} = \frac{1}{2}(\Gamma_{ikl} + \Gamma_{kil}),$$

и

$$[ikl] = \Gamma_{i[kl]} + \Gamma_{k[li]} - \Gamma_{l[ik]},$$

$$\Gamma_{i[kl]} = \frac{1}{2}(\Gamma_{ikl} - \Gamma_{ilk}).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \{ikl\} + [ikl] &= \frac{1}{2}(\Gamma_{ikl} + \Gamma_{kil} + \Gamma_{lik} + \Gamma_{ilk} - \Gamma_{kli} - \Gamma_{lki}) + \\ &+ \frac{1}{2}(\Gamma_{ikl} - \Gamma_{ilk} + \Gamma_{kli} - \Gamma_{kil} - \Gamma_{lik} + \Gamma_{lki}) = \Gamma_{ikl}. \end{aligned}$$

Далее будем полагать

$$\Gamma_{\langle ik \rangle l} = \frac{1}{2}g_{ik,l}.$$

В результате коэффициенты

$$\{ikl\} = \frac{1}{2}(g_{ik,l} + g_{li,k} - g_{kl,i})$$

представляют собой символы Кристоффеля. Заметим, что

$$\{ikl\} = \{ilk\}.$$

Кроме того, будем полагать

$$\Gamma_{i[kl]} = \frac{1}{2}D_i u_{kl}.$$

Здесь  $D$  – дифференциал в искривленном пространстве (см. Главу 2.2.).

В результате коэффициенты

$$[ikl] = \frac{1}{2}(D_i u_{kl} + D_k u_{li} - D_l u_{ik})$$

представляют собой символы Риччи. Заметим, что

$$[ikl] = -[kil].$$

Наложим ограничение на символы Риччи, полагая, что имеет место условие

$$D^k u_{ik} = 0.$$

Это условие записывается в следующем виде:

$$[{}^k_{ik}] = 0. \quad (13)$$

Сделаем следующие определения. Будем рассматривать символы Кристоффеля как коэффициенты связности *геометрии гравитации*. Или проще – *гравитационные коэффициенты связности*. Для этих коэффициентов введем обозначение

$$\Gamma_{ikl}(h) \equiv \{ikl\}.$$

Будем рассматривать символы Риччи с условием (13) как коэффициенты связности *геометрии электромагнетизма*. Или проще – *электрические коэффициенты связности*. Для этих коэффициентов введем обозначение

$$\Gamma_{ikl}(u) \equiv [ikl].$$

В простейшем случае правых поворотов в плоскости 12 электрические коэффициенты связности приобретают вид

$$\Gamma_{i12}(u) = \frac{1}{2}D_i u_{12}.$$

##### 1.2. Тензор кривизны

Для тензора кривизны имеем

$$R^m{}_{ikl} = \Gamma^m{}_{il,k} - \Gamma^m{}_{ik,l} + \Gamma^m{}_{nk}\Gamma^n{}_{il} - \Gamma^m{}_{nl}\Gamma^n{}_{ik}.$$

Разобьем коэффициенты связности на символы Кристоффеля и символы Риччи

$$\Gamma^m{}_{il} = \{{}^m_{il}\} + [{}^m_{il}]$$

и выделим два крайних случая.

1.

$$u^i{}_k = \delta^i{}_k, \quad [{}^m_{il}] = 0, \quad \Gamma^m{}_{il} = \{{}^m_{il}\}.$$

Этот случай мы свяжем с описанием гравитации. Соответствующий ему тензор кривизны назовем гравитационным

$$R^m{}_{ikl}(h) = \{{}^m_{il}\}_{,k} - \{{}^m_{ik}\}_{,l} + \{{}^m_{nk}\}\{{}^n_{il}\} - \{{}^m_{nl}\}\{{}^n_{ik}\}.$$

2.

$$h^i{}_k = \delta^i{}_k, \quad \{{}^m_{il}\} = 0, \quad \Gamma^m{}_{il} = [{}^m_{il}].$$

Этот случай мы свяжем с описанием слабого электромагнетизма. Соответствующий ему тензор кривизны назовем электрическим

$$R^m{}_{ikl}(u) = [{}^m_{il}]_{,k} - [{}^m_{ik}]_{,l} + [{}^m_{nk}][{}^n_{il}] - [{}^m_{nl}][{}^n_{ik}].$$



1.3. Тензор Риччи

Свертка тензоров кривизны приводит к следующим выражениям для тензора Риччи для случаев гравитации:

$$R_{il}(h) = \{^k_{il}\}_{,k} - \{^k_{ik}\}_{,l} + \{^k_{nk}\} \{^n_{il}\} - \{^k_{nl}\} \{^n_{ik}\}$$

и слабого электромагнетизма:

$$R_{il}(u) = [^k_{il}]_{,k} - [^k_{ik}]_{,l} + [^k_{nk}] [^n_{il}] - [^k_{nl}] [^n_{ik}].$$

С учетом принятого нами условия (13) имеем

$$R_{il}(u) = [^k_{il}]_{,k} - [^k_{nl}] [^n_{ik}].$$

1.4. Скалярная кривизна

Для гравитации:

$$R(h) = g^{il} R_{il}(h) = g^{il} (\{^k_{il}\}_{,k} - \{^k_{ik}\}_{,l} + \{^k_{nk}\} \{^n_{il}\} - \{^k_{nl}\} \{^n_{ik}\}).$$

Вариация скалярной кривизны

$$\delta R(h) = \delta g^{il} R_{il}(h).$$

Для слабого электромагнетизма:

$$R(u) = u^{il} R_{il}(u) = u^{il} ([^k_{il}]_{,k} - [^k_{nl}] [^n_{ik}]).$$

Вариация скалярной кривизны

$$\delta R(u) = \delta u^{il} R_{il}(u) = \delta u^{il} [^k_{il}]_{,k}. \quad (14)$$

2. Аналогия между гравитацией и слабым электромагнетизмом

Вариационному принципу для гравитационного поля (5)

$$\delta(S_g + S_{mg}) = 0$$

поставим в аналогичное соответствие вариационный принцип для слабого электромагнитного поля

$$\delta(S_{we} + S_{mwe}) = 0,$$

где  $S_{we}$  – действие слабого электромагнитного поля, поставленное в соответствие действию гравитационного поля  $S_g$ , а  $S_{mwe}$  – действие, ответственное за взаимодействие слабого электромагнитного поля и материи, поставленное в соответствие действию  $S_{mg}$ .

Сначала используем декларируемое соответствие для определения действия  $S_{we}$ . Исходной для нас является вариация действия гравитационного поля  $\delta S_g$ . Согласно выражения (6) имеем

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\chi} \int \left( R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega. \quad (15)$$

Для удобства дальнейшего изложения перепишем это выражение иначе:

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\chi} \int R_{ik}(h) 2 \delta h^{ik} \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega + R(h) \delta \sqrt{-g} \frac{1}{c} d\Omega. \quad (16)$$

Здесь переписано второе слагаемое и учтено, что<sup>3</sup>

$$\delta g^{ik} = 2 \delta h^{ik}.$$

Воспользовавшись аналогией

$$\delta h^{ik} \sim \delta u^{ik}, \quad R_{ik}(h) \sim R_{ik}(u),$$

получим вариацию действия для слабого электромагнитного поля<sup>4</sup>

$$\delta S_{we} = -\frac{1}{\chi} \int R_{ik}(u) \delta u^{ik} \frac{1}{c} d\Omega. \quad (17)$$

Теперь используем декларируемое соответствие для определения действия  $S_{mwe}$ . Исходной является вариация действия, ответственного за взаимодействие гравитационного поля и материи  $\delta S_{mg}$ . Согласно выражения (7) имеем

$$\delta S_{mg} = \frac{1}{2} \int T_{ik} \delta g^{ik} \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega.$$

Также для удобства дальнейшего изложения перепишем это выражение иначе:

$$\delta S_{mg} = \int T_{ik} \delta h^{ik} \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega.$$

Воспользовавшись аналогией

$$\delta h^{ik} \sim \delta u^{ik},$$

получим вариацию действия, ответственного за взаимодействие слабого электромагнитного поля и материи

$$\delta S_{mwe} = \int Q_{ik} \delta u^{ik} \frac{1}{c} d\Omega. \quad (18)$$

Здесь тензор  $Q_{ik}$  – это электромагнитный аналог тензора энергии-импульса  $T_{ik}$

$$Q_{ik} \sim T_{ik}.$$

Он также имеет размерность

$$[Q_{ik}] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3},$$

но антисимметричен при перестановке индексов:

$$Q_{ik} = -Q_{ki}.$$

<sup>3</sup> Это соотношение обобщает соотношение (57) Раздела VI. Главы 1.5.

<sup>4</sup> При этом учтено, что второе слагаемое в (16) не имеет аналогичного слагаемого в  $\delta S_{we}$ , так как для геометрии электромагнитного взаимодействия  $-g = 1$  и  $\delta \sqrt{-g} = 0$ .

### 3. Уравнения слабого электромагнитного поля

Уравнения слабого электромагнитного поля следуют из вариационного принципа

$$\delta(S_{we} + S_{mwe}) = 0.$$

Подставляя сюда выражения (17) и (18), получим уравнения слабого электромагнитного поля в следующем виде:

$$R_{[ik]}(u) = \chi Q_{ik}.$$

Используя выражение (14), это уравнение можно записать иначе:

$$[{}^l{}_{ik}]_{,l} = \chi Q_{ik}.$$

Представленное уравнение соответствует группе правых поворотов в пространстве-времени. Классическому представлению об электромагнитном взаимодействии соответствует подгруппа правых поворотов в плоскости 12. Для этого случая уравнения слабого электромагнитного поля записываются так:

$$[{}^i{}_{12}]_{,i} = \chi Q_{12}. \quad (19)$$

Постулируем следующее соответствие между электромагнитными коэффициентами связности  $[{}^i{}_{12}]$  и потенциалами электромагнитного поля  $A^i$ :

$$[{}^i{}_{12}] = \frac{k}{r} \cdot A^i, \quad (20)$$

где  $r$  – постоянная, имеющая размерность длины, а коэффициент

$$k = \sqrt{\chi \cdot \varepsilon_0}. \quad (21)$$

Кроме того, постулируем следующее соответствие между компонентой тензора  $Q_{12}$  и плотностью электрического заряда  $\rho$ :

$$Q_{12} = \frac{1}{k} \cdot \rho. \quad (22)$$

Подставляя выражения (20) и (22) в уравнение (19), получим уравнение слабого электромагнитного поля в следующем виде:

$$A^i{}_{,i} = \chi \cdot \frac{r}{k^2} \cdot \rho. \quad (23)$$

После подстановки выражения для  $k$  из соотношения (21), окончательно получим уравнение слабого электромагнитного поля

$$A^i{}_{,i} = \frac{r}{\varepsilon_0} \cdot \rho. \quad (24)$$

Для свободного слабого электромагнитного поля уравнение сводится к калибровке Лоренца

$$A^i{}_{,i} = 0.$$

### 4. Уравнение движения в слабом электромагнитном поле

Уравнение движения в слабом электромагнитном поле следуют из вариационного принципа

$$\delta(S_m + S_{mwe}) = 0.$$

Здесь  $S_m$  – действие распределенной плотности массы

$$S_m = - \int \left( \mu c \frac{dx_i}{ds} \frac{dx^i}{dt} \right) \frac{1}{c} d\Omega, \quad (25)$$

а  $S_{mwe}$  – действие, ответственное за взаимодействие материи со слабым электромагнитным полем. Из предыдущего раздела следует

$$S_{mwe} = \int Q_{12} u^{12} \frac{1}{c} d\Omega.$$

Отсюда вариационный принцип записывается следующим образом

$$-\delta \int \left( \mu c \frac{dx_i}{ds} \frac{dx^i}{dt} - Q_{12} u^{12} \right) \frac{1}{c} d\Omega = 0$$

при варьировании координат плотности массы<sup>5</sup>. В настоящей Главе уравнение движения в слабом электромагнитном поле выведем, пользуясь аналогией между гравитационным и электромагнитным взаимодействием. Для этого перепишем уравнение движения плотности массы в гравитационном поле (1) следующим образом

$$\mu c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) + \Gamma^i{}_{kl}(h) T^{kl} = 0, \quad (26)$$

Здесь  $T^{kl}$  – тензор энергии-импульса, взаимодействующий с гравитационным полем. Пользуясь аналогией

$$\Gamma^i{}_{kl}(h) \sim \Gamma^i{}_{kl}(u), \quad T^{kl} \sim Q^{kl},$$

запишем уравнение движения заряженной плотности массы в слабом электромагнитном поле

$$\mu c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) + \Gamma^i{}_{kl}(u) Q^{kl} = 0$$

или

$$\mu c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) + [{}^i{}_{kl}] Q^{kl} = 0.$$

<sup>5</sup> Заметим, что для вывода уравнения движения вариационный принцип должен быть обобщен на случай произвольного линейного преобразования пространства-времени.

Классическому представлению об электромагнетизме соответствует подгруппа правых поворотов в плоскости 12. Поэтому уравнение движения в слабом электромагнитном поле записывается следующим образом:

$$\mu c \frac{du_i}{dt} + Q^{12} [{}^i_{12}] = 0.$$

Учитывая выражения (20) и (22), получим окончательно

$$\mu c \frac{du^i}{dt} + \frac{\rho}{r} \cdot A^i = 0. \quad (27)$$

### 5. Полное действие для материи и электромагнитного поля

$$\begin{aligned} S = & - \int \left( \mu c \frac{dx_i}{ds} \frac{dx^i}{dt} \right) \frac{1}{c} d\Omega + \int Q_{ik} u^{ik} \frac{1}{c} d\Omega - \\ & - \frac{1}{\chi} \int R_{ik}(u) u^{ik} \frac{1}{c} d\Omega - \\ & - \int \left( \frac{1}{c} A_i j^i + \varepsilon_0 \frac{F_{ik} F^{ik}}{4} \right) \frac{1}{c} d\Omega. \end{aligned}$$

### 6. Полная система уравнений электромагнитного поля

$$A^i{}_{,i} = \frac{r}{\varepsilon_0} \cdot \rho, \quad (28)$$

$$F^{li}{}_{,l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^i. \quad (29)$$

### 7. Уравнения движения частицы в электромагнитном поле

$$\mu c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) + \frac{\rho}{r} \cdot A^i - \frac{1}{c} F^i{}_{,k} j^k = 0. \quad (30)$$

## IV. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И СИЛЬНАЯ ГРАВИТАЦИЯ

### 1. Геометрия электромагнетизма и сильной гравитации

#### 1.1. Коэффициенты связности

В соответствии с формулой (15) Главы 2.2. коэффициенты связности в общем случае могут быть записа-

ны следующим образом:

$$\Gamma^k_{k_1 k_2} = \tilde{l}^k_i \frac{Dl^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}}. \quad (31)$$

Здесь  $l^i_{k_1}$  – матрица линейного преобразования

$$Dy^i = l^i_{k_1} \cdot dx^{k_1},$$

а  $\tilde{l}^k_i$  – матрица, обратная к матрице  $l^i_{k_1}$ , то есть для нее имеет место

$$\tilde{l}^k_i \cdot l^i_{k_1} = \delta^k_{k_1}.$$

Вблизи единицы группы линейных преобразований, то есть при

$$\tilde{l}^k_i = \delta^k_i,$$

коэффициенты связности принимают вид

$$\Gamma^i_{k_1 k_2} = \frac{Dl^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}}.$$

Имея в виду, что матрица линейных преобразований может быть записана в виде произведения

$$l^i_k = h^i_n \cdot u^n_k,$$

где  $h^i_n$  – матрица гравитационной группы, а  $u^n_k$  – матрица электрической группы, далее будем рассматривать два крайних случая.

1.

$$u^n_k = \delta^n_k, \quad \Gamma^i_{nk}(u) = 0, \quad \Gamma^i_{nk}(h) = \frac{Dh^i_n}{\partial x^k}.$$

Этот случай свяжем с описанием сильной гравитации.

2.

$$h^n_k = \delta^n_k, \quad \Gamma^i_{nk}(h) = 0, \quad \Gamma^i_{nk}(u) = \frac{Du^i_n}{\partial x^k}.$$

Этот случай свяжем с описанием электромагнетизма.

Классическое представление об электромагнитном взаимодействии соответствует подгруппе правых поворотов в плоскости 12. Для этого случая электрические коэффициенты связности приобретают вид

$$\Gamma^1_{2k} = \frac{Du^1_2}{\partial x^k}.$$

Подобно выражению (20) постулируем следующее соответствие между электрическими коэффициентами связности и потенциалами электромагнитного поля:

$$\Gamma^1_{2k} = \frac{k}{r} \cdot A_k. \quad (32)$$

## 1.2. Тензор кривизны

Для тензора кривизны имеем

$$R^l{}_{mik} = \Gamma^l{}_{mk,i} - \Gamma^l{}_{mi,k} + \Gamma^l{}_{ni} \cdot \Gamma^n{}_{mk} - \Gamma^l{}_{nk} \cdot \Gamma^n{}_{mi}.$$

В соответствии с разбиением коэффициентов связности, рассмотренном в предыдущем разделе, выделим два крайних случая.

1.

$$u_k^n = \delta_k^n, \quad \Gamma_{nk}^i(u) = 0, \quad \Gamma_{nk}^i(h) = \frac{Dh_n^i}{\partial x^k}.$$

Этот случай свяжем с описанием сильной гравитации. Соответствующий ему тензор кривизны назовем гравитационным:

$$R^l{}_{mik}(h) = (\Gamma^l{}_{mk}(h))_{,i} - (\Gamma^l{}_{mi}(h))_{,k} + \Gamma^l{}_{ni}(h) \cdot \Gamma^n{}_{mk}(h) - \Gamma^l{}_{nk}(h) \cdot \Gamma^n{}_{mi}(h). \quad (33)$$

2.

$$h_k^n = \delta_k^n, \quad \Gamma_{nk}^i(h) = 0, \quad \Gamma_{nk}^i(u) = \frac{Du_n^i}{\partial x^k}.$$

Этот случай свяжем с описанием электромагнетизма. Соответствующий ему тензор кривизны назовем электрическим:

$$R^l{}_{mik}(u) = (\Gamma^l{}_{mk}(u))_{,i} - (\Gamma^l{}_{mi}(u))_{,k} + \Gamma^l{}_{ni}(u) \cdot \Gamma^n{}_{mk}(u) - \Gamma^l{}_{nk}(u) \cdot \Gamma^n{}_{mi}(u).$$

Классическое представление об электромагнитном взаимодействии соответствует подгруппе правых поворотов в плоскости 12. Для этого случая электрический тензор кривизны приобретает вид

$$R^1{}_{2ik}(u) = (\Gamma^1{}_{2k}(u))_{,i} - (\Gamma^1{}_{2i}(u))_{,k} + \Gamma^1{}_{ni}(u) \cdot \Gamma^n{}_{2k}(u) - \Gamma^1{}_{nk}(u) \cdot \Gamma^n{}_{2i}(u)$$

или

$$R^1{}_{2ik}(u) = \frac{\partial \Gamma^1{}_{2k}(u)}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^1{}_{2i}(u)}{\partial x^k}.$$

Отсюда, воспользовавшись соответствием между электрическими коэффициентами связности и потенциалами электромагнитного поля (32), получим соответствие между электрическим тензором кривизны и тензором электромагнитного поля

$$R^1{}_{2ik}(u) = \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{k}{r} \cdot F_{ik}. \quad (34)$$

Здесь  $F_{ik}$  – тензор электромагнитного поля.

## 2. Аналогия между электромагнетизмом и сильной гравитацией

Вариационному принципу для электромагнитного поля

$$\delta(S_e + S_{me}) = 0$$

поставим в аналогичное соответствие вариационный принцип для сильного гравитационного поля

$$\delta(S_{sg} + S_{msg}) = 0,$$

где  $S_{sg}$  – действие сильного гравитационного поля, поставленное в соответствие действию электромагнитного поля  $S_e$ , а  $S_{msg}$  – действие, ответственное за взаимодействие сильного гравитационного поля и материи, поставленное в соответствие действию  $S_{me}$ .

Сначала используем декларируемое соответствие для определения действия  $S_{sg}$ . Исходной является вариация действия электромагнитного поля  $\delta S_e$ . Согласно выражению (11) имеем

$$S_e = - \int \varepsilon_0 \frac{F_{ik} F^{ik}}{4} \frac{1}{c} d\Omega. \quad (35)$$

Воспользуемся соотношением

$$F_{ik} = \frac{r}{k} \cdot R^1{}_{2ik}(u),$$

вытекающим из выражения (34), и перепишем действие (35) по отношению к электрическому тензору кривизны:

$$S_e = - \int \varepsilon_0 \frac{r^2}{k^2} \frac{R^1{}_{2ik} R_1{}^{2ik}}{4} \frac{1}{c} d\Omega. \quad (36)$$

Здесь учтем выражение (21) для  $k$ . Получим

$$S_e = - \frac{r^2}{\chi} \int \frac{R^1{}_{2ik} R_1{}^{2ik}}{4} \frac{1}{c} d\Omega. \quad (37)$$

Воспользуемся аналогией между электрическими и гравитационными величинами и, в частности,

$$R^1{}_{2ik}(u) \sim R^l{}_{mik}(h).$$

Получим действие для сильного гравитационного поля

$$S_{sg} = - \frac{r^2}{\chi} \int \frac{R^l{}_{mik}(h) R_l{}^{mik}(h)}{4} \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega. \quad (38)$$

Теперь используем декларируемое соответствие для определения действия  $S_{msg}$ . Исходным является действие, ответственное за взаимодействие электромагнитного поля и материи  $S_{me}$ . Согласно выражению (11) имеем

$$S_{me} = - \int \frac{1}{c} A_i j^i \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega. \quad (39)$$

Далее воспользуемся соотношением

$$A_i = \frac{r}{k} \cdot \Gamma^1_{2i}(u), \quad (40)$$

вытекающим из выражения (32), и аналогией между электрическими и гравитационными величинами и, в частности,

$$\Gamma^1_{2i}(u) \sim \Gamma^l_{mi}(h).$$

В результате действию  $S_{me}$  поставим а соответствие действие

$$S_{msg} = - \int \Gamma^l_{mi}(h) \cdot M_l^{mi}(h) \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega. \quad (41)$$

Здесь  $M_l^{mi}(h)$  – плотность тензора момента. Она имеет размерность

$$[M_l^{mi}(h)] = \frac{Дж}{М^2}.$$

Иначе говоря, постулируем следующее аналогичное соответствие:

$$\frac{1}{c} \frac{r}{k} \cdot \Gamma^1_{2i}(u) j^i \sim \Gamma^l_{mi}(h) \cdot M_l^{mi}(h)$$

или

$$j^i \sim \frac{c \cdot k}{r} M_l^{mi}(h).$$

### 3. Уравнения сильного гравитационного поля

На основании аналогии между электромагнетизмом и сильной гравитацией, рассмотренной в предыдущем разделе, действие, позволяющее найти уравнения поля сильной гравитации, имеет вид

$$S = S_{msg} + S_{sg} = - \int \left[ \Gamma^l_{mi}(h) M_l^{mi}(h) + \frac{r^2}{\chi} \frac{R^l_{mik}(h) R_l^{mik}(h)}{4} \right] \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega$$

Уравнения поля сильной гравитации следуют из вариационного принципа

$$\delta S = 0$$

при варьировании коэффициентов связности. Таким образом,

$$\delta S = - \int \left[ \delta \Gamma^l_{mi}(h) \cdot M_l^{mi}(h) + \frac{r^2}{\chi} \frac{\delta R^l_{mik}(h) R_l^{mik}(h)}{2} \right] \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega.$$

При варьировании второго слагаемого в выражении для действия учтено, что

$$R^l_{mik}(h) \delta R_l^{mik}(h) = \delta R^l_{mik}(h) R_l^{mik}(h).$$

Используя выражение для тензора кривизны (33), вычислим вариацию тензора кривизны

$$\begin{aligned} \delta R^l_{mik} &= \frac{\partial \delta \Gamma^l_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta \Gamma^l_{mi}}{\partial x^k} + \\ &+ \delta \Gamma^l_{ni} \cdot \Gamma^n_{mk} + \Gamma^l_{ni} \cdot \delta \Gamma^n_{mk} - \\ &- \delta \Gamma^l_{nk} \cdot \Gamma^n_{mi} - \Gamma^l_{nk} \cdot \delta \Gamma^n_{mi}. \end{aligned}$$

Используя эту вариацию, запишем выражение  $\delta R^l_{mik}(h) R_l^{mik}(h)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta R^l_{mik} R_l^{mik} &= \\ &= \left( \frac{\partial(\delta \Gamma^l_{mk})}{\partial x^i} + \delta \Gamma^l_{ni} \cdot \Gamma^n_{mk} + \Gamma^l_{ni} \cdot \delta \Gamma^n_{mk} \right) R_l^{mik} - \\ &- \left( \frac{\partial(\delta \Gamma^l_{mi})}{\partial x^k} + \delta \Gamma^l_{nk} \cdot \Gamma^n_{mi} + \Gamma^l_{nk} \cdot \delta \Gamma^n_{mi} \right) R_l^{mik}. \end{aligned}$$

В первом слагаемом в правой части поменяем местами индексы  $i$  и  $k$ , и учтем, что

$$R_l^{mki} = -R_l^{mik}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \delta R^l_{mik} R_l^{mik} &= \\ &= -2 \left( \frac{\partial(\delta \Gamma^l_{mi})}{\partial x^k} + \delta \Gamma^l_{nk} \cdot \Gamma^n_{mi} + \Gamma^l_{nk} \cdot \delta \Gamma^n_{mi} \right) R_l^{mik}. \end{aligned}$$

Используя это выражение, перепишем вариацию действия следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int \left[ \delta \Gamma^l_{mi}(h) \cdot M_l^{mi}(h) - \frac{r^2}{\chi} \left( \frac{\partial(\delta \Gamma^l_{mi})}{\partial x^k} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \delta \Gamma^l_{nk} \cdot \Gamma^n_{mi} + \Gamma^l_{nk} \cdot \delta \Gamma^n_{mi} \right) R_l^{mik} \right] \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega. \end{aligned}$$

Преобразуем второе слагаемое подинтегрального выражения в два этапа.

1. Сначала рассмотрим следующую часть этого слагаемого:

$$\frac{\partial(\delta \Gamma^l_{mi})}{\partial x^k} R_l^{mik} \sqrt{-g}.$$

Используя дифференцирование по частям, запишем ее следующим образом:

$$\frac{\partial(\delta \Gamma^l_{mi} R_l^{mik} \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{\partial(R_l^{mik} \sqrt{-g})}{\partial x^k} \delta \Gamma^l_{mi}.$$

В соответствии с теоремой Гаусса интегрирование первого слагаемого в этом выражении сводится к интегрированию по гиперповерхности, ограничивающей 4-объем  $\Omega$ . Как обычно, полагается, что на геометрической граничной поверхности поле отсутствует, а временных границах поле не меняется, то есть вариация коэффициентов связности равна нулю. Поэтому

вклад первого слагаемого в вариацию действия отсутствует и поэтому далее будем рассматривать только второе слагаемое в этом выражении

$$-\frac{\partial(R_l^{mik}\sqrt{-g})}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{mi}.$$

В нем выполним необходимое дифференцирование

$$-\frac{\partial R_l^{mik}}{\partial x^k}\sqrt{-g}\delta\Gamma^l_{mi} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}R_l^{mik}\sqrt{-g}\delta\Gamma^l_{mi}$$

и учтем, что

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k} = \Gamma^n_{kn}.$$

В результате рассматриваемая часть второго слагаемого подинтегрального выражения приобретает вид

$$-(R_l^{mik}_{;k} + \Gamma^k_{nk}R_l^{min})\delta\Gamma^l_{mi}\sqrt{-g}. \quad (42)$$

2. Теперь рассмотрим другую часть этого слагаемого

$$(\delta\Gamma^l_{nk} \cdot \Gamma^n_{mi}R_l^{mik} + \Gamma^l_{nk} \cdot \delta\Gamma^n_{mi}R_l^{mik})\sqrt{-g}.$$

После переобозначения индексов получим

$$-(-\Gamma^n_{lk}R_n^{mik} + \Gamma^m_{nk}R_l^{nik})\delta\Gamma^l_{mi}\sqrt{-g}. \quad (43)$$

Объединяя обе части (42) и (43) слагаемого, получим<sup>6</sup>

$$-(R_l^{mik}_{;k} - \Gamma^n_{lk}R_n^{mik} + \Gamma^m_{nk}R_l^{nik} + \Gamma^i_{nk}R_l^{mnk} + \Gamma^k_{nk}R_l^{min})\delta\Gamma^l_{mi}\sqrt{-g}$$

или

$$-R_l^{mik}_{;k}\delta\Gamma^l_{mi}\sqrt{-g}.$$

После подстановки этого выражения в вариацию действия, получим вариационный принцип в следующем виде:

$$\delta S = -\int \left( M_l^{mi} + \frac{r^2}{\chi} R_l^{mik}_{;k} \right) \delta\Gamma^l_{mi} \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega = 0.$$

Отсюда следует уравнение сильного гравитационного поля

$$R_l^{mik}_{;k} = -\frac{\chi}{r^2} \cdot M_l^{mi}. \quad (44)$$

<sup>6</sup> Здесь учтено, что

$$\Gamma^i_{nk}R_l^{mnk} = 0,$$

так как коэффициенты связности симметричны по индексам  $n$  и  $k$ , а тензор кривизны антисимметричен по этим индексам.

#### 4. Замечание относительно постоянной $r$

Перепишем уравнения слабого электромагнитного поля и сильного гравитационного поля

$$A^i_{;i} = \frac{r}{\varepsilon_0} \cdot \rho, \\ R_l^{mik}_{;k} = -\frac{\chi}{r^2} \cdot M_l^{mi}.$$

Из них видно, что чем меньше постоянная  $r$ , тем слабее слабый электромагнетизм и тем сильнее сильная гравитация.

#### 5. Тензор энергии-импульса гравитационного поля

Аналогия между электромагнитным полем и полем сильной гравитации позволяет записать выражение для тензора энергии-импульса гравитационного поля, аналогичное выражению для тензора энергии-импульса электромагнитного поля (12). Напомним, что для действия физической системы, записанного в виде

$$S = \int \Lambda \frac{\sqrt{-g}}{c} d\Omega,$$

тензор энергии-импульса в частном случае записывается следующим образом:

$$T_{ik} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{ik}} + \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} \Lambda.$$

Если учесть, что

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{ik},$$

то имеем<sup>7</sup>

$$T_{ik} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{ik}} - g_{ik} \Lambda.$$

Для поля сильной гравитации имеем

$$\Lambda = -\frac{r^2}{\chi} \frac{R_{lmik} R_{pstr} g^{lp} g^{ms} g^{it} g^{kr}}{4}.$$

Отсюда получим выражение для тензора энергии-импульса гравитационного поля<sup>8</sup>

$$T_{ik} = \frac{r^2}{\chi} \left( -2R_{ilmn} R_k^{lmn} + g_{ik} \frac{R^{lmnp} R_l^{mnp}}{4} \right). \quad (45)$$

<sup>7</sup> В общем случае тензор энергии импульса записывается так:

$$T_{ik} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{ik}} + \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} \Lambda - \frac{\partial}{\partial x^l} \left( \sqrt{-g} \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right).$$

Однако последнее слагаемое для поля сильной гравитации равно нулю.

<sup>8</sup> При выводе учтено, что  $R_{iklm} = R_{lmik}$ .

### 6. Полная система уравнений гравитационного поля

Соберем вместе уравнения, описывающие как слабую так и сильную гравитацию:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \chi T_{ik}, \quad (46)$$

$$R_l{}^{mik}{}_{;k} = -\frac{\chi}{r^2} \cdot M_l{}^{mi}. \quad (47)$$

### 7. Уравнения движения частицы в гравитационном поле

Аналогия между сильным гравитационным полем и электромагнитным полем позволяет, отталкиваясь от уравнения движения заряженной плотности массы в электромагнитном поле (8), обобщить уравнение движения плотности массы в гравитационном поле (1). В результате имеем

$$\mu c \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{ds} \right) + \mu c \Gamma^i{}_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{dt} - R^l{}_{m k}{}^i M_l{}^{mk} = 0. \quad (48)$$

## V. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Приравнивание нулю вариации действия при варьировании кинематических переменных дает уравнения поля, создаваемого фундаментальным объектом.
- Приравнивание нулю вариации действия при варьировании левых кинематических переменных  $l$  дает уравнения поля внешней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом. Источниками этого поля являются внешние динамические параметры фундаментального объекта – импульс и момент.
- Приравнивание нулю вариации действия при варьировании правых кинематических переменных  $L$  дает уравнения поля внутренней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом. Источниками этого поля являются внутренние динамические параметры фундаментального объекта – заряд и ток.

## Глава 5.8 Электро-гравитационное поле

### I. НАВОДЯЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

#### 1. Электромагнитное поле

В теории электромагнитного поля имеет место соотношение

$$\mu_0 \cdot \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума – коэффициент, входящий в уравнение электрического поля

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho,$$

где  $\nabla$  – оператор набла,  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля,  $\rho$  – плотность электрического заряда.

$\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума – коэффициент, входящий в уравнение магнитного поля

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{j},$$

где  $\mathbf{B}$  – магнитная индукция,  $\mathbf{j}$  – плотность электрического тока.

$c$  – скорость света. То, что  $c$  – скорость, хотя и необычная, запишем следующим образом<sup>1</sup>:

$$c \sim \frac{dx^a}{dt}.$$

Соотношению (1) в теории электромагнитного поля соответствует волновой оператор – оператор Даламбера

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) являются свидетельством того, что электрическое и магнитное поля составляют единый объект – электромагнитное поле.

#### 2. Электро-гравитационное поле

На основании формул (55) и (101) Главы 5.6. можно записать соотношение

$$2\chi \cdot \varepsilon_0 = \frac{1}{\Phi^2}. \quad (3)$$

Это соотношение по своей структуре похоже на соотношение (1). Отличие состоит в том, что  $\chi$  это эйнштейновская гравитационная постоянная – коэффициент, входящий в уравнение гравитационного поля Эйнштейна<sup>2</sup>

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \chi T_{ik}. \quad (4)$$

$\Phi$  – это физическая постоянная, имеющая размерность электрического потенциала (см. Глава 5.5. Раздел VII.). То, что  $\Phi$  – потенциал, хотя и необычный, запишем следующим образом<sup>3</sup>:

$$\Phi \sim \frac{\delta\theta}{dx^i} \equiv \frac{\delta\theta^{21}}{dx^i}.$$

Рассуждая по аналогии с предыдущим Разделом, соотношению (3) поставим в соответствие волновой оператор

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} + \frac{1}{2\chi \cdot \varepsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Или иначе

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2\chi \cdot \varepsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (5)$$

Соотношения (3) и (5) являются свидетельством того, что электрическое, магнитное и гравитационное поля составляют единый объект – электро-гравитационное поле.

Используя указанные наводящие соображения, рассмотрим вывод уравнений электро-гравитационного поля. Предварительно рассмотрим три формы записи уравнений электромагнитного поля – векторную, потенциальную и тензорную.

<sup>2</sup> Напомним, что

$$\chi = \frac{2G}{c^4},$$

где постоянная  $G$  выражается через гравитационную постоянную  $\gamma$  следующим образом:

$$G = 4\pi\gamma, \quad \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Отсюда

$$G = 80 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

<sup>1</sup> Напомним, что индексы  $a, b, c$  принимают значения 1, 2, 3 и нумеруют координаты и векторы геометрического пространства.

<sup>3</sup> Напомним, что индексы  $i, k, l$  принимают значения 1, 2, 3, 4 и нумеруют координаты и векторы пространства-времени СТО.



## II. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

### 1. Алгебра геометрического пространства в теории электромагнитного поля

Обозначим базисные векторы геометрического пространства  $\mathbf{e}_a$ , а через  $\mathbf{e}_0$  обозначим числовую единицу. Тогда умножение указанных базисных векторов можно представить следующей таблицей:

умножение чисел

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0 \text{ или } \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0 \cdot C^0_{00}, C^0_{00} = 1,$$

умножение числа на вектор

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_a = \mathbf{e}_a \text{ или } \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_a = \mathbf{e}_b \cdot C^b_{0a}, C^b_{0a} = \delta^b_a,$$

умножение вектора на число

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_a \text{ или } \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_b \cdot C^b_{a0}, C^b_{a0} = \delta^b_a,$$

скалярное умножение векторов

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = g_{ab} \text{ или } \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_0 \cdot C^0_{ab}, C^0_{ab} = g_{ab} = \delta_{ab},$$

векторное умножение векторов

$$\mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_c \cdot g^{cd} \cdot \varepsilon_{dab} \text{ или } \mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_c \cdot C^c_{ab},$$

$$C^c_{ab} = g^{cd} \cdot \varepsilon_{dab},$$

где контравариантный метрический тензор  $g^{cd}$  определяется соотношением

$$g^{cd} \cdot g_{db} = \delta^c_b,$$

а  $\varepsilon_{dab}$  – это антисимметричный единичный числовой тензор третьего ранга. Для него

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{321} = 1.$$

Таблицу умножения можно унифицировать, если

1) ввести обобщенный базисный вектор  $\mathbf{e}_A$ , где индекс  $A$  принимает значения  $\{0, a\}$ , то есть

$$\mathbf{e}_A \sim \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_a\};$$

2) ввести *универсальное* умножение, обозначаемое символом  $\circ$ :  $\mathbf{e}_A \circ \mathbf{e}_B$ , в частности

$$\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b = g_{ab} + \mathbf{e}_c \cdot C^c_{ab}.$$

Тогда вышеуказанную таблицу умножения можно свести к произведению

$$\mathbf{e}_A \circ \mathbf{e}_B = \mathbf{e}_C \cdot C^C_{AB}.$$

### 2. Уравнения электромагнитного поля в векторной форме

По отношению к вектору напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и вектору магнитной индукции  $\mathbf{B}$

уравнения электромагнитного поля записываются следующим образом

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9)$$

Плотность тока  $\mathbf{j}$  и плотность заряда  $\rho$  связаны между собой *законом сохранения заряда*

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Отметим размерности величин, входящих в уравнения электромагнитного поля

$$[E] = \frac{\text{В}}{\text{м}}, \quad [\varepsilon_0] = \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}}, \quad [\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}, \quad [\nabla] = \frac{1}{\text{м}},$$

$$[B] = \frac{\text{В} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}, \quad [\mu_0] = \frac{\text{В} \cdot \text{сек}}{\text{А} \cdot \text{м}}, \quad [\mathbf{j}] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

#### 2.1. Электрический ток

Представление о токе как о движущемся заряде находит выражение в формуле

$$\mathbf{j} = \rho \cdot \mathbf{v} \equiv \rho \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}. \quad (11)$$

Плотность заряда  $\rho$  распределена в геометрическом пространстве и зависит от времени, то есть

$$\rho = \rho(x, t).$$

Поэтому закон сохранения заряда (10) с учетом выражения (11) приобретает вид

$$\frac{d\rho(x(t), t)}{dt} = 0.$$

#### 2.2. Уравнение свободного электрического поля

Уравнения свободного (в отсутствии зарядов и токов) электромагнитного поля имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (15)$$

Рассмотрим векторное произведение оператора набла и уравнения (14)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (16)$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, используя тождество

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

Получим

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (16) и учитывая уравнения (12) и (15), получим уравнение свободного электрического поля

$$\left( -\nabla^2 + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0.$$

Полученное уравнение – это волновое уравнение по отношению к вектору напряженности электрического поля, а оператор

$$-\nabla^2 + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (17)$$

– это векторная запись волнового оператора (2).

### 2.3. Уравнение свободного магнитного поля

Рассмотрим векторное произведение оператора набла и уравнения (15)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \nabla \times \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (18)$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, используя тождество, приведенное в предыдущем Разделе, и учитывая уравнения (13) и (14), получим уравнение свободного магнитного поля

$$\left( -\nabla^2 + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0.$$

Полученное уравнение – это волновое уравнение по отношению к вектору магнитной индукции.

### 3. Координатная форма уравнений электромагнитного поля

Перепишем уравнения электромагнитного поля в координатной форме. Для этого учтем, что

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_a \cdot E^a, \quad \mathbf{B} = \mathbf{e}_a \cdot B^a, \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{j}^a, \quad \nabla = \mathbf{e}_a \cdot \frac{\partial}{\partial x_a},$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x_a} = g^{ab} \cdot \frac{\partial}{\partial x^b}.$$

Тогда вместо уравнений (6) ÷ (9) имеем

$$\frac{\partial E^a}{\partial x^a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho, \quad (19)$$

$$\frac{\partial B^a}{\partial x^a} = 0, \quad (20)$$

$$C^a_{bc} \frac{\partial E^c}{\partial x_b} = -\frac{\partial B^a}{\partial t}, \quad (21)$$

$$C^a_{bc} \frac{\partial B^c}{\partial x_b} = \mu_0 \cdot \mathbf{j}^a + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E^a}{\partial t}. \quad (22)$$

Закон сохранения заряда (10) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{j}^a}{\partial x^a} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (23)$$

а волновой оператор (17) в координатной записи приобретает вид соотношения (2).

## III. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Достоинство уравнений электромагнитного поля в потенциальной форме состоит в том, что в этом случае волновая природа электромагнитного поля с источниками представляется очевидно. Недостатком потенциальной формы уравнений электромагнитного поля следует считать то обстоятельство, что в этом случае уравнение (7) и закон электромагнитной индукции (8) не рассматриваются, так как они выполняются *тождественно*.

### 1. Электрический и магнитный потенциалы

Введем скалярную величину, которая обозначается  $\varphi$  и называется электрическим потенциалом, и векторную величину, которая обозначается  $\mathbf{A}$  и называется магнитным потенциалом. Потенциалы связываются с вектором напряженности электрического поля и вектором магнитной индукции следующими соотношениями:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (25)$$

В координатной форме соотношения (24) и (25) принимают вид

$$E^a = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_a} - \frac{\partial A^a}{\partial t}, \quad (26)$$

$$B^a = C^a_{bc} \frac{\partial A^c}{\partial x_b}. \quad (27)$$

Отсюда следуют размерности потенциалов

$$[\varphi] = \text{В}, \quad [\mathbf{A}] = \frac{\text{В} \cdot \text{сек}}{\text{м}}.$$

Если в (27) учесть, что

$$C_{bc}^a = g^{aa} \cdot \varepsilon_{abc},$$

то для координат вектора магнитной индукции имеем

$$\begin{aligned} B^1 &= \frac{\partial \mathbf{A}^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial x^3}, \\ B^2 &= \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial x^3} - \frac{\partial \mathbf{A}^3}{\partial x^1}, \\ B^3 &= \frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Ключевое значение выбора соотношений (24) и (25) состоит в том, что при этом уравнения электромагнитного поля (7) и (8) выполняются тождественно. Действительно, векторное умножение оператора набла на соотношение (24) дает

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \varphi - \frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Отсюда, учитывая (25) и тождество

$$\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0,$$

получим уравнение электромагнитного поля (8). Кроме того, скалярное умножение оператора набла на соотношение (25) дает

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Учитывая тождество

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0,$$

получим уравнение электромагнитного поля (7).

## 2. Калибровка Лоренца

Соотношения (24) и (25) не позволяют однозначно определить потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  по вектору напряженности электрического поля и вектору магнитной индукции. Однозначности в указанном определении можно достичь, если на потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  наложить дополнительное условие. Из всех возможных дополнительных условий выделяется условие, называемое *калибровкой Лоренца*. Оно замечательно тем, что позволяет очевидно выявить волновую природу полей потенциалов  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  и электромагнитного поля в целом. Калибровкой Лоренца называется следующее условие:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (29)$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial x^a} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (30)$$

## 3. Уравнения электромагнитного поля в потенциальной форме

Так как уравнения электромагнитного поля в потенциальной форме (7) и (8) выполняются тождественно, то остается записать в потенциальной форме уравнения (6) и (9).

### 3.1. Первое уравнение электромагнитного поля в потенциальной форме

Подставим в уравнение (6) соотношение (24). Получим

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho. \quad (31)$$

Используя калибровку Лоренца (29), получим первое уравнение электромагнитного поля в потенциальной форме

$$-\nabla^2 \varphi + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \quad (32)$$

или в координатной форме

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho. \quad (33)$$

Полученное уравнение – это волновое уравнение по отношению к электрическому потенциалу.

### 3.2. Второе уравнение электромагнитного поля в потенциальной форме

Подставим в уравнение (9) соотношения (25) и (24). Получим

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (34)$$

Или

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \\ &= \mu_0 \cdot \mathbf{j} - \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Учитывая калибровку Лоренца (29), получим второе уравнение электромагнитного поля в потенциальной форме

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \cdot \mathbf{j}. \quad (35)$$

Или в координатной форме

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}^b = \mu_0 \cdot \mathbf{j}^b. \quad (36)$$

Полученное уравнение это волновое уравнение по отношению к магнитному потенциалу.

#### IV. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

##### 1. Пространство-время СТО

Симметрия волнового уравнения относительно геометрических координат и величины  $ct$  заставляет ввести четырехмерное векторное пространство – пространство-время СТО  $X_4$  – как обобщение геометрического пространства.

Векторы в пространстве-времени СТО имеют четыре координаты<sup>4</sup>

$$x^i \sim \{x^a, ct\},$$

то есть

$$x^4 = ct.$$

В качестве базисных векторов  $\mathbf{e}_i$  в пространстве-времени СТО  $X_4$  рассматриваются базисные векторы геометрического пространства  $\mathbf{e}_a$  и дополнительный вектор  $\mathbf{e}_4$ , нумерующий векторы вдоль четвертого направления,

$$\mathbf{e}_i \sim \{\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_4\}.$$

Четырехмерный вектор  $\mathbf{x}$  пространства-времени СТО  $X_4$  разлагается по базисным векторам

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_i \cdot x^i \equiv \mathbf{e}_1 \cdot x^1 + \mathbf{e}_2 \cdot x^2 + \mathbf{e}_3 \cdot x^3 + \mathbf{e}_4 \cdot x^4.$$

Пространство-время СТО  $X_4$  наделяется скалярным произведением векторов. Скалярное произведение базисных векторов определяет ковариантный метрический тензор

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \sim \{g_{ab}, \mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4\}.$$

Из волнового уравнения следует условие

$$\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 = -1.$$

Таким образом<sup>5</sup>,

$$g_{ik} \sim \{\delta_{ab}, -1\}.$$

Контравариантный метрический тензор  $g^{ik}$  определяется соотношением

$$g^{ik} \cdot g_{kl} = \delta_l^i.$$

<sup>4</sup> Индексы  $i, k, l$  принимают значения 1, 2, 3, 4.

<sup>5</sup> В общепринятой литературе принимается другое, отличающееся знаком, скалярное произведение базисных векторов

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -1, \quad \mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 = 1.$$

С нашей точки зрения такое определение скалярного произведения базисных векторов является менее естественным и менее строгим.

Он имеет компоненты

$$g^{ik} \sim \{g^{ab}, g^{44}\} = \{\delta^{ab}, -1\}.$$

Введение четырехмерных векторов позволяет унифицировать запись уравнений электромагнитного поля, что особенно важно при выполнении теоретических построений.

##### 2. Электромагнитный потенциал

С помощью электрического потенциала  $\varphi$  и магнитного потенциала  $\mathbf{A}$  сформируем четырехмерный вектор, который обозначим  $\mathbf{A}$  и назовем *электромагнитным потенциалом*. Координаты электромагнитного потенциала определим следующим образом:

$$A^i \sim \{c\mathbf{A}^a, \varphi\},$$

то есть

$$A^a = c\mathbf{A}^a, \quad A^4 = \varphi. \quad (37)$$

Отсюда следует размерность электромагнитного потенциала

$$[A] = \text{В}.$$

Запишем калибровку Лоренца (30) через координаты электромагнитного потенциала. Используя (37), получим

$$\frac{\partial A^a}{\partial x^a} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

или

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0. \quad (38)$$

##### 3. Четырехмерный вектор плотности тока

С помощью плотности заряда  $\rho$  и плотности тока  $\mathbf{j}$  сформируем четырехмерный вектор, который обозначим  $\mathbf{j}$  и назовем *четырёхмерной плотностью тока*. Координаты четырёхмерной плотности тока  $j^i$  определим из следующих соображений. Рассматривая  $j^i$  как координаты плотности тока *движущегося* заряда, обобщим соотношение (11) на четырёхмерный случай и примем

$$j^i = \rho \cdot \frac{dx^i}{dx^4}. \quad (39)$$

Отсюда

$$j^a = \frac{\rho}{c} \cdot \frac{dx^a}{dt} = \frac{1}{c} \mathbf{j}^a, \quad j^4 = \rho \quad (40)$$

или в другом виде

$$j^i \sim \left\{ \frac{1}{c} \mathbf{j}^a, \rho \right\}.$$

Отсюда следует размерность четырехмерной плотности тока

$$[j] = \text{Кл.}$$

Запишем закон сохранения заряда (23) через координаты четырехмерной плотности тока. Используя (40), получим

$$c \frac{\partial j^a}{\partial x^a} + c \frac{\partial \rho}{\partial (ct)} = 0$$

или

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \quad (41)$$

#### 4. Уравнения электромагнитного поля

Запишем уравнения электромагнитного поля в потенциальной форме (33) и (36) через четырехмерный электромагнитный потенциал и четырехмерную плотность тока. Для первого уравнения (33) имеем

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a} - g^{44} \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho$$

или

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a} - \frac{\partial^2}{\partial x^4 \partial x_4} \right) A^4 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^4.$$

Отсюда окончательно

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} A^4 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^4. \quad (42)$$

Для второго уравнения (36) с учетом (37) и (40) имеем

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a} - g^{44} \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) \frac{A^b}{c} = \mu_0 \cdot c \cdot j^b$$

или

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x_a} - \frac{\partial^2}{\partial x^4 \partial x_4} \right) A^b = \mu_0 \cdot c^2 \cdot j^b.$$

Отсюда с учетом (1) окончательно

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} A^b = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^b. \quad (43)$$

Уравнения (42) и (43) можно записать в виде одного уравнения

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} A^k = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^k, \quad (44)$$

где индекс  $k$  принимает значения 1, 2, 3, 4. В этом и состоит указанная ранее *унификация* уравнений электромагнитного поля, достигаемая при четырехмерном представлении.

#### 5. Тензор электромагнитного поля

Из соотношений (26) и (28) следует, что трехмерные векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции в четырехмерном представлении составляют компоненты антисимметричного тензора второго ранга. Этот тензор обозначается  $F^{ik}$  и называется тензором электромагнитного поля. По определению

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k} = g^{ii} \frac{\partial A^k}{\partial x^i} - g^{kk} \frac{\partial A^i}{\partial x^k}.$$

Разобьем тензор электромагнитного поля на две компоненты

$$F^{ik} \sim \{F^{4b}, F^{ab}\}$$

и вычислим каждую из этих компонент.

1.  $F^{4b}$

$$F^{4b} = g^{44} \frac{\partial A^b}{\partial x^4} - \frac{\partial A^4}{\partial x_b} = -\frac{\partial A^b}{c \partial t} - \frac{\partial A^4}{\partial x_b}. \quad (45)$$

Используя выражения (37), получим

$$F^{4b} = -\frac{\partial \mathbf{A}^b}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_b}.$$

Сравнивая это соотношение с выражением (26), убеждаемся в том, что<sup>6</sup>

$$F^{4b} = E^b.$$

2.  $F^{ab}$

$$F^{ab} = \frac{\partial A^b}{\partial x_a} - \frac{\partial A^a}{\partial x_b} = c \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}^b}{\partial x_a} - \frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial x_b} \right). \quad (46)$$

Сравнивая это соотношение с выражением (28), убеждаемся в том, что

$$F^{23} = c \cdot B^1, \quad F^{31} = c \cdot B^2, \quad F^{12} = c \cdot B^3.$$

<sup>6</sup> Заметим, что

$$A_i = g_{ii} A^i \sim \{g_{bb} A^b, g_{44} A^4\} = \{A_b, -\varphi\},$$

поэтому

$$F_{4b} = \frac{\partial A_b}{\partial x^4} - \frac{\partial A_4}{\partial x^b} = \frac{\partial A_b}{c \partial t} - \frac{\partial A_4}{\partial x^b}.$$

Используя (37), получим

$$F_{4b} = \frac{\partial \mathbf{A}_b}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^b} = -E_b,$$

а

$$F_{b4} = E_b.$$

## 5.1. Уравнения электромагнитного поля

Покажем, что уравнения электромагнитного поля с использованием тензора электромагнитного поля записываются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} F^{ik} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^i. \quad (47)$$

Разобьем это уравнение на два

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} F^{ik} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^i \sim \\ &\sim \left\{ \frac{\partial}{\partial x^k} F^{4k} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^4, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} F^{bk} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^b \right\} \end{aligned}$$

и рассмотрим каждое из уравнений в отдельности.

*Первое уравнение.*

$$\frac{\partial}{\partial x^k} F^{4k} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^4$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^b} F^{4b} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^4.$$

Подставляя сюда выражение компонент тензора электромагнитного поля (45), получим

$$g^{44} \frac{\partial}{\partial x^4} \left( \frac{\partial A^b}{\partial x^b} \right) - \frac{\partial^2 A^4}{\partial x^b \partial x_b} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^4.$$

Далее воспользуемся калибровкой Лоренца (38) и получим уравнение

$$-g^{44} \frac{\partial}{\partial x^4} \left( \frac{\partial A^4}{\partial x^4} \right) - \frac{\partial^2 A^4}{\partial x^b \partial x_b} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^4,$$

которое представляет собой первое уравнение электромагнитного поля (42).

*Второе уравнение.*

$$\frac{\partial}{\partial x^k} F^{bk} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^b$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^a} F^{ba} + \frac{\partial}{\partial x^4} F^{b4} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^b.$$

Подставляя сюда выражение компонент тензора электромагнитного поля (45) (46), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \left( \frac{\partial A^a}{\partial x_b} - \frac{\partial A^b}{\partial x_a} \right) + \frac{\partial}{\partial x^4} \left( -g^{44} \frac{\partial A^b}{\partial x^4} + \frac{\partial A^4}{\partial x_b} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^b$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial A^a}{\partial x^a} \right) - \frac{\partial^2 A^b}{\partial x^a \partial x_a} - \frac{\partial^2 A^b}{\partial x^4 \partial x_4} + \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial A^4}{\partial x^4} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^b.$$

Учитывая калибровку Лоренца (38), получим второе уравнение электромагнитного поля (43).

Таким образом, исходное уравнение (47) объединяет оба уравнения электромагнитного поля и представляет собой объединенное уравнение (44). К этому выводу можно прийти непосредственно путем прямого вычисления левой части уравнения (47)

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial A^k}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial A^i}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^i$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial A^k}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^i.$$

Отсюда, учитывая калибровку Лоренца (38), получим уравнение электромагнитного поля (44).

## 6. Слагаемые действия электромагнитного поля и тока

Действие для электромагнитного поля и тока запишем следующим образом:

$$S = S_1 + S_2 = - \int \left( A_i j^i + \varepsilon_0 \frac{F^{ki} F_{ik}}{4} \right) \frac{d\Omega}{c}, \quad (48)$$

где  $d\Omega = c dt dx^1 dx^2 dx^3$  – элемент четырехмерного объема. Первое слагаемое обусловлено воздействием электромагнитного поля на плотность тока, второе слагаемое обусловлено электромагнитным полем в отсутствии материи<sup>7</sup>. Дадим пояснения каждому из слагаемых действия.

6.1. Слагаемое  $S_1$ 

Пользуясь подходом, указанным в Разделе V.2. Главы 3.2, запишем  $S_1$  следующим образом:

$$S_1 = - \int \frac{\delta S_1}{\delta \theta} \cdot \frac{\delta \theta}{dx^i} \cdot dx^i.$$

Здесь  $\theta$  – это пятая координата, пропорциональная правому углу в плоскости 21. Учтем, что

$$\frac{\delta \theta}{dx^i} = A_i$$

<sup>7</sup> В Главе 3.2. Раздел V было показано, что слагаемым действия логично давать следующую интерпретацию. Первое слагаемое отражает воздействие *внешнего* поля на источник, представленный плотностью тока. Второе слагаемое отражает воздействие *внешнего* поля на поле, создаваемое этим источником. Однако здесь мы будем придерживаться указанной классической точки зрения.

– четырехмерный потенциал<sup>8</sup> и положим, что<sup>9</sup>

$$\frac{\partial S_1}{\partial \theta} = \frac{1}{c} \cdot q, \quad (49)$$

где  $q$  – электрический заряд, находящийся в электромагнитном поле. Тогда имеем

$$S_1 = - \int \frac{1}{c} \cdot q \cdot A_i \cdot dx^i.$$

Рассматривая электрический заряд распределенным по геометрическому объему  $V$ , перейдем к интегрированию по четырехмерному объему  $\Omega$

$$S_1 = - \int \frac{1}{c} \cdot \frac{dq}{dV} \cdot A_i \cdot \frac{dx^i}{c} d\Omega.$$

Если учесть, что

$$\frac{dq}{dV} = \rho$$

– плотность заряда, а

$$\rho \cdot \frac{dx^i}{c \, dt} = \rho \cdot \frac{dx^i}{dx^4} = j^i$$

– плотность тока<sup>10</sup>, то получим

$$S_1 = - \int A_i \cdot j^i \cdot \frac{d\Omega}{c}.$$

Выясним размерность подинтегрального выражения<sup>11</sup>

$$[A \cdot j] = \text{В} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{М}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{М}^3}.$$

<sup>8</sup> Заметим, что так как размерность  $[A] = \text{В}$ , то размерность  $[\theta] = \text{В} \cdot \text{м}$ .

<sup>9</sup> Учитывая при этом, что размерность

$$\left[ \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{сек}}{\text{В} \cdot \text{м}} = \text{Кл} \frac{\text{сек}}{\text{м}}.$$

<sup>10</sup> Обратим внимание на то, что это определение плотности тока отлично от того, которое принято в Главах 5.5 и 5.6

$$j^i = \rho \cdot \frac{dx^i}{dt},$$

что необходимо учитывать при сравнении результатов этих глав с результатами настоящей Главы.

<sup>11</sup> Так как размерность

$$\left[ \frac{\Omega}{c} \right] = \text{сек} \cdot \text{м}^3,$$

то для размерности действия имеем то, что необходимо

$$[S_1] = \text{Дж} \cdot \text{сек}.$$

## 6.2. Слагаемое $S_2$

$$S_2 = - \int \varepsilon_0 \cdot \frac{F^{ki} \cdot F_{ik}}{4} \cdot \frac{d\Omega}{c}.$$

В выражении для  $S_2$  учтено, что переход от ковариантного тензора к контравариантному сопровождается не только поднятием индексов, но и изменением порядка расположения индексов. Нужно отметить, что учет этого правила коррелируется с принятой нами сигнатурой метрического тензора.

Выясним размерность подинтегрального выражения

$$[\varepsilon_0 \cdot F \cdot F] = \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} \cdot \frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{М}^3}.$$

## 6.3. Вывод уравнений электромагнитного поля

Рассмотрим вывод уравнений электромагнитного поля, исходя из вариационного принципа. А именно, выведем уравнения электромагнитного поля, приравняв нулю вариацию действия при варьировании потенциала электромагнитного поля.

Итак, рассмотрим вариацию действия (48)

$$\delta S = - \int \left( \delta A_i j^i + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \delta F^{ki} F_{ik} + \frac{1}{4} \varepsilon_0 F^{ki} \delta F_{ik} \right) \frac{d\Omega}{c},$$

где  $\delta A_i$  – вариация электромагнитного потенциала,  $\delta F^{ki}$  и  $\delta F_{ik}$  – вариации соответствующих тензоров при варьировании электромагнитного потенциала.

Учтем, что

$$\delta F^{ki} F_{ik} = \delta F_{ki} F^{ik} = \delta F_{ik} F^{ki}.$$

Поэтому имеем

$$\delta S = - \int \left( \delta A_i j^i + \frac{1}{2} \varepsilon_0 F^{ki} \delta F_{ik} \right) \frac{d\Omega}{c}. \quad (50)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} F^{ki} \delta F_{ik} &= F^{ki} \left( \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} \right) = \\ &= F^{ki} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} - F^{ki} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k}. \end{aligned} \quad (51)$$

В первом слагаемом последнего выражения выполним переобозначение индексов. Получим

$$F^{ki} \delta F_{ik} = F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} - F^{ki} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} = -2 F^{ki} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k}.$$

Подставим полученное выражение в (50)

$$\delta S = - \int \left( \delta A_i j^i - \varepsilon_0 F^{ki} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} \right) \frac{d\Omega}{c}$$

и для интегрирования по частям перепишем последнее слагаемое в следующем виде:

$$\delta S = - \int \left( \delta A_i j^i + \varepsilon_0 \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^k} \delta A_i - \varepsilon_0 \frac{\partial (F^{ki} \delta A_i)}{\partial x^k} \right) \frac{d\Omega}{c},$$

а затем запишем вариацию действия в виде суммы двух интегралов

$$\delta S = - \int \left( \delta A_i j^i + \varepsilon_0 \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^k} \delta A_i \right) \frac{d\Omega}{c} + \int \varepsilon_0 \frac{\partial (F^{ki} \delta A_i)}{\partial x^k} \frac{d\Omega}{c}.$$

В соответствии с теоремой Гаусса последний интеграл по 4-объему можно записать через интеграл по 3-гиперповерхности, охватывающей этот 4-объем. По предположению электромагнитное поле на 3-гиперповерхности отсутствует, поэтому интеграл по 3-гиперповерхности равен нулю и поэтому

$$\int \varepsilon_0 \frac{\partial (F^{ki} \delta A_i)}{\partial x^k} \frac{d\Omega}{c} = 0.$$

Таким образом,

$$\delta S = - \int \left( j^i + \varepsilon_0 \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^k} \right) \delta A_i \frac{d\Omega}{c}.$$

Используя вариационный принцип

$$\delta S = 0,$$

получим уравнение

$$j^i + \varepsilon_0 \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^k} = 0$$

или

$$j^i - \varepsilon_0 \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0,$$

которое есть не что иное как уравнение электромагнитного поля (47).

## V. ЭЛЕКТРО-ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

В этом Разделе рассмотрим обобщение электромагнитного поля, вызванное увеличением числа измерений пространства-времени за счет добавления к четырем координатам пространства-времени СТО дополнительной *пятой* координаты.

### 1. Предварительные замечания

Пятимерное обобщение пространства-времени ввел Калуца<sup>12</sup>, снабдив теорию *условием цилиндричности*,

согласно которому рассматриваемые в теории физические величины не зависят от пятой координаты. В результате теория искривленного пятимерного пространства выливается в общепринятую, имевшую место до теории Калуцы, комбинацию теории гравитации Эйнштейна и теории электромагнитного поля без каких-либо дополнительных эффектов. В том случае, если в теории Калуцы искривление относится только к пятой координате и не затрагивает четырехмерное пространство, теория Калуцы сводится к теории электромагнитного поля, рассмотренной в Разделе IV.

Смысл пятой координаты установлен в Главе 5.2. Раздел VI.1. на основании анализа уравнения Дирака. Из этого анализа следует, что пятой координатой нужно считать правый угол поворота в плоскости 21. Здесь необходимо вспомнить, что повороты входят в состав координат обобщенного пространства-времени, рассмотренного в Главе 1.3. Раздел IV.1. Поэтому введение пятой координаты как поворота в плоскости 21 является движением в сторону указанного обобщенного пространства-времени.

В Главе 5.5. рассматривалась пятимерная теория гравитации и электромагнетизма с учетом указанного смысла пятой координаты.

Далее, в отличие от Главы 5.5,

1) будем считать, что искривление относится только к пятой координате и не затрагивает четырехмерное пространство,

2) не будем придерживаться условия цилиндричности, иначе говоря, будем считать, что рассматриваемые в теории физические величины *зависят* от пятой координаты; условие цилиндричности будем считать удобным приближением.

### 2. Пятимерное пространство-время

Введем пятимерное векторное пространство  $X_5$  как обобщение пространства-времени СТО.

Векторы в пространстве-времени  $X_5$  имеют пять координат. К ним относятся координаты геометрического пространства  $x^a$ , координата вдоль оси времени  $x^4 = ct$  и пятая координата, пропорциональная правому углу поворота в плоскости 21<sup>13</sup>  $x^0 = L_0 \cdot \varphi^{21}$ . Для указанных координат введем общее обозначение<sup>14</sup>  $x^A$ . В результате имеем

$$x^A \sim \{x^a, x^4, x^0\}.$$

В качестве базисных векторов  $e_A$  в пространстве-времени  $X_5$  рассматриваются базисные векторы геометрического пространства  $e_a$ , вектор  $e_4$ , нумерующий векторы вдоль четвертого направления и дополнительный вектор  $e_0 \equiv e_{21}$ .

$$e_A \sim \{e_a, e_4, e_0\}.$$

<sup>12</sup> Смысл пятой координаты в теории Калуцы не рассматривается.

<sup>13</sup> См. Глава 5.5. Раздел I.

<sup>14</sup> Далее индексы  $A, B, C$  принимают значения 1, 2, 3, 4, 0.



Пятимерный вектор  $\mathbf{x}$  пространства-времени  $X_5$  разлагается по базисным векторам

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_A \cdot x^A \equiv \mathbf{e}_1 \cdot x^1 + \mathbf{e}_2 \cdot x^2 + \mathbf{e}_3 \cdot x^3 + \mathbf{e}_4 \cdot x^4 + \mathbf{e}_0 \cdot x^0.$$

Пространство-время  $X_5$  наделяется скалярным произведением векторов. Скалярное произведение базисных векторов определяет ковариантный метрический тензор

$$g_{AB} = \mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B \sim \{g_{ab}, \mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0\}.$$

Из Главы 1.3. Раздел III. следует условие

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 \equiv \mathbf{e}_{21} \cdot \mathbf{e}_{21} = -1.$$

Таким образом,

$$g_{AB} \sim \{\delta_{ab}, -1, -1\}.$$

Контравариантный метрический тензор  $g^{AB}$  определяется соотношением

$$g^{AB} \cdot g_{BC} = \delta_C^A.$$

Он имеет компоненты

$$g^{AB} \sim \{g^{ab}, g^{44}, g^{00}\} = \{\delta^{ab}, -1, -1\}.$$

### 3. Пятимерный электромагнитный потенциал

#### 3.1. Ковариантный потенциал

Четырехмерный электромагнитный потенциал входит в состав пятимерного электромагнитного потенциала. В безразмерной форме четырехмерный ковариантный потенциал записывается с помощью пятой координаты следующим образом<sup>15</sup>:

$$(A_i)_{\text{безраз}} = \frac{\delta x^0}{\partial x^i}.$$

Переход к размерному четырехмерному потенциалу осуществляется с помощью соотношения

$$A_i = \Phi \cdot (A_i)_{\text{безраз}} = \Phi \cdot \frac{\delta x^0}{\partial x^i},$$

где  $\Phi$  – физическая постоянная,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2} \chi \varepsilon_0}.$$

Размерности  $[\Phi] = \text{В}$  и  $[A] = \text{В}$ . При записи четырехмерного электромагнитного потенциала  $A_i$  удобно перейти от пятой координаты  $x^0$  к параметру

$$\theta = \Phi \cdot x^0$$

с размерностью  $[\theta] = \text{В} \cdot \text{м}$ . Тогда

$$A_i = \frac{\delta \theta}{\partial x^i}.$$

Заметим, что введение параметра  $\theta$  позволяет записать набор координат в  $X_5$  следующим образом:

$$x^A \sim \{x^a, ct, \frac{\theta}{\Phi}\}. \quad (52)$$

Отказ от условия цилиндричности приводит к тому, что помимо четырехмерного потенциала необходимо рассматривать еще одну (пятую) компоненту потенциала, которую обозначим

$$G_0 \equiv (A_0)_{\text{безраз}} = \frac{\delta x^0}{\partial x^0}.$$

Переход к размерной пятой координате потенциала осуществляется с помощью соотношения

$$A_0 = \Phi \cdot G_0 = \frac{\delta \theta}{\partial x^0}.$$

Таким образом, координаты пятимерного ковариантного электромагнитного потенциала записываются так:

$$A_A \sim \{c \mathbf{A}_a, \varphi, \Phi \cdot G_0\}.$$

Для дальнейшего изложения удобно ввести величину  $\mathbf{G}_0$  в соответствии с соотношением

$$G_0 = c \cdot \mathbf{G}_0.$$

С учетом этого соотношения координаты пятимерного электромагнитного потенциала записываются следующим образом:

$$A_A \sim \{c \mathbf{A}_a, \varphi, \Phi \cdot c \cdot \mathbf{G}_0\}. \quad (53)$$

#### 3.2. Контравариантный потенциал

Контравариантные компоненты электромагнитного потенциала образуются из ковариантных компонент<sup>16</sup> путем поднятия и опускания соответствующих индексов и записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A^A &\sim \{A^a, A^4, A^0\} = \\ &= \{c \mathbf{A}^a, \varphi, \Phi \cdot c \cdot \mathbf{G}^0\}. \end{aligned} \quad (54)$$

<sup>16</sup> Заметим, что переход от контравариантных компонент потенциала к ковариантным осуществляется с помощью преобразования

$$A_B = g_{BV} A^V g^{00} \sim \{-\delta_{bb} A^b, \varphi, \Phi \cdot c \cdot \mathbf{G}^0\}.$$

<sup>15</sup> См. Глава 5.5. Раздел VII.

## 3.3. Обобщенная калибровка Лоренца

Обобщим калибровку Лоренца (30) для пятимерного электромагнитного потенциала и запишем ее следующим образом:

$$\frac{\partial A^A}{\partial x^A} = 0. \quad (55)$$

Раскроем это уравнение, пользуясь координатами вектора пространства-времени (52) и координатами пятимерного электромагнитного потенциала (54)

$$\frac{\partial A^a}{\partial x^a} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial A^0}{\partial x^0} = 0$$

или

$$c \frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial x^a} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Phi \frac{\partial (c \cdot \Phi \cdot \mathbf{G}^0)}{\partial \theta} = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial x^a} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta} = 0 \quad (56)$$

и с учетом (1) и (3)

$$\frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial x^a} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2\chi \cdot \varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta} = 0. \quad (57)$$

## 4. Пятимерный вектор плотности тока

Координаты пятимерной плотности тока  $j^A$  определим из следующих соображений. Рассматривая  $j^A$  как координаты плотности тока *движущегося* заряда, обобщим соотношение (39) на пятимерный случай и примем

$$j^A = \rho \cdot \frac{dx^A}{dx^4}. \quad (58)$$

Отсюда

$$j^a = \frac{\rho}{c} \cdot \frac{dx^a}{dt} = \frac{1}{c} \mathbf{j}^a, \quad j^4 = \rho \frac{dx^4}{dx^4} = \rho, \quad (59)$$

$$j^0 = \rho \frac{dx^0}{dx^4} = \frac{\rho}{\Phi c} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\Phi c} \mathbf{j}^0, \quad (60)$$

где введено обозначение<sup>17</sup>

$$\mathbf{j}^0 = \rho \frac{d\theta}{dt}.$$

Таким образом, имеем

$$j^A \sim \left\{ \frac{1}{c} \mathbf{j}^a, \rho, \frac{1}{c\Phi} \mathbf{j}^0 \right\}.$$

<sup>17</sup> Отсюда следуют размерности

$$[j] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}, \quad [\mathbf{j}] = \left[ \rho \frac{\theta}{t} \right] = \frac{\text{Кл В} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \text{ сек}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

## 4.1. Обобщенный закон сохранения заряда

Обобщим закон сохранения заряда (41) для пятимерной плотности тока и запишем его следующим образом:

$$\frac{\partial j^A}{\partial x^A} = 0 \quad (61)$$

или

$$\frac{\partial j^a}{\partial x^a} + \frac{\partial j^4}{\partial x^4} + \frac{\partial j^0}{\partial x^0} = 0.$$

Используя (52), (59) и (60), запишем закон сохранения заряда (61) через координаты трехмерной плотности тока  $\mathbf{j}^a$ . Получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}^a}{\partial x^a} + \frac{\partial \rho}{\partial (ct)} + \frac{1}{c\Phi} \frac{\partial \mathbf{j}^0}{\partial \theta} \Phi = 0$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{j}^a}{\partial x^a} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{j}^0}{\partial \theta} = 0. \quad (62)$$

## 5. Тензор электро-гравитационного поля

Введем антисимметричный тензор второго ранга, который обозначим  $F^{AB}$  и назовем тензором электро-гравитационного поля. Рассматривая этот тензор как обобщение тензора электромагнитного поля  $F^{ik}$ , будем полагать

$$F^{AB} = \frac{\partial A^B}{\partial x_A} - \frac{\partial A^A}{\partial x_B} = g^{AA} \frac{\partial A^B}{\partial x^A} - g^{BB} \frac{\partial A^A}{\partial x^B}. \quad (63)$$

Разобьем тензор электро-гравитационного поля на три компоненты

$$F^{AB} \sim \{F^{4B}, F^{aB}, F^{0B}\}$$

и вычислим каждую из этих компонент.

1.  $F^{4B}$ .

Эта компонента включает две составляющих

$$F^{4B} \sim \{F^{4b}, F^{40}\}.$$

1.1.  $F^{4b}$ .

Используя выражения (52), получим

$$F^{4b} = g^{44} \frac{\partial A^b}{\partial x^4} - \frac{\partial A^4}{\partial x_b} = -\frac{\partial A^b}{c \partial t} - \frac{\partial A^4}{\partial x_b}. \quad (64)$$

Используя выражения (54), получим

$$F^{4b} = -\frac{\partial \mathbf{A}^b}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_b}. \quad (65)$$

1.2.  $F^{40}$ .

Используя выражения (52), получим

$$F^{40} = g^{44} \frac{\partial A^0}{\partial x^4} - g^{00} \frac{\partial A^4}{\partial x^0} = -\frac{\partial A^0}{c \partial t} + \Phi \frac{\partial A^4}{\partial \theta}. \quad (66)$$

Используя выражения (54), получим

$$F^{40} = \Phi \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (67)$$

## 2. $F^{aB}$ .

Эта компонента включает три составляющих

$$F^{aB} \sim \{F^{ab}, F^{a4}, F^{a0}\}.$$

### 2.1. $F^{ab}$ .

Используя выражения (52) и (54), получим

$$F^{ab} = \frac{\partial A^b}{\partial x_a} - \frac{\partial A^a}{\partial x_b} = c \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}^b}{\partial x_a} - \frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial x_b} \right). \quad (68)$$

### 2.2. $F^{a4}$ .

Эта составляющая отличается от выражения (65) знаком

$$F^{a4} = \frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_a}. \quad (69)$$

### 2.3. $F^{a0}$ .

Используя выражения (52), получим

$$F^{a0} = \frac{\partial A^0}{\partial x_a} - g^{00} \frac{\partial A^a}{\partial x^0} = \frac{\partial A^0}{\partial x_a} + \Phi \frac{\partial A^a}{\partial \theta}. \quad (70)$$

Используя выражения (54), получим

$$F^{a0} = c \Phi \left( \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial x_a} + \frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial \theta} \right). \quad (71)$$

## 3. $F^{0B}$ .

Эта компонента включает две составляющих

$$F^{0B} \sim \{F^{0b}, F^{04}\}.$$

### 3.1. $F^{0b}$ .

Эта составляющая отличается от выражения (71) знаком

$$F^{0b} = c \Phi \left( -\frac{\partial \mathbf{A}^b}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial x_b} \right). \quad (72)$$

### 3.2. $F^{04}$ .

Эта составляющая отличается от выражения (67) знаком

$$F^{04} = \Phi \left( \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (73)$$

## 6. Уравнения электро-гравитационного поля

Уравнения электро-гравитационного поля введем как обобщение уравнений (47) на пятимерный случай

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{AB} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^A. \quad (74)$$

Разобьем это уравнение на три

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{4B} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^4, \quad (75)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{aB} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^a, \quad (76)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{0B} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^0. \quad (77)$$

и рассмотрим каждое из уравнений в отдельности.

### 6.1. Первое уравнение

Запишем первое уравнение (75), раскрывая суммирование

$$\frac{\partial}{\partial x^b} F^{4b} + \frac{\partial}{\partial x^0} F^{40} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^4. \quad (78)$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя сначала соотношение (52), а затем соотношения (65) и (67):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{4B} &= \frac{\partial}{\partial x^b} F^{4b} + \Phi \frac{\partial}{\partial \theta} F^{40} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^b} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}^b}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_b} \right) + \Phi^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{4B} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{A}^b}{\partial x^b} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta} \right) - \\ &- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^b \partial x_b} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

Учитывая обобщенную калибровку Лоренца (56), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{4B} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}.$$

Подставляя это соотношение в выражение (78) учитывая (59), получим первое уравнение электромагнитно-гравитационного поля

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho. \quad (79)$$

Оно представляет собой уравнение поля электрического потенциала, обобщенное на случай, когда электрический потенциал  $\varphi$  зависит от пятой координаты.

Указание на то, что первое уравнение – это уравнение *электрического* поля, состоит в том, левая полевая часть уравнения связана с источником поля  $\rho$  диэлектрической постоянной  $\varepsilon_0$ .

Пользуясь соотношениями (1) и (3), запишем первое уравнение в другом виде:

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^b \partial x_b} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{2\chi \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho. \quad (80)$$

### 6.2. Второе уравнение

Запишем второе уравнение (76), раскрывая суммирование

$$\frac{\partial}{\partial x^b} F^{ab} + \frac{\partial}{\partial x^4} F^{a4} + \frac{\partial}{\partial x^0} F^{a0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^a. \quad (81)$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя сначала выражение (52) а затем выражения (68), (69) и (71):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{aB} &= \frac{\partial}{\partial x^b} F^{ab} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F^{a4} + \Phi \frac{\partial}{\partial \theta} F^{a0} = \\ &= c \frac{\partial}{\partial x^b} \left( \frac{\partial \mathbf{A}^b}{\partial x_a} - \frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial x_b} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} \right) + \\ &+ c \Phi^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial x_a} + \frac{\partial \mathbf{A}^a}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{aB} &= c \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial \mathbf{A}^b}{\partial x^b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta} \right) + \\ &+ c \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая обобщенную калибровку Лоренца (56), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{aB} = c \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial \theta^2} \right).$$

Подставляя это соотношение в выражение (81) учитывая (59), получим второе уравнение электромагнитно-гравитационного поля

$$c \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0 c} \cdot \mathbf{j}^a.$$

Или

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \cdot \mathbf{j}^a.$$

или с учетом выражения (1)

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial \theta^2} = \mu_0 \cdot \mathbf{j}^a. \quad (82)$$

Оно представляет собой уравнение поля магнитного потенциала, обобщенное на случай, когда магнитный потенциал  $\mathbf{A}^a$  зависит от пятой координаты. Указание на то, что второе уравнение это уравнение *магнитного* поля, состоит в том, левая полевая часть уравнения связана с источником поля  $\mathbf{j}^a$  магнитной постоянной  $\mu_0$ .

Пользуясь соотношениями (1) и (3), запишем второе уравнение в другом виде:

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial x^b \partial x_b} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial t^2} + \frac{1}{2\chi \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^a}{\partial \theta^2} = \mu_0 \cdot \mathbf{j}^a. \quad (83)$$

### 6.3. Третье уравнение

Запишем третье уравнение (77), раскрывая суммирование

$$\frac{\partial}{\partial x^b} F^{0b} + \frac{\partial}{\partial x^4} F^{04} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^0. \quad (84)$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя сначала выражение (52) а затем выражения (72) и (73):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{0B} &= \frac{\partial}{\partial x^b} F^{0b} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F^{04} = \\ &= c \Phi \frac{\partial}{\partial x^b} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}^b}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial x_b} \right) + \frac{\Phi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{0B} &= -c \Phi \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \mathbf{A}^b}{\partial x^b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \\ &- c \Phi \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{\Phi}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Учитывая обобщенную калибровку Лоренца (56), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{0B} = c \Phi \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial \theta^2} \right).$$

Подставляя это соотношение в выражение (84), и учитывая выражение (60), получим третье уравнение электромагнитно-гравитационного поля:

$$c \Phi \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0 c \Phi} \cdot \mathbf{j}^0.$$

Или

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2 \Phi^2} \cdot \mathbf{j}^0.$$

Или с учетом выражения (3)

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial \theta^2} = \frac{2\chi}{c^2} \cdot \mathbf{j}^0.$$

Подставляя сюда выражение для  $\chi$

$$\chi = \frac{2G}{c^4},$$

получим

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial \theta^2} = G \frac{4\mathbf{j}^0}{c^6}. \quad (85)$$

Левая полевая часть уравнения связана с источником поля  $\mathbf{j}^0$  гравитационной постоянной  $G$ , поэтому следует считать, что третье уравнение представляет собой уравнение гравитационного поля, создаваемого электрическим зарядом, движущимся вдоль пятой координаты. Именно это обстоятельство оправдывает название настоящей Главы.

Пользуясь соотношениями (1) и (3), запишем третье уравнение в другом виде:

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + \frac{1}{2\chi \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial \theta^2} = G \frac{4\mathbf{j}^0}{c^6}. \quad (86)$$

## VI. АНТИГРАВИТАЦИЯ

В этом Разделе рассмотрим классическое уравнение статического гравитационного поля и сравним его с уравнением  $\mathbf{G}^0$ -поля (86) для статического случая.

### 1. Уравнение статического гравитационного поля

Пусть  $\varphi_r$  – потенциал гравитационного поля, а  $\mu$  – плотность массы. Для них классическое уравнение статического гравитационного поля выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^b \partial x_b} = G \cdot \mu. \quad (87)$$

Отсюда следует общее решение этого уравнения

$$\varphi_r = -\frac{G}{4\pi} \int \frac{\mu dV}{r} = -\gamma \int \frac{\mu dV}{r}.$$

Отсюда для потенциала сосредоточенной массы  $m = \int \mu dV$  имеем

$$\varphi_r = -\frac{\gamma}{r} \int \mu dV = -\gamma \frac{m}{r}.$$

Отсюда сила, действующая на массу  $M$ , находящуюся в гравитационном поле  $\varphi_r$  равна

$$F = -M \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} = -\gamma \frac{M m}{r^2}.$$

Это выражение для силы гравитационного взаимодействия между массами  $M$  и  $m$  составляет закон тяготения Ньютона. Здесь для нас важно, что знак минус отражает тот факт, что сила  $F$  является силой притяжения между массами.

Выясним размерность гравитационного потенциала  $\varphi_r$ . Размерность правой части уравнения (87)

$$[G \cdot \mu] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \cdot \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \frac{1}{\text{сек}^2}.$$

Отсюда размерность

$$[\varphi_r] = \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2}, \quad (88)$$

то есть,  $[\varphi_r]$  имеет размерность квадрата скорости.

В заключение этого Раздела запишем уравнение (87) в виде, удобном для дальнейшего сравнения

$$-\frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^b \partial x_b} = -G \cdot \mu. \quad (89)$$

### 2. Уравнения статического $\mathbf{G}^0$ поля

Для статического случая уравнение (86) приобретает вид

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} = G \frac{4\mathbf{j}^0}{c^6}. \quad (90)$$

Выясним размерность потенциала  $\mathbf{G}^0$ . Размерность правой части уравнения (90)

$$\begin{aligned} \left[ \frac{G}{c^4} \right] \cdot \left[ \frac{\mathbf{j}^0}{c} \right] \cdot \left[ \frac{1}{c} \right] &= \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{сек}^4}{\text{кг}^2 \cdot \text{м}^4} \cdot \frac{\text{Вт} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}} \cdot \frac{\text{сек}}{\text{м}} = \\ &= \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{Дж}^2} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{сек}}{\text{м}} = \frac{\text{сек}}{\text{м}^3}. \end{aligned}$$

Отсюда размерность потенциала  $\mathbf{G}^0$

$$[\mathbf{G}^0] = \frac{\text{сек}}{\text{м}}.$$

Из сравнения ее с размерностью гравитационного потенциала  $[\varphi_r]$  следует, что потенциал  $\mathbf{G}^0$  связан с  $\varphi_r$  коэффициентом, пропорциональным кубу скорости. Имея это в виду, положим

$$\mathbf{G}^0 = \frac{\varphi_r^0}{c^3}. \quad (91)$$

Величину  $\varphi_r^0$  назовем гравитационным потенциалом поля, создаваемого электрическим зарядом, движущимся вдоль пятой координаты.

Подставим соотношение (91) в уравнение (90). Получим уравнение гравитационного поля электрического заряда в следующем виде:

$$-\frac{\partial^2 \varphi_r^0}{\partial x^b \partial x_b} = G \frac{4\mathbf{j}^0}{c^3}. \quad (92)$$

Или иначе

$$-\frac{\partial^2 \varphi_r^0}{\partial x^b \partial x_b} = G \frac{4}{c^3} \rho \frac{d\theta}{dt}. \quad (93)$$

Сравнение уравнений (89) и (93) показывает, что уравнение гравитационного поля, создаваемого электрическим зарядом, отличается от уравнения гравитационного поля, создаваемого массой, прежде всего тем, что правая часть уравнения имеет *положительный* знак. А это означает, что сила гравитации, создаваемая положительным зарядом, имеет знак, противоположный знаку силы тяготения, то есть является силой отталкивания. Действительно, общее решение уравнения (93) имеет вид

$$\varphi_r^0 = \frac{G}{4\pi c^3} \int \frac{d\theta}{dt} \frac{\rho dV}{r} = \gamma \frac{4}{c^3} \int \frac{d\theta}{dt} \frac{\rho dV}{r}.$$

Отсюда для потенциала сосредоточенного заряда  $q = \int \rho dV$  имеем

$$\varphi_r^0 = \gamma \frac{4}{c^3} \frac{q}{r} \frac{d\theta}{dt}.$$

Отсюда сила, действующая на массу  $M$ , находящуюся в гравитационном поле  $\varphi_r^0$ ,

$$F = -M \frac{\partial \varphi_r^0}{\partial r} = \gamma \frac{M}{r^2} \frac{4}{c^3} q \frac{d\theta}{dt}. \quad (94)$$

Это выражение для силы гравитационного взаимодействия между массой  $M$  и зарядом  $q$ , движущимся вдоль пятой координаты. В том случае, если указанный заряд является положительным, он *отталкивается* от массы  $M$ . Мы имеем дело с *антигравитацией*. И, напротив, если заряд, движущийся вдоль пятой координаты является отрицательным, сила  $F$  является силой притяжения между массой  $M$  и указанным зарядом.

### 2.1. Эквивалентная масса

Введем величину

$$w^0 = \frac{4\mathbf{j}^0}{c} = \frac{4}{c} \rho \frac{d\theta}{dt}, \quad (95)$$

которую назовем плотностью энергии заряда, движущегося вдоль пятой координаты, имея в виду, что размерность

$$[w^0] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Далее, пользуясь формулой Эйнштейна, введем плотность *эквивалентной массы*

$$\mu_3 = \frac{w^0}{c^2}. \quad (96)$$

Если плотность эквивалентной массы сосредоточена, то *эквивалентная масса*

$$m_3 = \int \mu_3 dV.$$

С учетом этого соотношения сила  $F$  (94) принимает вид закона Ньютона

$$F = \gamma \frac{M m_3}{r^2}.$$

## VII. ОБОБЩЕНИЕ ЭЛЕКТРО-ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Рассмотренная выше пятимерная теория гравитации и электромагнетизма допускает естественное обобщение, заключающееся в привлечении помимо правых поворотов в плоскости 21 (помимо пятой координаты) правых поворотов в двух других плоскостях 13 и 32. Указанные повороты составляют алгебру, которую обозначим  ${}_rU$ . Далее рассмотрим обобщение уравнений электро-гравитационного поля для трехмерной алгебры правых поворотов.

### 1. Алгебра правых поворотов ${}_rU$

Для того, чтобы выделить векторы алгебры  ${}_rU$  будем обозначать их буквами *красного* цвета. Базисные векторы алгебры правых поворотов  ${}_rU$  обозначим следующим образом:

$$\mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{32}.$$

Введем индексы, обозначаемые греческими буквами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Они принимают значения

$$\alpha \sim \{21, 13, 32\}.$$

Тогда

$$\mathbf{e}_\alpha \sim \{\mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{32}\}.$$

Вектор алгебры  ${}_rU$  записывается следующим образом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_\alpha \cdot x^\alpha \equiv \mathbf{e}_{21} x^{21} + \mathbf{e}_{13} x^{13} + \mathbf{e}_{32} x^{32}.$$

На векторах алгебры  ${}_rU$  имеют место

скалярное умножение векторов

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = g_{\alpha\beta},$$

векторное умножение векторов

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\gamma \cdot C^{\gamma\alpha\beta}.$$

Ковариантный метрический тензор

$$g_{\alpha\beta} \sim \{\mathbf{e}_{21} \cdot \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_{13} \cdot \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{32} \cdot \mathbf{e}_{32}\}$$

определяется соотношениями

$$\mathbf{e}_{21} \cdot \mathbf{e}_{21} = \mathbf{e}_{13} \cdot \mathbf{e}_{13} = \mathbf{e}_{32} \cdot \mathbf{e}_{32} = -1.$$

Таким образом,

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} \sim \{-1, -1, -1\}.$$

Контравариантный метрический тензор  $g^{\alpha\beta}$  определяется соотношением

$$g^{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha.$$

Структурные постоянные  $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ , определяющие векторное произведение векторов,

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = g^{\gamma\gamma} \cdot \varepsilon_{\gamma\alpha\beta},$$

где  $\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}$  – антисимметричный единичный числовой тензор третьего ранга. Для него

$$\varepsilon_{\gamma\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\beta\gamma\alpha} = -\varepsilon_{\gamma\beta\alpha} = -\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} = 1.$$

### 1.1. Квадрат линейного элемента в алгебре ${}_rU$

Введем в алгебре  ${}_rU$  линейный элемент

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_{\alpha} \cdot dx^{\alpha}$$

и рассмотрим квадрат линейного элемента

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = g_{\alpha\beta} \cdot dx^{\alpha} \cdot dx^{\beta} = -\delta_{\alpha\beta} \cdot dx^{\alpha} \cdot dx^{\beta}.$$

Введем координату длины вектора  $\mathbf{x}$ , обозначив ее  $x^0$  и подчинив ее следующим условиям:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_0 \cdot dx^0 \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = -1.$$

Тогда получим соотношение

$$(dx^0)^2 = \delta_{\alpha\beta} \cdot dx^{\alpha} \cdot dx^{\beta}, \quad (97)$$

которое оправдывает название координаты  $x^0$ .

### 1.2. $\theta$ -параметры

Наряду с координатами  $x^{\alpha}$  и  $x^0$  будем рассматривать  $\theta$ -параметры в соответствии с определениями

$$\theta^{\alpha} = \Phi \cdot x^{\alpha} \quad \text{и} \quad \theta^0 = \Phi \cdot x^0, \quad (98)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\chi\varepsilon_0}}.$$

С помощью  $\theta$ -параметров квадрат линейного элемента (97) записывается следующим образом:

$$(d\theta^0)^2 = \delta_{\alpha\beta} \cdot d\theta^{\alpha} \cdot d\theta^{\beta}.$$

### 1.3. Оператор набла в алгебре ${}_rU$

В алгебре  ${}_rU$  введем оператор набла  $\nabla$  в соответствии с определением

$$\nabla = \frac{\delta}{\partial x} = \mathbf{e}_{\alpha} \frac{\delta}{\partial x_{\alpha}} = \mathbf{e}_{\alpha} g^{\alpha\beta} \frac{\delta}{\partial x^{\beta}}. \quad (99)$$

Этим оператором мы воспользуемся для определения компонент потенциала электро-гравитационного поля.

## 2. Восьмимерное пространство-время

Введем восьмимерное векторное пространство  $X_8$  как обобщение пятимерного пространства-времени  $X_5$ .

Векторы в пространстве-времени  $X_8$  имеют восемь координат. К ним относятся координаты геометрического пространства  $x^a$ , координата вдоль оси времени  $x^4 = ct$ , координата длины вектора  $x^0$  и три координаты правых поворотов в плоскостях 21, 13, 32 –  $x^{\alpha}$ . Для указанных координат введем общее обозначение<sup>18</sup>  $x^A$ . В результате имеем

$$x^A \sim \{x^a, x^4, x^0, x^{\alpha}\}.$$

В качестве базисных векторов  $\mathbf{e}_A$  в пространстве-времени  $X_8$  рассматриваются базисные векторы геометрического пространства  $\mathbf{e}_a$ , вектор  $\mathbf{e}_4$ , нумерующий векторы вдоль четвертого направления, вектор  $\mathbf{e}_0 \equiv \mathbf{e}_0$  и базисные векторы  $\mathbf{e}_{\alpha} \equiv \mathbf{e}_{\alpha}$ .

$$\mathbf{e}_A \sim \{\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_{\alpha}\}.$$

Восьмимерный вектор  $\mathbf{x}$  пространства-времени  $X_8$  разлагается по базисным векторам так:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_A \cdot x^A \equiv \mathbf{e}_a \cdot x^a + \mathbf{e}_4 \cdot x^4 + \mathbf{e}_0 \cdot x^0 + \mathbf{e}_{\alpha} \cdot x^{\alpha}.$$

С помощью  $\theta$ -параметров (98) набор координат в  $X_8$  записывается следующим образом:

$$x^A \sim \{x^a, ct, \frac{\theta}{\Phi}, \frac{\theta^{\alpha}}{\Phi}\}. \quad (100)$$

Пространство-время  $X_8$  наделяется скалярным произведением векторов. Скалярное произведение базисных векторов определяет ковариантный метрический тензор

$$g_{AB} = \mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B \sim \{g_{ab}, \mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0, g_{\alpha\beta}\}$$

или

$$g_{AB} \sim \{\delta_{ab}, -1, -1, -\delta_{\alpha\beta}\}.$$

Контравариантный метрический тензор  $g^{AB}$  определяется соотношением

$$g^{AB} \cdot g_{BC} = \delta_C^A.$$

Он имеет компоненты

$$g^{AB} \sim \{g^{ab}, g^{44}, g^{00}, g^{\alpha\beta}\} = \{\delta^{ab}, -1, -1, -\delta^{\alpha\beta}\}.$$

<sup>18</sup> Далее индексы  $A, B, C$  принимают значения 1, 2, 3, 4, 0, 21, 13, 32.

### 3. Компоненты электро-гравитационного потенциала

#### 3.1. Ковариантные потенциалы

Ковариантные электромагнитные потенциалы в безразмерной форме запишем следующим образом<sup>19</sup>:

$$(A_i^\alpha)_{\text{безраз}} = \frac{\delta x^\alpha}{\partial x^i}.$$

Введем ковариантные гравитационные потенциалы в безразмерной форме

$$(A_0)_{\text{безраз}} \quad \text{и} \quad (A_\alpha)_{\text{безраз}},$$

используя оператор набла (99).

Первую компоненту  $(A_0)_{\text{безраз}}$  определим через указанное ниже скалярное произведение

$$\begin{aligned} (A_0)_{\text{безраз}} &= \nabla \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_\alpha g^{\alpha\alpha} \frac{\delta}{\partial x^\alpha} (\mathbf{e}_\beta \cdot x^\beta) = \\ &= g_{\alpha\beta} g^{\alpha\alpha} \frac{\delta x^\beta}{\partial x^\alpha} = \frac{\delta x^\alpha}{\partial x^\alpha}. \end{aligned}$$

Три другие компоненты  $(A_\alpha)_{\text{безраз}}$  определим как координаты нижеуказанного векторного произведения

$$\begin{aligned} (A)_{\text{безраз}} &= \nabla \times \mathbf{x} = \left( \mathbf{e}_\beta g^{\beta\beta} \frac{\delta}{\partial x^\beta} \right) \times (\mathbf{e}_\gamma \cdot x^\gamma) = \\ &= \mathbf{e}_\alpha g^{\alpha\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta x^\beta}{\partial x^\gamma} g^{\gamma\gamma}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(A_\alpha)_{\text{безраз}} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta x^\beta}{\partial x^\gamma} g^{\gamma\gamma}.$$

Отсюда для  $(A_{21})_{\text{безраз}}$  имеем

$$(A_{21})_{\text{безраз}} = \varepsilon_{21,32,13} \frac{\delta x^{32}}{\partial x^{13}} g^{13,13} + \varepsilon_{21,13,32} \frac{\delta x^{13}}{\partial x^{32}} g^{32,32}.$$

Учитывая, что

$$\varepsilon_{21,32,13} = -\varepsilon_{21,13,32} = 1, \quad g^{13,13} = g^{32,32} = -1,$$

получим

$$(A_{21})_{\text{безраз}} = \frac{\delta x^{13}}{\partial x^{32}} - \frac{\delta x^{32}}{\partial x^{13}}.$$

Аналогично вычисляются

$$(A_{13})_{\text{безраз}} = \frac{\delta x^{32}}{\partial x^{21}} - \frac{\delta x^{21}}{\partial x^{32}}$$

и

$$(A_{32})_{\text{безраз}} = \frac{\delta x^{21}}{\partial x^{13}} - \frac{\delta x^{13}}{\partial x^{21}}.$$

В результате имеем следующий набор компонент электро-гравитационного потенциала:

$$(A_A)_{\text{безраз}} \sim \{A_a^\beta, A_4^\beta, A_0, A_\alpha\}_{\text{безраз}}.$$

Далее выполним двухэтапное преобразование. Сначала перейдем от безразмерных компонент  $(A_A)_{\text{безраз}}$  к размерным компонентам  $A_A$  в соответствии с соотношением

$$A_A = \Phi \cdot (A_A)_{\text{безраз}}.$$

Затем перейдем от размерных компонент  $A_A$  к компонентам электрического потенциала  $\varphi^\beta$ , компонентам магнитного потенциала  $\mathbf{A}_a^\beta$  и компонентам гравитационного потенциала  $\mathbf{G}_0$  и  $\mathbf{G}_\alpha$  в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} A_a^\beta &= \Phi \cdot (A_a^\beta)_{\text{безраз}} = c \mathbf{A}_a^\beta, \\ A_4^\beta &= \Phi \cdot (A_4^\beta)_{\text{безраз}} = \varphi^\beta, \\ A_0 &= \Phi \cdot (A_0)_{\text{безраз}} = \Phi \cdot c \cdot \mathbf{G}_0, \\ A_\alpha &= \Phi \cdot (A_\alpha)_{\text{безраз}} = \Phi \cdot c \cdot \mathbf{G}_\alpha. \end{aligned}$$

В результате набор ковариантных компонент электро-гравитационного потенциала приобретает вид:

$$A_A \sim \{c \mathbf{A}_a^\beta, \varphi^\beta, \Phi \cdot c \cdot \mathbf{G}_0, \Phi \cdot c \cdot \mathbf{G}_\alpha\}. \quad (101)$$

#### 3.2. Контравариантные потенциалы

Контравариантные компоненты электро-гравитационного потенциала образуются из ковариантных компонент путем поднятия и опускания соответствующих индексов и записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A^A &\sim \{A_\beta^a, A_\beta^4, A^0, A^\alpha\} = \\ &= \{c \mathbf{A}_\beta^a, \varphi_\beta, \Phi \cdot c \cdot \mathbf{G}^0, \Phi \cdot c \cdot \mathbf{G}^\alpha\}. \end{aligned} \quad (102)$$

Выражение ковариантных компонент через контравариантные компоненты выполняется на основании следующих соотношений:

$$\begin{aligned} A_a^\beta &= g^{\beta\beta} A_\beta^a g_{aa} = -A_\beta^a, \\ A_4^\beta &= g^{\beta\beta} A_\beta^4 g^{44} = A_\beta^4, \\ A_0 &= g_{00} A^0 = -A^0, \\ A_\alpha &= g^{\alpha\alpha} A^\alpha = -A^\alpha. \end{aligned}$$

<sup>19</sup> Эти потенциалы обобщают ранее рассмотренный электромагнитный потенциал

$$(A_i)_{\text{безраз}} = \frac{\delta x^{21}}{\partial x^i}.$$



## 3.3. Обобщенная калибровка Лоренца

Обобщим калибровку Лоренца (56) для электро-гравитационного потенциала и запишем ее следующим образом:

$$\frac{\partial A^A}{\partial x^A} = 0. \quad (103)$$

Раскроем это уравнение, пользуясь координатами вектора пространства-времени (100) и координатами пятимерного электромагнитного потенциала (102)

$$\frac{\partial A^a}{\partial x^a} + \frac{\partial A^4}{\partial x^4} + \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

или

$$c \frac{\partial \mathbf{A}_\beta^a}{\partial x^a} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t} + \Phi \frac{\partial (c \cdot \Phi \cdot \mathbf{G}^0)}{\partial \theta} + \Phi \frac{\partial (c \cdot \Phi \cdot \mathbf{G}^\alpha)}{\partial \theta^\alpha} = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial \mathbf{A}_\beta^a}{\partial x^a} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial \theta^\alpha} = 0, \quad (104)$$

и с учетом выражений (1) и (3)

$$\frac{\partial \mathbf{A}_\beta^a}{\partial x^a} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t} + \frac{1}{2\chi \cdot \varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta} + \frac{1}{2\chi \cdot \varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial \theta^\alpha} = 0. \quad (105)$$

## 4. Восьмимерный вектор плотности тока

Из формулы (49) следует выражение для электрического заряда в пятимерной теории

$$q_{21} = c \cdot \frac{\partial S_1}{\delta \theta^{21}}.$$

При обращении к трехмерной алгебре правых поворотов  ${}_r U$  это выражение необходимо обобщить и записать

$$q_\alpha = c \cdot \frac{\partial S_1}{\delta \theta^\alpha}.$$

То есть, при обращении к алгебре  ${}_r U$  заряд необходимо рассматривать как векторную трехкомпонентную величину

$$\mathbf{q} = \mathbf{e}_\alpha g^{\alpha\alpha} q_\alpha.$$

Плотность заряда также должна рассматриваться как вектор

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \mathbf{e}_\alpha g^{\alpha\alpha} \frac{dq_\alpha}{dV} = \mathbf{e}_\alpha g^{\alpha\alpha} \rho_\alpha.$$

Четыре координаты плотности электромагнитного тока определим, обобщая соотношение (40)

$$j_\beta^i = \rho_\beta \cdot \frac{dx^i}{dx^4}. \quad (106)$$

Отсюда

$$j_\beta^a = \frac{\rho_\beta}{c} \cdot \frac{dx^a}{dt} = \frac{1}{c} \mathbf{j}_\beta^a, \quad j_\beta^4 = \rho_\beta \frac{dx^4}{dx^4} = \rho_\beta, \quad (107)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{j}_\beta^a = \rho_\beta \frac{dx^a}{dt}.$$

Четыре координаты плотности гравитационного тока  $j^0$  и  $j^\alpha$  определим, используя скалярное и векторное произведения. Первую координату  $j^0$  определим через указанное ниже скалярное произведение

$$j^0 = \rho \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dx^4} = g^{\alpha\alpha} \rho_\alpha (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) \frac{dx^\beta}{dx^4} = \rho_\alpha \cdot \frac{dx^\alpha}{dx^4}$$

или с использованием  $\theta$ -параметров (98)

$$j^0 = \rho_\alpha \frac{dx^\alpha}{dx^4} = \frac{\rho_\alpha}{\Phi c} \frac{d\theta^\alpha}{dt} = \frac{1}{\Phi c} \mathbf{j}^0, \quad (108)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{j}^0 = \rho_\alpha \frac{d\theta^\alpha}{dt}.$$

Три другие координаты  $j^\alpha$  определим как координаты нижеследующего векторного произведения:

$$\mathbf{j} = \rho \times \frac{d\mathbf{x}}{dx^4} = g^{\beta\beta} \rho_\beta (\mathbf{e}_\beta \times \mathbf{e}_\gamma) \frac{dx^\gamma}{dx^4} = g^{\beta\beta} \rho_\beta \mathbf{e}_\alpha C^{\alpha\beta\gamma} \frac{dx^\gamma}{dx^4}.$$

Отсюда

$$j^\alpha = \rho_\beta g^{\beta\beta} g^{\alpha\alpha} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{dx^\gamma}{dx^4}$$

или с использованием  $\theta$ -параметров (98)

$$j^\alpha = \frac{\rho_\beta}{\Phi c} g^{\beta\beta} g^{\alpha\alpha} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{d\theta^\gamma}{dt} = \frac{1}{\Phi c} \mathbf{j}^\alpha, \quad (109)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{j}^\alpha = \rho_\beta g^{\beta\beta} g^{\alpha\alpha} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{d\theta^\gamma}{dt}.$$

Таким образом, для координат восьмимерного вектора плотности тока имеем

$$j^A \sim \left\{ \frac{1}{c} \mathbf{j}_\beta^a, \rho_\beta, \frac{1}{c\Phi} \mathbf{j}^0, \frac{1}{c\Phi} \mathbf{j}^\alpha \right\}. \quad (110)$$

## 4.1. Обобщенный закон сохранения заряда

Обобщим закон сохранения заряда (61) для восьмимерной плотности тока и запишем его следующим образом:

$$\frac{\partial j^A}{\partial x^A} = 0 \quad (111)$$

или

$$\frac{\partial j_\beta^a}{\partial x^a} + \frac{\partial j_\beta^4}{\partial x^4} + \frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Используя выражение (110), запишем закон сохранения заряда (111) через координаты плотности тока  $\mathbf{j}_\beta^a$  и  $\theta$ -параметры. Получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}_\beta^a}{\partial x^a} + \frac{\partial \rho_\beta}{\partial (ct)} + \frac{1}{c\Phi} \frac{\partial \mathbf{j}^0}{\partial \theta^0} \Phi + \frac{1}{c\Phi} \frac{\partial \mathbf{j}^\alpha}{\partial \theta^\alpha} \Phi = 0$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{j}_\beta^a}{\partial x^a} + \frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{j}^0}{\partial \theta^0} + \frac{\partial \mathbf{j}^\alpha}{\partial \theta^\alpha} = 0. \quad (112)$$

### 5. Тензор электро-гравитационного поля

Введем антисимметричный тензор второго ранга, который обозначим  $F^{AB}$  и назовем тензором электро-гравитационного поля. Рассматривая этот тензор как обобщение тензора электро-гравитационного поля (63), будем полагать

$$F^{AB} = \frac{\partial A^B}{\partial x_A} - \frac{\partial A^A}{\partial x_B} = g^{AA} \frac{\partial A^B}{\partial x^A} - g^{BB} \frac{\partial A^A}{\partial x^B}. \quad (113)$$

Разобьем тензор электро-гравитационного поля на четыре компоненты

$$F^{AB} \sim \{F^{4B}, F^{aB}, F^{0B}, F^{\alpha B}\}$$

и вычислим каждую из этих компонент.

#### 1. $F^{4B}$ .

Эта компонента включает три составляющих

$$F^{4B} \sim \{F^{4b}, F^{40}, F^{4\beta}\}.$$

##### 1.1. $F^{4b}$ .

Используя выражения (100), получим

$$F^{4b} = g^{44} \frac{\partial A_\gamma^b}{\partial x^4} - \frac{\partial A_\gamma^4}{\partial x_b} = -\frac{\partial A_\gamma^b}{c \partial t} - \frac{\partial A_\gamma^4}{\partial x_b}. \quad (114)$$

Используя выражения (101), получим

$$F^{4b} = -\frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_b}. \quad (115)$$

##### 1.2. $F^{40}$ .

Используя выражения (100), получим

$$F^{40} = g^{44} \frac{\partial A^0}{\partial x^4} - g^{00} \frac{\partial A_\gamma^4}{\partial x^0} = -\frac{\partial A^0}{c \partial t} + \Phi \frac{\partial A_\gamma^4}{\partial \theta^0}. \quad (116)$$

Используя выражения (101), получим

$$F^{40} = \Phi \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \theta^0} \right). \quad (117)$$

##### 1.3. $F^{4\beta}$ .

Используя выражения (100), получим

$$F^{4\beta} = g^{44} \frac{\partial A^\beta}{\partial x^4} - g^{\beta\beta} \frac{\partial A_\gamma^4}{\partial x^\beta} = -\frac{\partial A^\beta}{c \partial t} + \Phi \frac{\partial A_\gamma^4}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta}. \quad (118)$$

Используя выражения (101), получим

$$F^{4\beta} = \Phi \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta} \right). \quad (119)$$

#### 2. $F^{aB}$ .

Эта компонента включает четыре составляющих

$$F^{aB} \sim \{F^{ab}, F^{a4}, F^{a0}, F^{a\beta}\}.$$

##### 2.1. $F^{ab}$ .

Используя выражения (101) и (102), получим

$$F^{ab} = \frac{\partial A_\gamma^b}{\partial x_a} - \frac{\partial A_\gamma^a}{\partial x_b} = c \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial x_a} - \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial x_b} \right). \quad (120)$$

##### 2.2. $F^{a4}$ .

Эта составляющая отличается от выражения (115) знаком

$$F^{a4} = \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_a}. \quad (121)$$

##### 2.3. $F^{a0}$ .

Используя выражения (101), получим

$$F^{a0} = \frac{\partial A^0}{\partial x_a} - g^{00} \frac{\partial A_\gamma^a}{\partial x^0} = \frac{\partial A^0}{\partial x_a} + \Phi \frac{\partial A_\gamma^a}{\partial \theta^0}. \quad (122)$$

Используя выражения (102), получим

$$F^{a0} = c \Phi \left( \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial x_a} + \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial \theta^0} \right). \quad (123)$$

##### 2.4. $F^{a\beta}$ .

Используя выражения (101), получим

$$F^{a\beta} = \frac{\partial A^\beta}{\partial x_a} - g^{\beta\beta} \frac{\partial A_\gamma^a}{\partial x^\beta} = \frac{\partial A^\beta}{\partial x_a} + \Phi \frac{\partial A_\gamma^a}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta}. \quad (124)$$

Используя выражения (102), получим

$$F^{a\beta} = c \Phi \left( \frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial x_a} + \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta} \right). \quad (125)$$

#### 3. $F^{0B}$ .

Эта компонента включает три составляющих

$$F^{0B} \sim \{F^{0b}, F^{04}, F^{0\beta}\}.$$

##### 3.1. $F^{0b}$ .

Эта составляющая отличается от выражения (123) знаком

$$F^{0b} = c \Phi \left( -\frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial \theta^0} - \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial x_b} \right). \quad (126)$$

3.2.  $F^{04}$ .

Эта составляющая отличается от выражения (117) знаком

$$F^{04} = \Phi \left( \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \theta^0} \right). \quad (127)$$

3.3.  $F^{0\beta}$ .

Используя выражения (101), получим

$$F^{0\beta} = g^{00} \frac{\partial A^\beta}{\partial x^0} - g^{\beta\beta} \frac{\partial A^0}{\partial x^\beta} = -\Phi \frac{\partial A^\beta}{\partial \theta^0} + \Phi \frac{\partial A^0}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta}. \quad (128)$$

Используя выражения (102), получим

$$F^{0\beta} = \Phi^2 c \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial \theta^0} + \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta} \right). \quad (129)$$

4.  $F^{\alpha B}$ .

Эта компонента включает четыре составляющих

$$F^{\alpha B} \sim \{F^{\alpha b}, F^{\alpha 4}, F^{\alpha 0}, F^{\alpha \beta}\}.$$

4.1.  $F^{\alpha b}$ .

Эта составляющая отличается от выражения (125) знаком

$$F^{\alpha b} = c \Phi \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial x_b} - \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial \theta^\alpha} \delta^{\alpha\alpha} \right). \quad (130)$$

4.2.  $F^{\alpha 4}$ .

Эта составляющая отличается от выражения (119) знаком

$$F^{\alpha 4} = \Phi \left( \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \theta^\alpha} \delta^{\alpha\alpha} \right). \quad (131)$$

4.3.  $F^{\alpha 0}$ .

Эта составляющая отличается от выражения (129) знаком

$$F^{\alpha 0} = \Phi^2 c \left( \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial \theta^0} - \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta^\alpha} \delta^{\alpha\alpha} \right). \quad (132)$$

4.4.  $F^{\alpha\beta}$ .

Используя выражения (101), получим

$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\alpha} \frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} - g^{\beta\beta} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} = -\Phi \frac{\partial A^\beta}{\partial \theta^\alpha} \delta^{\alpha\alpha} + \Phi \frac{\partial A^\alpha}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta}. \quad (133)$$

Используя выражения (102), получим

$$F^{\alpha\beta} = c \Phi^2 \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial \theta^\alpha} \delta^{\alpha\alpha} + \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta} \right). \quad (134)$$

## 6. Уравнения электро-гравитационного поля

Уравнения электро-гравитационного поля введем как обобщение уравнений (75) на восьмимерный случай

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{AB} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^A. \quad (135)$$

Разобьем это уравнение на четыре

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{4B} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^4, \quad (136)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{\alpha B} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^\alpha, \quad (137)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{0B} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^0, \quad (138)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^B} F^{\alpha B} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^\alpha, \quad (139)$$

и рассмотрим каждое из уравнений в отдельности.

## 6.1. Первое уравнение

Запишем первое уравнение (136), раскрывая суммирование

$$\frac{\partial}{\partial x^b} F^{4b} + \frac{\partial}{\partial x^0} F^{40} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F^{4\beta} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^4. \quad (140)$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя сначала выражение (100) а затем выражения (115), (117) и (119)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{4B} &= \frac{\partial}{\partial x^b} F^{4b} + \Phi \frac{\partial}{\partial \theta^0} F^{40} + \Phi \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} F^{4\beta} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^b} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_b} \right) + \Phi^2 \frac{\partial}{\partial \theta^0} \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \theta^0} \right) + \\ &+ \Phi^2 \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta} \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{4B} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial x^b} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta^0} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial \theta^\beta} \right) - \\ &- \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x^b \partial x_b} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial (\theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial (\theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Учитывая обобщенную калибровку Лоренца (104), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{4B} &= \\ &= -\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial (\theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial (\theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в выражение (140) и учитывая (110), получим первое уравнение электро-гравитационного поля

$$-\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial (\theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial (\theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho_\gamma. \quad (141)$$

Пользуясь соотношениями (1) и (3), запишем первое уравнение в другом виде:

$$-\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x^b \partial x_b} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial t^2} + \frac{1}{2\chi \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial (\theta^0)^2} + \frac{1}{2\chi \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial (\theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho_\gamma. \quad (142)$$

Каждый из трех ( $\gamma$ ) электрических зарядов ( $\rho_\gamma$ ) является источником поля соответствующего электрического потенциала ( $\varphi_\gamma$ ).

### 6.2. Второе уравнение

Запишем второе уравнение (137), раскрывая суммирование

$$\frac{\partial}{\partial x^b} F^{ab} + \frac{\partial}{\partial x^4} F^{a4} + \frac{\partial}{\partial x^0} F^{a0} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F^{a\beta} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^a. \quad (143)$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя сначала выражение (100) а затем выражения (120), (121), (123) и (125)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{aB} &= \frac{\partial}{\partial x^b} F^{ab} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F^{a4} + \Phi \frac{\partial}{\partial \theta^0} F^{a0} + \Phi \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} F^{a\beta} = \\ &= c \frac{\partial}{\partial x^b} \left( \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial x_a} - \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial x_b} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_a} \right) + \\ &+ c \Phi^2 \frac{\partial}{\partial \theta^0} \left( \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial x_a} + \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial \theta^0} \right) + c \Phi^2 \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \left( \frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial x_a} + \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta} \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{aB} &= c \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial x^b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial t} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta^0} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial \theta^\beta} \right) + \\ &+ c \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} \right). \end{aligned}$$

Учитывая обобщенную калибровку Лоренца (104), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{aB} &= \\ &= c \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} \right). \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в выражение (143), и учитывая выражение (110), получим второе уравне-

ние электро-гравитационного поля:

$$\begin{aligned} c \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} \right) = \\ = \frac{1}{\varepsilon_0 c} \cdot \mathbf{j}_\gamma^a \end{aligned}$$

или

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \cdot \mathbf{j}_\gamma^a$$

или с учетом выражения (1)

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} = \mu_0 \cdot \mathbf{j}_\gamma^a. \quad (144)$$

Пользуясь соотношениями (1) и (3), запишем второе уравнение в другом виде:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial x^b \partial x_b} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial t^2} + \frac{1}{2\chi \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^0)^2} + \\ + \frac{1}{2\chi \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\gamma^a}{\partial (\theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} = \mu_0 \cdot \mathbf{j}_\gamma^a. \end{aligned} \quad (145)$$

Каждый из трех ( $\gamma$ ) токов ( $\mathbf{j}_\gamma^a$ ) является источником поля соответствующего магнитного потенциала ( $\mathbf{A}_\gamma^a$ ).

### 6.3. Третье уравнение

Запишем третье уравнение (138), раскрывая суммирование

$$\frac{\partial}{\partial x^b} F^{0b} + \frac{\partial}{\partial x^4} F^{04} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F^{0\beta} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^0. \quad (146)$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя сначала выражение (100) а затем выражения (126), (127) и (129)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{0B} &= \frac{\partial}{\partial x^b} F^{0b} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F^{04} + \Phi \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} F^{0\beta} = \\ &= c \Phi \frac{\partial}{\partial x^b} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial \theta^0} - \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial x_b} \right) + \frac{\Phi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \theta^0} \right) + \\ &+ c \Phi^3 \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial \theta^0} + \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta} \right). \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{0B} &= -c \Phi \frac{\partial}{\partial \theta^0} \left( \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial x^b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial t} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial \theta^\beta} \right) - \\ &- c \Phi \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{\Phi}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + c \Phi^3 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial (\theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Учитывая обобщенную калибровку Лоренца (104), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{AB} &= \\ &= c \Phi \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} \right). \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в выражение (146), и учитывая соотношение (110), получим третье уравнение электро-гравитационного поля

$$\begin{aligned} c \Phi \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} \right) &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 c \Phi} \cdot \mathbf{j}^0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2 \Phi^2} \cdot \mathbf{j}^0 \end{aligned}$$

или с учетом выражения (3)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} &= \\ &= \frac{2\chi}{c^2} \cdot \mathbf{j}^0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение для  $\chi$

$$\chi = \frac{2G}{c^4},$$

получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^0}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} &= \\ &= G \frac{4\mathbf{j}^0}{c^6}. \end{aligned} \quad (147)$$

Введем гравитационный потенциал

$$\varphi_r^0 = c^3 \cdot \mathbf{G}^0.$$

в соответствии с формулой (91) и эквивалентную массу

$$\mu_\varepsilon = \frac{w^0}{c^2}, \quad \text{где } w^0 = \frac{4\mathbf{j}^0}{c}$$

в соответствии с формулами (96) и (95) и преобразуем уравнение (147) следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \varphi_r^0}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_r^0}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi_r^0}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi_r^0}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} &= \\ &= G \mu_\varepsilon. \end{aligned} \quad (148)$$

Отсюда видно, что третье уравнение представляет собой уравнение гравитационного поля потенциала  $\varphi_r^0$ , источником которого является электрический

заряд. Пользуясь соотношениями (1) и (3), запишем гравитационное уравнение в другом виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \varphi_r^0}{\partial x^b \partial x_b} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi_r^0}{\partial t^2} + \frac{1}{2\chi \varepsilon_0 (\partial \theta^0)^2} + \\ + \frac{1}{2\chi \varepsilon_0 (\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} = G \mu_\varepsilon. \end{aligned} \quad (149)$$

#### 6.4. Четвертое уравнение

Запишем четвертое уравнение (139), раскрывая суммирование

$$\frac{\partial}{\partial x^b} F^{\alpha b} + \frac{\partial}{\partial x^4} F^{\alpha 4} + \frac{\partial}{\partial x^0} F^{\alpha 0} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F^{\alpha \beta} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot j^\alpha. \quad (150)$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя сначала выражение (100), а затем выражения (120), (121), (123) и (125):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{\alpha B} &= \frac{\partial}{\partial x^b} F^{\alpha b} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F^{\alpha 4} + \Phi \frac{\partial}{\partial \theta} F^{\alpha 0} + \Phi \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} F^{\alpha \beta} = \\ &= c \Phi \frac{\partial}{\partial x^b} \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial x_b} - \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial \theta^\alpha} \delta^{\alpha\alpha} \right) + \\ &+ \frac{\Phi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \theta^\alpha} \delta^{\alpha\alpha} \right) + \\ &+ c \Phi^3 \frac{\partial}{\partial \theta^0} \left( \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial \theta^0} - \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta^\alpha} \delta^{\alpha\alpha} \right) + \\ &+ c \Phi^3 \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \left( -\frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial \theta^\alpha} \delta^{\alpha\alpha} + \frac{\partial \mathbf{G}^\alpha}{\partial \theta^\beta} \delta^{\beta\beta} \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{\alpha B} &= \\ &= -c \Phi \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{A}_\gamma^b}{\partial x^b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial t} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^0}{\partial \theta^0} + \Phi^2 \frac{\partial \mathbf{G}^\beta}{\partial \theta^\beta} \right) \delta^{\alpha\alpha} + \\ &+ c \Phi \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} \right). \end{aligned}$$

Учитывая обобщенную калибровку Лоренца (104), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^B} F^{\alpha B} &= \\ &= c \Phi \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} \right). \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в выражение (150), и учитывая соотношение (110), получим четвертое уравнение электро-гравитационного поля:

$$\begin{aligned} c \Phi \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} \right) &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 c \Phi} \cdot \mathbf{j}^\alpha \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} = \\ = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2 \Phi^2} \cdot \mathbf{j}^\alpha \end{aligned}$$

или с учетом соотношения (3)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} = \\ = \frac{2\chi}{c^2} \cdot \mathbf{j}^\alpha. \end{aligned} \quad (151)$$

Подставляя сюда выражение для  $\chi$

$$\chi = \frac{2G}{c^4},$$

получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{G}^\alpha}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} = \\ = G \frac{4\mathbf{j}^\alpha}{c^6}. \end{aligned} \quad (152)$$

Введем трехкомпонентный гравитационный потенциал

$$\varphi_\Gamma^\alpha = c^3 \cdot \mathbf{G}^\alpha$$

и трехкомпонентную эквивалентную массу

$$\mu_\mathfrak{g}^\alpha = \frac{w^\alpha}{c^2}, \quad \text{где } w^\alpha = \frac{4\mathbf{j}^\alpha}{c}$$

и запишем уравнение (152) следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \varphi_\Gamma^\alpha}{\partial x^b \partial x_b} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_\Gamma^\alpha}{\partial t^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi_\Gamma^\alpha}{(\partial \theta^0)^2} + \Phi^2 \frac{\partial^2 \varphi_\Gamma^\alpha}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} = \\ = G \mu_\mathfrak{g}^\alpha. \end{aligned} \quad (153)$$

Отсюда видно, что четвертое уравнение представляет собой уравнение гравитационного поля трехкомпонентного потенциала  $\varphi_\Gamma^\alpha$ , источником которого является трехкомпонентный электрический заряд. Пользуясь соотношениями (1) и (3), запишем четвертое гравитационное уравнение в другом виде:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \varphi_\Gamma^\alpha}{\partial x^b \partial x_b} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi_\Gamma^\alpha}{\partial t^2} + \frac{1}{2\chi \varepsilon_\alpha} \frac{\partial^2 \varphi_\Gamma^\alpha}{(\partial \theta^0)^2} + \\ + \frac{1}{2\chi \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \varphi_\Gamma^\alpha}{(\partial \theta^\beta)^2} \delta^{\beta\beta} = G \mu_\mathfrak{g}^\alpha. \end{aligned} \quad (154)$$

## 7. Заключительные замечания

Результаты этого Раздела гармонируют с представлением о поколениях фундаментальных частиц, изложенном в Разделе IV Главы 4.2 и Разделе III Главы

4.4. Согласно настоящему Разделу существуют три разновидности электрического заряда  $q_{21}$ ,  $q_{13}$ ,  $q_{32}$ . Используя этот вывод и обращаясь к соображениям Раздела III Главы 4.4, необходимо заряд электрона отождествить с  $e_{21}$ , заряд мюона отождествить с  $e_{13}$ , а заряд тау-лептона отождествить с  $e_{32}$ .

Далее результаты настоящего Раздела позволяют объяснить различие масс фундаментальных частиц одного аромата, но разных поколений. В частности, массу электрона или ее часть необходимо отождествить с компонентой эквивалентной массы  $m_\mathfrak{g}^{21}$ , массу мюона или ее часть необходимо отождествить с компонентой эквивалентной массы  $m_\mathfrak{g}^{13}$ , массу тау-лептона или ее часть необходимо отождествить с компонентой эквивалентной массы  $m_\mathfrak{g}^{32}$ .

## VIII. ЭКСТАЗ

Утром из подмосковного космопорта стартует аппарат. Без грохота, огня и перегрузок, отталкиваясь от Земли. В аппарате семья, решившая провести выходной на Луне. Полпути аппарат движется ускоренно, а полпути замедленно. В обоих случаях ускорение равно  $g$ , поэтому путешественники не испытывают дискомфорта, связанного с невесомостью. Время полета до Луны составляет 2 часа. Развлекшись и сняв лунный закат, семья к вечеру возвращается домой<sup>20</sup>.

## IX. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Вводимую в теории Калуцы пятую координату необходимо отождествить с правым углом поворота в плоскости 21.
- Отказ от усиленного условия цилиндричности<sup>21</sup> приводит к необходимости введения нового  $G$ -поля и введения нового взаимодействия между зарядами, движущимися вдоль пятой координаты.
- Вышеуказанное новое взаимодействие между зарядами, движущимися вдоль пятой координаты, есть гравитационное взаимодействие.
- $G$ -поле осуществляет также взаимодействие между зарядом, движущимся вдоль пятой координаты, и массой.

<sup>20</sup> Это парафраз на Экстаз М. А. Булгакова: "Москва! Я вижу тебя в небоскребах!" (М. А. Булгаков, "Накануне", 12 июня 1924)

<sup>21</sup> Усиленное условие цилиндричности – это условие цилиндричности (то есть, условие независимости физических величин от пятой координаты), дополненное требованием  $g_{00} = 1$ .

- Положительный заряд, движущийся вдоль пятой координаты, отталкивается от массы. В результате имеет место явление, названное здесь *антигравитацией*.
- Пятимерная теория гравитации и электромагнетизма допускает естественное обобщение, заключающееся в привлечении, помимо правых поворотов в плоскости 21 (помимо пятой координаты), правых поворотов в двух других плоскостях 13 и 32. Указанные повороты составляют алгебру  ${}_r U$ .
- Вышеуказанное обобщение приводит к необходимости введения трех типов электрических зарядов  $q_{21}$ ,  $q_{13}$ ,  $q_{32}$ , трех типов гравитационных  $G^\alpha$ -полей и трех типов эквивалентных масс  $m^{21}$ ,  $m^{13}$ ,  $m^{32}$ .
- Вышеуказанное обобщение подтверждает представление о поколениях фундаментальных частиц, изложенное в Разделе IV Главы 4.2 и Разделе III Главы 4.4. При этом заряд электрона необходимо отождествить с  $e_{21}$ , заряд мюона отождествить с  $e_{13}$ , а заряд тау-лептона отождествить с  $e_{32}$ . Представление о трех типах гравитационных  $G^\alpha$ -полей позволяет объяснить различие масс фундаментальных частиц одного аромата, но разных поколений. В частности, массу электрона или ее часть необходимо отождествить с компонентой эквивалентной массы  $m_3^{21}$ , массу мюона или ее часть необходимо отождествить с компонентой эквивалентной массы  $m_3^{13}$ , массу тау-лептона или ее часть необходимо отождествить с компонентой эквивалентной массы  $m_3^{32}$ .

# Часть 6

## Уравнения динамики

### Глава 6.1 Уравнения динамики I. Вариационный принцип

#### I. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ФИЗИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Рассмотрим преобразования левых динамических параметров физического объекта и левых кинематических переменных, имея в виду, что преобразования правых динамических параметров физического объекта и правых кинематических переменных устанавливаются аналогичным образом.

##### 1. Левые кинематические переменные

Левые кинематические переменные определены исходя из разложения левых координат искривленного пространства-времени в ряд Тейлора по координатам системы отсчета

$$y^I(x^K + dx^K) = y^I(x^K) + l^I_K \cdot dx^K + l^I_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + l^I_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} \dots, \quad (1)$$

Величины

$$y^I(x), \quad l^I_K(x), \quad l^I_{K_1K_2}(x), \quad l^I_{K_1K_2K_3}(x)$$

названы кинематическими переменными. Для удобства использования компактного изложения – изложения в безиндексной форме – выполним следующие переобозначения:

$$\begin{aligned} x^K &\rightarrow x_0^K, \\ y^I &\rightarrow x^I, \quad l^I_K \rightarrow l^I_K, \quad l^I_{K_1K_2} \rightarrow a^I_{K_1K_2}, \\ l^I_{K_1K_2K_3} &\rightarrow b^I_{K_1K_2K_3}. \end{aligned}$$

Таким образом, после переобозначения имеем следующие кинематические переменные:

$$x^I, \quad l^I_K, \quad a^I_{K_1K_2}, \quad b^I_{K_1K_2K_3}.$$

В безиндексной форме они записываются следующим образом:

$$x, \quad l, \quad a, \quad b.$$

Для их компактного обозначения введем символ  $z$ , то есть

$$z \sim (x, \quad l, \quad a).$$

Кинематические переменные  $z$  будем считать величинами, зависящими от других кинематических переменных, которые будем считать независимыми и обозначать

$$z_0 \sim (x_0, \quad l_0, \quad a_0).$$

Преобразование левых кинематических переменных в общем случае запишем так:

$$z = \mathcal{Z}(z_0)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{X}(x_0, l_0, a_0), \\ l &= \mathcal{L}(x_0, l_0, a_0), \\ a &= \mathcal{A}(x_0, l_0, a_0). \end{aligned}$$

Из выражения (1) следует связь между дифференциалами зависимых и независимых кинематических переменных

$$\begin{aligned} Dx &= l \cdot dx_0, \\ Dl &= dl_0 + a \cdot dx_0, \\ Da &= da_0 + b \cdot dx_0. \end{aligned} \quad (2)$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие производные

$$\begin{aligned} \frac{Dx}{\partial x_0}, \quad \frac{Dl}{\partial x_0}, \quad \frac{Da}{\partial x_0}, \\ \frac{Dx}{\partial l_0}, \quad \frac{Dl}{\partial l_0}, \quad \frac{Da}{\partial l_0}, \\ \frac{Dx}{\partial a_0}, \quad \frac{Dl}{\partial a_0}, \quad \frac{Da}{\partial a_0}. \end{aligned}$$

Вычислим их значения.

1.  $z(x_0)$

$$\frac{Dx}{\partial x_0} = l \quad \text{или} \quad \frac{Dy^I}{\partial x^K} = l^I_K.$$

$$\frac{Dl}{\partial x_0} = a \quad \text{или} \quad \frac{Dl^I_{K_1}}{\partial x^{K_2}} = l^I_{K_1K_2}.$$

$$\frac{Da}{\partial x_0} = b \quad \text{или} \quad \frac{Dl^I_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}} = l^I_{K_1K_2K_3}.$$



2.  $z(l_0)$

$$\frac{Dx}{\partial l_0} = 0.$$

$$\frac{Dl}{\partial l_0} = \delta \quad \text{или} \quad \frac{Dl^I_K}{\partial l_0^{M_N}} = \delta^I_M \cdot \delta^N_K.$$

$$\frac{Da}{\partial l_0} = 0.$$

3.  $z(a_0)$

$$\frac{Dx}{\partial a_0} = 0.$$

$$\frac{Dl}{\partial a_0} = 0.$$

$$\frac{Da}{\partial a_0} = \delta \quad \text{или} \quad \frac{Dl^I_{K_1 K_2}}{\partial l_0^{M_{N_1 N_2}}} = \delta^I_M \cdot \delta^{N_1}_{K_1} \cdot \delta^{N_2}_{K_2}.$$

## 2. Преобразования левых динамических параметров физического объекта

Рассмотрим действие<sup>1</sup> физического объекта как функцию кинематических переменных

$$S(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованное действие следующим образом:

$$S'(x, l, a).$$

Преобразование

$$S(x_0, l_0, a_0) \rightarrow S'(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$S(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} S(x, l, a) \xrightarrow{2} S'(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра – действия –  $S$ .

<sup>1</sup> Здесь и далее обозначение  $S$  и термин "действие" относятся к вектору действия.

Преобразование действия зададим в виде

$$S'(x, l, a) = \mathcal{S}(x, l, a, S(x, l, a))$$

с начальными условиями

$$S'(x, 1, 0) = \mathcal{S}(x, 1, 0, S(x, 1, 0)) = S(x, 1, 0).$$

Аналогичным образом введем преобразования других динамических параметров – импульса, момента и второго момента физического объекта

$$\begin{aligned} p(x, l, a) &= -P(S) = -\frac{\partial S(x, l, a)}{Dx}, \\ m(x, l, a) &= -M(S) = -\frac{\partial S(x, l, a)}{Dl}, \\ w(x, l, a) &= -W(S) = -\frac{\partial S(x, l, a)}{Da}. \end{aligned}$$

Эти преобразования зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} p'(z) &= \mathcal{P}(z, S(z), p(z), m(z), w(z)), \\ m'(z) &= \mathcal{M}(z, S(z), p(z), m(z), w(z)), \\ w'(z) &= \mathcal{W}(z, S(z), p(z), m(z), w(z)), \end{aligned}$$

где кинематические переменные  $(x, l, a)$  обозначены символом  $z$ . К преобразованиям динамических параметров необходимо добавить преобразования кинематических переменных:  $z = \mathcal{Z}(z_0)$  или в развернутом виде

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{X}(x_0, l_0, a_0), \\ l &= \mathcal{L}(x_0, l_0, a_0), \\ a &= \mathcal{A}(x_0, l_0, a_0). \end{aligned}$$

Назовем случай, когда  $z = (x)$ , *первым приближением*. В этом случае преобразования таковы:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \mathcal{S}(x, S(x)), \\ p'(x) &= \mathcal{P}(x, S(x), p(x)), \\ x(x_0) &= \mathcal{X}(x_0). \end{aligned}$$

Назовем случай, когда  $z = (x, l)$ , *вторым приближением*. В этом случае преобразования таковы:

$$\begin{aligned} S'(x, l) &= \mathcal{S}(x, l, S(x, l)), \\ p'(x, l) &= \mathcal{P}(x, l, S(x, l), p(x, l), m(x, l)), \\ m'(x, l) &= \mathcal{M}(x, l, S(x, l), p(x, l), m(x, l)), \\ x &= \mathcal{X}(x_0, l_0), \\ l &= \mathcal{L}(x_0, l_0). \end{aligned}$$

И, наконец, общий случай, когда  $z = (x, l, a)$ , назовем *третьим приближением*:

$$\begin{aligned} S'(z) &= \mathcal{S}(z, S(z)), \\ p'(z) &= \mathcal{P}(z, S(z), p(z), m(z), w(z)), \\ m'(z) &= \mathcal{M}(z, S(z), p(z), m(z), w(z)), \\ w'(z) &= \mathcal{W}(z, S(z), p(z), m(z), w(z)), \\ x &= \mathcal{X}(x_0, l_0, a_0), \\ l &= \mathcal{L}(x_0, l_0, a_0), \\ a &= \mathcal{A}(x_0, l_0, a_0). \end{aligned}$$

## II. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ И ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

### 1. Уравнения динамики параметров фундаментального объекта

Исходным для вывода уравнений динамики параметров фундаментального объекта является скалярное действие для фундаментального объекта

$$\mathcal{S}(x_0, l_0, a_0) = \int \mathcal{L}(x_0, l_0, a_0) \cdot d\Omega. \quad (3)$$

Здесь функция Лагранжа определяется следующим образом<sup>2</sup>:

$$\mathcal{L}(x_0, l_0, a_0) = -p_0(z(x_0)) - m_0(z(l_0)) - w_0(z(a_0)). \quad (4)$$

Определим каждое из слагаемых в правой части.

1.

$$p_0(z(x_0)) = -\frac{d}{dx_0} \cdot \mathbf{S}(z(x_0)).$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dx_0} = \mathbf{E}^I \cdot \frac{d}{dx_0^I},$$

а также

$$\mathbf{S}(z(x_0)) = \mathbf{e}_K \cdot S^K(z(x_0))$$

и скалярное произведение базисных векторов (формула (78) Главы 1.6.)

$$\mathbf{E}^I \cdot \mathbf{e}_K = \delta^K_I,$$

получим

$$p_0(z(x_0)) = -\frac{dS^K(z(x_0))}{dx_0^K}.$$

Отсюда в безиндексной форме

$$p_0(z(x_0)) = -\frac{\partial S(z)}{\partial x} \frac{Dx}{dx_0} - \frac{\partial S(z)}{\partial l} \frac{Dl}{dx_0} - \frac{\partial S(z)}{\partial a} \frac{Da}{dx_0},$$

или

$$p_0(z(x_0)) = p \frac{Dx}{dx_0} + m \frac{Dl}{dx_0} + w \frac{Da}{dx_0}.$$

Именно эти соотношения использовались в Главе 3.2.

<sup>2</sup> Заметим, функция Лагранжа, введенная в Главе 3.2. Раздел III., сводится к первому слагаемому в правой части соотношения (4)

$$\mathcal{L}(x_0) \equiv -p_0(z(x_0)).$$

2.

$$m_0(z(l_0)) = -\frac{d}{dl_0} \cdot \mathbf{S}(z(l_0)).$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dl_0} = \mathbf{K}^L_K \cdot \frac{d}{dl_0^L_K},$$

а также

$$\mathbf{S}(z(l_0)) = \mathbf{e}_N \cdot S^N(z(l_0))$$

и скалярное произведение базисных векторов (формула (79) Главы 1.6.)

$$\mathbf{K}^L_K \cdot \mathbf{e}_N = C^L_{KN},$$

получим

$$m_0(z(l_0)) = -C^L_{KN} \cdot \frac{dS^N(z(l_0))}{dl_0^L_K}.$$

Введем *вспомогательное* действие

$$S^L_K = C^L_{KN} \cdot S^N. \quad (5)$$

Используя его, получим

$$m_0(z(l_0)) = -\frac{dS^L_K(z(l_0))}{dl_0^L_K}. \quad (6)$$

В безиндексной форме, когда

$$S^L_K \sim S, \quad l_0^L_K \sim l_0,$$

имеем

$$m_0(z(l_0)) = -\frac{dS(z(l_0))}{dl_0},$$

или в развернутом виде

$$m_0(z(l_0)) = -\frac{\partial S(z)}{\partial x} \frac{Dx}{dl_0} - \frac{\partial S(z)}{\partial l} \frac{Dl}{dl_0} - \frac{\partial S(z)}{\partial a} \frac{Da}{dl_0}.$$

Основываясь на вспомогательном действии, введем *вспомогательный* импульс

$$p^L_{KI} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{\partial x^I} = C^L_{KN} \cdot p^N_I, \quad (7)$$

*вспомогательный* момент

$$m^L_{K^I P} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{\partial l^I_P} = C^L_{KN} \cdot m^{NP}_I \quad (8)$$

и *вспомогательный* второй момент

$$w^L_{K^I PQ} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{\partial a^I_{PQ}} = C^L_{KN} \cdot w^{NP}_{I}. \quad (9)$$

Введенные здесь вспомогательные динамические параметры  $S$ ,  $p$ ,  $m$ ,  $w$  позволяют в дальнейшем записать уравнения динамики линейного преобразования фундаментального объекта в унифицированном виде.

Используя вспомогательные динамические параметры в безиндексной форме, запишем

$$m_0(z(l_0)) = p \frac{Dx}{dl_0} + m \frac{Dl}{dl_0} + w \frac{Da}{dl_0}.$$

3.

$$w_0(z(a_0)) = -\frac{d}{da_0} \cdot S(z(a_0)).$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{da_0} = \mathbf{L}^{L_{KM}} \cdot \frac{d}{da_0^{L_{KM}}},$$

а также

$$\mathbf{S}(z(a_0)) = \mathbf{e}_N \cdot S^N(z(a_0))$$

и скалярное произведение базисных векторов (формула (80) Главы 1.6.)

$$\mathbf{L}^{L_{KM}} \cdot \mathbf{e}_N = C^{L_{KMN}},$$

получим

$$w_0(z(a_0)) = -C^{L_{KMN}} \cdot \frac{dS^N(z(a_0))}{da_0^{L_{KM}}}.$$

Введем *вспомогательное* действие

$$S^{L_{KM}} = C^{L_{KMN}} \cdot S^N. \quad (10)$$

Используя его, получим

$$w_0(z(a_0)) = -\frac{dS^{L_{KM}}(z(a_0))}{da_0^{L_{KM}}}. \quad (11)$$

В безиндексной форме, когда

$$S^{L_{KM}} \sim S, \quad a_0^{L_{KM}} \sim a_0,$$

имеем

$$w_0(z(a_0)) = -\frac{dS(z(a_0))}{da_0},$$

или в развернутом виде

$$w_0(z(a_0)) = -\frac{\partial S(z)}{\partial x} \frac{Dx}{da_0} - \frac{\partial S(z)}{\partial l} \frac{Dl}{da_0} - \frac{\partial S(z)}{\partial a} \frac{Da}{da_0}.$$

Основываясь на вспомогательном действии, введем *вспомогательный* импульс

$$p^{L_{KMI}} = -\frac{\partial S^{L_{KM}}(z)}{\partial x^I} = C^{L_{KMN}} \cdot p^N, \quad (12)$$

*вспомогательный* момент

$$M^{L_{KMP}I} = -\frac{\partial S^{L_{KM}}(z)}{\partial l^I} = C^{L_{KMN}} \cdot m^{NP_I} \quad (13)$$

и *вспомогательный* второй момент

$$W^{L_{KM}QP_I} = -\frac{\partial S^{L_{KM}}(z)}{\partial a^I} = C^{L_{KMN}} \cdot w^{NQP_I}. \quad (14)$$

Введенные здесь вспомогательные динамические параметры  $S$ ,  $P$ ,  $M$ ,  $W$  позволяют в дальнейшем записать уравнения динамики второго линейного преобразования фундаментального объекта в унифицированном виде.

Используя вспомогательные динамические параметры в безиндексной форме, запишем

$$w_0(z(a_0)) = P \frac{Dx}{da_0} + M \frac{Dl}{da_0} + W \frac{Da}{da_0}.$$

Уравнения динамики параметров фундаментального объекта являются следствием равенства нулю вариации скалярного действия

$$\delta \mathcal{S} = 0 \quad (15)$$

или, так как трансформационные свойства элемента объема  $d\Omega$  не рассматриваются, следствием равенства нулю вариации функции Лагранжа

$$\delta \mathcal{L} = 0. \quad (16)$$

Для того чтобы выделить вариацию скалярного действия  $\delta \mathcal{S}$ , рассмотрим преобразование скалярного действия как функции кинематических переменных

$$\mathcal{S}(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованное скалярное действие следующим образом:

$$\mathcal{S}'(x, l, a).$$

Преобразование

$$\mathcal{S}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow \mathcal{S}'(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$\mathcal{S}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} \mathcal{S}(x, l, a) \xrightarrow{2} \mathcal{S}'(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра – скалярного действия –  $\mathcal{S}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{S}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow \mathcal{S}'(x, l, a)$$

обозначим  $D\mathcal{S}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{S}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} \mathcal{S}(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал скалярного действия  $d\mathcal{S}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{S}(x, l, a) \xrightarrow{2} \mathcal{S}'(x, l, a)$$

представляет собой вариацию скалярного действия  $\delta\mathcal{S}$ . Таким образом, имеем

$$D\mathcal{S} = \delta\mathcal{S} + d\mathcal{S}. \quad (17)$$

Преобразование скалярного действия зададим в виде функции

$$\mathcal{S}'(x, l, a) = \mathcal{S}(x, l, a, \mathcal{S}(x, l, a))$$

или сокращенно

$$\mathcal{S}'(z) = \mathcal{S}(z, \mathcal{S}(z))$$

с начальными условиями

$$\mathcal{S}'(z, 1, 0) = \mathcal{S}(z, 1, 0, \mathcal{S}(z, 1, 0)) = \mathcal{S}(z, 1, 0).$$

Дифференцируя преобразование скалярного действия, получим

$$D\mathcal{S}(z) = \frac{\partial\mathcal{S}(z, \mathcal{S})}{Dz} \cdot Dz + \frac{\partial\mathcal{S}(z, \mathcal{S})}{d\mathcal{S}} \cdot d\mathcal{S}.$$

Из сравнения с выражением (17) получим

$$\delta\mathcal{S} = \frac{\partial\mathcal{S}(z, \mathcal{S})}{Dz} \cdot Dz, \quad \frac{\partial\mathcal{S}(z, \mathcal{S})}{d\mathcal{S}} = 1.$$

Из первого соотношения и выражения (16) следует, что уравнения динамики фундаментального объекта вытекают из условия

$$\frac{\partial\mathcal{S}(z, \mathcal{S})}{Dz} = 0.$$

Аналогичным образом для того, чтобы выделить вариацию функции Лагранжа  $\delta\mathcal{L}$ , рассмотрим преобразование функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию Лагранжа следующим образом:

$$\mathcal{L}'(x, l, a).$$

Преобразование

$$\mathcal{L}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow \mathcal{L}'(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$\mathcal{L}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} \mathcal{L}(x, l, a) \xrightarrow{2} \mathcal{L}'(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра – функции Лагранжа –  $\mathcal{L}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{L}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow \mathcal{L}'(x, l, a)$$

обозначим  $D\mathcal{L}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{L}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} \mathcal{L}(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал  $d\mathcal{L}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{L}(x, l, a) \xrightarrow{2} \mathcal{L}'(x, l, a)$$

представляет собой вариацию функции Лагранжа  $\delta\mathcal{L}$ . Таким образом, имеем

$$D\mathcal{L} = \delta\mathcal{L} + d\mathcal{L}. \quad (18)$$

Преобразование функции Лагранжа зададим в виде

$$\mathcal{L}'(z) = \mathcal{L}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), \mathcal{L}(z)). \quad (19)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$D\mathcal{L}(z) = \frac{\partial\mathcal{L}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), \mathcal{L})}{Dz} \cdot Dz + \frac{\partial\mathcal{L}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), \mathcal{L})}{d\mathcal{L}} \cdot d\mathcal{L}.$$

Из сравнения с выражением (8) получим

$$\delta\mathcal{L}(z) = \frac{\partial\mathcal{L}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), \mathcal{L})}{Dz} \cdot Dz, \quad \frac{\partial\mathcal{L}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), \mathcal{L})}{d\mathcal{L}} = 1.$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta\mathcal{L}(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta\mathcal{L}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta\mathcal{L}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta\mathcal{L}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (20)$$

или

$$\frac{\partial\mathcal{L}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), \mathcal{L})}{Dx} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), \mathcal{L})}{Dl} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), \mathcal{L})}{Da} = 0. \quad (23)$$

Следствием соотношения (21) являются *уравнения динамики импульса* фундаментального объекта, следствием соотношения (22) являются *уравнения динамики момента* фундаментального объекта, следствием соотношения (23) являются *уравнения динамики второго момента* фундаментального объекта.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta \mathcal{L} = D\mathcal{L} - d\mathcal{L},$$

а интегрирование полного дифференциала  $d\mathcal{L}$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так:

$$D\mathcal{L}(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные выражениям (20)

$$\frac{D\mathcal{L}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{D\mathcal{L}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{D\mathcal{L}(x, l, a)}{Da} = 0. \quad (24)$$

Следствием первого соотношения являются *уравнения динамики импульса* фундаментального объекта, следствием второго соотношения являются *уравнения динамики момента* фундаментального объекта, следствием третьего соотношения являются *уравнения динамики второго момента* фундаментального объекта.

### 1.1. Уравнения динамики сдвига для параметров фундаментального объекта

Уравнения динамики сдвига для параметров фундаментального объекта вытекают из вариации первого слагаемого функции Лагранжа (4)

$$p_0(z(x_0)) = -\frac{dS^K}{dx_0^K}(z(x_0)).$$

Для того, чтобы выделить вариацию функции  $\delta p_0$ , рассмотрим преобразование функции

$$p_0(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию  $p_0$  следующим образом:

$$p'_0(x, l, a).$$

Преобразование

$$p_0(x_0, l_0, a_0) \rightarrow p'_0(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$p_0(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} p_0(x, l, a) \xrightarrow{2} p'_0(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра –  $p_0$ . Инфинитезимальное преобразование

$$p_0(x_0, l_0, a_0) \rightarrow p'_0(x, l, a)$$

обозначим  $Dp_0$ . Инфинитезимальное преобразование

$$p_0(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} p_0(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал  $dp_0$ . Инфинитезимальное преобразование

$$p_0(x, l, a) \xrightarrow{2} p'_0(x, l, a)$$

представляет собой вариацию  $\delta p_0$ . Таким образом, имеем

$$Dp_0 = \delta p_0 + dp_0. \quad (25)$$

Преобразование функции  $p_0$  зададим в виде

$$p'_0(z) = \mathcal{P}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), p_0(z)). \quad (26)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$Dp_0(z) = \frac{\partial \mathcal{P}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), p_0)}{Dz} \cdot Dz + \frac{\partial \mathcal{P}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), p_0)}{dp_0} \cdot dp_0.$$

Из сравнения с выражением (25) получим

$$\delta p_0(z) = \frac{\partial \mathcal{P}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), p_0)}{Dz} \cdot Dz, \quad \frac{\partial \mathcal{P}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), p_0)}{dp_0} = 1.$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta p_0(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta p_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta p_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta p_0(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (27)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), p_0)}{Dx} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), p_0)}{Dl} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), p_0)}{Da} = 0, \quad (30)$$

которыми определяются три уравнения динамики сдвига – для импульса, момента и второго момента фундаментального объекта соответственно.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta p_0 = Dp_0 - dp_0,$$

а интегрирование полного дифференциала  $dp_0$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так:

$$Dp_0(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные выражениям (27)

$$\frac{Dp_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{Dp_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{Dp_0(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (31)$$

которыми определяются три уравнения динамики сдвига – для импульса, момента и второго момента фундаментального объекта соответственно. Эти уравнения выведены в Главе 6.2. В этой Главе покажем, что уравнения динамики сдвига представляют собой уравнения динамики параметров фундаментального объекта при инфинитезимальном сдвиге пространства-времени.

### 1.2. Уравнения динамики линейного преобразования для параметров фундаментального объекта

Предварительно заметим, что уравнения динамики линейного преобразования для параметров фундаментального объекта будем выполнять в два этапа. На первом этапе указанные уравнения выводятся для *вспомогательных* динамических параметров фундаментального объекта  $S, p, m, w$ . На втором этапе осуществляется переход к динамическим параметрам фундаментального объекта  $S, p, m, w$  на основании соотношений (5), (7), (8), (9). Такой двухэтапный подход целесообразен потому, что вывод уравнений динамики для *вспомогательных* динамических параметров является унифицированным.

Уравнения динамики линейного преобразования для параметров фундаментального объекта вытекают из вариации второго слагаемого функции Лагранжа (4), которое запишем в соответствии с соотношением (6)

$$m_0(z(l_0)) = -\frac{dS}{dl_0}(z(l_0)).$$

Для того, чтобы выделить вариацию функции  $\delta m_0$ , рассмотрим преобразование функции

$$m_0(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию  $m_0$  следующим образом:

$$m'_0(x, l, a).$$

Преобразование

$$m_0(x_0, l_0, a_0) \rightarrow m'_0(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$m_0(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} m_0(x, l, a) \xrightarrow{2} m'_0(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра –  $m_0$ . Инфинитезимальное преобразование

$$m_0(x_0, l_0, a_0) \rightarrow m'_0(x, l, a)$$

обозначим  $Dm_0$ . Инфинитезимальное преобразование

$$m_0(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} m_0(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал  $dm_0$ . Инфинитезимальное преобразование

$$m_0(x, l, a) \xrightarrow{2} m'_0(x, l, a)$$

представляет собой вариацию  $\delta m_0$ . Таким образом, имеем

$$Dm_0 = \delta m_0 + dm_0. \quad (32)$$

Преобразование функции  $m_0$  зададим в виде

$$m'_0(z) = \mathcal{M}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), m_0(z)). \quad (33)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$Dm_0(z) = \frac{\partial \mathcal{M}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), m_0)}{Dz} \cdot Dz + \frac{\partial \mathcal{M}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), m_0)}{dm_0} \cdot dm_0.$$

Из сравнения с выражением (32) получим

$$\delta m_0(z) = \frac{\partial \mathcal{M}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), m_0)}{Dz} \cdot Dz, \\ \frac{\partial \mathcal{M}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), m_0)}{dm_0} = 1.$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta m_0(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta m_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta m_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta m_0(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (34)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{M}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), m_0)}{Dx} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), m_0)}{Dl} = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), m_0)}{Da} = 0, \quad (37)$$

которыми определяются три уравнения динамики линейного преобразования – для импульса, момента и второго момента фундаментального объекта.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta m_0 = Dm_0 - dm_0,$$

а интегрирование полного дифференциала  $dm_0$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так:

$$Dm_0(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные выражениям (34)

$$\frac{Dm_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{Dm_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{Dm_0(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (38)$$

которыми определяются три уравнения динамики линейного преобразования – для импульса, момента и второго момента фундаментального объекта.

Эти уравнения выведены в Главе 6.2. В этой Главе покажем, что уравнения динамики линейного преобразования представляют собой уравнения динамики параметров фундаментального объекта при инфинитезимальном линейном преобразовании пространства-времени.

### 1.3. Уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров фундаментального объекта

Предварительно заметим, что уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров фундаментального объекта будем выполнять в два этапа. На первом этапе указанные уравнения выводятся для *вспомогательных* динамических параметров фундаментального объекта  $S, p, m, w$ . На втором этапе осуществляется переход к динамическим параметрам фундаментального объекта  $S, p, m, w$  на основании соотношений (10), (12), (13), (14). Такой двухэтапный подход целесообразен потому, что вывод уравнений динамики для *вспомогательных* динамических параметров является унифицированным.

Уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров фундаментального объекта вытекают из вариации третьего слагаемого функции Лагранжа (4), которое запишем в соответствии с соотношением (11)

$$w_0(z(a_0)) = -\frac{dS}{da_0}(z(a_0)).$$

Для того, чтобы выделить вариацию функции  $\delta w_0$ , рассмотрим преобразование функции

$$w_0(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию  $w_0$  следующим образом:

$$w'_0(x, l, a).$$

Преобразование

$$w_0(x_0, l_0, a_0) \rightarrow w'_0(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$w_0(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} w_0(x, l, a) \xrightarrow{2} w'_0(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра –  $w_0$ .

Инфинитезимальное преобразование

$$w_0(x_0, l_0, a_0) \rightarrow w'_0(x, l, a)$$

обозначим  $Dw_0$ . Инфинитезимальное преобразование

$$w_0(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} w_0(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал  $dw_0$ . Инфинитезимальное преобразование

$$w_0(x, l, a) \xrightarrow{2} w'_0(x, l, a)$$

представляет собой вариацию  $\delta w_0$ . Таким образом, имеем

$$Dw_0 = \delta w_0 + dw_0. \quad (39)$$

Преобразование функции  $w_0$  зададим в виде

$$w'_0(z) = \mathcal{W}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), w_0(z)). \quad (40)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$Dw_0(z) = \frac{\partial \mathcal{W}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), w_0)}{Dz} \cdot Dz + \frac{\partial \mathcal{W}(z, S(z), p(z), m(z), w(z), w_0)}{dw_0} \cdot dw_0.$$

Из сравнения с выражением (39) получим

$$\delta w_0(z) = \frac{\partial \mathcal{W}(z, \mathbf{S}(z), \mathbf{P}(z), \mathbf{M}(z), \mathbf{W}(z), w_0)}{Dz} \cdot Dz, \\ \frac{\partial \mathcal{W}(z, \mathbf{S}(z), \mathbf{P}(z), \mathbf{M}(z), \mathbf{W}(z), w_0)}{dw_0} = 1.$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta w_0(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta w_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta w_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta w_0(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (41)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{W}(z, \mathbf{S}(z), \mathbf{P}(z), \mathbf{M}(z), \mathbf{W}(z), w_0)}{Dx} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}(z, \mathbf{S}(z), \mathbf{P}(z), \mathbf{M}(z), \mathbf{W}(z), w_0)}{Dl} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}(z, \mathbf{S}(z), \mathbf{P}(z), \mathbf{M}(z), \mathbf{W}(z), w_0)}{Da} = 0, \quad (44)$$

которыми определяются три уравнения динамики второго линейного преобразования – для импульса, момента и второго момента фундаментального объекта.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta w_0 = Dw_0 - dw_0,$$

а интегрирование полного дифференциала  $dw_0$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так:

$$Dw_0(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные выражениям (41)

$$\frac{Dw_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{Dw_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{Dw_0(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (45)$$

которыми определяются три уравнения динамики второго линейного преобразования – для импульса, момента и второго момента фундаментального объекта.

Эти уравнения выведены в Главе 6.2. В этой Главе покажем, что уравнения динамики второго линейного преобразования представляют собой уравнения динамики параметров фундаментального объекта при инфинитезимальном втором линейном преобразовании пространства-времени.

## 2. Уравнения динамики параметров промежуточного объекта

Исходным для вывода уравнений динамики параметров промежуточного объекта является скалярное действие для промежуточного объекта

$$\mathcal{S}_1(x_0, l_0, a_0) = \int \mathcal{L}_1(x_0, l_0, a_0) \cdot d\Omega. \quad (46)$$

Здесь функция Лагранжа определяется следующим образом

$$\mathcal{L}_1(x_0, l_0, a_0) = -p_{01}(z(x_0)) - m_{01}(z(l_0)) - w_{01}(z(a_0)). \quad (47)$$

Определим каждое из слагаемых в правой части. 1.

$$p_{01}(z(x_0)) = -\frac{d}{dx_0} \cdot \mathbf{S}(z(x_0)).$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dx_0} = \mathbf{E}^L \cdot \frac{d}{dx_0^L},$$

а также

$$\mathbf{S}(z(x_0)) = \mathbf{I}^P_N \cdot \mathbf{S}^N_P(z(x_0))$$

и скалярное произведение базисных векторов (формула (81) Главы 1.6.)

$$\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{I}^P_N = C^{LP}_N,$$

получим

$$p_{01}(z(x_0)) = -C^{LP}_N \cdot \frac{d\mathbf{S}^N_P(z(x_0))}{dx_0^L}.$$

Введем *вспомогательное* действие

$$\mathbf{S}_1^L = C^{LP}_N \cdot \mathbf{S}^N_P. \quad (48)$$

Используя его, получим

$$p_{01}(z(x_0)) = -\frac{d\mathbf{S}_1^L(z(x_0))}{dx_0^L}. \quad (49)$$

В безиндексной форме, когда

$$\mathbf{S}_1^L \sim \mathbf{S}_1, \quad x_0^L \sim x_0,$$

имеем

$$p_{01}(z(x_0)) = -\frac{d\mathbf{S}_1(z(x_0))}{dx_0},$$

или в развернутом виде

$$p_{01}(z(x_0)) = -\frac{\partial \mathbf{S}_1(z)}{Dx} \frac{Dx}{dx_0} - \frac{\partial \mathbf{S}_1(z)}{Dl} \frac{Dl}{dx_0} - \frac{\partial \mathbf{S}_1(z)}{Da} \frac{Da}{dx_0}.$$



Основываясь на вспомогательном действии, введем *вспомогательный импульс*

$$p_{1I}^L = -\frac{\partial S_1^L(z)}{Dx^I} = -C^{LK}_N \cdot \frac{\partial S^N_K}{Dx^I} = C^{LK}_N \cdot p^N_{KI}, \quad (50)$$

*вспомогательный момент*

$$m_{1I}^{LP} = -\frac{\partial S_1^L(z)}{Dl^I_P} = -C^{LK}_N \cdot \frac{\partial S^N_K(z)}{Dl^I_P} = C^{LK}_N \cdot m^N_{K^P_I} \quad (51)$$

и *вспомогательный* второй момент

$$w_{1I}^{LQP} = -\frac{\partial S_1^L(z)}{Da^I_{PQ}} = -C^{LK}_N \cdot \frac{\partial S^N_K(z)}{Da^I_{PQ}} = C^{LK}_N \cdot w^N_{K^{QP}_I}. \quad (52)$$

Введенные здесь вспомогательные динамические параметры  $S_1$ ,  $p_1$ ,  $m_1$ ,  $w_1$  позволяют в дальнейшем записать уравнения динамики сдвига промежуточного объекта в унифицированном виде.

Используя вспомогательные динамические параметры в безиндексной форме, запишем

$$p_{01}(z(x_0)) = p_1 \frac{Dx}{dx_0} + m_1 \frac{Dl}{dx_0} + w_1 \frac{Da}{dx_0}.$$

2.

$$m_{01}(z(l_0)) = -\frac{d}{dl_0} \cdot S(z(l_0)).$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dl_0} = \mathbf{K}^L_K \cdot \frac{d}{dl_0^L_K},$$

а также

$$S(z(l_0)) = \mathbf{I}^P_N \cdot S^N_P(z(l_0))$$

и скалярное произведение базисных векторов (формула (82) Главы 1.6.)

$$\mathbf{K}^L_K \cdot \mathbf{I}^P_N = \delta^P_K \cdot \delta^L_N,$$

получим

$$m_{01}(z(l_0)) = -\delta^P_K \cdot \delta^L_N \cdot \frac{dS^N_P(z(l_0))}{dl_0^L_K}.$$

Введем *вспомогательное* действие

$$S^L_{1K} = \delta^P_K \cdot \delta^L_N \cdot S^N_P \equiv S^L_K. \quad (53)$$

Используя его, получим

$$m_{01}(z(l_0)) = -\frac{dS^L_{1K}(z(l_0))}{dl_0^L_K}. \quad (54)$$

В безиндексной форме, когда

$$S^L_{1K} \sim S_1, \quad l_0^L_K \sim l_0,$$

имеем

$$m_{01}(z(l_0)) = -\frac{dS_1(z(l_0))}{dl_0},$$

или в развернутом виде

$$m_{01}(z(l_0)) = -\frac{\partial S_1(z)}{Dx} \frac{Dx}{dl_0} - \frac{\partial S_1(z)}{Dl} \frac{Dl}{dl_0} - \frac{\partial S_1(z)}{Da} \frac{Da}{dl_0}.$$

Основываясь на вспомогательном действии, введем *вспомогательный импульс*

$$p_{1KI}^L = -\frac{\partial S^L_{1K}(z)}{Dx^I} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{Dx^I} = p^L_{KI}, \quad (55)$$

*вспомогательный момент*

$$m_{1K^P_I}^{L} = -\frac{\partial S^L_{1K}(z)}{Dl^I_P} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{Dl^I_P} = m^L_{K^P_I} \quad (56)$$

и *вспомогательный* второй момент

$$w_{1K^{QP}_I}^{L} = -\frac{\partial S^L_{1K}(z)}{Da^I_{PQ}} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{Da^I_{PQ}} = w^L_{K^{QP}_I}. \quad (57)$$

Введенные здесь вспомогательные динамические параметры  $S_1$ ,  $p_1$ ,  $m_1$ ,  $w_1$  позволяют в дальнейшем записать уравнения динамики линейного преобразования промежуточного объекта в унифицированном виде.

Используя вспомогательные динамические параметры в безиндексной форме, запишем

$$m_{01}(z(l_0)) = p_1 \frac{Dx}{dl_0} + m_1 \frac{Dl}{dl_0} + w_1 \frac{Da}{dl_0}.$$

3.

$$w_{01}(z(a_0)) = -\frac{d}{da_0} \cdot S(z(a_0)).$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{da_0} = \mathbf{L}^L_{KM} \cdot \frac{d}{da_0^L_{KM}},$$

а также

$$S(z(a_0)) = \mathbf{I}^P_N \cdot S^N_P(z(a_0))$$

и скалярное произведение базисных векторов (формула (83) Главы 1.6.)

$$\mathbf{L}^L_{KM} \cdot \mathbf{I}^P_N = \delta^P_M \cdot C^L_{KN},$$

получим

$$w_{01}(z(a_0)) = -C^L_{KN} \cdot \frac{dS^N_P(z(a_0))}{da_0^L_{KM}} \delta^P_M.$$

Введем *вспомогательное* действие

$$S^L_{1KM} = C^L_{KN} \cdot S^N_P \cdot \delta^P_M. \quad (58)$$

Используя его, получим

$$w_{01}(z(a_0)) = -\frac{dS_{1KM}^L(z(a_0))}{da_0^{L_{KM}}}. \quad (59)$$

В безиндексной форме, когда

$$S_{1KM}^L \sim S_1, \quad a_0^{L_{KM}} \sim a_0,$$

имеем

$$w_{01}(z(a_0)) = -\frac{dS_1(z(a_0))}{da_0},$$

или в развернутом виде

$$w_{01}(z(a_0)) = -\frac{\partial S_1(z)}{Dx} \frac{Dx}{da_0} - \frac{\partial S_1(z)}{Dl} \frac{Dl}{da_0} - \frac{\partial S_1(z)}{Da} \frac{Da}{da_0}.$$

Основываясь на вспомогательном действии, введем *вспомогательный* импульс

$$\begin{aligned} P_{1KMI}^L &= -\frac{\partial S_{1KM}^L(z)}{Dx^I} = \\ &= -C_{KN}^L \cdot \frac{\partial S_M^N(z)}{Dx^I} = C_{KN}^L \cdot p_{MI}^N, \end{aligned} \quad (60)$$

*вспомогательный* момент

$$\begin{aligned} M_{1KMP}^L &= -\frac{\partial S_{1KM}^L(z)}{Dl^P} = \\ &= -C_{KN}^L \cdot \frac{\partial S_M^N(z)}{Dl^P} = C_{KN}^L \cdot m_{MP}^N \end{aligned} \quad (61)$$

и *вспомогательный* второй момент

$$\begin{aligned} W_{1KMQP}^L &= -\frac{\partial S_{1KM}^L(z)}{Da^{I_{PQ}}} = \\ &= -C_{KN}^L \cdot \frac{\partial S_M^N(z)}{Da^{I_{PQ}}} = C_{KN}^L \cdot w_{MQP}^N. \end{aligned} \quad (62)$$

Введенные здесь вспомогательные динамические параметры  $S_1$ ,  $P_1$ ,  $M_1$ ,  $W_1$  позволяют в дальнейшем записать уравнения динамики второго линейного преобразования промежуточного объекта в унифицированном виде.

Используя вспомогательные динамические параметры в безиндексной форме, запишем

$$w_{01}(z(a_0)) = P_1 \frac{Dx}{da_0} + M_1 \frac{Dl}{da_0} + W_1 \frac{Da}{da_0}.$$

Уравнения динамики параметров промежуточного объекта являются следствием равенства нулю вариации действия

$$\delta \mathcal{L}_1 = 0, \quad (63)$$

или, так как трансформационные свойства элемента объема  $d\Omega$  не рассматриваются, следствием равенства нулю вариации функции Лагранжа

$$\delta \mathcal{L}_1 = 0. \quad (64)$$

Для того чтобы выделить вариацию функции Лагранжа  $\delta \mathcal{L}_1$ , рассмотрим преобразование функции Лагранжа

$$\mathcal{L}_1(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию Лагранжа следующим образом:

$$\mathcal{L}'_1(x, l, a).$$

Преобразование

$$\mathcal{L}_1(x_0, l_0, a_0) \rightarrow \mathcal{L}'_1(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$\mathcal{L}_1(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} \mathcal{L}_1(x, l, a) \xrightarrow{2} \mathcal{L}'_1(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра – функции Лагранжа –  $\mathcal{L}_1$ . Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{L}_1(x_0, l_0, a_0) \rightarrow \mathcal{L}'_1(x, l, a)$$

обозначим  $D\mathcal{L}_1$ . Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{L}_1(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} \mathcal{L}_1(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал  $d\mathcal{L}_1$ . Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{L}_1(x, l, a) \xrightarrow{2} \mathcal{L}'_1(x, l, a)$$

представляет собой вариацию функции Лагранжа  $\delta \mathcal{L}_1$ . Таким образом, имеем

$$D\mathcal{L}_1 = \delta \mathcal{L}_1 + d\mathcal{L}_1. \quad (65)$$

Преобразование функции Лагранжа зададим в виде

$$\mathcal{L}'_1(z) = \mathcal{L}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), \mathcal{L}_1(z)). \quad (66)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$\begin{aligned} D\mathcal{L}_1(z) &= \frac{\partial \mathcal{L}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), \mathcal{L}_1)}{Dz} \cdot Dz + \\ &+ \frac{\partial \mathcal{L}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), \mathcal{L}_1)}{d\mathcal{L}_1} \cdot d\mathcal{L}_1. \end{aligned}$$

Из сравнения с выражением (66) получим

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_1(z) &= \frac{\partial \mathcal{L}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), \mathcal{L}_1)}{Dz} \cdot Dz, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), \mathcal{L}_1)}{d\mathcal{L}_1} &= 1. \end{aligned}$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta \mathcal{L}_1(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta \mathcal{L}_1(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}_1(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}_1(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (67)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), \mathcal{L}_1)}{Dx} = 0, \quad (68)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), \mathcal{L}_1)}{Dl} = 0, \quad (69)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), \mathcal{L}_1)}{Da} = 0. \quad (70)$$

Следствием соотношения (68) являются *уравнения динамики импульса* промежуточного объекта, следствием соотношения (69) являются *уравнения динамики момента* промежуточного объекта, следствием соотношения (70) являются *уравнения динамики второго момента* промежуточного объекта.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta \mathcal{L}_1 = D \mathcal{L}_1 - d \mathcal{L}_1,$$

а интегрирование полного дифференциала  $d \mathcal{L}_1$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так

$$D \mathcal{L}_1(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные выражениям (67)

$$\frac{D \mathcal{L}_1(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{D \mathcal{L}_1(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{D \mathcal{L}_1(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (71)$$

Следствием первого соотношения являются *уравнения динамики импульса* промежуточного объекта, следствием второго соотношения являются *уравнения динамики момента* промежуточного объекта, следствием третьего соотношения являются *уравнения динамики второго момента* промежуточного объекта.

### 2.1. Уравнения динамики сдвига для параметров промежуточного объекта

Предварительно заметим, что уравнения динамики сдвига для параметров промежуточного объекта будем выполнять в два этапа. На первом этапе указанные уравнения выводятся для *вспомогательных* динамических параметров промежуточного объекта  $S_1$ ,

$p_1$ ,  $m_1$ ,  $w_1$ . На втором этапе осуществляется переход к динамическим параметрам промежуточного объекта  $S_1$ ,  $p_1$ ,  $m_1$ ,  $w_1$  на основании соотношений (48), (50), (51), (52). Такой двухэтапный подход целесообразен потому, что вывод уравнений динамики для *вспомогательных* динамических параметров является унифицированным.

Уравнения динамики сдвига для параметров промежуточного объекта вытекают из вариации первого слагаемого функции Лагранжа (47)

$$p_{01}(z(x_0)) = -\frac{dS_1}{dx_0}(z(x_0)).$$

Для того чтобы выделить вариацию функции  $\delta p_{01}$ , рассмотрим преобразование функции

$$p_{01}(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию  $p_{01}$  следующим образом:

$$p'_{01}(x, l, a).$$

Преобразование

$$p_{01}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow p'_{01}(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$p_{01}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} p_{01}(x, l, a) \xrightarrow{2} p'_{01}(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра –  $p_{01}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$p_{01}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow p'_{01}(x, l, a)$$

обозначим  $Dp_{01}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$p_{01}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} p_{01}(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал  $dp_{01}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$p_{01}(x, l, a) \xrightarrow{2} p'_{01}(x, l, a)$$

представляет собой вариацию  $\delta p_{01}$ . Таким образом, имеем

$$Dp_{01} = \delta p_{01} + dp_{01}. \quad (72)$$

Преобразование функции  $p_{01}$  зададим в виде:

$$p'_{01}(z) = \mathcal{P}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), p_{01}(z)). \quad (73)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$Dp_{01}(z) = \frac{\partial \mathcal{P}_1(z, \mathbf{S}_1(z), \mathbf{p}_1(z), \mathbf{m}_1(z), \mathbf{w}_1(z), p_{01})}{Dz} \cdot Dz + \\ + \frac{\partial \mathcal{P}_1(z, \mathbf{S}_1(z), \mathbf{p}_1(z), \mathbf{m}_1(z), \mathbf{w}_1(z), p_{01})}{dp_{01}} \cdot dp_{01}.$$

Из сравнения с вылажениями (72) получим

$$\delta p_{01}(z) = \frac{\partial \mathcal{P}_1(z, \mathbf{S}_1(z), \mathbf{p}_1(z), \mathbf{m}_1(z), \mathbf{w}_1(z), p_{01})}{Dz} \cdot Dz, \\ \frac{\partial \mathcal{P}_1(z, \mathbf{S}_1(z), \mathbf{p}_1(z), \mathbf{m}_1(z), \mathbf{w}_1(z), p_{01})}{dp_{01}} = 1.$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta p_{01}(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta p_{01}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta p_{01}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta p_{01}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (74)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1(z, \mathbf{S}_1(z), \mathbf{p}_1(z), \mathbf{m}_1(z), \mathbf{w}_1(z), p_{01})}{Dx} = 0, \quad (75)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1(z, \mathbf{S}_1(z), \mathbf{p}_1(z), \mathbf{m}_1(z), \mathbf{w}_1(z), p_{01})}{Dl} = 0, \quad (76)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1(z, \mathbf{S}_1(z), \mathbf{p}_1(z), \mathbf{m}_1(z), \mathbf{w}_1(z), p_{01})}{Da} = 0, \quad (77)$$

которыми определяются три уравнения динамики сдвига – для импульса, момента и второго момента промежуточного объекта соответственно.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta p_{01} = Dp_{01} - dp_{01},$$

а интегрирование полного дифференциала  $dp_{01}$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так:

$$Dp_{01}(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные выражениям (74)

$$\frac{Dp_{01}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{Dp_{01}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{Dp_{01}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (78)$$

которыми определяются три уравнения динамики сдвига – для импульса, момента и второго момента промежуточного объекта, иначе говоря уравнения динамики параметров промежуточного объекта при инфинитезимальном сдвиге пространства-времени.

## 2.2. Уравнения динамики линейного преобразования для параметров промежуточного объекта

Предварительно заметим, что уравнения динамики линейного преобразования для параметров промежуточного объекта будем выполнять в два этапа. На первом этапе указанные уравнения выводятся для *вспомогательных* динамических параметров промежуточного объекта  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{m}_1$ ,  $\mathbf{w}_1$ . На втором этапе осуществляется переход к динамическим параметрам промежуточного объекта  $S_1$ ,  $p_1$ ,  $m_1$ ,  $w_1$  на основании соотношений (53), (55), (56), (57). Такой двухэтапный подход целесообразен потому, что вывод уравнений динамики для *вспомогательных* динамических параметров является унифицированным.

Уравнения динамики линейного преобразования для параметров промежуточного объекта вытекают из вариации второго слагаемого функции Лагранжа (47)

$$m_{01}(z(l_0)) = -\frac{d\mathbf{S}_1(z(l_0))}{dl_0}.$$

Для того чтобы выделить вариацию функции  $\delta m_{01}$ , рассмотрим преобразование функции

$$m_{01}(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию  $m_{01}$  следующим образом:

$$m'_{01}(x, l, a).$$

Преобразование

$$m_{01}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow m'_{01}(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$m_{01}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} m_{01}(x, l, a) \xrightarrow{2} m'_{01}(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра –  $m_{01}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$m_{01}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow m'_{01}(x, l, a)$$

обозначим  $Dm_{01}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$m_{01}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} m_{01}(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал  $dm_{01}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$m_{01}(x, l, a) \xrightarrow{2} m'_{01}(x, l, a)$$

представляет собой вариацию  $\delta m_{01}$ . Таким образом, имеем

$$Dm_{01} = \delta m_{01} + dm_{01}. \quad (79)$$

Преобразование функции  $m_{01}$  зададим в виде

$$m'_{01}(z) = \mathcal{M}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), m_{01}(z)). \quad (80)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$Dm_{01}(z) = \frac{\partial \mathcal{M}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), m_{01})}{Dz} \cdot Dz + \frac{\partial \mathcal{M}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), m_{01})}{dm_{01}} \cdot dm_{01}.$$

Из сравнения с выражением (79) получим

$$\delta m_{01}(z) = \frac{\partial \mathcal{M}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), m_{01})}{Dz} \cdot Dz, \frac{\partial \mathcal{M}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), m_{01})}{dm_{01}} = 1.$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta m_{01}(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta m_{01}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta m_{01}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta m_{01}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (81)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), m_{01})}{Dx} = 0, \quad (82)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), m_{01})}{Dl} = 0, \quad (83)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), m_{01})}{Da} = 0, \quad (84)$$

которыми определяются три уравнения динамики линейного преобразования – для импульса, момента и второго момента промежуточного объекта соответственно.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta m_{01} = Dm_{01} - dm_{01},$$

а интегрирование полного дифференциала  $dm_{01}$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так:

$$Dm_{01}(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные выражениям (81)

$$\frac{Dm_{01}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{Dm_{01}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{Dm_{01}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (85)$$

которыми определяются три уравнения динамики линейного преобразования – для импульса, момента и второго момента промежуточного объекта, иначе говоря уравнения динамики параметров промежуточного объекта при инфинитезимальном линейном преобразовании пространства-времени.

### 2.3. Уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров промежуточного объекта

Предварительно заметим, что уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров промежуточного объекта будем выполнять в два этапа. На первом этапе указанные уравнения выводятся для *вспомогательных* динамических параметров промежуточного объекта  $S_1, P_1, M_1, W_1$ . На втором этапе осуществляется переход к динамическим параметрам промежуточного объекта  $S_1, p_1, m_1, w_1$  на основании соотношений (58), (60), (61), (62). Такой двухэтапный подход целесообразен потому, что вывод уравнений динамики для *вспомогательных* динамических параметров является унифицированным.

Уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров промежуточного объекта вытекают из вариации третьего слагаемого функции Лагранжа (47)

$$w_{01}(z(a_0)) = -\frac{dS_1}{da_0}(z(a_0)).$$

Для того чтобы выделить вариацию функции  $\delta w_{01}$ , рассмотрим преобразование функции

$$w_{01}(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию  $w_{01}$  следующим образом:

$$w'_{01}(x, l, a).$$

Преобразование

$$w_{01}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow w'_{01}(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$w_{01}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} w_{01}(x, l, a) \xrightarrow{2} w'_{01}(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а

$\overset{2}{\rightsquigarrow}$  – преобразование динамического параметра –  $w_{01}$ .  
Инфинитезимальное преобразование

$$w_{01}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow w'_{01}(x, l, a)$$

обозначим  $Dw_{01}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$w_{01}(x_0, l_0, a_0) \overset{1}{\rightarrow} w_{01}(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал  $dw_{01}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$w_{01}(x, l, a) \overset{2}{\rightsquigarrow} w'_{01}(x, l, a)$$

представляет собой вариацию  $\delta w_{01}$ . Таким образом, имеем

$$Dw_{01} = \delta w_{01} + dw_{01}. \quad (86)$$

Преобразование функции  $w_{01}$  зададим в виде

$$w'_{01}(z) = \mathcal{W}_1(z, S_1(z), p_1(z), m_1(z), w_1(z), w_{01}(z)). \quad (87)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$Dw_{01}(z) = \frac{\partial \mathcal{W}_1(z, S_1(z), P_1(z), M_1(z), W_1(z), w_{01})}{Dz} \cdot Dz + \\ + \frac{\partial \mathcal{W}_1(z, S_1(z), P_1(z), M_1(z), W_1(z), w_{01})}{dw_{01}} \cdot dw_{01}.$$

Из сравнения с выражением (86) получим

$$\delta w_{01}(z) = \frac{\partial \mathcal{W}_1(z, S_1(z), P_1(z), M_1(z), W_1(z), w_{01})}{Dz} \cdot Dz, \\ \frac{\partial \mathcal{W}_1(z, S_1(z), P_1(z), M_1(z), W_1(z), w_{01})}{dw_{01}} = 1.$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta w_{01}(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta w_{01}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta w_{01}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta w_{01}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (88)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{W}_1(z, S_1(z), P_1(z), M_1(z), W_1(z), w_{01})}{Dx} = 0, \quad (89)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}_1(z, S_1(z), P_1(z), M_1(z), W_1(z), w_{01})}{Dl} = 0, \quad (90)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}_1(z, S_1(z), P_1(z), M_1(z), W_1(z), w_{01})}{Da} = 0, \quad (91)$$

которыми определяются три уравнения динамики второго линейного преобразования – для импульса,

момента и второго момента промежуточного объекта соответственно.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta w_{01} = Dw_{01} - dw_{01},$$

а интегрирование полного дифференциала  $dw_{01}$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так

$$Dw_{01}(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные (88)

$$\frac{Dw_{01}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{Dw_{01}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{Dw_{01}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (92)$$

которыми определяются три уравнения динамики второго линейного преобразования – для импульса, момента и второго момента промежуточного объекта, иначе говоря уравнения динамики параметров промежуточного объекта при инфинитезимальном втором линейном преобразовании пространства-времени.

### 3. Уравнения динамики параметров второго промежуточного объекта

Исходным для вывода уравнений динамики параметров второго промежуточного объекта является скалярное действие для второго промежуточного объекта

$$\mathcal{S}_2(x_0, l_0, a_0) = \int \mathcal{L}_2(x_0, l_0, a_0) d\Omega. \quad (93)$$

Здесь функция Лагранжа определяется следующим образом:

$$\mathcal{L}_2(x_0, l_0, a_0) = -p_{02}(z(x_0)) - m_{02}(z(l_0)) - w_{02}(z(a_0)). \quad (94)$$

Определим каждое из слагаемых в правой части.

1.

$$p_{02}(z(x_0)) = -\frac{d}{dx_0} \cdot \mathfrak{S}(z(x_0)).$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dx_0} = \mathbf{E}^L \cdot \frac{d}{dx_0^L},$$

а также

$$\mathfrak{S}(z(x_0)) = \mathbf{J}^{QP}_N \cdot S^N_{PQ}(z(x_0))$$

и скалярное произведение базисных векторов (формула (84) Главы 1.6.)

$$\mathbf{E}^L \cdot \mathbf{J}^{QP}_N = C^{LQP}_N,$$

получим

$$p_{02}(z(x_0)) = -C^{LQP}_N \cdot \frac{dS^N_{PQ}(z(x_0))}{dx^L_0}.$$

Введем *вспомогательное* действие

$$S_2^L = C^{LQP}_N \cdot S^N_{PQ}. \quad (95)$$

Используя его, получим

$$p_{02}(z(x_0)) = -\frac{dS_2^L(z(x_0))}{dx^L_0}. \quad (96)$$

В безиндексной форме, когда

$$S_2^L \sim S_2, \quad x_0^L \sim x_0,$$

имеем

$$p_{02}(z(x_0)) = -\frac{dS_2(z(x_0))}{dx_0},$$

или в развернутом виде

$$p_{02}(z(x_0)) = -\frac{\partial S_2(z)}{\partial x} \frac{Dx}{dx_0} - \frac{\partial S_2(z)}{\partial l} \frac{Dl}{dx_0} - \frac{\partial S_2(z)}{\partial a} \frac{Da}{dx_0}.$$

Основываясь на вспомогательном действии, введем *вспомогательный* импульс

$$p_{2I}^L = -\frac{\partial S_2^L(z)}{\partial x^I} = -C^{LQP}_N \cdot \frac{\partial S^N_{PQ}}{\partial x^I} = C^{LQP}_N \cdot p^N_{PQI}, \quad (97)$$

*вспомогательный* момент

$$\begin{aligned} m_{2I}^{LK} &= -\frac{\partial S_2^L(z)}{\partial l^I_K} = -C^{LQP}_N \cdot \frac{\partial S^N_{PQ}(z)}{\partial l^I_K} = \\ &= C^{LQP}_N \cdot m^N_{PQ}{}^K{}_I \end{aligned} \quad (98)$$

и *вспомогательный* второй момент

$$\begin{aligned} w_2^{LTS}{}_I &= -\frac{\partial S_2^L(z)}{\partial a^I_{ST}} = -C^{LQP}_N \cdot \frac{\partial S^N_{PQ}(z)}{\partial a^I_{ST}} = \\ &= C^{LQP}_N \cdot w^N_{PQ}{}^{ST}{}_I. \end{aligned} \quad (99)$$

Введенные здесь вспомогательные динамические параметры  $S_2$ ,  $p_2$ ,  $m_2$ ,  $w_2$  позволяют в дальнейшем записать уравнения динамики сдвига второго промежуточного объекта в унифицированном виде.

Используя вспомогательные динамические параметры в безиндексной форме, запишем

$$p_{02}(z(x_0)) = p_2 \frac{Dx}{dx_0} + m_2 \frac{Dl}{dx_0} + w_2 \frac{Da}{dx_0}.$$

2.

$$m_{02}(z(l_0)) = -\frac{d}{dl_0} \cdot \mathfrak{S}(z(l_0)).$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dl_0} = \mathbf{K}^L{}_K \cdot \frac{d}{dl_0^L{}_K},$$

а также

$$\mathfrak{S}(z(l_0)) = \mathbf{J}^{QP}{}_N \cdot S^N_{PQ}(z(l_0))$$

и скалярное произведение базисных векторов (формула (85) Главы 1.6.)

$$\mathbf{K}^L{}_K \cdot \mathbf{J}^{QP}{}_N = \delta^{QK} \cdot C^{LP}{}_N,$$

получим

$$m_{02}(z(l_0)) = -C^{LP}{}_N \cdot \frac{dS^N_{PQ}(z(l_0))}{dl_0^L{}_K} \cdot \delta^{QK}.$$

Введем *вспомогательное* действие

$$S_{2K}^L = C^{LP}{}_N \cdot S^N_{PK}. \quad (100)$$

Используя его, получим

$$m_{02}(z(l_0)) = -\frac{dS_{2K}^L(z(l_0))}{dl_0^L{}_K}. \quad (101)$$

В безиндексной форме, когда

$$S_{2K}^L \sim S_2, \quad l_0^L{}_K \sim l_0,$$

имеем

$$m_{02}(z(l_0)) = -\frac{dS_2(z(l_0))}{dl_0},$$

или в развернутом виде

$$m_{02}(z(l_0)) = -\frac{\partial S_2(z)}{\partial x} \frac{Dx}{dl_0} - \frac{\partial S_2(z)}{\partial l} \frac{Dl}{dl_0} - \frac{\partial S_2(z)}{\partial a} \frac{Da}{dl_0}.$$

Основываясь на вспомогательном действии, введем *вспомогательный* импульс

$$\begin{aligned} p_{2KI}^L &= -\frac{\partial S_{2K}^L(z)}{\partial x^I} = -C^{LM}{}_N \cdot \frac{\partial S^N_{MK}(z)}{\partial x^I} = \\ &= C^{LM}{}_N \cdot p^N_{MKI}, \end{aligned} \quad (102)$$

*вспомогательный* момент

$$\begin{aligned} m_{2K}^L{}_P{}_I &= -\frac{\partial S_{2K}^L(z)}{\partial l^I{}_P} = -C^{LM}{}_N \cdot \frac{\partial S^N_{MK}(z)}{\partial l^I{}_P} = \\ &= C^{LM}{}_N \cdot m^N_{MK}{}^P{}_I \end{aligned} \quad (103)$$

и *вспомогательный* второй момент

$$\begin{aligned} w_{2K}^L{}^{QP}{}_I &= -\frac{\partial S_{2K}^L(z)}{\partial a^I{}_{PQ}} = -C^{LM}{}_N \cdot \frac{\partial S^N_{MK}(z)}{\partial a^I{}_{PQ}} = \\ &= C^{LM}{}_N \cdot w^N_{MK}{}^{QP}{}_I. \end{aligned} \quad (104)$$

Введенные здесь вспомогательные динамические параметры  $S_2$ ,  $p_2$ ,  $m_2$ ,  $w_2$  позволяют в дальнейшем записать уравнения динамики линейного преобразования второго промежуточного объекта в унифицированном виде.

Используя вспомогательные динамические параметры в безиндексной форме, запишем

$$m_{02}(z(l_0)) = p_2 \frac{Dx}{dl_0} + m_2 \frac{Dl}{dl_0} + w_2 \frac{Da}{dl_0}.$$

3.

$$w_{02}(z(a_0)) = -\frac{d}{da_0} \cdot \mathfrak{S}(z(a_0)).$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{da_0} = \mathbf{L}^{L_{KM}} \cdot \frac{d}{da_0^{L_{KM}}},$$

а также

$$\mathfrak{S}(z(a_0)) = \mathbf{J}^{QP_N} \cdot S^{N_{PQ}}(z(a_0))$$

и скалярное произведение базисных векторов (формула (86) Главы 1.6.)

$$\mathbf{L}^{L_{KM}} \cdot \mathbf{J}^{QP_N} = \delta^{Q_M} \cdot \delta^{Q_M} \cdot \delta^{L_N} \cdot \delta^{P_K},$$

получим

$$w_{02}(z(a_0)) = -\delta^{L_N} \cdot \frac{dS^{N_{PM}}(z(a_0))}{da_0^{L_{KM}}} \cdot \delta^{Q_M} \cdot \delta^{P_K}.$$

Введем *вспомогательное* действие

$$S_{2KM}^L = \delta^{L_N} \cdot S^{N_{PM}} \cdot \delta^{Q_M} \cdot \delta^{P_K} \equiv S^{L_{KM}}. \quad (105)$$

Используя его, получим

$$w_{01}(z(a_0)) = -\frac{dS_{2KM}^L(z(a_0))}{da_0^{L_{KM}}}. \quad (106)$$

В безиндексной форме, когда

$$S_{2KM}^L \sim S_1, \quad a_0^{L_{KM}} \sim a_0,$$

имеем

$$w_{02}(z(a_0)) = -\frac{dS_2(z(a_0))}{da_0},$$

или в развернутом виде

$$w_{02}(z(a_0)) = -\frac{\partial S_2(z)}{Dx} \frac{Dx}{da_0} - \frac{\partial S_2(z)}{Dl} \frac{Dl}{da_0} - \frac{\partial S_2(z)}{Da} \frac{Da}{da_0}.$$

Основываясь на вспомогательном действии, введем *вспомогательный* импульс

$$p_{2KMI}^L = -\frac{\partial S_{2KM}^L(z)}{Dx^I} = -\frac{\partial S^{L_{KM}}(z)}{Dx^I} = p_{KMI}^L, \quad (107)$$

*вспомогательный* момент

$$m_{2KM}^L P_I = -\frac{\partial S_{2KM}^L(z)}{Dl^I P} = -\frac{\partial S^{L_{KM}}(z)}{Dl^I P} = m_{KM}^L P_I \quad (108)$$

и *вспомогательный* второй момент

$$w_{2KM}^{L_{QP_I}} = -\frac{\partial S_{2KM}^L(z)}{Da^I P_Q} = \frac{\partial S^{L_{KM}}(z)}{Da^I P_Q} = w_{KM}^{L_{QP_I}}. \quad (109)$$

Введенные здесь вспомогательные динамические параметры  $S_2$ ,  $P_2$ ,  $M_2$ ,  $W_2$  позволяют в дальнейшем записать уравнения динамики второго линейного преобразования второго промежуточного объекта в унифицированном виде.

Используя вспомогательные динамические параметры в безиндексной форме, запишем

$$w_{02}(z(a_0)) = P_2 \frac{Dx}{da_0} + M_2 \frac{Dl}{da_0} + W_2 \frac{Da}{da_0}.$$

Уравнения динамики параметров второго промежуточного объекта являются следствием равенства нулю вариации действия

$$\delta \mathcal{L}_2 = 0, \quad (110)$$

или, так как трансформационные свойства элемента объема  $d\Omega$  не рассматриваются, следствием равенства нулю вариации функции Лагранжа

$$\delta \mathcal{L}_2 = 0. \quad (111)$$

Для того чтобы выделить вариацию функции Лагранжа  $\delta \mathcal{L}_2$ , рассмотрим преобразование функции Лагранжа

$$\mathcal{L}_2(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию Лагранжа следующим образом:

$$\mathcal{L}'_2(x, l, a).$$

Преобразование

$$\mathcal{L}_2(x_0, l_0, a_0) \rightarrow \mathcal{L}'_2(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований:

$$\mathcal{L}_2(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} \mathcal{L}_2(x, l, a) \xrightarrow{2} \mathcal{L}'_2(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра – функции Лагранжа –  $\mathcal{L}_2$ .

Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{L}_2(x_0, l_0, a_0) \rightarrow \mathcal{L}'_2(x, l, a)$$

обозначим  $D\mathcal{L}_2$ . Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{L}_2(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} \mathcal{L}_2(x, l, a)$$



представляет собой дифференциал действия  $d\mathcal{L}_2$ . Инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{L}_2(x, l, a) \overset{2}{\rightsquigarrow} \mathcal{L}'_2(x, l, a)$$

представляет собой вариацию функции Лагранжа  $\delta\mathcal{L}_2$ . Таким образом, имеем

$$D\mathcal{L}_2 = \delta\mathcal{L}_2 + d\mathcal{L}_2. \quad (112)$$

Преобразование функции Лагранжа зададим в виде

$$\mathcal{L}'_2(z) = \mathcal{L}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), \mathcal{L}_2(z)). \quad (113)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$D\mathcal{L}_2(z) = \frac{\partial\mathcal{L}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), \mathcal{L}_2)}{Dz} \cdot Dz + \frac{\partial\mathcal{L}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), \mathcal{L}_2)}{d\mathcal{L}_2} \cdot d\mathcal{L}_2.$$

Из сравнения с выражением (112) получим

$$\delta\mathcal{L}_2(z) = \frac{\partial\mathcal{L}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), \mathcal{L}_2)}{Dz} \cdot Dz, \frac{\partial\mathcal{L}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), \mathcal{L}_2)}{d\mathcal{L}_2} = 1.$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta\mathcal{L}_2(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta\mathcal{L}_2(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta\mathcal{L}_2(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta\mathcal{L}_2(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (114)$$

или

$$\frac{\partial\mathcal{L}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), \mathcal{L}_2)}{Dx} = 0, \quad (115)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), \mathcal{L}_2)}{Dl} = 0, \quad (116)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), \mathcal{L}_2)}{Da} = 0. \quad (117)$$

Следствием соотношения (115) являются *уравнения динамики импульса* второго промежуточного объекта, следствием соотношения (116) являются *уравнения динамики момента* второго промежуточного объекта, следствием соотношения (117) являются *уравнения динамики второго момента* второго промежуточного объекта.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta\mathcal{L}_2 = D\mathcal{L}_2 - d\mathcal{L}_2,$$

а интегрирование полного дифференциала  $d\mathcal{L}_2$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так

$$D\mathcal{L}_2(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные (114)

$$\frac{D\mathcal{L}_2(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{D\mathcal{L}_2(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{D\mathcal{L}_2(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (118)$$

Здесь также следствием первого соотношения являются *уравнения динамики импульса* второго промежуточного объекта, следствием второго соотношения являются *уравнения динамики момента* второго промежуточного объекта, следствием третьего соотношения являются *уравнения динамики второго момента* второго промежуточного объекта.

### 3.1. Уравнения динамики сдвига для параметров второго промежуточного объекта

Предварительно заметим, что уравнения динамики сдвига для параметров второго промежуточного объекта будем выполнять в два этапа. На первом этапе указанные уравнения выводятся для *вспомогательных* динамических параметров второго промежуточного объекта  $S_2, p_2, m_2, w_2$ . На втором этапе осуществляется переход к динамическим параметрам промежуточного объекта  $S_2, p_2, m_2, w_2$  на основании соотношений (95), (97), (98), (99). Такой двухэтапный подход целесообразен потому, что вывод уравнений динамики для *вспомогательных* динамических параметров является унифицированным.

Уравнения динамики сдвига для параметров второго промежуточного объекта вытекают из вариации первого слагаемого функции Лагранжа (94)

$$p_{02}(z(x_0)) = -\frac{dS_2}{dx_0}(z(x_0)).$$

Для того чтобы выделить вариацию функции  $\delta p_{02}$ , рассмотрим преобразование функции

$$p_{02}(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию  $p_{02}$  следующим образом:

$$p'_{02}(x, l, a).$$

Преобразование

$$p_{02}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow p'_{02}(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$p_{02}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} p_{02}(x, l, a) \overset{2}{\rightsquigarrow} p'_{02}(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра –  $p_{02}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$p_{02}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow p'_{02}(x, l, a)$$

обозначим  $Dp_{02}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$p_{02}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} p_{02}(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал  $dp_{02}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$p_{02}(x, l, a) \xrightarrow{2} p'_{02}(x, l, a)$$

представляет собой вариацию  $\delta p_{02}$ . Таким образом, имеем

$$Dp_{02} = \delta p_{02} + dp_{02}. \quad (119)$$

Преобразование функции  $p_{02}$  зададим в виде

$$p'_{02}(z) = \mathcal{P}_2(z, \mathbf{S}_2(z), \mathbf{p}_2(z), \mathbf{m}_2(z), w_2(z), p_{02}(z)). \quad (120)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$Dp_{02}(z) = \frac{\partial \mathcal{P}_2(z, \mathbf{S}_2(z), \mathbf{p}_2(z), \mathbf{m}_2(z), w_2(z), p_{02})}{Dz} \cdot Dz + \frac{\partial \mathcal{P}_2(z, \mathbf{S}_2(z), \mathbf{p}_2(z), \mathbf{m}_2(z), w_2(z), p_{02})}{dp_{02}} \cdot dp_{02}.$$

Из сравнения с выражением (119) получим

$$\delta p_{02}(z) = \frac{\partial \mathcal{P}_2(z, \mathbf{S}_2(z), \mathbf{p}_2(z), \mathbf{m}_2(z), w_2(z), p_{02})}{Dz} \cdot Dz, \\ \frac{\partial \mathcal{P}_2(z, \mathbf{S}_2(z), \mathbf{p}_2(z), \mathbf{m}_2(z), w_2(z), p_{02})}{dp_{02}} = 1.$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta p_{02}(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta p_{02}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta p_{02}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta p_{02}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (121)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2(z, \mathbf{S}_2(z), \mathbf{p}_2(z), \mathbf{m}_2(z), w_2(z), p_{02})}{Dx} = 0, \quad (122)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2(z, \mathbf{S}_2(z), \mathbf{p}_2(z), \mathbf{m}_2(z), w_2(z), p_{02})}{Dl} = 0, \quad (123)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2(z, \mathbf{S}_2(z), \mathbf{p}_2(z), \mathbf{m}_2(z), w_2(z), p_{02})}{Da} = 0, \quad (124)$$

которыми определяются три уравнения динамики сдвига – для импульса, момента и второго момента второго промежуточного объекта соответственно.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta p_{02} = Dp_{02} - dp_{02},$$

а интегрирование полного дифференциала  $dp_{02}$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так

$$Dp_{02}(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные выражениям (121)

$$\frac{Dp_{02}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{Dp_{02}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{Dp_{02}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (125)$$

которыми определяются три уравнения динамики сдвига – для импульса, момента и второго момента второго промежуточного объекта, иначе говоря уравнения динамики параметров второго промежуточного объекта при инфинитезимальном сдвиге пространства-времени.

### 3.2. Уравнения динамики линейного преобразования для параметров второго промежуточного объекта

Предварительно заметим, что уравнения динамики линейного преобразования для параметров второго промежуточного объекта будем выполнять в два этапа. На первом этапе указанные уравнения выводятся для *вспомогательных* динамических параметров второго промежуточного объекта  $\mathbf{S}_2$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{m}_2$ ,  $w_2$ . На втором этапе осуществляется переход к динамическим параметрам второго промежуточного объекта  $S_2$ ,  $p_2$ ,  $m_2$ ,  $w_2$  на основании соотношений (100), (102), (103), (104). Такой двухэтапный подход целесообразен потому, что вывод уравнений динамики для *вспомогательных* динамических параметров является унифицированным.

Уравнения динамики линейного преобразования для параметров второго промежуточного объекта вытекают из вариации второго слагаемого функции Лагранжа (94)

$$m_{02}(z(l_0)) = -\frac{dS_2}{dl_0}(z(l_0)).$$

Для того чтобы выделить вариацию функции  $\delta m_{02}$ , рассмотрим преобразование функции

$$m_{02}(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию  $m_{02}$  следующим образом:

$$m'_{02}(x, l, a).$$

Преобразование

$$m_{02}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow m'_{02}(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$m_{02}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} m_{02}(x, l, a) \xrightarrow{2} m'_{02}(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра –  $m_{02}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$m_{02}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow m'_{02}(x, l, a)$$

обозначим  $Dm_{02}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$m_{02}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} m_{02}(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал  $dm_{02}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$m_{02}(x, l, a) \xrightarrow{2} m'_{02}(x, l, a)$$

представляет собой вариацию  $\delta m_{02}$ . Таким образом, имеем

$$Dm_{02} = \delta m_{02} + dm_{02}. \quad (126)$$

Преобразование функции  $m_{02}$  зададим в виде

$$m'_{02}(z) = \mathcal{M}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), m_{02}(z)). \quad (127)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$\begin{aligned} Dm_{02}(z) &= \\ &= \frac{\partial \mathcal{M}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), m_{02})}{Dz} \cdot Dz + \\ &+ \frac{\partial \mathcal{M}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), m_{02})}{dm_{02}} \cdot dm_{02}. \end{aligned}$$

Из сравнения с выражением (126) получим

$$\begin{aligned} \delta m_{02}(z) &= \\ &= \frac{\partial \mathcal{M}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), m_{02})}{Dz} \cdot Dz, \\ \frac{\partial \mathcal{M}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), m_{02})}{dm_{02}} &= 1. \end{aligned}$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta m_{02}(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta m_{02}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta m_{02}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta m_{02}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (128)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), m_{02})}{Dx} = 0, \quad (129)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), m_{02})}{Dl} = 0, \quad (130)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2(z, S_2(z), p_2(z), m_2(z), w_2(z), m_{02})}{Da} = 0, \quad (131)$$

которыми определяются три уравнения динамики линейного преобразования – для импульса, момента и второго момента второго промежуточного объекта соответственно.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta m_{02} = Dm_{02} - dm_{02},$$

а интегрирование полного дифференциала  $dm_{02}$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так:

$$Dm_{02}(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные (128)

$$\frac{Dm_{02}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{Dm_{02}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{Dm_{02}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (132)$$

которыми определяются три уравнения динамики линейного преобразования – для импульса, момента и второго момента второго промежуточного объекта, иначе говоря три уравнения динамики параметров второго промежуточного объекта при инфинитезимальном линейном преобразовании пространства-времени.

### 3.3. Уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров второго промежуточного объекта

Предварительно заметим, что уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров второго промежуточного объекта будем выполнять в два этапа. На первом этапе указанные уравнения выводятся для *вспомогательных* динамических параметров второго промежуточного объекта  $S_2, p_2, m_2, w_2$ . На втором этапе осуществляется переход к динамическим параметрам второго промежуточного объекта  $S_2, p_2, m_2, w_2$  на основании соотношений (105), (107), (108), (109). Такой двухэтапный подход целесообразен потому, что вывод уравнений динамики для *вспомогательных* динамических параметров является унифицированным.

Уравнения динамики второго линейного преобразования для параметров второго промежуточного объекта вытекают из вариации третьего слагаемого функции Лагранжа (94)

$$w_{02}(z(a_0)) = -\frac{dS_2}{da_0}(z(a_0)).$$

Для того чтобы выделить вариацию функции  $\delta w_{02}$ , рассмотрим преобразование функции

$$w_{02}(x_0, l_0, a_0).$$

Обозначим преобразованную функцию  $w_{02}$  следующим образом:

$$w'_{02}(x, l, a).$$

Преобразование

$$w_{02}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow w'_{02}(x, l, a)$$

представим в виде последовательности преобразований

$$w_{02}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} w_{02}(x, l, a) \xrightarrow{2} w'_{02}(x, l, a),$$

где обозначение  $\xrightarrow{1}$  отражает преобразование аргумента, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование функции. Иначе говоря,  $\xrightarrow{1}$  есть преобразование кинематических переменных, а  $\xrightarrow{2}$  – преобразование динамического параметра –  $w_{02}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$w_{02}(x_0, l_0, a_0) \rightarrow w'_{02}(x, l, a)$$

обозначим  $Dw_{02}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$w_{02}(x_0, l_0, a_0) \xrightarrow{1} w_{02}(x, l, a)$$

представляет собой дифференциал  $dw_{02}$ . Инфинитезимальное преобразование

$$w_{02}(x, l, a) \xrightarrow{2} w'_{02}(x, l, a)$$

представляет собой вариацию  $\delta w_{02}$ . Таким образом, имеем

$$Dw_{02} = \delta w_{02} + dw_{02}. \quad (133)$$

Преобразование функции  $w_{02}$  зададим в виде

$$w'_{02}(z) = \mathcal{W}_2(z, S_2(z), P_2(z), M_2(z), W_2(z), w_{02}(z)). \quad (134)$$

Дифференцируя это преобразование, получим

$$\begin{aligned} Dw_{02}(z) &= \\ &= \frac{\partial \mathcal{W}_2(z, S_2(z), P_2(z), M_2(z), W_2(z), w_{02})}{Dz} \cdot Dz + \\ &+ \frac{\partial \mathcal{W}_2(z, S_2(z), P_2(z), M_2(z), W_2(z), w_{02})}{dw_{02}} \cdot dw_{02}. \end{aligned}$$

Из сравнения с выражением (133) получим

$$\begin{aligned} \delta w_{02}(z) &= \\ &= \frac{\partial \mathcal{W}_2(z, S_2(z), P_2(z), M_2(z), W_2(z), w_{02})}{Dz} \cdot Dz, \\ \frac{\partial \mathcal{W}_2(z, S_2(z), P_2(z), M_2(z), W_2(z), w_{02})}{dw_{02}} &= 1. \end{aligned}$$

Из первого соотношения следует, что вариационный принцип

$$\delta w_{02}(z) = 0$$

записывается в виде трех соотношений

$$\frac{\delta w_{02}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta w_{02}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta w_{02}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (135)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{W}_2(z, S_2(z), P_2(z), M_2(z), W_2(z), w_{02})}{Dx} = 0, \quad (136)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}_2(z, S_2(z), P_2(z), M_2(z), W_2(z), w_{02})}{Dl} = 0, \quad (137)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}_2(z, S_2(z), P_2(z), M_2(z), W_2(z), w_{02})}{Da} = 0, \quad (138)$$

которыми определяются три уравнения динамики второго линейного преобразования – для импульса, момента и второго момента второго промежуточного объекта соответственно.

Вариационный принцип можно записать иначе, если учесть, что

$$\delta w_{02} = Dw_{02} - dw_{02},$$

а интегрирование полного дифференциала  $dw_{02}$  сводится к значению образующей функции на границе интегрирования – значению, которое принимается равным нулю. Поэтому вариационный принцип может быть записан так

$$Dw_{02}(z) = 0.$$

Отсюда следуют три соотношения, эквивалентные (135)

$$\frac{Dw_{02}(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{Dw_{02}(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{Dw_{02}(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (139)$$

которыми определяются три уравнения динамики второго линейного преобразования – для импульса, момента и второго момента второго промежуточного объекта, иначе говоря уравнения динамики параметров второго промежуточного объекта при инфинитезимальном втором линейном преобразовании пространства-времени.

III. ТАБЛИЦЫ СЛАГАЕМЫХ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА

1. Физический объект

1.1. Левая физика

Предварительно напомним, что для левых кинематических переменных имеют место следующие соотношения:

$$z = \mathcal{Z}(z_0) \begin{cases} x = \mathcal{X}(x_0, l_0, a_0) \\ l = \mathcal{L}(x_0, l_0, a_0) \\ a = \mathcal{A}(x_0, l_0, a_0) \end{cases}, \quad Dz \begin{cases} Dx = l(x_0) \cdot dx_0 \\ Dl = dl_0 + a(x_0) \cdot dx_0 \\ Da = da_0 + b(x_0) \cdot dx_0 \end{cases}.$$

Квадрат левого линейного элемента

$$(d_l s)^2 = Dx \cdot Dx + Dl \cdot Dl = l \cdot l \cdot dx_0 \cdot dx_0 + (dl_0 + a(x_0) \cdot dx_0) \cdot (dl_0 + a(x_0) \cdot dx_0).$$

	Фундаментальный объект	Промежуточный объект	Второй промежуточный объект
Вектор действия	${}_l \mathbf{S} = \mathbf{e}_I \cdot {}_l S^I(z(z_0))$	${}_l \mathbf{S} = \mathbf{I}^K_I \cdot {}_l S^I_K(z(z_0))$	${}_l \mathbf{S} = \mathbf{J}^{LK}_I \cdot {}_l S^I_{KL}(z(z_0))$
Скалярное действие	${}_l \mathcal{S}(x_0, l_0, a_0) = \int {}_l \mathcal{L}(x_0, l_0, a_0) \cdot d\Omega$	${}_l \mathcal{S}_1(x_0, l_0, a_0) = \int {}_l \mathcal{L}_1(x_0, l_0, a_0) \cdot d\Omega$	${}_l \mathcal{S}_2(x_0, l_0, a_0) = \int {}_l \mathcal{L}_2(x_0, l_0, a_0) \cdot d\Omega$
Лагранжиан	${}_l \mathcal{L}(x_0, l_0, a_0) = -{}_l p_0 - {}_l m_0 - {}_l w_0$	${}_l \mathcal{L}_1(x_0, l_0, a_0) = -{}_l p_{01} - {}_l m_{01} - {}_l w_{01}$	${}_l \mathcal{L}_2(x_0, l_0, a_0) = -{}_l p_{02} - {}_l m_{02} - {}_l w_{02}$
	$-{}_l p_0 = \frac{d {}_l S^I(z(x_0))}{dx_0^I}$	$-{}_l p_{01} = {}_r C^{MK}_I \cdot \frac{d {}_l S^I_K(z(x_0))}{dx_0^M}$	$-{}_l p_{02} = {}_r C^{MLK}_I \cdot \frac{d {}_l S^I_{KL}(z(x_0))}{dx_0^M}$
	$-{}_l m_0 = {}_l C^M_{NI} \cdot \frac{d {}_l S^I(z(l_0))}{dl_0^M}$	$-{}_l m_{01} = \frac{d {}_l S^I_K(z(l_0))}{dl_0^I}$	$-{}_l m_{02} = {}_r C^{MK}_I \cdot \frac{d {}_l S^I_{KL}(z(l_0))}{dl_0^M}$
	$-{}_l w_0 = {}_l C^M_{NPI} \cdot \frac{d {}_l S^I(z(a_0))}{da_0^M}$	$-{}_l w_{01} = {}_l C^M_{NI} \cdot \frac{d {}_l S^I_K(z(a_0))}{da_0^M}$	$-{}_l w_{02} = \frac{d {}_l S^I_{KL}(z(a_0))}{da_0^I}$

1.2. Правая физика

Предварительно напомним, что для правых кинематических переменных имеют место следующие соотношения:

$$Z = \mathcal{Z}(Z_0) \begin{cases} X = \mathcal{X}(x_0, L_0, A_0) \\ L = \mathcal{L}(x_0, L_0, A_0) \\ A = \mathcal{A}(x_0, L_0, A_0) \end{cases}, \quad DZ \begin{cases} DX = L(x_0) \cdot dx_0 \\ DL = dL_0 + A(x_0) \cdot dx_0 \\ DA = dA_0 + B(x_0) \cdot dx_0 \end{cases}.$$

Заметим, что  ${}_l x_0 = {}_r x_0 = x_0$ .

Квадрат правого линейного элемента<sup>3</sup>

$$(d_r s)^2 = DX \cdot DX + DL \cdot DL = L \cdot L \cdot dx_0 \cdot dx_0 + (dL_0 + A(x_0) \cdot dx_0) \cdot (dL_0 + A(x_0) \cdot dx_0).$$

	Фундаментальный объект	Промежуточный объект	Второй промежуточный объект
Вектор действия	${}_r \mathbf{S} = \mathbf{e}_I \cdot {}_r S^I(Z(Z_0))$	${}_r \mathbf{S} = \mathbf{I}^K_I \cdot {}_r S^I_K(Z(Z_0))$	${}_r \mathbf{S} = \mathbf{J}^{LK}_I \cdot {}_r S^I_{KL}(Z(Z_0))$
Скалярное действие	${}_r \mathcal{S}(x_0, L_0, A_0) = \int {}_r \mathcal{L}(x_0, L_0, A_0) \cdot d\Omega$	${}_r \mathcal{S}_1(x_0, L_0, A_0) = \int {}_r \mathcal{L}_1(x_0, L_0, A_0) \cdot d\Omega$	${}_r \mathcal{S}_2(x_0, L_0, A_0) = \int {}_r \mathcal{L}_2(x_0, L_0, A_0) \cdot d\Omega$
Лагранжиан	${}_r \mathcal{L}(x_0, L_0, A_0) = -{}_r p_0 - {}_r m_0 - {}_r w_0$	${}_r \mathcal{L}_1(x_0, L_0, A_0) = -{}_r p_{01} - {}_r m_{01} - {}_r w_{01}$	${}_r \mathcal{L}_2(x_0, L_0, A_0) = -{}_r p_{02} - {}_r m_{02} - {}_r w_{02}$
	$-{}_r p_0 = \frac{d_r S^I(Z(x_0))}{dx_0^I}$	$-{}_r p_{01} = {}_l C^{MK}_I \cdot \frac{d_r S^I_K(Z(x_0))}{dx_0^M}$	$-{}_r p_{02} = {}_l C^{MLK}_I \cdot \frac{d_r S^I_{KL}(Z(x_0))}{dx_0^M}$
	$-{}_r m_0 = {}_r C^M_{NI} \cdot \frac{d_r S^I(Z(L_0))}{dL_0^M_N}$	$-{}_r m_{01} = \frac{d_r S^I_K(Z(L_0))}{dL_0^I_K}$	$-{}_r m_{02} = {}_l C^{MK}_I \cdot \frac{d_r S^I_{KL}(Z(L_0))}{dL_0^M_L}$
	$-{}_r w_0 = {}_r C^M_{NPI} \cdot \frac{d_r S^I(Z(A_0))}{dA_0^M_{NP}}$	$-{}_r w_{01} = {}_r C^M_{NI} \cdot \frac{d_r S^I_K(Z(A_0))}{dA_0^M_{NK}}$	$-{}_r w_{02} = \frac{d_r S^I_{KL}(Z(A_0))}{dA_0^I_{KL}}$

## 2. Физический антиобъект

### 2.1. Левая физика

Предварительно напомним, что для сопряженных левых кинематических переменных имеют место следующие соотношения:

$$z^* = \mathcal{Z}^*(z_0^*) \begin{cases} x^* = \mathcal{X}^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) \\ l^* = \mathcal{L}^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) \\ a^* = \mathcal{A}^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) \end{cases}, \quad Dz^* \begin{cases} Dx^* = dx_0^* \cdot l^*(x_0^*) \\ Dl^* = dl_0^* + dx_0^* \cdot a^*(x_0^*) \\ Da^* = da_0^* + dx_0^* \cdot b^*(x_0^*) \end{cases}.$$

Квадрат сопряженного левого линейного элемента

$$(d_l s^*)^2 = Dx^* \cdot Dx^* + Dl^* \cdot Dl^* = dx_0^* \cdot dx_0^* \cdot l^* \cdot l^* + (dl_0^* + dx_0^* \cdot a^*(x_0^*)) \cdot (dl_0^* + dx_0^* \cdot a^*(x_0^*)).$$

<sup>3</sup> Заметим, что для теории Калуцы необходимо положить

$$(ds)^2 = (d_l s)^2 + (d_r s)^2 \quad \text{и} \quad (d_l s)^2 = Dx \cdot Dx = l \cdot l \cdot dx_0 \cdot dx_0, \quad (d_r s)^2 = DL \cdot DL = (dL_0 + A(x_0) \cdot dx_0) \cdot (dL_0 + A(x_0) \cdot dx_0).$$

	Фундаментальный антиобъект	Промежуточный антиобъект	Второй промежуточный антиобъект
Вектор действия	${}_l\mathbf{S}^* = {}_lS_I(z^*(z_0^*)) \cdot \mathbf{E}^I$	${}_l\mathbf{S}^* = {}_lS^{*K_I}(z^*(z_0^*)) \cdot \mathbf{K}^I_K$	${}_l\mathbf{S}^* = {}_lS^{LK_I}(z^*(z_0^*)) \cdot \mathbf{L}^I_{KL}$
Скалярное действие	${}_l\mathcal{L}^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) = \int {}_l\mathcal{L}^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) \cdot d\Omega$	${}_l\mathcal{L}_1^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) = \int {}_l\mathcal{L}_1^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) \cdot d\Omega$	${}_l\mathcal{L}_2^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) = \int {}_l\mathcal{L}_2^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) \cdot d\Omega$
Лагранжиан	${}_l\mathcal{L}^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) = -{}_lp_0^* - {}_lm_0^* - {}_lw_0^*$	${}_l\mathcal{L}_1^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) = -{}_lp_{01}^* - {}_lm_{01}^* - {}_lw_{01}^*$	${}_l\mathcal{L}_2^*(x_0^*, l_0^*, a_0^*) = -{}_lp_{02}^* - {}_lm_{02}^* - {}_lw_{02}^*$
	$-{}_lp_0^* = \frac{d{}_lS_I(z^*(x_0^*))}{dx_{0I}}$	$-{}_lp_{01}^* = {}_rC^I_{KM} \cdot \frac{d{}_lS^{*K_I}(z^*(x_0^*))}{dx_{0M}}$	$-{}_lp_{02}^* = {}_rC^I_{KLM} \cdot \frac{d{}_lS^{LK_I}(z^*(x_0^*))}{dx_{0M}}$
	$-{}_lm_0^* = {}_lC^{IN}_M \cdot \frac{d{}_lS_I(z^*(l_0^*))}{dl_0^{*N}_M}$	$-{}_lm_{01}^* = \frac{d{}_lS^{*K_I}(z^*(l_0^*))}{dl_0^{*K}_I}$	$-{}_lm_{02}^* = {}_rC^I_{KM} \cdot \frac{d{}_lS^{LK_I}(z^*(l_0^*))}{dl_0^{*L}_M}$
	$-{}_lw_0^* = {}_lC^{IPN}_M \cdot \frac{d{}_lS_I(z^*(a_0^*))}{da_0^{*PN}_M}$	$-{}_lw_{01}^* = {}_lC^{IN}_M \cdot \frac{d{}_lS^{*K_I}(z^*(a_0^*))}{da_0^{*KN}_M}$	$-{}_lw_{02}^* = \frac{d{}_lS^{LK_I}(z^*(a_0^*))}{da_0^{*LK}_I}$

2.2. Правая физика

Предварительно напомним, что для сопряженных правых кинематических переменных имеют место следующие соотношения:

$$Z^* = \mathcal{Z}^*(Z_0^*) \begin{cases} X^* = \mathcal{X}^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) \\ L^* = \mathcal{L}^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) \\ A^* = \mathcal{A}^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) \end{cases}, \quad Dz^* \begin{cases} DX^* = dx_0^* \cdot L^*(x_0^*) \\ DL^* = dL_0^* + dx_0^* \cdot A^*(x_0^*) \\ DA^* = dA_0^* + dx_0^* \cdot B^*(x_0^*) \end{cases}.$$

Квадрат сопряженного правого линейного элемента

$$(d_r s^*)^2 = DX^* \cdot DX^* + DL^* \cdot DL^* = dx_0^* \cdot dx_0^* \cdot L^* \cdot L^* + (dL_0^* + dx_0^* \cdot A^*(x_0^*)) \cdot (dL_0^* + dx_0^* \cdot A^*(x_0^*)).$$

	Фундаментальный антиобъект	Промежуточный антиобъект	Второй промежуточный антиобъект
Вектор действия	${}_r\mathbf{S}^* = {}_rS_I(Z^*(Z_0^*)) \cdot \mathbf{E}^I$	${}_r\mathbf{S}^* = {}_rS^{*K}{}_I(Z^*(Z_0^*)) \cdot \mathbf{K}^I{}_K$	${}_r\mathbf{S}^* = {}_rS^{LK}{}_I(Z^*(Z_0^*)) \cdot \mathbf{L}^I{}_{KL}$
Скалярное действие	${}_r\mathcal{S}^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) = \int {}_r\mathcal{L}^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) \cdot d\Omega$	${}_r\mathcal{S}_1^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) = \int {}_r\mathcal{L}_1^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) \cdot d\Omega$	${}_r\mathcal{S}_2^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) = \int {}_r\mathcal{L}_2^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) \cdot d\Omega$
Лагранжиан	${}_r\mathcal{L}^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) = -{}_rp_0^* - {}_rm_0^* - {}_rw_0^*$	${}_r\mathcal{L}_1^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) = -{}_rp_{01}^* - {}_rm_{01}^* - {}_rw_{01}^*$	${}_r\mathcal{L}_2^*(x_0^*, L_0^*, A_0^*) = -{}_rp_{02}^* - {}_rm_{02}^* - {}_rw_{02}^*$
	$-{}_rp_0^* = \frac{d {}_rS_I(Z^*(x_0^*))}{dx_{0I}}$	$-{}_rp_{01}^* = {}_lC^I{}_{KM} \cdot \frac{d {}_rS^{*K}{}_I(Z^*(x_0^*))}{dx_{0M}}$	$-{}_rp_{02}^* = {}_lC^I{}_{KLM} \cdot \frac{d {}_rS^{LK}{}_I(Z^*(x_0^*))}{dx_{0M}}$
	$-{}_rm_0^* = {}_rC^{IN}{}_M \cdot \frac{d {}_rS_I(Z^*(L_0^*))}{dL_0^{*N}{}_M}$	$-{}_rm_{01}^* = \frac{d {}_rS^{*K}{}_I(Z^*(L_0^*))}{dL_0^{*K}{}_I}$	$-{}_rm_{02}^* = {}_lC^I{}_{KM} \cdot \frac{d {}_rS^{LK}{}_I(Z^*(L_0^*))}{dL_0^{*L}{}_M}$
	$-{}_rw_0^* = {}_rC^{IPN}{}_M \cdot \frac{d {}_rS_I(Z^*(A_0^*))}{dA_0^{*PN}{}_M}$	$-{}_rw_{01}^* = {}_rC^{IN}{}_M \cdot \frac{d {}_rS^{*K}{}_I(Z^*(A_0^*))}{dA_0^{*KN}{}_M}$	$-{}_rw_{02}^* = \frac{d {}_rS^{LK}{}_I(Z^*(A_0^*))}{dA_0^{*LK}{}_I}$



## Глава 6.2 Уравнения динамики II. Метод Гамильтона

В этой Главе рассмотрим вывод уравнений динамики в общем случае с использованием метода, который назван методом Гамильтона. В следующем Разделе мы продемонстрируем суть этого метода на примере вывода уравнений движения классической механики.

### I. МЕТОД ГАМИЛЬТОНА. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В классической механике основополагающим динамическим параметром служит скалярная величина — действие  $S$ , являющееся функцией времени  $t$  и геометрических координат  $x^a$

$$S(t, x).$$

Кроме действия, к динамическим параметрам классической механики относятся

$$\text{импульс} - p_a = \frac{\partial S}{\partial x^a} \text{ и}$$

$$\text{функция Гамильтона} - H(p, x).$$

В соответствии с Приложением к Главе 3.2 преобразование функции Гамильтона представлено следующей функциональной зависимостью

$$H'(p, x) = \mathcal{H}(p, x, H(p, x)).$$

Метод Гамильтона позволяет вывести уравнения движения в классической механике из условия равенства нулю вариации функции Гамильтона

$$\delta H = 0,$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^a} \cdot dx^a + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_b} \cdot dp_b = 0,$$

### II. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ФИЗИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Предварительно сделаем следующее замечание относительно структуры уравнений динамики физических объектов.

1. Уравнения динамики фундаментального объекта относятся к следующим динамическим параметрам этого объекта:

1.1) для уравнений сдвига фундаментального объекта это

$$S, p, m, w, p'_0, \mathcal{P}, m'_0, \mathcal{M}, w'_0, \mathcal{W}; \quad (1)$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^a} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_b} \cdot \frac{\partial p_b}{\partial x^a} = 0.$$

Преобразуем это выражение, выполнив следующую перестановку дифференциальных операторов:

$$\frac{\partial p_b}{\partial x^a} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^a \partial x^b} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^b \partial x^a} = \frac{\partial p_a}{\partial x^b}.$$

Получим

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^a} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_b} \cdot \frac{\partial p_a}{\partial x^b} = 0.$$

Метод Гамильтона включает в себя условие, что приведенное соотношение отождествляется с выражением

$$\frac{dp_a(x(t))}{dt} = \frac{\partial p_a}{\partial x^b} \cdot \frac{dx^b}{dt},$$

то есть

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^a} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_b} \cdot \frac{\partial p_a}{\partial x^b} \equiv -\frac{dp_a(x(t))}{dt} + \frac{\partial p_a}{\partial x^b} \cdot \frac{dx^b}{dt}.$$

Это возможно, если выполняются следующие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp_a(t)}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^a}, \\ \frac{dx^b(t)}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_b}. \end{aligned}$$

Приведенные уравнения составляют *канонические* уравнения классической механики, или уравнения Гамильтона.

Наше обобщение метода Гамильтона, используемого в классической механике, состоит прежде всего в том, что перестановка дифференциальных операторов, с которой приходится иметь дело при выводе уравнений динамики, является нетривиальной. Перестановочные соотношения, полученные в Главе 6.3, позволяют записать правую часть в уравнениях динамики.

1.2) для уравнений линейного преобразования фундаментального объекта это

$$S, p, m, w, p'_0, \mathcal{P}, m'_0, \mathcal{M}, w'_0, \mathcal{W}; \quad (2)$$

1.3) для уравнений второго линейного преобразования фундаментального объекта это

$$S, P, M, W, p'_0, \mathcal{P}, m'_0, \mathcal{M}, w'_0, \mathcal{W}. \quad (3)$$

2. Уравнения динамики промежуточного объекта относятся к следующим динамическим параметрам этого объекта:

2.1) для уравнений сдвига промежуточного объекта это

$$S_1, p_1, m_1, w_1, p'_{01}, \mathcal{P}_1, m'_{01}, \mathcal{M}_1, w'_{01}, \mathcal{W}_1; \quad (4)$$

2.2) для уравнений линейного преобразования промежуточного объекта это

$$S_1, p_1, m_1, w_1, p'_{01}, \mathcal{P}_1, m'_{01}, \mathcal{M}_1, w'_{01}, \mathcal{W}_1; \quad (5)$$

2.3) для уравнений второго линейного преобразования промежуточного объекта это

$$S_1, P_1, M_1, W_1, p'_{01}, \mathcal{P}_1, m'_{01}, \mathcal{M}_1, w'_{01}, \mathcal{W}_1. \quad (6)$$

3. Уравнения динамики второго промежуточного объекта относятся к следующим динамическим параметрам этого объекта:

3.1) для уравнений сдвига второго промежуточного объекта это

$$S_2, p_2, m_2, w_2, p'_{02}, \mathcal{P}_2, m'_{02}, \mathcal{M}_2, w'_{02}, \mathcal{W}_2; \quad (7)$$

3.2) для уравнений линейного преобразования второго промежуточного объекта это

$$S_2, p_2, m_2, w_2, p'_{02}, \mathcal{P}_2, m'_{02}, \mathcal{M}_2, w'_{02}, \mathcal{W}_2; \quad (8)$$

3.3) для уравнений второго линейного преобразования второго промежуточного объекта это

$$S_2, P_2, M_2, W_2, p'_{02}, \mathcal{P}_2, m'_{02}, \mathcal{M}_2, w'_{02}, \mathcal{W}_2. \quad (9)$$

Казалось бы вывод уравнений динамики необходимо выполнять для каждого из девяти случаев. Однако в этом нет необходимости, так как вывод уравнений динамики для каждого из девяти случаев подчиняется единообразной (унифицированной) процедуре, обусловленной методом Гамильтона. Поэтому в методическом плане удобно сначала выполнить вывод уравнений динамики, например, для первого набора динамических параметров, а затем переписать результат для каждой из остальных восьми комбинаций динамических параметров.

Далее в этом Разделе на основании указанных соображений выполним вывод уравнений динамики для условного физического объекта для первого набора динамических параметров

$$S, p, m, w, p'_0, \mathcal{P}, m'_0, \mathcal{M}, w'_0, \mathcal{W}.$$

### 1. Первое приближение

Исходим из условия, что преобразование  $p'_0(x) = \mathcal{P}(x, S(x), p(x), p_0(x))$  удовлетворяет первому соотношению формулы (27) Главы 6.1

$$\frac{\delta p_0(x)}{Dx^I} = 0,$$

или соотношению (28) Главы 6.1

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, S(x), p(x), p_0)}{Dx^I} = 0.$$

Выведем отсюда уравнения динамики для первого приближения. Таким образом, исходим из равенства

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial S^N} \cdot p^N_I + \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial p^{K_L}} \cdot \frac{\partial p^{K_L}(x)}{Dx^I} = 0.$$

Учтем, что

$$\frac{\partial p^{K_L}(x)}{Dx^I} = \frac{\partial p^{K_I}(x)}{Dx^L} - [P_I, P_L]S^K.$$

Получим

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial S^N} \cdot p^N_I - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial p^{K_L}} \cdot [P_I, P_L]S^K + \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial p^{K_L}} \cdot \frac{\partial p^{K_I}(x)}{Dx^L} = 0.$$

В соответствии с методом Гамильтона отождествим слагаемое

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial p^{K_L}} \cdot \frac{\partial p^{K_I}(x)}{Dx^L}$$

с выражением

$$\frac{\partial p^{K_I}(x)}{Dx^L} \cdot \frac{Dx^L(x_0)}{\partial x_0^K},$$

то есть положим

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial p^{K_L}} \cdot \frac{\partial p^{K_I}(x)}{Dx^L} \equiv \frac{\partial p^{K_I}(x)}{Dx^L} \cdot \frac{Dx^L(x_0)}{\partial x_0^K} = \frac{\partial p^{K_I}(x_0)}{\partial x_0^K}.$$

Это возможно, если выполняется система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{K_I}(x_0)}{\partial x_0^K} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial S^N} \cdot p^N_I - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial p^{K_L}} \cdot [P_I, P_L]S^K \right), \\ \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial p^{K_L}} &= \frac{Dx^L(x_0)}{\partial x_0^K}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя второе соотношение в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p^{K_I}(x_0)}{\partial x_0^K} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial S^N} \cdot p^N_I - \frac{Dx^L(x_0)}{\partial x_0^K} \cdot [P_I, P_L]S^K \right). \quad (11)$$

Это уравнение есть уравнение динамики импульса физического объекта при изменении координат пространства-времени. Отсюда уравнение (11) можно назвать *уравнением динамики сдвига для импульса физического объекта в первом приближении*. На основании этого уравнения в Разделах III.1.1, VI.1.1, IX.1.1 приведены уравнения динамики сдвига для импульса фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов в первом приближении.

## 2. Второе приближение

В основе динамики фундаментального объекта для второго приближения лежат преобразования

$$p'_0(x, l) = \mathcal{P}(x, l, S(x, l), p(x, l), m(x, l), p_0(x, l)), \quad (12)$$

$$m'_0(x, l) = \mathcal{M}(x, l, S(x, l), p(x, l), m(x, l), m_0(x, l)). \quad (13)$$

Исходим из условия, что преобразование (12) удовлетворяет первым двум соотношениям формулы (27) Главы 6.1. То есть, соотношениям

$$\frac{\delta p_0(x, l)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta p_0(x, l)}{Dl} = 0,$$

или соотношениям (28) и (29) Главы 6.1 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S(x, l), p(x, l), m(x, l), p_0)}{Dx} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S(x, l), p(x, l), m(x, l), p_0)}{Dl} &= 0.\end{aligned}$$

Этими соотношениями, которые назовем *условиями динамики сдвига*, определяются уравнения динамики сдвига для импульса и момента фундаментального объекта.

Кроме того, исходим из условия, что преобразование (13) удовлетворяет первым двум соотношениям формулы (34) Главы 6.1. То есть, соотношениям

$$\frac{\delta m_0(x, l)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta m_0(x, l)}{Dl} = 0,$$

или соотношениям (35) и (36) Главы 6.1 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S(x, l), p(x, l), m(x, l), m_0)}{Dx} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S(x, l), p(x, l), m(x, l), m_0)}{Dl} &= 0.\end{aligned}$$

Этими соотношениями, которые назовем *условиями динамики линейного преобразования*, определяются уравнения динамики линейного преобразования для импульса и момента фундаментального объекта.

Выведем отсюда уравнения динамики для второго приближения. Таким образом, исходим из равенств

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dx} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dl} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dx} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dl} = 0. \quad (17)$$

Если в выражениях (14) и (16) учесть, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x, l)}{Dx} &= -\frac{\partial \partial S(x, l)}{Dx Dx} = -\frac{\partial \partial S(x, l)}{Dx Dx} - [P, P]S = \frac{\partial p(x, l)}{Dx} - [P, P]S, \\ \frac{\partial m(x, l)}{Dx} &= -\frac{\partial \partial S(x, l)}{Dx Dl} = -\frac{\partial \partial S(x, l)}{Dl Dx} - [P, M]S = \frac{\partial p(x, l)}{Dl} - [P, M]S,\end{aligned}$$

а в выражениях (15) и (17) учесть, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x, l)}{Dl} &= -\frac{\partial \partial S(x, l)}{Dl Dx} = -\frac{\partial \partial S(x, l)}{Dx Dl} - [M, P]S = \frac{\partial m(x, l)}{Dx} - [M, P]S, \\ \frac{\partial m(x, l)}{Dl} &= -\frac{\partial \partial S(x, l)}{Dl Dl} = -\frac{\partial \partial S(x, l)}{Dl Dl} - [M, M]S = \frac{\partial m(x, l)}{Dl} - [M, M]S,\end{aligned}$$

то получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot [P, P]S + \\ + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot [P, M]S = 0,\end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial s} \cdot m + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot [M, P]S + \\ & + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot [M, M]S = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx} - \frac{\delta \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\delta S} \cdot p + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot [P, P]S + \\ & + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot [P, M]S = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot [M, P]S + \\ & + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot [M, M]S = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее остановимся отдельно на уравнениях динамики сдвига и динамики линейного преобразования.

### 2.1. Уравнения динамики сдвига

К уравнениям динамики сдвига отнесены уравнения, которые являются следствием условий

$$\frac{\delta p_0(x, l)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta p_0(x, l)}{Dl} = 0,$$

то есть, соотношения (18) и (19).

Обратимся сначала к соотношению (18). Полагая в соответствии с методом Гамильтона, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dl}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial p(x, l)}{Dx} \cdot \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial p(x, l)}{Dl} \cdot \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0},$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dl} \equiv \frac{\partial p(x, l)}{Dx} \cdot \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial p(x, l)}{Dl} \cdot \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial p(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0},$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot [P, P]S - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot [P, M]S \right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} &= \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} &= \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

Подставляя два последних соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P, M]S \right). \quad (23)$$

Уравнение (23) назовем *уравнением динамики сдвига для импульса физического объекта* во втором приближении. На основании этого уравнения в Разделах IV.1.1, VII.1.1, X.1.1 приведены уравнения динамики сдвига для импульса фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно во втором приближении.

Рассмотрим теперь соотношение (19). Полагая в соответствии с методом Гамильтона, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dl}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial m(x, l)}{Dx} \cdot \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial m(x, l)}{Dl} \cdot \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dl} \equiv \frac{\partial m(x, l)}{Dx} \cdot \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial m(x, l)}{Dl} \cdot \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial m(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0},$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot m - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot [M, P]S - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot [M, M]S \right), \quad (24) \\ \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial p} &= \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial m} &= \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

Подставляя два последних соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial m(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot m - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M, M]S \right). \quad (25)$$

Это уравнение назовем *уравнением динамики сдвига для момента физического объекта* во втором приближении. На основании этого уравнения в Разделах IV.1.2, VII.1.2, X.1.2 приведены уравнения динамики сдвига для момента фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно во втором приближении.

## 2.2. Уравнения динамики линейного преобразования

К уравнениям динамики линейного преобразования отнесены уравнения, которые являются следствием условий

$$\frac{\delta m_0(x, l)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta m_0(x, l)}{Dl} = 0,$$

то есть, соотношения (20) и (21).

Обратимся сначала к соотношению (20). Полагая в соответствии с метом Гамильтона, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dl}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial p(x, l)}{Dx} \cdot \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial p(x, l)}{Dl} \cdot \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0},$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l)}{Dl} \equiv \frac{\partial p(x, l)}{Dx} \cdot \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial p(x, l)}{Dl} \cdot \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} = \frac{\partial p(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0},$$

получим систему уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot [P, P]S - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot [P, M]S \right), \quad (26) \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} &= \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}, \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} &= \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}. \end{aligned}$$

Подставляя два последних соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P, M]S \right). \quad (27)$$

Это уравнение есть уравнение динамики импульса физического объекта при изменении линейного преобразования пространства-времени. Отсюда уравнение (27) назовем *уравнением динамики линейного преобразования для импульса физического объекта* во втором приближении. На основании этого уравнения в Разделах IV.2.1, VII.2.1, X.2.1 приведены уравнения динамики линейного преобразования для импульса фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно во втором приближении.

Рассмотрим теперь соотношение (21). Полагая в соответствии с методом Гамильтона, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dl}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial m(x, l)}{Dx} \cdot \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial m(x, l)}{Dl} \cdot \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l)}{Dl} \equiv \frac{\partial m(x, l)}{Dx} \cdot \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial m(x, l)}{Dl} \cdot \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} = \frac{\partial m(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0},$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot m - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} \cdot [M, P]S - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} \cdot [M, M]S \right), \quad (28) \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p} &= \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}, \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m} &= \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}. \end{aligned}$$

Подставляя два последних соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial m(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot m - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M, M]S \right), \quad (29)$$

которое назовем *уравнением динамики линейного преобразования для момента физического объекта* во втором приближении. На основании этого уравнения в Разделах IV.2.2, VII.2.2, X.2.2 приведены уравнения динамики линейного преобразования для момента фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно во втором приближении.

### 3. Общий случай – третье приближение

Исходим из условия, что преобразования

$$\begin{aligned} p'_0(x, l, a) &= \mathcal{P}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), p_0(x, l, a)), \\ m'_0(x, l, a) &= \mathcal{M}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), m_0(x, l, a)), \\ w'_0(x, l, a) &= \mathcal{W}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), w_0(x, l, a)) \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям (27), (34) и (41) Главы 6.1 соответственно. А именно преобразование

$$p'_0(x, l, a) = \mathcal{P}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), p_0(x, l, a))$$

удовлетворяет условиям динамики сдвига

$$\frac{\delta p_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta p_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta p_0(x, l, a)}{Da} = 0,$$

или соотношениям (28), (29) и (30) Главы 6.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), p_0)}{Dx} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), p_0)}{Dl} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), p_0)}{Da} &= 0; \end{aligned}$$

преобразование

$$m'_0(x, l, a) = \mathcal{M}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), m_0(x, l, a))$$

удовлетворяет условиям динамики линейного преобразования

$$\frac{\delta m_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta m_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta m_0(x, l, a)}{Da} = 0,$$

или соотношениям (35), (36) и (37) Главы 6.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), m_0)}{Dx} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), m_0)}{Dl} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), m_0)}{Da} &= 0; \end{aligned}$$

преобразование

$$w'_0(x, l, a) = \mathcal{W}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), w_0(x, l, a))$$

удовлетворяет условиям динамики второго линейного преобразования

$$\frac{\delta w_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta w_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta w_0(x, l, a)}{Da} = 0,$$

или соотношениям (42), (43) и (44) Главы 6.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), w_0)}{Dx} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), w_0)}{Dl} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S(x, l, a), p(x, l, a), m(x, l, a), w(x, l, a), w_0)}{Da} &= 0. \end{aligned}$$



Отсюда следуют уравнения динамики в общем случае. Таким образом, при выводе уравнений динамики исходим из соотношений

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot p + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{Da} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot w + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot p + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{Da} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot w + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot p + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{Da} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot w + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} = 0. \quad (38)$$

В выражениях (30), (33) и (36) учтем, что

$$\frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} = -\frac{\partial \partial S}{DxDx} = -\frac{\partial \partial S}{DxDx} - [P, P]S = \frac{\partial p}{Dx} - [P, P]S,^1$$

$$\frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} = -\frac{\partial \partial S}{DxDl} = -\frac{\partial \partial S}{DlDx} - [P, M]S = \frac{\partial p}{Dl} - [P, M]S,$$

$$\frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} = -\frac{\partial \partial S}{DxDa} = -\frac{\partial \partial S}{DaDx} - [P, W]S = \frac{\partial p}{Da} - [P, W]S.$$

В выражениях(31), (34) и (37) учтем, что

$$\frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} = -\frac{\partial \partial S}{DlDx} = -\frac{\partial \partial S}{DxDl} - [M, P]S = \frac{\partial m}{Dx} - [M, P]S,$$

$$\frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} = -\frac{\partial \partial S}{DlDl} = -\frac{\partial \partial S}{DlDl} - [M, M]S = \frac{\partial m}{Dl} - [M, M]S,$$

<sup>1</sup> Напомним, что полная запись этого выражения с учетом индексов имеет вид

$$\frac{\partial p^K_L(x, l, a)}{Dx^I} = -\frac{\partial \partial S^K(x, l, a)}{Dx^I Dx^L} = -\frac{\partial \partial S^K(x, l, a)}{Dx^L Dx^I} - [P_I, P_L]S^K.$$

$$\frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} = -\frac{\partial \partial S}{Dl Da} = -\frac{\partial \partial S}{Da Dl} - [M, W]S = \frac{\partial m}{Da} - [M, W]S.$$

В выражениях (32), (35) и (38) учтем, что

$$\frac{\partial p(x, l, a)}{Da} = -\frac{\partial \partial S}{Da Dx} = -\frac{\partial \partial S}{Dx Da} - [W, P]S = \frac{\partial w}{Dx} - [W, P]S,$$

$$\frac{\partial m(x, l, a)}{Da} = -\frac{\partial \partial S}{Da Dl} = -\frac{\partial \partial S}{Dl Da} - [W, M]S = \frac{\partial w}{Dl} - [W, M]S,$$

$$\frac{\partial w(x, l, a)}{Da} = -\frac{\partial \partial S}{Da Da} = -\frac{\partial \partial S}{Da Da} - [W, W]S = \frac{\partial w}{Da} - [W, W]S.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot p + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot [P, P]S + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} - \\ - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot [P, M]S + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot [P, W]S = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot [M, P]S + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} - \\ - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot [M, M]S + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot [M, W]S = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{Da} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot w + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot [W, P]S + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} - \\ - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot [W, M]S + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot [W, W]S = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot p + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot [P, P]S + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} - \\ - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot [P, M]S + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot [P, W]S = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot [M, P]S + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} - \\ - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot [M, M]S + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot [M, W]S = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}}{Da} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot w + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot [W, P]S + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} - \\ - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot [W, M]S + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot [W, W]S = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot p + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot [P, P]S + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} - \\ - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot [P, M]S + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot [P, W]S = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot [M, P]S + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} - \\ - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot [M, M]S + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot [M, W]S = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}}{Da} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot w + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot [W, P]S + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} - \\ - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot [W, M]S + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot [W, W]S = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Далее остановимся отдельно на уравнениях динамики сдвига, уравнениях динамики линейного преобразования и уравнениях динамики второго линейного преобразования.

### 3.1. Уравнения динамики сдвига

К уравнениям динамики сдвига относятся уравнения, являющиеся следствием условий

$$\frac{\delta p_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta p_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta p_0(x, l, a)}{Da} = 0,$$

то есть соотношения (39), (40) и (41).

Обратимся сначала к соотношению (39). В соответствии с методом Гамильтона положим, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(x_0)}{\partial x_0}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} &\equiv \\ \equiv \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} &= \frac{\partial p(x_0, l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

После сравнения и подстановки получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x_0, l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot p - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot [P, P]S - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot [P, M]S - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot [P, W]S \right), \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} &= \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} = \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} = \frac{Da(x_0)}{\partial x_0}. \end{aligned} \quad (48)$$

Подставляя три последние соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p(x_0, l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot p - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P, M]S - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P, W]S \right), \quad (49)$$

которое назовем *уравнением динамики сдвига для импульса физического объекта*. На основании этого уравнения в Разделах V.1.1, VIII.1.1, XI.1.1 приведены уравнения динамики сдвига для импульса фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно.

Далее рассмотрим соотношение (40). В соответствии с методом Гамильтона положим, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(x_0)}{\partial x_0}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} \equiv \\ & \equiv \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial m(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

После сравнения и подстановки получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot m - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot [M, P]S - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot [M, M]S - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot [M, W]S \right), \quad (50) \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} &= \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} = \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} = \frac{Da(x_0)}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

Подставляя три последних соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial m(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot m - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M, M]S - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M, W]S \right), \quad (51)$$

которое назовем *уравнением динамики сдвига для момента физического объекта*. На основании этого уравнения в Разделах V.1.2, VIII.1.2, XI.1.2 приведены уравнения динамики сдвига для момента фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно.

Теперь рассмотрим соотношение (41). В соответствии с методом Гамильтона положим, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Da}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(x_0)}{\partial x_0}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} \equiv \\ & \equiv \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial w(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

После сравнения и подстановки получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{Da} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot w - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \cdot [W, P]S - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} \cdot [W, M]S - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} \cdot [W, W]S \right), \quad (52) \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} &= \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial m} = \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial w} = \frac{Da(x_0)}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial w(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{Da} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot w - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W, M]S - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W, W]S \right), \quad (53)$$

которое назовем *уравнением динамики сдвига для второго момента физического объекта*. На основании этого уравнения в Разделах V.1.3, VIII.1.3, XI.1.3 приведены уравнения динамики сдвига для второго момента фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно.

3.2. Уравнения динамики линейного преобразования

К уравнениям динамики линейного преобразования относятся уравнения, являющиеся следствием условий

$$\frac{\delta m_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta m_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta m_0(x, l, a)}{Da} = 0,$$

то есть соотношения (42), (43) и (44).

Обратимся сначала к соотношению (42). В соответствии с методом Гамильтона положим, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} &\equiv \\ \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} &= \frac{\partial p(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0}. \end{aligned}$$

После сравнения и подстановки получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot p - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot [P, P]S - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot [P, M]S - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot [P, W]S \right), \quad (54) \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} &= \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} = \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} = \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}. \end{aligned}$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot p - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P, M]S - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P, W]S \right), \quad (55)$$

которое назовем *уравнением динамики линейного преобразования для импульса физического объекта*. На основании этого уравнения в Разделах V.2.1, VIII.2.1, XI.2.1 приведены уравнения динамики линейного преобразования для импульса фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно.

Далее обратимся к соотношению (43). В соответствии с методом Гамильтона положим, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} &\equiv \\ \equiv \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} &= \frac{\partial m(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0}. \end{aligned}$$

После сравнения и подстановки получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot m - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot [M, P]S - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot [M, M]S - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot [M, W]S \right), \quad (56) \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} &= \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} = \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} = \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}. \end{aligned}$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial m(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial l} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} m - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M, M]S - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M, W]S \right), \quad (57)$$

которое назовем *уравнением динамики линейного преобразования для момента физического объекта*. На основании этого уравнения в Разделах V.2.2, VIII.2.2, XI.2.2 приведены уравнения динамики линейного преобразования для момента фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно.

Теперь обратимся к соотношению (44). В соответствии с методом Гамильтона положим, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Da}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} \equiv \\ & \equiv \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} = \frac{\partial w(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0}. \end{aligned}$$

После сравнения и подстановки получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{Da} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot w - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} \cdot [W, P]S - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} \cdot [W, M]S - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \cdot [W, W]S \right), \quad (58) \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p} &= \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial m} = \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} = \frac{Da(l_0)}{\partial l_0}. \end{aligned}$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial w(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{Da} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot w - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W, M]S - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W, W]S \right), \quad (59)$$

которое назовем *уравнением динамики линейного преобразования для второго момента физического объекта*. На основании этого уравнения в Разделах V.2.3, VIII.2.3, XI.2.3 приведены уравнения динамики линейного преобразования для второго момента фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно.

### 3.3. Уравнения динамики второго линейного преобразования

К уравнениям динамики второго линейного преобразования относятся уравнения, являющиеся следствием условий

$$\frac{\delta w_0(x, l, a)}{Dx} = 0, \quad \frac{\delta w_0(x, l, a)}{Dl} = 0, \quad \frac{\delta w_0(x, l, a)}{Da} = 0,$$

то есть соотношения (45), (46) и (47).

Обратимся сначала к соотношению (45). В соответствии с методом Гамильтона положим, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} \equiv \\ & \equiv \frac{\partial p(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial p(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} = \frac{\partial p(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0}. \end{aligned}$$

После сравнения и подстановки получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot p - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot [P, P]S - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot [P, M]S - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot [P, W]S \right), \quad (60) \\ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} &= \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} = \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} = \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}. \end{aligned}$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial p(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{Dx} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot p - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P, P]S - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P, M]S - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P, W]S \right), \quad (61)$$

которое назовем *уравнением динамики второго линейного преобразования для импульса физического объекта*. На основании этого уравнения в Разделах V.3.1, VIII.3.1, XI.3.1 приведены уравнения динамики второго линейного преобразования для импульса фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно.

Далее обратимся к соотношению (46). В соответствии с методом Гамильтона положим, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da}$$

этого соотношения тождественна выражению

$$\frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} \equiv \\ & \equiv \frac{\partial m(x, l, a)}{Dx} \cdot \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Dl} \cdot \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial m(x, l, a)}{Da} \cdot \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} = \frac{\partial m(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0}. \end{aligned}$$

После сравнения и подстановки получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot m - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot [M, P]S - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot [M, M]S - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot [M, W]S \right), \quad (62) \\ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} &= \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} = \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} = \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}. \end{aligned}$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial m(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{Dl} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} m - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M, P]S - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M, M]S - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M, W]S \right), \quad (63)$$

которое назовем *уравнением динамики второго линейного преобразования для момента физического объекта*. На основании этого уравнения в Разделах V.3.2, VIII.3.2, XI.3.2 приведены уравнения динамики второго линейного преобразования для момента фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно.

Теперь обратимся к соотношению (47). В соответствии с методом Гамильтона положим, что сумма слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dx} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Dl} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{Da}$$

этого соотношения тождественно выражению

$$\frac{\partial w(x, l, a)}{\partial x} \cdot \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{\partial l} \cdot \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{\partial a} \cdot \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{\partial l} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, l, a)}{\partial a} \equiv \\ & \equiv \frac{\partial w(x, l, a)}{\partial x} \cdot \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{\partial l} \cdot \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} + \frac{\partial w(x, l, a)}{\partial a} \cdot \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} = \frac{\partial w(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0}. \end{aligned}$$

После сравнения и подстановки получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial a} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot w - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \cdot [W, P]S - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} \cdot [W, M]S - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \cdot [W, W]S \right), \quad (64) \\ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} &= \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial m} = \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} = \frac{Da(a_0)}{\partial a_0}. \end{aligned}$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получим уравнение

$$\frac{\partial w(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial a} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} w - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W, P]S - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W, M]S - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W, W]S \right), \quad (65)$$

которое назовем *уравнением динамики второго линейного преобразования для второго момента физического объекта*. На основании этого уравнения в Разделах V.3.3, VIII.3.3, XI.3.3 приведены уравнения динамики второго линейного преобразования для второго момента фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов соответственно.

Далее на основании уравнений динамики физического объекта запишем уравнения динамики для фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов.

### III. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Уравнения динамики фундаментального объекта в первом приближении сводятся к уравнению динамики сдвига для импульса этого объекта.

#### 1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Уравнение динамики сдвига для импульса фундаментального объекта в первом приближении совпадает с уравнением динамики сдвига для импульса физического объекта в первом приближении (11). Перепишем это уравнение еще раз.

Итак, имеем уравнение динамики сдвига для импульса фундаментального объекта в первом приближении

$$\frac{\partial p^K_I(x_0)}{\partial x_0^K} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial x^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial S^N} \cdot p^N_I - \frac{Dx^L(x_0)}{\partial x_0^K} \cdot [P_I, P_L]S^K \right). \quad (66)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

### IV. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

#### 1. Уравнения динамики сдвига

Уравнения динамики сдвига фундаментального объекта во втором приближении совпадают с уравнениями динамики сдвига физического объекта во втором приближении, выведенными в Разделе II.2.1. Мы повторим



эти уравнения без изменений, с той лишь разницей, что опустим только те индексы, по которым выполняется суммирование. В приведенных далее уравнениях динамики сдвига используются следующие соответствия:

$$S \sim S^K, \quad p_M \sim p^{KM}, \quad m^L_M \sim m^{KL}_M.$$

### 1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Уравнение динамики сдвига для импульса фундаментального объекта во втором приближении совпадает с уравнением динамики сдвига для импульса физического объекта во втором приближении (23). Перепишем это уравнение еще раз.

$$\frac{\partial p_M(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx^M} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p_M - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_M, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_M, M]S \right). \quad (67)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

### 1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

Уравнение динамики сдвига для момента фундаментального объекта во втором приближении совпадает с уравнением динамики сдвига для момента физического объекта во втором приближении (25). Перепишем это уравнение еще раз.

$$\frac{\partial m^L_M(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dl^M_L} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot m^L_M - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^L_M, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^L_M, M]S \right). \quad (68)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 2. Уравнения динамики линейного преобразования

Уравнения динамики линейного преобразования фундаментального объекта во втором приближении получим из уравнений динамики линейного преобразования физического объекта во втором приближении, выведенных в Разделе II.2.2, путем замены

$$S \rightarrow S^L_K = C^L_{KN} \cdot S^N, \quad p \rightarrow p^{L_{KI}} = - \frac{\partial S^L_K(z)}{Dx^I} = C^L_{KN} \cdot p^N_I, \quad m \rightarrow m^{L_{K^P}_I} = - \frac{\partial S^L_K(z)}{Dl^P_I} = C^L_{KN} \cdot m^{NP}_I. \quad (69)$$

В приведенных далее уравнениях динамики линейного преобразования опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$S \sim S^L_K, \quad p_M \sim p^{L_{KM}}, \quad m^P_I \sim m^{L_{K^P}_I}. \quad (70)$$

### 2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

После выполнения замен (69) и (70) в уравнении (27) получим уравнение динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта во втором приближении

$$\frac{\partial p_M(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx^M} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p_M - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_M, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_M, M]S \right). \quad (71)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 2.2. Уравнения динамики линейного преобразования для момента

После выполнения замен (69) и (70) в уравнении (29) получим уравнение динамики линейного преобразования для момента фундаментального объекта во втором приближении

$$\frac{\partial m^P_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot m^P_I - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M]S \right). \quad (72)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## V. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

## 1. Уравнения динамики сдвига

Уравнения динамики сдвига фундаментального объекта в общем случае совпадают с уравнениями динамики сдвига физического объекта, выведенными в Разделе II.3.1. Мы повторим эти уравнения без изменений, с той лишь разницей, что опустим только те индексы, по которым выполняется суммирование. В приведенных далее уравнениях динамики сдвига использованы следующие соответствия:

$$S \sim S^K, \quad p_M \sim p^K_M, \quad m^L_M \sim m^{KL}_M, \quad w^{NL}_M \sim w^{KNL}_M.$$

## 1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Уравнение динамики сдвига для импульса фундаментального объекта совпадает с уравнением (49)

$$\frac{\partial p_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{Dx^M} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot p_M - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_M, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_M, M]S - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_M, W]S \right). \quad (73)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

Уравнение динамики сдвига для момента фундаментального объекта совпадает с уравнением (51)

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^L_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= \\ &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{Dl^M_L} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot m^L_M - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^L_M, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^L_M, M]S - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^L_M, W]S \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 1.3. Уравнение динамики сдвига для второго момента

Уравнение динамики сдвига для второго момента фундаментального объекта совпадает с уравнением (53)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{NL}_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= \\ &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{Da^M_{LN}} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \cdot w^{NL}_M - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{NL}_M, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{NL}_M, M]S - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{NL}_M, W]S \right) \end{aligned} \quad (75)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 2. Уравнения динамики линейного преобразования

Уравнения динамики линейного преобразования фундаментального объекта получим из уравнений динамики линейного преобразования физического объекта, выведенных в Разделе П.3.2, путем замены

$$\begin{aligned} S \rightarrow S^L_K &= C^L_{KN} \cdot S^N, \quad p \rightarrow p^L_{KI} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{\partial x^I} = C^L_{KN} \cdot p^N_I, \\ m \rightarrow m^L_{K^P_I} &= -\frac{\partial S^L_K(z)}{\partial l^I_P} = C^L_{KN} \cdot m^{NP_I}, \quad w \rightarrow w^L_{K^{QP_I}} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{\partial a^I_{PQ}} = C^L_{KN} \cdot w^{NQP_I}. \end{aligned} \quad (76)$$

В приведенных далее уравнениях динамики линейного преобразования опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$S \sim S^L_K, \quad p_M \sim p^L_{KM}, \quad m^P_I \sim m^L_{K^P_I}, \quad w^{QP_I} \sim w^L_{K^{QP_I}}. \quad (77)$$

### 2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

После выполнения замен (76) и (77) в уравнении (55) получим уравнение динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} &= \\ &= -\left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x^M} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot p_M - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_M, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_M, M]S - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_M, W]S \right). \end{aligned} \quad (78)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

### 2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента

После выполнения замен (76) и (77) в уравнении (57) получим уравнение динамики линейного преобразования для момента фундаментального объекта

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^P_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} &= \\ &= -\left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial l^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} m^P_I - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M]S - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, W]S \right). \end{aligned} \quad (79)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

### 2.3. Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента

После выполнения замен (76) и (77) в уравнении (59) получим уравнение динамики линейного преобразования для второго момента фундаментального объекта

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{QP_I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} &= \\ &= -\left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial a^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \cdot w^{QP_I} - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP_I}, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP_I}, M]S - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP_I}, W]S \right). \end{aligned} \quad (80)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

### 3. Уравнения динамики второго линейного преобразования

Уравнения динамики второго линейного преобразования фундаментального объекта получим из уравнений динамики второго линейного преобразования физического объекта, выведенных в Разделе II.3.3, путем замены

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S^L_{KM} = C^L_{KMN} \cdot S^N, & p &\rightarrow P^L_{KMI} = -\frac{\partial S^L_{KM}(z)}{Dx^I} = C^L_{KMN} \cdot p^N_I, \\ m &\rightarrow M^L_{KM^P_I} = -\frac{\partial S^L_{KM}(z)}{Dl^I_P} = C^L_{KMN} \cdot m^{NP_I}, & w &\rightarrow W^L_{KM^{QP_I}} = -\frac{\partial S^L_{KM}(z)}{Da^I_{PQ}} = C^L_{KMN} \cdot w^{NQP_I}. \end{aligned} \quad (81)$$

В приведенных далее уравнениях динамики линейного преобразования опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$S \sim S^L_{KM}, \quad P_I \sim P^L_{KMI}, \quad M^P_I \sim M^L_{KM^P_I}, \quad W^{QP_I} \sim W^L_{KM^{QP_I}}. \quad (82)$$

#### 3.1. Уравнение динамики для импульса

После выполнения замен (81) и (82) в уравнении (61) получим уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса фундаментального объекта

$$\frac{\partial P_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = -\left( \frac{\partial \mathcal{W}}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot P_I - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, P]S - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, M]S - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, W]S \right). \quad (83)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

#### 3.2. Уравнение динамики для момента

После выполнения замен (81) и (82) в уравнении (63) получим уравнение динамики второго линейного преобразования для момента фундаментального объекта

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^P_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = \\ = -\left( \frac{\partial \mathcal{W}}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} M^P_I - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P_I, P]S - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P_I, M]S - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P_I, W]S \right). \end{aligned} \quad (84)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

#### 3.3. Уравнение динамики для второго момента

После выполнения замен (81) и (82) в уравнении (65) получим уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента фундаментального объекта

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^{QP_I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = \\ = -\left( \frac{\partial \mathcal{W}}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial S} \cdot W^{QP_I} - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP_I}, P]S - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP_I}, M]S - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP_I}, W]S \right). \end{aligned} \quad (85)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## VI. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Уравнения динамики промежуточного объекта в первом приближении сводятся к уравнению динамики сдвига для импульса этого объекта.

### 1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Уравнение динамики сдвига для импульса промежуточного объекта в первом приближении получим из уравнения динамики сдвига для импульса физического объекта в первом приближении (11) путем замены в соответствии с формулами (48), (50) Главы 6.1:

$$S^L \rightarrow \mathbf{S}_1^L = C^{LP}_N \cdot S^N_P, \quad p^{L_I} \rightarrow \mathbf{p}_{1I}^L = -\frac{\partial \mathbf{S}_1^L(z)}{\partial x^I} = -C^{LK}_N \cdot \frac{\partial S^N_K}{\partial x^I} = C^{LK}_N \cdot p^{N_{KI}}, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_1.$$

В результате получим уравнение динамики сдвига для импульса промежуточного объекта в первом приближении

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{1I}^K(x_0)}{\partial x_0^K} = -\left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1)}{\partial x^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1)}{\partial \mathbf{S}_1^N} \cdot \mathbf{p}_{1I}^N - \frac{Dx^L(x_0)}{\partial x_0^K} \cdot [P_I, P_L] \mathbf{S}_1^K \right). \quad (86)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## VII. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

### 1. Уравнения динамики сдвига

Уравнения динамики сдвига промежуточного объекта во втором приближении получим из уравнений динамики сдвига физического объекта во втором приближении, выведенных в Разделе II.2.1, путем замены в соответствии с формулами (48), (50), (51) Главы 6.1:

$$\begin{aligned} S \rightarrow \mathbf{S}_1^L &= C^{LP}_N \cdot S^N_P, \quad p \rightarrow \mathbf{p}_{1I}^L = -\frac{\partial \mathbf{S}_1^L(z)}{\partial x^I} = -C^{LK}_N \cdot \frac{\partial S^N_K}{\partial x^I} = C^{LK}_N \cdot p^{N_{KI}}, \\ m \rightarrow \mathbf{m}_{1I}^{LP} &= -\frac{\partial \mathbf{S}_1^L(z)}{\partial l^I_P} = -C^{LK}_N \cdot \frac{\partial S^N_K(z)}{\partial l^I_P} = C^{LK}_N \cdot m^{N_{K^P I}}, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_1. \end{aligned} \quad (87)$$

В приведенных далее уравнениях динамики сдвига опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$\mathbf{S}_1 \sim \mathbf{S}_1^L, \quad \mathbf{p}_{1I} \sim \mathbf{p}_{1I}^L, \quad \mathbf{m}_{1I}^P \sim \mathbf{m}_{1I}^{LP}. \quad (88)$$

#### 1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

После выполнения замен (87) и (88) в уравнении (23) получим уравнение динамики сдвига для импульса промежуточного объекта во втором приближении

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{1I}(x_0, l(x_0))}{\partial x_0} = -\left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1)}{\partial x^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1)}{\partial \mathbf{S}_1} \cdot \mathbf{p}_{1I} - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P] \mathbf{S}_1 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, M] \mathbf{S}_1 \right). \quad (89)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

После выполнения замен (87) и (88) в уравнении (25) получим уравнение динамики сдвига для момента промежуточного объекта во втором приближении

$$\frac{\partial m_{1I}^P(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1)}{\partial \mathbf{S}_1} \cdot m_{1I}^P - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, P] \mathbf{S}_1 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, M] \mathbf{S}_1 \right). \quad (90)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 2. Уравнения динамики линейного преобразования

Уравнения динамики линейного преобразования промежуточного объекта во втором приближении получим из уравнений динамики линейного преобразования физического объекта во втором приближении, выведенных в Разделе II.2.2, путем замены в соответствии с формулами (53), (55), (56) Главы 6.1:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S_{1K}^L = \delta^P_K \cdot \delta^L_N \cdot S^N_P \equiv S^L_K, \quad p \rightarrow p_{1KI}^L = -\frac{\partial S_{1K}^L(z)}{Dx^I} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{Dx^I} = p^L_{KI}, \\ m &\rightarrow m_{1K}^L P_I = -\frac{\partial S_{1K}^L(z)}{Dl^I_P} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{Dl^I_P} = m^L_{K} P_I, \quad \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1 \end{aligned} \quad (91)$$

В приведенных далее уравнениях динамики линейного преобразования опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$\mathbf{S}_1 \sim S_{1K}^L, \quad \mathbf{p}_I \sim p_{1KI}^L, \quad m_{1I}^P \sim m_{1K}^L P_I. \quad (92)$$

## 2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

После выполнения замен (91) и (92) в уравнении (27) получим уравнение динамики линейного преобразования для импульса промежуточного объекта во втором приближении

$$\frac{\partial p_{1I}(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1)}{\partial \mathbf{S}_1} \cdot p_{1I} - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, P] \mathbf{S}_1 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, M] \mathbf{S}_1 \right). \quad (93)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 2.2. Уравнения динамики линейного преобразования для момента

После выполнения замен (91) и (92) в уравнения (29) получим уравнение динамики линейного преобразования для момента промежуточного объекта во втором приближении

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{1I}^P(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} &= \\ &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1)}{\partial \mathbf{S}_1} \cdot m_{1I}^P - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P] \mathbf{S}_1 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M] \mathbf{S}_1 \right). \end{aligned} \quad (94)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## VIII. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

## 1. Уравнения динамики сдвига

Уравнения динамики сдвига промежуточного объекта получим из уравнений динамики сдвига физического объекта, выведенных в Разделе II.2.1, путем замены в соответствии с формулами (48), (50), (51), (52) Главы 6.1:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{S}_1^L = C^{LP}_N \cdot S^N_P, \quad p \rightarrow \mathbf{p}_{1I}^L = -\frac{\partial \mathbf{S}_1^L(z)}{Dx^I} = -C^{LK}_N \cdot \frac{\partial S^N_K}{Dx^I} = C^{LK}_N \cdot p^N_{KI}, \\ m &\rightarrow \mathbf{m}_{1I}^{LP} = -\frac{\partial \mathbf{S}_1^L(z)}{Dl^I_P} = -C^{LK}_N \cdot \frac{\partial S^N_K(z)}{Dl^I_P} = C^{LK}_N \cdot m^N_{K^P_I}, \\ w &\rightarrow \mathbf{w}_{1I}^{LQP} = -\frac{\partial \mathbf{S}_1^L(z)}{Da^I_{PQ}} = -C^{LK}_N \cdot \frac{\partial S^N_K(z)}{Da^I_{PQ}} = C^{LK}_N \cdot w^N_{K^{QP}_I}. \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_1. \end{aligned} \quad (95)$$

В приведенных далее уравнениях динамики сдвига опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$\mathbf{S}_1 \sim \mathbf{S}_1^L, \quad \mathbf{p}_{1I} \sim \mathbf{p}_{1I}^L, \quad \mathbf{m}_{1I}^P \sim \mathbf{m}_{1I}^{LP}, \quad \mathbf{w}_{1I}^{QP} \sim \mathbf{w}_{1I}^{LQP}. \quad (96)$$

## 1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

После выполнения замен (95) и (96) в уравнении (49) получим уравнение динамики сдвига для импульса промежуточного объекта

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{1I}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = -\left( \frac{\partial \mathcal{P}_1}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial \mathbf{S}_1} \cdot \mathbf{p}_{1I} - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P] \mathbf{S}_1 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, M] \mathbf{S}_1 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, W] \mathbf{S}_1 \right). \quad (97)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

После выполнения замен (95) и (96) в уравнении (51) получим уравнение динамики сдвига для момента промежуточного объекта

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}_{1I}^P(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= \\ &= -\left( \frac{\partial \mathcal{P}_1}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial \mathbf{S}_1} \cdot \mathbf{m}_{1I}^P - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, P] \mathbf{S}_1 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, M] \mathbf{S}_1 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, W] \mathbf{S}_1 \right). \end{aligned} \quad (98)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 1.3. Уравнение динамики сдвига для второго момента

После выполнения замен (95) и (96) в уравнении (53) получим уравнение динамики сдвига для второго момента промежуточного объекта

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}_{1I}^{QP}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= \\ &= -\left( \frac{\partial \mathcal{P}_1}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial \mathbf{S}_1} \cdot \mathbf{w}_{1I}^{QP} - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, P] \mathbf{S}_1 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, M] \mathbf{S}_1 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, W] \mathbf{S}_1 \right). \end{aligned} \quad (99)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 2. Уравнения динамики линейного преобразования

Уравнения динамики линейного преобразования промежуточного объекта получим из уравнений динамики линейного преобразования физического объекта, выведенных в Разделе II.3.2, путем замены в соответствии с формулами (53), (55), (56), (57) Главы 6.1:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S_{1K}^L = \delta^P_K \cdot \delta^L_N \cdot S^N_P \equiv S^L_K, \quad p \rightarrow p_{1KI}^L = -\frac{\partial S_{1K}^L(z)}{\partial x^I} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{\partial x^I} = p^L_{KI}, \\ m &\rightarrow m_{1K}^{L_P I} = -\frac{\partial S_{1K}^L(z)}{\partial l^I_P} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{\partial l^I_P} = m^L_{K^P I}, \\ w &\rightarrow w_{1K}^{L_{QP} I} = -\frac{\partial S_{1K}^L(z)}{\partial a^I_{PQ}} = -\frac{\partial S^L_K(z)}{\partial a^I_{PQ}} = w^L_{K^{QP} I}, \quad \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1. \end{aligned} \quad (100)$$

В приведенных далее уравнениях динамики линейного преобразования опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$S_1 \sim S_{1K}^L, \quad p_{1I} \sim p_{1KI}^L, \quad m_{1I}^P \sim m_{1K}^{L_P I}, \quad w_{1I}^{QP} \sim w_{1K}^{L_{QP} I}. \quad (101)$$

### 2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

После выполнения замен (100) и (101) в уравнении (55) получим уравнение динамики линейного преобразования для импульса промежуточного объекта

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p_{1I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = \\ &= -\left( \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial x^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial S_1} \cdot p_{1I} - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, P]S_1 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, M]S_1 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, W]S_1 \right). \end{aligned} \quad (102)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

### 2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента

После выполнения замен (100) и (101) в уравнении (57) получим уравнение динамики линейного преобразования для момента промежуточного объекта

$$\begin{aligned} &\frac{\partial m_{1I}^P(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = \\ &= -\left( \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial l^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial S_1} m_{1I}^P - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P]S_1 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M]S_1 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, W]S_1 \right). \end{aligned} \quad (103)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.



## 2.3. Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента

После выполнения замен (100) и (101) в уравнении (59) получим уравнение динамики линейного преобразования для второго момента промежуточного объекта

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w_1^{QP}{}_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = \\ & = - \left( \frac{\partial M_1}{Da^I{}_{PQ}} - \frac{\partial M_1}{\partial S_1} \cdot w_1^{QP}{}_I - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}{}_I, P]S_1 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}{}_I, M]S_1 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}{}_I, W]S_1 \right). \end{aligned} \quad (104)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 3. Уравнения динамики второго линейного преобразования

Уравнения динамики второго линейного преобразования промежуточного объекта получим из уравнений динамики второго линейного преобразования физического объекта, выведенных в Разделе II.3.3, путем замены в соответствии с формулами (58), (60), (61), (62) Главы 6.1:

$$\begin{aligned} S & \rightarrow S_{1KM}^L = C^L{}_{KN} \cdot S^N{}_P \cdot \delta^P{}_M, \quad p \rightarrow p_{1KMI}^L = -\frac{\partial S_{1KM}^L(z)}{Dx^I} = -C^L{}_{KN} \cdot \frac{\partial S^N{}_M(z)}{Dx^I} = C^L{}_{KN} \cdot p^N{}_{MI}, \\ m & \rightarrow m_{1KM}^L{}^P{}_I = -\frac{\partial S_{1KM}^L(z)}{Dl^I{}_P} = -C^L{}_{KN} \cdot \frac{\partial S^N{}_M(z)}{Dl^I{}_P} = C^L{}_{KN} \cdot m^N{}_{M}{}^P{}_I, \\ w & \rightarrow w_{1KM}^L{}^{QP}{}_I = -\frac{\partial S_{1KM}^L(z)}{Da^I{}_{PQ}} = -C^L{}_{KN} \cdot \frac{\partial S^N{}_M(z)}{Da^I{}_{PQ}} = C^L{}_{KN} \cdot w^N{}_{M}{}^{QP}{}_I, \quad \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_1. \end{aligned} \quad (105)$$

В приведенных далее уравнениях динамики линейного преобразования опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$S_1 \sim S_{1KM}^L, \quad p_{1I} \sim p_{1KMI}^L, \quad m_{1I}^P \sim m_{1KM}^L{}^P{}_I, \quad w_{1I}^{QP} \sim w_{1KM}^L{}^{QP}{}_I. \quad (106)$$

## 3.1. Уравнение динамики для импульса

После выполнения замен (105) и (106) в уравнении (61) получим уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса промежуточного объекта

$$\frac{\partial p_{1I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial S_1} \cdot p_{1I} - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, P]S_1 - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, M]S_1 - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, W]S_1 \right). \quad (107)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 3.2. Уравнение динамики для момента

После выполнения замен (105) и (106) в уравнении (63) получим уравнение динамики второго линейного преобразования для момента промежуточного объекта

$$\begin{aligned} & \frac{\partial m_{1I}^P(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = \\ & = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1}{Dl^I{}_P} - \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial S_1} m_{1I}^P - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P{}_I, P]S_1 - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P{}_I, M]S_1 - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P{}_I, W]S_1 \right). \end{aligned} \quad (108)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 3.3. Уравнение динамики для второго момента

После выполнения замен (105) и (106) в уравнении (65) получим уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента промежуточного объекта

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W_1^{QP}}{\partial a_0}(x(a_0), l(a_0), a(a_0)) = \\ & = - \left( \frac{\partial W_1}{Da^I PQ} - \frac{\partial W_1}{\partial S_1} \cdot w_1^{QP} - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP}, P]S_1 - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP}, M]S_1 - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP}, W]S_1 \right) \end{aligned} \quad (109)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

### IX. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВТОРОГО ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Уравнения динамики второго промежуточного объекта в первом приближении сводятся к уравнению динамики сдвига для импульса этого объекта.

#### 1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Уравнение динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта в первом приближении получим из уравнения динамики сдвига для импульса физического объекта в первом приближении (11) путем следующей замены в соответствии с формулами (95), (97) Главы 6.1:

$$S^L \rightarrow S_2^L = C^{LQP}_N \cdot S^N_{PQ}, \quad p^L_I \rightarrow p_{2I}^L = -\frac{\partial S_2^L(z)}{Dx^I} = -C^{LQP}_N \cdot \frac{\partial S^N_{PQ}}{Dx^I} = C^{LQP}_N \cdot p^N_{PQI},$$

В результате вместо уравнения (11) получим уравнение динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта в первом приближении

$$\frac{\partial p_{2I}^K(x_0)}{\partial x_0^K} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, S_2, p_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S_2, p_2)}{\partial S_2^N} \cdot p_{2I}^N - \frac{Dx^L(x_0)}{\partial x_0^K} \cdot [P_I, P_L]S_2^K \right).$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

### X. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВТОРОГО ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

#### 1. Уравнения динамики сдвига

Уравнения динамики сдвига второго промежуточного объекта во втором приближении получим из уравнений динамики сдвига физического объекта во втором приближении, выведенных в Разделе II.2.1, путем следующей замены в соответствии с формулами (95), (97), (98) Главы 6.1:

$$\begin{aligned} S \rightarrow S_2^L &= C^{LQP}_N \cdot S^N_{PQ}, \quad p \rightarrow p_{2I}^L = -\frac{\partial S_2^L(z)}{Dx^I} = -C^{LQP}_N \cdot \frac{\partial S^N_{PQ}}{Dx^I} = C^{LQP}_N \cdot p^N_{PQI}, \\ m \rightarrow m_{2I}^{LK} &= -\frac{\partial S_2^L(z)}{Dl^K} = -C^{LQP}_N \cdot \frac{\partial S^N_{PQ}(z)}{Dl^K} = C^{LQP}_N \cdot m^N_{PQ^K I}, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_2. \end{aligned} \quad (110)$$

В приведенных далее уравнениях динамики сдвига опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$S_2 \sim S_2^L, \quad p_{2I} \sim p_{2I}^L, \quad m_{2I}^P \sim m_{2I}^{LP}. \quad (111)$$

1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

После выполнения замен (110) и (111) в уравнении (23) получим уравнение динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта во втором приближении

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_{2I}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{m}_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{m}_2)}{\partial \mathbf{S}_2} \cdot \mathfrak{p}_{2I} - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P] \mathbf{S}_2 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, M] \mathbf{S}_2 \right). \quad (112)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

После выполнения замен (110) и (111) в уравнении (25) получим уравнение динамики сдвига для момента второго промежуточного объекта во втором приближении

$$\frac{\partial \mathfrak{m}_{2I}^P(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{m}_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{m}_2)}{\partial \mathbf{S}_2} \cdot \mathfrak{m}_{2I}^P - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, P] \mathbf{S}_2 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, M] \mathbf{S}_2 \right). \quad (113)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

2. Уравнения динамики линейного преобразования

Уравнения динамики линейного преобразования второго промежуточного объекта во втором приближении получим из уравнений динамики линейного преобразования физического объекта во втором приближении, выведенных в Разделе II.2.2, путем следующей замены в соответствии с формулами (100), (102), (103) Главы 6.1:

$$\begin{aligned} S \rightarrow S_{2K}^L &= C^{LP}_N \cdot S^N_{PK}, \quad p \rightarrow \mathfrak{p}_{2KI}^L = - \frac{\partial S_{2K}^L(z)}{Dx^I} = - C^{LM}_N \cdot \frac{\partial S^N_{MK}(z)}{Dx^I} = C^{LM}_N \cdot p^N_{MKI}, \\ m \rightarrow \mathfrak{m}_{2K}^{LP} &= - \frac{\partial S_{2K}^L(z)}{Dl^I_P} = - C^{LM}_N \cdot \frac{\partial S^N_{MK}(z)}{Dl^I_P} = C^{LM}_N \cdot m^N_{MK}^P, \quad \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_2 \end{aligned} \quad (114)$$

В приведенных далее уравнениях динамики линейного преобразования опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$\mathbf{S}_2 \sim S_{2K}^L, \quad \mathfrak{p}_2 \sim \mathfrak{p}_{2KI}^L, \quad \mathfrak{m}_{2I}^P \sim \mathfrak{m}_{2K}^{LP}. \quad (115)$$

2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

После выполнения замен (114) и (115) в уравнении (27) получим уравнение динамики линейного преобразования для импульса второго промежуточного объекта во втором приближении

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_{2I}(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{m}_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{m}_2)}{\partial \mathbf{S}_2} \cdot \mathfrak{p}_{2I} - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, P] \mathbf{S}_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, M] \mathbf{S}_2 \right). \quad (116)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 2.2. Уравнения динамики линейного преобразования для момента

После выполнения замен (114) и (115) в уравнения (29) получим уравнение динамики линейного преобразования для момента второго промежуточного объекта во втором приближении

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathfrak{m}_{2I}^P(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = \\ & = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{\partial \mathbf{S}_2} \cdot \mathfrak{m}_{2I}^P - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P] \mathbf{S}_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M] \mathbf{S}_2 \right) \end{aligned} \quad (117)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## XI. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВТОРОГО ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

## 1. Уравнения динамики сдвига

Уравнения динамики сдвига второго промежуточного объекта получим из уравнений динамики сдвига физического объекта, выведенных в Разделе II.2.1, путем замены в соответствии с формулами (95), (97), (98), (99) Главы 6.1:

$$\begin{aligned} S & \rightarrow \mathbf{S}_2^L = C^{LQP}_N \cdot S^N_{PQ}, \quad p \rightarrow \mathfrak{p}_{2I}^L = - \frac{\partial \mathbf{S}_2^L(z)}{Dx^I} = - C^{LQP}_N \cdot \frac{\partial S^N_{PQ}}{Dx^I} = C^{LQP}_N \cdot p^N_{PQI}, \\ m & \rightarrow \mathfrak{m}_{2I}^{LK} = - \frac{\partial \mathbf{S}_2^L(z)}{Dl^I_K} = - C^{LQP}_N \cdot \frac{\partial S^N_{PQ}(z)}{Dl^I_K} = C^{LQP}_N \cdot m^N_{PQ^K I}, \\ w & \rightarrow \mathfrak{w}_{2I}^{LTS} = - \frac{\partial \mathbf{S}_2^L(z)}{Da^I_{ST}} = - C^{LQP}_N \cdot \frac{\partial S^N_{PQ}(z)}{Da^I_{ST}} = C^{LQP}_N \cdot w^N_{PQ^{ST} I}, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_2. \end{aligned} \quad (118)$$

В приведенных далее уравнениях динамики сдвига опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$\mathbf{S}_2 \sim \mathbf{S}_2^L, \quad \mathbf{p}_{2I} \sim \mathfrak{p}_{2I}^L, \quad \mathfrak{m}_{2I}^P \sim \mathfrak{m}_{2I}^{LP}, \quad \mathfrak{w}_{2I}^{QP} \sim \mathfrak{w}_{2I}^{LQP}. \quad (119)$$

## 1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

После выполнения замен (118) и (119) в уравнении (49) получим уравнение динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_{2I}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial \mathbf{S}_2} \cdot \mathfrak{p}_{2I} - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P] \mathbf{S}_2 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, M] \mathbf{S}_2 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, W] \mathbf{S}_2 \right). \quad (120)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

После выполнения замен (118) и (119) в уравнении (51) получим уравнение динамики сдвига для момента второго промежуточного объекта

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathfrak{m}_{2I}^P(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = \\ & = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial \mathbf{S}_2} \cdot \mathfrak{m}_{2I}^P - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, P] \mathbf{S}_2 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, M] \mathbf{S}_2 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, W] \mathbf{S}_2 \right). \end{aligned} \quad (121)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

### 1.3. Уравнение динамики сдвига для второго момента

После выполнения замен (118) и (119) в уравнении (53) получим уравнение динамики сдвига для второго момента второго промежуточного объекта

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{w}_2^{QP}{}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = \\ & = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2}{Da^I{}_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial S_2} \cdot \mathbf{w}_2^{QP}{}_I - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}{}_I, P]S_2 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}{}_I, M]S_2 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}{}_I, W]S_2 \right) \end{aligned} \quad (122)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 2. Уравнения динамики линейного преобразования

Уравнения динамики линейного преобразования второго промежуточного объекта получим из уравнений динамики линейного преобразования физического объекта, выведенных в Разделе II.3.2, путем замены в соответствии с формулами (100), (102), (103), (104) Главы 6.1:

$$\begin{aligned} S & \rightarrow S_{2K}^L = C^{LP}{}_N \cdot S^N{}_{PK}, \quad p \rightarrow p_{2KI}^L = -\frac{\partial S_{2K}^L(z)}{Dx^I} = -C^{LM}{}_N \cdot \frac{\partial S^N{}_{MK}(z)}{Dx^I} = C^{LM}{}_N \cdot p^N{}_{MKI}, \\ m & \rightarrow m_{2K}^L{}^P{}_I = -\frac{\partial S_{2K}^L(z)}{Dl^I{}_P} = -C^{LM}{}_N \cdot \frac{\partial S^N{}_{MK}(z)}{Dl^I{}_P} = C^{LM}{}_N \cdot m^N{}_{MK}{}^P{}_I, \\ w & \rightarrow w_{2K}^L{}^{QP}{}_I = -\frac{\partial S_{2K}^L(z)}{Da^I{}_{PQ}} = -C^{LM}{}_N \cdot \frac{\partial S^N{}_{MK}(z)}{Da^I{}_{PQ}} = C^{LM}{}_N \cdot w^N{}_{MK}{}^{QP}{}_I, \quad \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_2. \end{aligned} \quad (123)$$

В приведенных далее уравнениях динамики линейного преобразования опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$S_2 \sim S_{2K}^L, \quad p_{2I} \sim p_{2KI}^L, \quad m_{2I}^P \sim m_{2K}^L{}^P{}_I, \quad \mathbf{w}_2^{QP}{}_I \sim \mathbf{w}_{2K}^L{}^{QP}{}_I. \quad (124)$$

### 2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

После выполнения замен (123) и (124) в уравнении (55) получим уравнение динамики линейного преобразования для импульса второго промежуточного объекта

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{p}_{2I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = \\ & = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial S_2} \cdot \mathbf{p}_{2I} - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, P]S_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, M]S_2 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, W]S_2 \right). \end{aligned} \quad (125)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента

После выполнения замен (123) и (124) в уравнении (57) получим уравнение динамики линейного преобразования для момента второго промежуточного объекта

$$\begin{aligned} & \frac{\partial m_{2I}^P(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = \\ & = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial l^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \mathcal{S}_2} m_{2I}^P - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P] \mathcal{S}_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M] \mathcal{S}_2 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, W] \mathcal{S}_2 \right). \end{aligned} \quad (126)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 2.3. Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента

После выполнения замен (123) и (124) в уравнении (59) получим уравнение динамики линейного преобразования для второго момента второго промежуточного объекта

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w_{2I}^{QP}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = \\ & = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial a^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \mathcal{S}_2} \cdot w_{2I}^{QP} - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}_I, P] \mathcal{S}_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}_I, M] \mathcal{S}_2 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}_I, W] \mathcal{S}_2 \right). \end{aligned} \quad (127)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 3. Уравнения динамики второго линейного преобразования

Уравнения динамики второго линейного преобразования второго промежуточного объекта получим из уравнений динамики второго линейного преобразования физического объекта, выведенных в Разделе II.3.3, путем замены в соответствии с формулами (105), (107), (108), (109) Главы 6.1:

$$\begin{aligned} S & \rightarrow S_{2KM}^L = \delta^L_N \cdot S^N_{PM} \cdot \delta^Q_M \cdot \delta^P_K \equiv S^L_{KM}, \quad p \rightarrow p_{2KMI}^L = -\frac{\partial S_{2KM}^L(z)}{\partial x^I} = -\frac{\partial S^L_{KM}(z)}{\partial x^I} = p^L_{KMI}, \\ m & \rightarrow m_{2KM}^L{}^P_I = -\frac{\partial S_{2KM}^L(z)}{\partial l^I_P} = -\frac{\partial S^L_{KM}(z)}{\partial l^I_P} = m^L_{KM}{}^P_I, \\ w & \rightarrow w_{2KM}^L{}^{QP}_I = -\frac{\partial S_{2KM}^L(z)}{\partial a^I_{PQ}} = \frac{\partial S^L_{KM}(z)}{\partial a^I_{PQ}} = w^L_{KM}{}^{QP}_I, \quad \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_2. \end{aligned} \quad (128)$$

В приведенных далее уравнениях динамики линейного преобразования опущены те индексы, по которым выполняется суммирование. При этом использованы следующие соответствия:

$$\mathcal{S}_2 \sim S_{2KM}^L, \quad p_{2I} \sim p_{2KMI}^L, \quad m_{2I}^P \sim m_{2KM}^L{}^P_I, \quad w_{2I}^{QP} \sim w_{2KM}^L{}^{QP}_I. \quad (129)$$

## 3.1. Уравнение динамики для импульса

После выполнения замен (128) и (129) в уравнении (61) получим уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса второго промежуточного объекта

$$\frac{\partial p_{2I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial \mathcal{S}_2} \cdot p_{2I} - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, P] \mathcal{S}_2 - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, M] \mathcal{S}_2 - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, W] \mathcal{S}_2 \right). \quad (130)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 3.2. Уравнение динамики для момента

После выполнения замен (128) и (129) в уравнении (63) получим уравнение динамики второго линейного преобразования для момента второго промежуточного объекта

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_2^P(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = \\ & = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial l^I_P} - \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial S_2} M_2^P - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P] S_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M] S_2 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, W] S_2 \right). \end{aligned} \quad (131)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## 3.3. Уравнение динамики для второго момента

После выполнения замен (128) и (129) в уравнении (65) получим уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента второго промежуточного объекта

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W_2^{QP}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = \\ & = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial a^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial S_2} \cdot W_2^{QP} - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}_I, P] S_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}_I, M] S_2 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}_I, W] S_2 \right). \end{aligned} \quad (132)$$

Последующее преобразование этого уравнения с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3, рассмотрено в Главах 6.4 и 6.5.

## Глава 6.3 Перестановочные соотношения

### I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вывод уравнений динамики каждым из возможных методов (например из принципа наименьшего действия или исходя из канонических преобразований) сопровождается перестановкой операторов дифференцирования. В том случае, если вывод уравнений динамики выполняется без учета алгебраических свойств пространства-времени и кинематического пространства, операторы дифференцирования представляют собой частные производные, а их перестановка не приводит к появлению дополнительных слагаемых и не влияет на конечный результат. В противном случае это не так. Для кинематических алгебр операторы дифференцирования не являются частными производными, а их перестановка представляет собой антисимметричные комбинации тензоров. В частности, этим объясняется то обстоятельство, что физические поля описываются антисимметричными тензорами. К ним относятся, например, тензор Максвелла, тензор кривизны, тензор Янга-Миллса.

В этой Главе рассмотрим перестановочные соотношения операторов дифференцирования кинематической и второй кинематической алгебр как в свободном состоянии<sup>1</sup>, так и в поле. А в следующей Главе используем связь между уравнениями динамики и перестановочными соотношениями операторов дифференцирования.

### II. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Результаты этой Главы относятся как к фундаментальным объектам, так и промежуточным. Поэтому, говоря о векторе действия будем иметь в виду векторы действия указанных объектов и введем собирательный вектор действия

$$S \sim (\mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{S}).$$

#### 1. Левые динамические параметры

Будем полагать, что вектор действия  $S$  является функцией координат левых кинематических переменных  $x, l, a$ :

$$S = S(x, l, a),$$

а сами кинематические переменные  $x, l, a$  являются результатом преобразования

$$x = \mathcal{X}(x_0, l_0, a_0), \quad l = \mathcal{L}(x_0, l_0, a_0), \quad a = \mathcal{A}(x_0, l_0, a_0).$$

В частном случае

$$x = x(x_0), \quad l = l(x_0), \quad a = a(x_0).$$

Кинематические переменные  $x_0, l_0, a_0$  рассматриваются как независимые переменные, а кинематические переменные  $x, l, a$ , напротив, как зависимые или преобразованные переменные. Дифференциал по независимым переменным обозначим  $d$ , дифференциал по преобразованным переменным обозначим  $D$ . Запишем дифференциал  $dS$  следующим образом<sup>2</sup>:

$$dS = P_K(S) \cdot Dx^K + M^I{}_K(S) \cdot Dl^K{}_I + W^{IL}{}_K(S) \cdot Da^K{}_{LI}.$$

Здесь использованы следующие обозначения для операторов дифференцирования<sup>3</sup>

$$P_K() = \frac{\partial}{Dx^K}, \quad M^I{}_K() = \frac{\partial}{Dl^K{}_I}, \quad W^{IL}{}_K() = \frac{\partial}{Da^K{}_{LI}}.$$

Введем величины, которые вместе с вектором действия  $S$  названы *динамическими параметрами*, точнее *левыми динамическими параметрами*:

- импульс  $p_K = -P_K(S) = -\frac{\partial S(x, l, a)}{Dx^K}$ ,
- момент  $m^I{}_K = -M^I{}_K(S) = -\frac{\partial S(x, l, a)}{Dl^K{}_I}$ ,
- второй момент  $w^{IL}{}_K = -W^{IL}{}_K(S) = -\frac{\partial S(x, l, a)}{Da^K{}_{LI}}$ .

В связи с этим оператор  $-P_K()$  называется *оператором импульса*, оператор  $-M^I{}_K()$  называется *оператором момента*, оператор  $-W^{IL}{}_K()$  называется *оператором второго момента*.

Произвольной функции от преобразованных кинематических переменных соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = P_K \cdot Dx^K + M^I{}_K \cdot Dl^K{}_I + W^{IL}{}_K \cdot Da^K{}_{LI}.$$

<sup>1</sup> Термин *алгебра в свободном состоянии* вводится для того чтобы подчеркнуть, что рассматриваемая алгебра не находится в поле.

<sup>2</sup> Здесь  $a^K{}_{LI} \equiv l^K{}_{LI}$ .

<sup>3</sup> Смысл дифференциалов двух видов  $d$  и  $D$  и оператора дифференцирования вида  $\frac{\partial}{Dx^K}$  рассматривался в Главе 2.2.



## 2. Правые динамические параметры

Аналогично предыдущему вводятся *правые динамические параметры*. При этой вектор действия  $S$  рассматривается как функция координат правых кинематических переменных  $X, L, A$ :

$$S = S(X, L, A),$$

а сами кинематические переменные  $X, L, A$  являются результатом преобразования

$$X = \mathcal{X}(X_0, L_0, A_0), \quad L = \mathcal{L}(X_0, L_0, A_0), \quad A = \mathcal{A}(X_0, L_0, A_0).$$

В частном случае

$$X = X(X_0), \quad L = L(X_0), \quad A = A(X_0).$$

Кинематические переменные  $X_0, L_0, A_0$  рассматриваются как независимые переменные, а кинематические переменные  $X, L, A$ , напротив, как зависимые или преобразованные переменные. Дифференциал по независимым переменным обозначим  $d$ , дифференциал по преобразованным переменным обозначим  $D$ . Запишем дифференциал  $dS$  следующим образом<sup>4</sup>:

$$dS = Q_K(S) \cdot DX^K + I_K^I(S) \cdot DL^K_I + J^{IL}_K(S) \cdot DA^K_{LI}.$$

Здесь использованы следующие обозначения для операторов дифференцирования

$$Q_K(\cdot) = \frac{\partial}{DX^K}, \quad I_K^I(\cdot) = \frac{\partial}{DL^K_I}, \quad J^{IL}_K(\cdot) = \frac{\partial}{DA^K_{LI}}.$$

Введем величины, которые вместе с вектором действия  $S$  называются *динамическими параметрами*, точнее *правыми динамическими параметрами*:

- заряд  $Q_K = -Q_K(S) = -\frac{\partial S(X, L, A)}{DX^K},$

- ток  $I_K^I = -I_K^I(S) = -\frac{\partial S(X, L, A)}{DL^K_I},$

- второй ток  $J^{IL}_K = -J^{IL}_K(S) = -\frac{\partial S(X, L, A)}{DA^K_{LI}}.$

В связи с этим оператор  $-Q_K(\cdot)$  называется *оператором заряда*, оператор  $-I_K^I(\cdot)$  называется *оператором тока*, оператор  $-J^{IL}_K(\cdot)$  называется *оператором второго тока*.

Произвольной функции от преобразованных правых кинематических переменных соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = Q_K \cdot DX^K + I_K^I \cdot DL^K_I + J^{IL}_K \cdot DA^K_{LI}.$$

Далее рассмотрим перестановочные соотношения для левых операторов дифференцирования.

## III. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ${}_L\mathfrak{X}$

Произвольной функции от координат обобщенного пространства-времени  $S(x)$  соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = P_K \cdot Dx^K.$$

Условием интегрируемости этого дифференциального уравнения является

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = 0,$$

где

$$d_1 = P_K \cdot D_1 x^K, \quad d_2 = P_M \cdot D_2 x^M.$$

Отсюда

$$d_2(P_K \cdot D_1 x^K) - d_1(P_M \cdot D_2 x^M) = 0$$

или

$$d_2(P_K) \cdot D_1 x^K + P_K \cdot (d_2 D_1 x^K) - d_1(P_M) \cdot D_2 x^M - P_M \cdot (d_1 D_2 x^M) = 0$$

<sup>4</sup> Здесь  $A^K_{LI} \equiv L^K_{LI}$ .

или

$$P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + P_I \cdot (d_2 D_1 x^I) - P_I \cdot (d_1 D_2 x^I) = 0.$$

Используя уравнения структуры, приведенные в Главе 1.2., формула (58):

$$d_2 D_1 x^I = C^I_{KM} \cdot D_1 x^K \cdot D_2 x^M,$$

получим

$$P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + P_I \cdot C^I_{MK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_I \cdot C^I_{KM} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) = 0.$$

Отсюда имеем перестановочные соотношения операторов дифференцирования  $P_K$  алгебры пространства-времени  $\mathbb{X}$ :

$$[P_K(P_M)] = P_I \cdot C^I_{[KM]}. \quad (1)$$

Здесь и далее квадратные скобки, заключающие индексы, означают антисимметризацию по этим индексам. Таким образом,

$$C^I_{[KM]} = C^I_{KM} - C^I_{MK}.$$

#### IV. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ${}_l\mathbb{L}$

Произвольной функции от координат линейных преобразований  $S(l)$  соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = M^I_K \cdot D l^K_I.$$

Условием интегрируемости этого дифференциального уравнения является

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = 0,$$

где

$$d_1 = M^I_K \cdot D_1 l^K_I, \quad d_2 = M^L_M \cdot D_2 l^M_L.$$

Отсюда

$$d_2(M^I_K \cdot D_1 l^K_I) - d_1(M^L_M \cdot \delta_2 l^M_L) = 0$$

или

$$d_2(M^I_M) \cdot D_1 l^M_I + M^I_M \cdot (d_2 D_1 l^M_I) - d_1(M^L_K) \cdot D_2 l^K_L - M^L_K \cdot (d_1 D_2 l^K_L) = 0$$

или

$$M^L_K(M^I_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_I) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^K_L) - (M^K_I \cdot (d_1 D_2 l^K_I) - M^K_I \cdot (d_2 D_1 l^K_I)) = 0.$$

Используя уравнения структуры, приведенные в Главе 1.6., формула (42)

$$d_2 D_1 l^K_I = D_2 l^L_L \cdot D_1 l^K_K,$$

получим

$$M^L_K(M^I_M) \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^K_L) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^K_L) - (M^L_M \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^K_L \cdot \delta^I_K) - M^I_K \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^K_L \cdot \delta^L_M)) = 0.$$

Отсюда имеем перестановочные соотношения операторов дифференцирования  $M^K_I$  алгебры линейных преобразований  ${}_l\mathbb{L}$

$$[M^L_K(M^I_M)] = \delta^I_K \cdot M^L_M - M^I_K \cdot \delta^L_M. \quad (2)$$

### V. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ОБЩЕЙ ЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ${}_l\mathbb{L} = {}_l\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*$

Произвольной функции от координат общих линейных преобразований  $S(l^*, l)$  соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = M^{*I}_K \cdot D l^{*K}_I + M^I_K \cdot D l^K_I$$

Условием интегрируемости этого дифференциального уравнения является

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = 0,$$

где

$$d_1 = M^{*I}_K \cdot D_1 l^{*K}_I + M^I_K \cdot D_1 l^K_I, \quad d_2 = M^{*L}_M \cdot D_2 l^{*M}_L + M^L_M \cdot D_2 l^M_L.$$

Отсюда

$$d_2(M^{*I}_K \cdot D_1 l^{*K}_I + M^I_K \cdot D_1 l^K_I) - d_1(M^{*L}_M \cdot D_2 l^{*M}_L + M^L_M \cdot D_2 l^M_L) = 0$$

или

$$d_2(M^{*I}_M) \cdot D_1 l^{*M}_I + M^{*I}_M \cdot (d_2 D_1 l^{*M}_I) - d_1(M^{*L}_K) \cdot D_2 l^{*K}_L - M^{*L}_K \cdot (d_1 D_2 l^{*K}_L) + \\ + d_2(M^I_M) \cdot D_1 l^M_I + M^I_M \cdot (d_2 D_1 l^M_I) - d_1(M^L_K) \cdot D_2 l^K_L - M^L_K \cdot (d_1 D_2 l^K_L) = 0$$

или

$$M^{*L}_K(M^{*I}_M) \cdot (D_2 l^{*K}_L \cdot D_1 l^{*M}_I) - M^{*I}_M(M^{*L}_K) \cdot (D_1 l^{*M}_I \cdot D_2 l^{*K}_L) + M^L_K(M^{*I}_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^{*M}_I) - \\ - M^I_M(M^{*L}_K) \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^{*K}_L) - (M^{*K}_I \cdot (d_1 D_2 l^{*I}_K) - M^{*K}_I \cdot (d_2 D_1 l^{*I}_K)) + M^{*L}_K(M^I_M) \cdot (D_2 l^{*K}_L \cdot D_1 l^M_I) - \\ - M^{*I}_M(M^L_K) \cdot (D_1 l^{*M}_I \cdot D_2 l^K_L) + M^L_K(M^I_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_I) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^K_L) - \\ - (M^K_I \cdot (d_1 D_2 l^K_I) - M^K_I \cdot (d_2 D_1 l^K_I)) = 0.$$

Используя уравнения структуры, приведенные в Главе 1.6., формула (49)

$$d_2 D_1 l^{*I}_K = D_1 l^{*I}_L \cdot D_2 l^{*L}_K \\ d_2 D_1 l^K_I = D_2 l^K_L \cdot D_1 l^L_K,$$

получим

$$M^{*L}_K(M^{*I}_M) \cdot (D_1 l^{*M}_I \cdot D_2 l^{*K}_L) - M^{*I}_M(M^{*L}_K) \cdot (D_1 l^{*M}_I \cdot D_2 l^{*K}_L) - \\ - \left( M^{*I}_K \cdot (D_1 l^{*M}_I \cdot D_2 l^{*K}_L \cdot \delta^L_M) - M^{*L}_M \cdot (D_1 l^{*M}_I \cdot D_2 l^{*K}_L \cdot \delta^I_K) \right) + \\ + M^L_K(M^{*I}_M) \cdot (D_1 l^{*M}_I \cdot D_2 l^K_L) + M^{*L}_M(M^I_K) \cdot (D_1 l^K_I \cdot D_2 l^{*M}_L) - \\ - M^I_K(M^{*L}_M) \cdot (D_1 l^K_I \cdot D_2 l^{*M}_L) - M^{*I}_M(M^L_K) \cdot (D_1 l^{*M}_I \cdot D_2 l^K_L) + \\ + M^L_K(M^I_M) \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^K_L) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^K_L) - \\ - (M^L_M \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^K_L \cdot \delta^I_K) - M^I_K \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^K_L \cdot \delta^L_M)) = 0.$$

Отсюда имеем перестановочные соотношения операторов дифференцирования  $M^{*K}_I$  и  $M^K_I$  общей алгебры линейных преобразований  ${}_l\mathbb{L} = {}_l\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*$

$$[M^{*L}_K(M^{*I}_M)] = \delta^L_M \cdot M^{*I}_K - M^{*L}_M \cdot \delta^I_K, \\ [M^L_K(M^I_M)] = \delta^I_K \cdot M^L_M - M^I_K \cdot \delta^L_M, \\ [\widetilde{M}^L_K(M^I_M)] = 0. \quad (3)$$

**VI. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛЕВОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ  ${}_l\mathbb{T} = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L}$**

Произвольной функции от переменных кинематической алгебры  $S(x, l)$  соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = P_K \cdot Dx^K + M^I_K \cdot D_l l^K_I.$$

Условием интегрируемости этого дифференциального уравнения является

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = 0,$$

где

$$d_1 = P_K \cdot D_1 x^K + M^I_K \cdot D_1 l^K_I, \quad d_2 = P_M \cdot D_2 x^M + M^L_M \cdot D_2 l^M_L.$$

Отсюда

$$d_2(P_K \cdot D_1 x^K + M^I_K \cdot D_1 l^K_I) - d_1(P_M \cdot D_2 x^M + M^L_M \cdot D_2 l^M_L) = 0$$

или

$$d_2(P_K) \cdot D_1 x^K + P_K \cdot (d_2 D_1 x^K) - d_1(P_M) \cdot D_2 x^M - P_M \cdot (d_1 D_2 x^M) + \\ + d_2(M^I_K) \cdot D_1 l^K_I + M^I_K \cdot (d_2 D_1 l^K_I) - d_1(M^L_M) \cdot D_2 l^M_L - M^L_M \cdot (d_1 D_2 l^M_L) = 0$$

или

$$P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + \\ + M^L_K(P_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) - M^I_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) + (P_I \cdot (d_2 D_1 x^I) - P_I \cdot (d_1 D_2 x^I)) + \\ + P_K(M^I_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) - P_M(M^L_K) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) + \\ + M^L_K(M^I_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_I) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_I) + \\ + M^L_M \cdot (d_2 D_1 l^M_L) - M^L_M \cdot (d_1 D_2 l^M_L) = 0. \quad (4)$$

В этом уравнении используем уравнения структуры алгебры  ${}_l\mathbb{T} = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L}$  в свободном состоянии, то есть вне поля, полученные в Главе 1.6. (формула (61))

$$d_2 D_1 x^I = D_2 l^K_I \cdot D_1 x^K + C^I_{KM} \cdot D_1 x^K \cdot D_2 x^M, \\ d_2 D_1 l^M_L = D_2 l^M_K \cdot D_1 l^K_L + C^M_{LPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q.$$

Получим

$$P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + \\ + M^L_K(P_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) - M^I_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) + \\ + P_I \cdot (D_2 l^K_I \cdot D_1 x^K) + P_I \cdot C^I_{MK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - \\ - P_I \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^K_I) - P_I \cdot C^I_{KM} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + \\ + P_K(M^I_M) \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 x^K) - P_M(M^L_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 l^K_L) + \\ + M^L_M(M^I_K) \cdot (D_1 l^K_I \cdot D_2 l^M_L) - M^I_K(M^L_M) \cdot (D_1 l^K_I \cdot D_2 l^M_L) + \\ + M^P_L \cdot (D_2 l^K_K \cdot D_1 l^K_P) - M^P_L \cdot (D_2 x^M \cdot D_1 x^K) \cdot C^L_{PKM} - \\ - M^P_L \cdot (D_1 l^K_K \cdot D_2 l^K_P) - M^P_L \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 x^K) \cdot C^L_{PKM} = 0$$

или

$$(P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M)) + \\ + P_I \cdot C^I_{MK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_I \cdot C^I_{KM} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + \\ + M^P_L \cdot C^L_{PMK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - M^P_L \cdot C^L_{PKM} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + \\ + (M^L_K(P_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) - P_Q \cdot (D_2 x^M \cdot D_1 l^K_I) \cdot \delta^I_M \cdot \delta^Q_K - P_M(M^L_K) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M)) + \\ + (-M^I_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) + P_I \cdot (D_2 l^M_L \cdot D_1 x^K) \cdot \delta^L_K \cdot \delta^I_M + P_K(M^I_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I)) + \\ + (M^L_M(M^I_K) \cdot (D_2 l^M_L \cdot D_1 l^K_I) - M^I_K(M^L_M) \cdot (D_2 l^M_L \cdot D_1 l^K_I)) + \\ + M^I_M \cdot \delta^L_K \cdot (D_2 l^M_L \cdot D_1 l^K_I) - M^L_K \cdot \delta^I_M \cdot (D_2 l^M_L \cdot D_1 l^K_I) = 0.$$

Отсюда имеем перестановочные соотношения операторов дифференцирования  $P_K$  и  $M^K_I$  кинематической алгебры  ${}_I\mathbb{T} = {}_I\mathbb{X} + {}_I\mathbb{L}$  в свободном состоянии

$$\begin{aligned} [P_K(P_M)] &= P_I \cdot C^I_{[KM]} + M^P_L \cdot C^L_{P[KM]}, \\ [M^L_K(P_M)] &= -P_K \cdot \delta^L_M, \\ [P_K(M^I_M)] &= P_M \cdot \delta^I_K, \\ [M^L_M(M^I_K)] &= M^L_K \cdot \delta^I_M - M^I_M \cdot \delta^L_K. \end{aligned} \quad (5)$$

Третье уравнение совпадает со вторым с точностью до обозначений индексов.

## VII. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛЕВОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ ${}_I\mathbb{T} = {}_I\mathbb{X} + {}_I\mathbb{L}$ В ПОЛЕ ВНЕШНЕЙ СИММЕТРИИ

По-прежнему исходим из условия интегрируемости дифференциального уравнения

$$d = P_K \cdot Dx^K + M^I_K \cdot Dl^K_I.$$

Как было показано в предыдущем разделе, оно сводится к соотношению (4). В это соотношение подставим уравнения структуры кинематической алгебры в поле внешней симметрии, приведенные в Главе 1.7. (формула (31))

$$\begin{aligned} d_2 D_1 x^I &= D_2 l^K_I \cdot D_1 x^K + T^I_{MK} \cdot D_1 x^M \cdot D_2 x^K, \\ d_2 D_1 l^M_L &= D_2 l^M_K \cdot D_1 l^K_L + \Gamma^M_{LK} \cdot D_2 l^K_P \cdot D_1 x^P - \Gamma^M_{KP} \cdot D_1 l^K_L \cdot D_2 x^P - D_2 l^M_K \cdot \Gamma^K_{LP} \cdot D_1 x^P + \\ &\quad + R^M_{LPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} T^I_{MK} &= C^I_{MK} - \Gamma^I_{MK} \quad - \text{объект кручения}, \\ R^M_{LPQ} &= \Gamma^M_{LPQ} + \Gamma^M_{KQ} \cdot \Gamma^K_{LP} + \Gamma^M_{LK} \cdot T^K_{PQ} + C^M_{LPQ} \quad - \text{объект кривизны}, \\ \text{здесь} \quad \Gamma^M_{LPQ} \cdot Dx^Q &= d\Gamma^M_{LP}. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} &P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + M^L_K(P_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) - M^I_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) + \\ &+ P_I \cdot (D_2 l^K_I \cdot D_1 x^K) + P_I \cdot T^I_{MK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_I \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^K_I) - P_I \cdot T^I_{KM} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + \\ &+ P_K(M^I_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) - P_M(M^L_K) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) + \\ &+ M^L_K(M^I_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_I) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_I) + \\ &+ M^I_K \cdot \left( (D_2 l^K_N \cdot D_1 l^N_I) + \Gamma^K_{IN} \cdot (D_2 l^N_P \cdot D_1 x^P) - \Gamma^K_{NP} \cdot (D_2 x^P \cdot D_1 l^N_I) - \right. \\ &\quad \left. - \Gamma^N_{IP} \cdot (D_2 l^K_N \cdot D_1 x^P) + R^K_{IPQ} \cdot (D_2 x^Q \cdot D_1 x^P) \right) - \\ &- M^L_M \cdot \left( (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_K) + \Gamma^M_{LK} \cdot (D_2 x^P \cdot D_1 l^K_P) - \Gamma^M_{KP} \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^P) - \right. \\ &\quad \left. - \Gamma^K_{LP} \cdot (D_2 x^P \cdot D_1 l^M_K) + R^M_{LPQ} \cdot (D_2 x^P \cdot D_1 x^Q) \right) = 0 \end{aligned}$$

или после группировки и переобозначения индексов

$$\begin{aligned}
& \left( P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + P_I \cdot T^I_{MK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_I \cdot T^I_{KM} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) + \right. \\
& \quad \left. + M^L_I \cdot R^L_{LMK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - M^L_I \cdot R^L_{LKM} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) \right) + \\
& + \left( M^L_K(P_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) + P_K \cdot \delta^L_M \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) - P_M(M^L_K) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) + \right. \\
& \quad \left. + M^I_P \cdot \Gamma^P_{IK} \cdot \delta^L_M \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) - M^I_K \cdot \Gamma^L_{IM} \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) + M^L_P \cdot \Gamma^P_{KM} \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) \right) + \\
& + \left( -M^I_M(P_K) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) - P_M \cdot \delta^I_K \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) + P_K(M^I_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) - \right. \\
& \quad \left. - M^I_P \cdot \Gamma^P_{MK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) - M^L_P \cdot \Gamma^P_{LM} \cdot \delta^I_K \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) + M^L_M \cdot \Gamma^I_{LK} \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) \right) + \\
& + \left( M^L_K(M^I_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_I) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_I) + \right. \\
& \quad \left. + M^I_K \cdot \delta^L_M \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_I) - M^L_M \cdot \delta^I_K \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_I) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следуют перестановочные соотношения операторов дифференцирования  $P$  и  $M$  кинематической алгебры  ${}_i\mathbb{T} = {}_i\mathbb{X} + {}_i\mathbb{L}$  в поле внешней симметрии

$$\begin{aligned}
[P_K(P_M)] &= P_I \cdot T^I_{[KM]} + M^L_I \cdot R^I_{L[KM]}, \\
[M^L_K(P_M)] &= -P_K \cdot \delta^L_M - M^P_I \cdot G^I_{PK}{}^L{}_M, \\
[P_K(M^I_M)] &= P_M \cdot \delta^I_K + M^L_P \cdot G^P_{LM}{}^I{}_K, \\
[M^L_K(M^I_M)] &= M^L_M \cdot \delta^I_K - M^I_K \cdot \delta^L_M,
\end{aligned} \tag{7}$$

где<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}
T^I_{[KM]} &= C^I_{[KM]} - \Gamma^I_{[KM]} - \text{тензор кручения}, \\
G^P_{LM}{}^I{}_K &= \Gamma^P_{LM} \cdot \delta^I_K - \Gamma^I_{LK} \cdot \delta^P_M + \Gamma^P_{MK} \cdot \delta^I_L, \\
R^I_{L[KM]} &= \Gamma^I_{L[KM]} + \Gamma^I_{P[M} \cdot \Gamma^P_{|L|K]} + \Gamma^I_{LP} \cdot T^P_{[KM]} + C^I_{L[KM]} - \text{тензор кривизны}.
\end{aligned}$$

Третье уравнение совпадает со вторым с точностью до обозначения индексов.

### VIII. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛЕВОЙ ВТОРОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ ${}_i\mathbb{T}_2 = {}_i\mathbb{X} + {}_i\mathbb{L} + {}_i\mathbb{A}$

Произвольной функции от переменных второй кинематической алгебры соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = P_K \cdot Dx^K + M^I_K \cdot Dl^K_I + W^{IL}_K \cdot Da^K_{LI}.$$

Условием интегрируемости этого дифференциального уравнения является

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
d_1 &= P_K \cdot D_1 x^K + M^I_K \cdot D_1 l^K_I + W^{IL}_K \cdot D_1 a^K_{LI}, \\
d_2 &= P_M \cdot D_2 x^M + M^L_M \cdot D_2 l^M_L + W^{IL}_K \cdot D_2 a^K_{LI}.
\end{aligned}$$

<sup>5</sup> Здесь и далее квадратные скобки, заключающие индексы, вида  $[M|L|K]$  означают антисимметризацию по индексам  $M$  и  $K$ . Таким образом,

$$\Gamma^I_{P[M} \cdot \Gamma^P_{|L|K]} = \Gamma^I_{PM} \cdot \Gamma^P_{LK} - \Gamma^I_{PK} \cdot \Gamma^P_{LM}.$$

Отсюда

$$d_2(P_K \cdot D_1x^K + M^I_K \cdot D_1l^K_I + W^{IL}_K \cdot D_1a^K_{LI}) - d_1(P_M \cdot D_2x^M + M^L_M \cdot D_2l^M_L + W^{IL}_K \cdot D_2a^K_{LI}) = 0$$

или

$$\begin{aligned} & d_2(P_K) \cdot D_1x^K + P_K \cdot (d_2D_1x^K) - d_1(P_M) \cdot D_2x^M - P_M \cdot (d_1D_2x^M) + \\ & + d_2(M^I_K) \cdot D_1l^K_I + M^I_K \cdot (d_2D_1l^K_I) - d_1(M^L_M) \cdot D_2l^M_L - M^L_M \cdot (d_1D_2l^M_L) + \\ & + d_2(W^{IL}_K) \cdot D_1a^K_{LI} + W^{IL}_K \cdot (d_2D_1a^K_{LI}) - d_1(W^{IL}_K) \cdot D_2a^K_{LI} - W^{IL}_K \cdot (d_1D_2a^K_{LI}) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & P_K(P_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_1x^M \cdot D_2x^K) + \\ & + M^L_K(P_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) - M^I_M(P_K) \cdot (D_1l^M_I \cdot D_2x^K) + \\ & + W^{NL}_K(P_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - W^{PI}_M(P_K) \cdot (D_1a^M_{IP} \cdot D_2x^K) + P_I \cdot (d_2D_1x^I) - P_I \cdot (d_1D_2x^I) + \\ & + P_K(M^I_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - P_M(M^L_K) \cdot (D_1x^M \cdot D_2l^K_L) + \\ & + M^L_K(M^I_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_1l^M_I \cdot D_2l^K_L) + \\ & + W^{NL}_K(M^I_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) - W^{PI}_M(M^L_K) \cdot (D_1a^M_{IP} \cdot D_2l^K_L) + \\ & + M^K_I \cdot (d_2D_1l^K_I) - M^K_I \cdot (d_1D_2l^K_I) + \\ & + P_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) - P_M(W^{NL}_K) \cdot (D_1x^K \cdot D_2a^K_{LN}) + \\ & + M^L_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1a^M_{IP}) - M^I_M(W^{NL}_K) \cdot (D_1l^M_I \cdot D_2a^K_{LN}) + \\ & + W^{NL}_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1a^M_{IP}) - W^{PI}_M(W^{NL}_K) \cdot (D_1a^M_{IP} \cdot D_2a^K_{LN}) + \\ & + W^{LI}_M \cdot (d_2D_1a^M_{IL}) - W^{LI}_M \cdot (d_1D_2a^M_{IL}) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Перестановочные соотношения приведем для двух случаев таблицы умножения базисных векторов.

### 1. Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда таблица умножения базисных векторов имеет упрощенный вид<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} & {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M = {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L_{MK} + {}_l\mathbf{I}^P_L \cdot {}_lC^L_{PMK}, \\ & {}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L_K = 0, \\ & {}_l\mathbf{I}^I_M \circ {}_l\mathbf{e}_K = \delta^I_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M, \\ & {}_l\mathbf{I}^I_M \circ {}_l\mathbf{I}^L_K = \delta^I_K \cdot \delta^L_M + \delta^I_K \cdot {}_l\mathbf{I}^L_M, \\ & {}_l\mathbf{J}^{PI}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K = \delta^P_K \cdot {}_l\mathbf{I}^I_M, \\ & {}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}_K = 0, \\ & {}_l\mathbf{J}^{PI}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L_K = \delta^P_K \cdot {}_l\mathbf{J}^{LI}_M, \\ & {}_l\mathbf{I}^I_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}_K = {}_l\mathbf{J}^{NL}_M \cdot \delta^I_K, \\ & {}_l\mathbf{J}^{PI}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}_K = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения структуры, соответствующие этому случаю, приведены в Главе 1.7. (формула (9))

$$\begin{aligned} d_2D_1x^I &= D_2l^K_I \cdot D_1x^K + {}_lC^I_{KL} \cdot D_1x^K \cdot D_2x^L, \\ d_2D_1l^M_L &= D_2l^M_K \cdot D_1l^K_L + D_2a^M_{LK} \cdot D_1x^K + {}_lC^M_{LIK} \cdot D_1x^I \cdot D_2x^K, \\ d_2D_1a^M_{IL} &= D_2a^M_{IN} \cdot D_1l^N_L + D_2l^M_N \cdot D_1a^N_{IL}. \end{aligned} \tag{10}$$

<sup>6</sup> См. Глава 1.7., формула (4).

Используя их в условии интегрируемости (8), получим

$$\begin{aligned}
& P_K(P_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_1x^M \cdot D_2x^K) + \\
& + M^L_K(P_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) - M^I_M(P_K) \cdot (D_1l^M_I \cdot D_2x^K) + \\
& + W^{NL}_K(P_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - W^{PI}_M(P_K) \cdot (D_1a^M_{IP} \cdot D_2x^K) + \\
& + P_I \cdot (D_2l^K_K \cdot D_1x^K + C^I_{MK} \cdot D_1x^M \cdot D_2x^K) - P_I \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^K_K + C^I_{KM} \cdot D_2x^K \cdot D_1x^M) + \\
& + P_K(M^I_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - P_M(M^L_K) \cdot (D_1x^M \cdot D_2l^K_L) + \\
& + M^L_K(M^I_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_1l^M_I \cdot D_2l^K_L) + \\
& + W^{NL}_K(M^I_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) - W^{PI}_M(M^L_K) \cdot (D_1a^M_{IP} \cdot D_2l^K_L) + \\
& + M^K_I \cdot (D_2l^I_P \cdot D_1l^P_K + D_2a^I_{KP} \cdot D_1x^P + C^I_{KPQ} \cdot D_1x^P \cdot D_2x^Q) - \\
& - M^L_M \cdot (D_1l^M_K \cdot D_2l^K_L + D_1a^M_{LK} \cdot D_2x^K + C^M_{LQP} \cdot D_2x^Q \cdot D_1x^P) + \\
& + P_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) - P_M(W^{NL}_K) \cdot (D_1x^M \cdot D_2a^K_{LN}) + \\
& + M^L_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1a^M_{IP}) - M^I_M(W^{NL}_K) \cdot (D_1l^M_I \cdot D_2a^K_{LN}) + \\
& + W^{NL}_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1a^M_{IP}) - \\
& - W^{PI}_M(W^{NL}_K) \cdot (D_1a^M_{IP} \cdot D_2a^K_{LN}) + \\
& + W^{LI}_M \cdot (\delta_2a^M_{IN} \cdot \delta_1l^N_L + \delta_2l^M_N \cdot \delta_1a^N_{IL} + C^M_{ILPQ} \cdot \delta_1x^P \cdot \delta_2x^Q) - \\
& - W^{LI}_M \cdot (D_1a^M_{IN} \cdot D_2l^N_L + D_1l^M_N \cdot D_2a^N_{IL} + C^M_{ILPQ} \cdot D_2x^P \cdot D_1x^Q) = 0.
\end{aligned}$$

После группировки слагаемых и переобозначения индексов получим

$$\begin{aligned}
& \left( P_K(P_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + P_I \cdot C^I_{MK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_I \cdot C^I_{KM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + \right. \\
& \quad \left. + M^N_I \cdot C^I_{NMK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - M^N_I \cdot C^I_{NKM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + \right. \\
& \quad \left. + W^{LI}_N \cdot C^N_{ILMK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - W^{LI}_N \cdot C^N_{ILKM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) \right) + \\
& + \left( M^L_K(P_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + P_K \cdot \delta^L_M \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) - P_M(M^L_K) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) \right) + \\
& + \left( -M^I_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - P_M \cdot \delta^I_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) + P_K(M^I_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) \right) + \\
& + \left( M^L_K(M^I_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) + \right. \\
& \quad \left. + M^I_K \cdot \delta^L_M \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) - M^L_M \cdot \delta^I_K \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) \right) + \\
& + \left( W^{NL}_K(P_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) + M^L_K \cdot \delta^N_M \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - P_M(W^{NL}_K) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) \right) + \\
& + \left( -W^{PI}_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) + P_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) - M^I_M \cdot \delta^P_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) \right) + \\
& + \left( W^{NL}_K(M^I_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) - M^I_M(W^{NL}_K) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) + \right. \\
& \quad \left. + W^{IL}_K \cdot \delta^N_M \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) - W^{NL}_M \cdot \delta^I_K \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) \right) + \\
& + \left( -W^{PI}_M(M^L_K) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1a^M_{IP}) + M^L_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1a^M_{IP}) + \right. \\
& \quad \left. + W^{PI}_K \cdot \delta^L_M \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1a^M_{IP}) - W^{LI}_M \cdot \delta^P_K \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1a^M_{IP}) \right) + \\
& + \left( W^{NL}_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1a^M_{IP}) - W^{PI}_M(W^{NL}_K) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1a^M_{IP}) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следуют перестановочные соотношения операторов дифференцирования левой второй кинематиче-



ской алгебры  ${}_l\mathbb{T}_2 = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L} + {}_l\mathbb{A}$  в свободном состоянии с упрощенной таблицей умножения базисных векторов

$$\begin{aligned}
[P_K(P_M)] &= P_I \cdot {}_lC^I_{[KM]} + M^N{}_I \cdot {}_lC^I_{N[KM]}, \\
[P_K(M^L{}_M)] &= P_M \cdot \delta^L{}_K, \\
[M^L{}_K(M^I{}_M)] &= M^L{}_M \cdot \delta^I{}_K, \\
[P_K(W^{PI}{}_M)] &= M^I{}_M \cdot \delta^P{}_K, \\
[M^L{}_K(W^{PI}{}_M)] &= W^{LI}{}_M \cdot \delta^P{}_K - W^{PI}{}_K \cdot \delta^L{}_M, \\
[W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)] &= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь перестановочные соотношения, отличающиеся от указанных перестановкой операторов дифференцирования, опущены.

## 2. Общий случай

Для общего случая таблицы умножения базисных векторов<sup>7</sup>

$$\begin{aligned}
{}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M &= {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L_{MK} + {}_l\mathbf{I}^P{}_L \cdot {}_lC^L_{PMK}, \\
{}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= 0, \\
{}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M, \\
{}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{I}^L{}_M, \\
{}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= \delta^P{}_K \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_M, \\
{}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= 0, \\
{}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^P{}_K \cdot {}_l\mathbf{J}^{LI}{}_M + {}_l\mathbf{e}_M \cdot \delta^P{}_K \cdot g^{LI}, \\
{}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K, \\
{}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= {}_l\mathbf{I}^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K + \delta^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K.
\end{aligned} \tag{12}$$

уравнения структуры принимают вид<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
d_2 D_1 x^I &= D_2 l^I{}_K \cdot D_1 x^K + D_2 a^I{}_{MP} \cdot D_1 l^P{}_L \cdot g^{ML} + {}_lC^I{}_{KL} \cdot D_1 x^K \cdot D_2 x^L, \\
d_2 D_1 l^M{}_L &= D_2 l^M{}_K \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 a^M{}_{LK} \cdot D_1 x^K + D_2 a^M{}_{IP} \cdot D_1 a^P{}_{NL} \cdot g^{NI} + {}_lC^M{}_{LIK} \cdot D_1 x^I \cdot D_2 x^K, \\
d_2 D_1 a^M{}_{IL} &= D_2 a^M{}_{IN} \cdot D_1 l^N{}_L + D_2 l^M{}_N \cdot D_1 a^N{}_{IL}.
\end{aligned} \tag{13}$$

<sup>7</sup> См. Глава 1.7., формула (3)

<sup>8</sup> См. Глава 1.7., формула (8).

Используя эти уравнения структуры в условии интегрируемости (8), получим

$$\begin{aligned}
& P_K(P_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_1x^M \cdot D_2x^K) + \\
& + M^L{}_K(P_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) - M^I{}_M(P_K) \cdot (D_1l^M{}_I \cdot D_2x^K) + \\
& + W^{NL}{}_K(P_M) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1x^M) - W^{PI}{}_M(P_K) \cdot (D_1a^M{}_{IP} \cdot D_2x^K) + \\
& \quad + P_I \cdot (D_2l^I{}_K \cdot D_1x^K + C^I{}_{MK} \cdot D_1x^M \cdot D_2x^K) - \\
& \quad - P_I \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^I{}_K + C^I{}_{KM} \cdot D_2x^K \cdot D_1x^M) + \\
& + P_K(M^I{}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) - P_M(M^L{}_K) \cdot (D_1x^M \cdot D_2l^K{}_L) + \\
& + M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1l^M{}_I \cdot D_2l^K{}_L) + \\
& + W^{NL}{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1l^M{}_I) - W^{PI}{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1a^M{}_{IP} \cdot D_2l^K{}_L) + \\
& \quad + M^K{}_I \cdot (D_2l^I{}_P \cdot D_1l^P{}_K + D_2a^I{}_{KP} \cdot D_1x^P + D_2a^I{}_{QP} \cdot D_1a^P{}_{NK} \cdot g^{NQ} + C^I{}_{KPQ} \cdot D_1x^P \cdot D_2x^Q) - \\
& - M^L{}_M \cdot (D_1l^M{}_K \cdot D_2l^K{}_L + D_1a^M{}_{LK} \cdot D_2x^K + D_1a^M{}_{IP} \cdot D_2a^P{}_{NL} \cdot g^{NI} + C^M{}_{LQP} \cdot D_2x^Q \cdot D_1x^P) + \\
& + P_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M{}_{IP}) - P_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1x^M \cdot D_2a^K{}_{LN}) + \\
& + M^L{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1a^M{}_{IP}) - M^I{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1l^M{}_I \cdot D_2a^K{}_{LN}) + \\
& + W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1a^M{}_{IP}) - \\
& - W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1a^M{}_{IP} \cdot D_2a^K{}_{LN}) + \\
& \quad + W^{LI}{}_M \cdot (D_2a^M{}_{IN} \cdot D_1l^N{}_L + D_2l^M{}_N \cdot D_1a^N{}_{IL} + C^M{}_{ILPQ} \cdot D_1x^P \cdot D_2x^Q) - \\
& \quad - W^{LI}{}_M \cdot (D_1a^M{}_{IN} \cdot D_2l^N{}_L + D_1l^M{}_N \cdot D_2a^N{}_{IL} + C^M{}_{ILPQ} \cdot D_2x^P \cdot D_1x^Q) = 0.
\end{aligned}$$

После группировки слагаемых и переобозначения индексов получим

$$\begin{aligned}
& \left( P_K(P_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + P_I \cdot C^I{}_{MK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_I \cdot C^I{}_{KM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + \right. \\
& \quad + M^N{}_I \cdot C^I{}_{NMK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - M^N{}_I \cdot C^I{}_{NKM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + \\
& \quad \left. + W^{LI}{}_N \cdot C^N{}_{ILMK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - W^{LI}{}_N \cdot C^N{}_{ILKM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) \right) + \\
& + \left( M^L{}_K(P_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) + P_K \cdot \delta^L{}_M \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) - P_M(M^L{}_K) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) \right) + \\
& + \left( -M^I{}_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) - P_M \cdot \delta^I{}_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) + P_K(M^I{}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) \right) + \\
& + \left( M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I) + \right. \\
& \quad \left. + M^I{}_K \cdot \delta^L{}_M \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I) - M^L{}_M \cdot \delta^I{}_K \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I) \right) + \\
& + \left( W^{NL}{}_K(P_M) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1x^M) + M^L{}_K \cdot \delta^N{}_M \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1x^M) - P_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1x^M) \right) + \\
& + \left( -W^{PI}{}_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M{}_{IP}) + P_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M{}_{IP}) + M^I{}_M \cdot \delta^P{}_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M{}_{IP}) \right) + \\
& + \left( W^{NL}{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1l^M{}_I) - M^I{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1l^M{}_I) + \right. \\
& \quad \left. + W^{IL}{}_K \cdot \delta^N{}_M \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1l^M{}_I) - W^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1l^M{}_I) \right) + \\
& + \left( -W^{PI}{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1a^M{}_{IP}) + M^L{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1a^M{}_{IP}) + \right. \\
& \quad \left. + W^{PI}{}_K \cdot \delta^L{}_M \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1a^M{}_{IP}) - W^{LI}{}_M \cdot \delta^P{}_K \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1a^M{}_{IP}) \right) + \\
& + \left( M^P{}_K \cdot g^{IL} \cdot \delta^N{}_M \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1a^M{}_{IP}) - M^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1a^M{}_{IP}) + \right. \\
& \quad \left. + W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1a^M{}_{IP}) - W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1a^M{}_{IP}) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следуют перестановочные соотношения операторов дифференцирования левой второй кинематической алгебры  ${}_l\mathbf{T}_2 = {}_l\mathbf{X} + {}_l\mathbf{L} + {}_l\mathbf{A}$  в свободном состоянии с общей таблицей умножения базисных векторов

$$\begin{aligned}
 [P_K(P_M)] &= P_I \cdot {}_lC^I_{[KM]} + M^N{}_I \cdot {}_lC^I_{N[KM]}, \\
 [P_K(M^L{}_M)] &= P_M \cdot \delta^L{}_K, \\
 [M^L{}_K(M^I{}_M)] &= M^L{}_M \cdot \delta^I{}_K - M^I{}_K \cdot \delta^L{}_M, \\
 [P_K(W^{PI}{}_M)] &= M^I{}_M \cdot \delta^P{}_K, \\
 [M^L{}_K(W^{PI}{}_M)] &= W^{LI}{}_M \cdot \delta^P{}_K - W^{PI}{}_K \cdot \delta^L{}_M + P_M \cdot \delta^P{}_K \cdot g^{LI}, \\
 [W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M)] &= M^N{}_M \cdot \delta^P{}_K \cdot g^{LI} - M^P{}_K \cdot \delta^N{}_M \cdot g^{IL}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь перестановочные соотношения, отличающиеся от указанных перестановкой операторов дифференцирования, опущены.

### IX. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛЕВОЙ ВТОРОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ ${}_l\mathbb{T}_2 = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L} + {}_l\mathbb{A}$ В ПОЛЕ ВНЕШНЕЙ СИММЕТРИИ

По-прежнему исходим из условия интегрируемости дифференциального уравнения

$$d = P_K \cdot Dx^K + M^I{}_K \cdot Dl^K{}_I + W^{IL}{}_K \cdot Da^K{}_{LI},$$

которое сводится к соотношению (8). В это соотношение подставим уравнения структуры левой второй кинематической алгебры в поле внешней симметрии и выведем перестановочные соотношения для указанной алгебры. Перестановочные соотношения приведем для двух случаев таблицы умножения базисных векторов и уравнений структуры левой второй кинематической алгебры в поле внешней симметрии.

#### 1. Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда вторые коэффициенты связности поля внешней симметрии не рассматриваются<sup>9</sup>, то есть

$$\Gamma^I{}_{KLN} = 0.$$

Кроме того, пусть таблица умножения базисных векторов имеет вид (Глава 1.7. формула (4))

$$\begin{aligned}
 {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M &= {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L{}_{MK} + {}_l\mathbf{I}^P{}_L \cdot {}_lC^L{}_{PMK}, \\
 {}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= 0, \\
 {}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M, \\
 {}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{I}^L{}_M, \\
 {}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= \delta^P{}_K \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_M, \\
 {}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= 0, \\
 {}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^P{}_K \cdot {}_l\mathbf{J}^{LI}{}_M, \\
 {}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K, \\
 {}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Уравнения структуры, соответствующие этому случаю, приведены в Главе 1.7. Раздел VI.1. Далее эти уравнения структуры применяются с использованием переобозначения

$${}_l^M{}_{LK} \rightarrow a^M{}_{LK}.$$

<sup>9</sup> См. Глава 1.7.Раздел VI.1.

Первое уравнение структуры

$$d_2 D_1 x^I = D_2 l^I_K \cdot D_1 x^K + T^I_{KL} \cdot D_1 x^K \cdot D_2 x^L,$$

где

$$T^I_{KL} = C^I_{KL} - \Gamma^I_{KL} \quad \text{— объект кручения.}$$

Второе уравнение структуры

$$\begin{aligned} d_2 D_1 l^M_L = & D_2 l^M_K \cdot D_1 l^K_L + D_2 a^M_{LK} \cdot D_1 x^K + \\ & + \Gamma^M_{LN} \cdot D_2 l^N_K \cdot D_1 x^K - D_2 l^M_K \cdot \Gamma^K_{LP} \cdot D_1 x^P - \Gamma^M_{KQ} \cdot D_1 l^K_L \cdot D_2 x^Q + R^M_{LPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q, \end{aligned}$$

где

$$R^M_{LPQ} = \Gamma^M_{LPQ} + \Gamma^M_{KQ} \cdot \Gamma^K_{LP} + \Gamma^M_{LN} \cdot T^N_{PQ} + C^M_{LPQ} \quad \text{— объект кривизны.}$$

Третье уравнение структуры

$$d_2 D_1 a^M_{IL} = D_2 a^M_{IK} \cdot D_1 l^K_L + D_2 l^M_K \cdot D_1 a^K_{IL} - D_2 a^M_{IK} \cdot \Gamma^K_{LP} \cdot D_1 x^P - \Gamma^M_{KQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 a^K_{IL}.$$

Используя эти уравнения структуры в условии интегрируемости (8), получим

$$\begin{aligned} & P_K(P_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 x^K) + \\ & + M^L_K(P_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 x^M) - M^I_M(P_K) \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 x^K) + \\ & + W^{NL}_K(P_M) \cdot (D_2 a^K_{LN} \cdot D_1 x^M) - W^{PI}_M(P_K) \cdot (D_1 a^M_{IP} \cdot D_2 x^K) + \\ & + P_I \cdot (D_2 l^I_K \cdot D_1 x^K + T^I_{KL} \cdot D_1 x^K \cdot D_2 x^L) - P_I \cdot (D_1 l^I_K \cdot D_2 x^K + T^I_{KL} \cdot D_2 x^K \cdot D_1 x^L) + \\ & + P_K(M^I_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 l^M_I) - P_M(M^L_K) \cdot (D_1 x^M \cdot D_2 l^K_L) + \\ & + M^L_K(M^I_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 l^M_I) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 l^K_L) + \\ & + W^{NL}_K(M^I_M) \cdot (D_2 a^K_{LN} \cdot D_1 l^M_I) - W^{PI}_M(M^L_K) \cdot (D_1 a^M_{IP} \cdot D_2 l^K_L) + \\ & + M^L_M \cdot (D_2 l^M_K \cdot D_1 l^K_L + D_2 a^M_{LK} \cdot D_1 x^K + \Gamma^M_{LN} \cdot D_2 l^N_K \cdot D_1 x^K - \\ & \quad - D_2 l^M_K \cdot \Gamma^K_{LP} \cdot D_1 x^P - \Gamma^M_{KQ} \cdot D_1 l^K_L \cdot D_2 x^Q + R^M_{LPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q) - \\ & - M^L_M \cdot (D_2 l^M_K \cdot D_1 l^K_L + D_2 a^M_{LK} \cdot D_1 x^K + \Gamma^M_{LN} \cdot D_2 l^N_K \cdot D_1 x^K - \\ & \quad - D_2 l^M_K \cdot \Gamma^K_{LP} \cdot D_1 x^P - \Gamma^M_{KQ} \cdot D_1 l^K_L \cdot D_2 x^Q + R^M_{LPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q) + \\ & + P_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2 x^K \cdot D_1 a^M_{IP}) - P_M(W^{NL}_K) \cdot (D_1 x^K \cdot D_2 a^K_{LN}) + \\ & + M^L_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 a^M_{IP}) - M^I_M(W^{NL}_K) \cdot (D_1 l^M_I \cdot D_2 a^K_{LN}) + \\ & + W^{NL}_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2 a^K_{LN} \cdot D_1 a^M_{IP}) - W^{PI}_M(W^{NL}_K) \cdot (D_1 a^M_{IP} \cdot D_2 a^K_{LN}) + \\ & + W^{LI}_M \cdot (D_2 a^M_{IK} \cdot D_1 l^K_L + D_2 l^M_K \cdot D_1 a^K_{IL} - (D_2 a^M_{IK} \cdot \Gamma^K_{LP} \cdot D_1 x^P + \Gamma^M_{KQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 a^K_{IL})) - \\ & - W^{LI}_M \cdot (D_1 a^M_{IK} \cdot D_2 l^K_L + D_1 l^M_K \cdot D_2 a^K_{IL} - (D_1 a^M_{IK} \cdot \Gamma^K_{LP} \cdot D_2 x^P + \Gamma^M_{KQ} \cdot D_1 x^Q \cdot D_2 a^K_{IL})) = 0. \end{aligned}$$

После группировки слагаемых и переобозначения индексов получим

$$\begin{aligned}
 & \left( P_K(P_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + P_I \cdot T^I_{MK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - \right. \\
 & \quad \left. - P_I \cdot T^I_{KM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + M^L_P \cdot R^P_{LMK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - M^L_Q \cdot R^Q_{LKM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) \right) + \\
 & + \left( M^L_K(P_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + P_K \cdot \delta^L_M \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) - P_M(M^L_K) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + \right. \\
 & \quad \left. + M^P_Q \cdot \Gamma^Q_{PK} \cdot \delta^L_M \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) - M^P_K \cdot \Gamma^L_{PM} \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + M^L_Q \cdot \Gamma^Q_{KM} \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) \right) + \\
 & + \left( -M^I_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - P_M \cdot \delta^I_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) + P_K(M^I_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - \right. \\
 & \quad \left. - M^I_Q \cdot \Gamma^Q_{MK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - M^L_N \cdot \Gamma^N_{LM} \cdot \delta^I_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) + M^L_M \cdot \Gamma^I_{LK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) \right) + \\
 & + \left( M^L_K(M^I_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) + M^I_K \cdot \delta^L_M \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) - \right. \\
 & \quad \left. - M^L_M \cdot \delta^I_K \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) \right) + \left( W^{NL}_K(P_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) + M^L_K \cdot \delta^N_M \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - \right. \\
 & \quad \left. - P_M(W^{NL}_K) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - W^{IL}_K \cdot \Gamma^N_{IM} \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - W^{NL}_Q \cdot \Gamma^Q_{KM} \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) \right) + \\
 & + \left( -W^{PI}_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) - M^I_M \cdot \delta^P_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) + \right. \\
 & \quad \left. + P_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) + W^{PI}_Q \cdot \Gamma^Q_{MK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) - W^{LI}_M \cdot \Gamma^P_{LK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) \right) + \\
 & + \left( W^{NL}_K(M^I_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) - M^I_M(W^{NL}_K) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) + W^{IL}_K \cdot \delta^N_M \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) - \right. \\
 & \quad \left. - W^{NL}_M \cdot \delta^I_K \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) \right) + \left( -W^{PI}_M(M^L_K) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1a^M_{IP}) + \right. \\
 & \quad \left. + M^L_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1a^M_{IP}) + W^{PI}_K \cdot \delta^L_M \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1a^M_{IP}) - W^{LI}_M \cdot \delta^P_K \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1a^M_{IP}) \right) + \\
 & + \left( W^{NL}_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1a^M_{IP}) - W^{PI}_M(W^{NL}_K) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1a^M_{IP}) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда следуют перестановочные соотношения операторов дифференцирования левой второй кинематической алгебры  ${}_l\mathbb{T}_2 = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L} + {}_l\mathbb{A}$  в поле внешней симметрии с упрощенной таблицей умножения базисных векторов

$$\begin{aligned}
 [P_K(P_M)] &= P_I \cdot T^I_{[KM]} + M^L_I \cdot R^I_{L[KM]}, \\
 [M^L_K(P_M)] &= -P_K \cdot \delta^L_M - M^P_Q \cdot (\Gamma^Q_{PK} \cdot \delta^L_M - \Gamma^L_{PM} \cdot \delta^Q_K + \Gamma^Q_{KM} \cdot \delta^L_P), \\
 [P_K(M^I_M)] &= P_M \cdot \delta^I_K + M^L_N \cdot (\Gamma^N_{LM} \cdot \delta^I_K - \Gamma^I_{LK} \cdot \delta^N_M + \Gamma^N_{MK} \cdot \delta^I_L), \\
 [M^L_K(M^I_M)] &= M^L_M \cdot \delta^I_K - M^I_K \cdot \delta^L_M, \\
 [W^{NL}_K(P_M)] &= -M^L_K \cdot \delta^N_M + W^{IL}_K \cdot \Gamma^N_{IM} + W^{NL}_Q \cdot \Gamma^Q_{KM}, \\
 [P_K(W^{PI}_M)] &= M^I_M \cdot \delta^P_K + W^{LI}_M \cdot \Gamma^P_{LK} - W^{PI}_Q \cdot \Gamma^Q_{MK}, \\
 [W^{NL}_K(M^I_M)] &= W^{NL}_M \cdot \delta^I_K - W^{IL}_K \cdot \delta^N_M, \\
 [M^L_K(W^{PI}_M)] &= -W^{PI}_K \cdot \delta^L_M + W^{LI}_M \cdot \delta^P_K, \\
 [W^{NL}_K(W^{PI}_M)] &= 0,
 \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
 T^I_{[KM]} &= C^I_{[KM]} - \Gamma^I_{[KM]} \quad - \text{тензор кручения,} \\
 R^I_{L[KM]} &= \Gamma^I_{L[K,M]} + \Gamma^I_{P[M} \cdot \Gamma^P_{|L|K]} + \Gamma^I_{LP} \cdot T^P_{[KM]} + C^I_{L[KM]} \quad - \text{тензор кривизны.}
 \end{aligned}$$

## 2. Общий случай

В общем случае, рассматриваемом далее, вторые коэффициенты связности поля внешней симметрии

$$\Gamma^I_{KLN} \neq 0.$$

Кроме того, для общего случая таблица умножения базисных векторов имеет вид (Глава 1.7. формула (3))

$$\begin{aligned}
{}_l \mathbf{e}_K \circ {}_l \mathbf{e}_M &= {}_l \mathbf{e}_L \cdot {}_l C^L_{MK} + {}_l \mathbf{I}^P_L \cdot {}_l C^L_{PMK}, \\
{}_l \mathbf{e}_M \circ {}_l \mathbf{I}^L_K &= 0, \\
{}_l \mathbf{I}^I_M \circ {}_l \mathbf{e}_K &= \delta^I_K \cdot {}_l \mathbf{e}_M, \\
{}_l \mathbf{I}^I_M \circ {}_l \mathbf{I}^L_K &= \delta^I_K \cdot \delta^L_M + \delta^I_K \cdot {}_l \mathbf{I}^L_M, \\
{}_l \mathbf{J}^{PI}_M \circ {}_l \mathbf{e}_K &= \delta^P_K \cdot {}_l \mathbf{I}^I_M, \\
{}_l \mathbf{e}_M \circ {}_l \mathbf{J}^{NL}_K &= 0, \\
{}_l \mathbf{J}^{PI}_M \circ {}_l \mathbf{I}^L_K &= \delta^P_K \cdot {}_l \mathbf{J}^{LI}_M + {}_l \mathbf{e}_M \cdot \delta^P_K \cdot g^{LI}, \\
{}_l \mathbf{I}^I_M \circ {}_l \mathbf{J}^{NL}_K &= {}_l \mathbf{J}^{NL}_M \cdot \delta^I_K, \\
{}_l \mathbf{J}^{PI}_M \circ {}_l \mathbf{J}^{NL}_K &= {}_l \mathbf{I}^N_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K + \delta^N_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K.
\end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения структуры, соответствующие общему случаю, приведены в Главе 1.7., формулы (39), (40) и (41). Далее эти уравнения структуры применяются с использованием переобозначений

$${}_l^M{}_{LK} \rightarrow a^M{}_{LK}, \quad \Gamma^I{}_{KLN} \rightarrow B^I{}_{KLN}.$$

Первое уравнение структуры

$$\begin{aligned}
d_2 D_1 x^I &= D_2 l^I_K \cdot D_1 x^K + T^I{}_{KL} \cdot D_1 x^K \cdot D_2 x^L + D_2 a^I{}_{MK} \cdot D_1 l^K_L \cdot g^{LM} - \\
&- B^I{}_{MKN} \cdot D_2 x^N \cdot D_1 l^K_L \cdot g^{LM} - D_2 a^I{}_{MK} \cdot \Gamma^K{}_{LQ} \cdot D_1 x^Q \cdot g^{LM} + B^I{}_{MKN} \cdot D_2 x^N \cdot \Gamma^K{}_{LQ} \cdot D_1 x^Q \cdot g^{LM},
\end{aligned}$$

где  $T^I{}_{KL} = C^I{}_{KL} - \Gamma^I{}_{KL}$  – объект кручения.

Второе уравнение структуры

$$\begin{aligned}
d_2 D_1 l^M_L &= D_2 l^M_K \cdot D_1 l^K_L + D_2 a^M{}_{LK} \cdot D_1 x^K + \Gamma^M{}_{LN} \cdot D_2 l^N_K \cdot D_1 x^K - D_2 l^M_K \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P - \\
&- \Gamma^M{}_{KQ} \cdot D_1 l^K_L \cdot D_2 x^Q + (R^M{}_{LPQ} - B^M{}_{LPQ}) \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q + \Gamma^M{}_{LN} \cdot D_2 a^N{}_{TK} \cdot D_1 l^K_S \cdot g^{ST} - \\
&- \Gamma^M{}_{LN} \cdot D_2 a^N{}_{TK} \cdot \Gamma^K{}_{SQ} \cdot D_1 x^Q \cdot g^{ST} - \Gamma^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2 x^P \cdot D_1 l^K_S \cdot g^{ST} + \\
&+ \Gamma^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2 x^P \cdot \Gamma^K{}_{SQ} \cdot D_1 x^Q \cdot g^{ST} + D_2 a^M{}_{IK} \cdot D_1 a^K_{NL} \cdot g^{NI} - D_2 a^M{}_{IK} \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{NI} - \\
&- B^M{}_{IKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 a^K_{NL} \cdot g^{NI} + B^M{}_{IKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{NI},
\end{aligned}$$

где  $R^M{}_{LPQ} = \Gamma^M{}_{LPQ} + \Gamma^M{}_{KQ} \cdot \Gamma^K{}_{LP} + \Gamma^M{}_{LN} \cdot T^N{}_{PQ} + C^M{}_{LPQ}$  – объект кривизны.

Третье уравнение структуры

$$\begin{aligned}
d_2 D_1 a^M_{IL} &= D_2 a^M{}_{IK} \cdot D_1 l^K_L + D_2 l^M_K \cdot D_1 a^K_{IL} + B^M{}_{ILN} \cdot D_2 l^N_K \cdot D_1 x^K - B^M{}_{IKN} \cdot D_2 x^N \cdot D_1 l^K_L - \\
&- D_2 l^M_K \cdot B^K{}_{ILP} \cdot D_1 x^P - D_2 a^M{}_{IK} \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P - \Gamma^M{}_{KQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 a^K_{IL} + R^M{}_{ILPQ} \cdot D_1 x^P \cdot D_2 x^Q + \\
&+ B^M{}_{ILN} \cdot D_2 a^N{}_{MK} \cdot D_1 l^K_L \cdot g^{LM} - B^M{}_{ILN} \cdot D_2 a^N{}_{MK} \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{LM} - \\
&- B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot D_1 l^K_L \cdot g^{LM} + B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2 x^Q \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1 x^P \cdot g^{LM},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R^M{}_{ILPQ} &= B^M{}_{ILPQ} + B^M{}_{IKQ} \cdot \Gamma^K{}_{LP} + \Gamma^M{}_{KQ} \cdot B^K{}_{ILP} + B^M{}_{ILN} \cdot T^N{}_{PQ} + C^M{}_{ILPQ} \quad - \text{объект второй кривизны,} \\
B^M{}_{ILPQ} \cdot D_1 x^Q &= dB^M{}_{ILP}.
\end{aligned}$$

Используя эти уравнения структуры в условиях интегрируемости (8), получим

$$\begin{aligned}
 & P_K(P_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_1x^M \cdot D_2x^K) + \\
 & + M^L{}_K(P_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1x^M) - M^I{}_M(P_K) \cdot (D_1l^M{}_I \cdot D_2x^K) + \\
 & + W^{NL}{}_K(P_M) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1x^M) - W^{PI}{}_M(P_K) \cdot (D_1a^M{}_{IP} \cdot D_2x^K) + \\
 & + P_I \cdot (D_2l^I{}_K \cdot D_1x^K + T^I{}_{KL} \cdot D_1x^K \cdot D_2x^L + D_2a^I{}_{MK} \cdot D_1l^K{}_L \cdot g^{LM} - \\
 & - B^I{}_{MKN} \cdot D_2x^N \cdot D_1l^K{}_L \cdot g^{LM} - D_2a^I{}_{MK} \cdot \Gamma^K{}_{LQ} \cdot D_1x^Q \cdot g^{LM} + B^I{}_{MKN} \cdot D_2x^N \cdot \Gamma^K{}_{LQ} \cdot D_1x^Q \cdot g^{LM}) - \\
 & - P_I \cdot (D_1l^I{}_K \cdot D_2x^K + T^I{}_{KL} \cdot D_2x^K \cdot D_1x^L + D_1a^I{}_{MK} \cdot D_2l^K{}_L \cdot g^{LM} - \\
 & - B^I{}_{MKN} \cdot D_1x^N \cdot D_2l^K{}_L \cdot g^{LM} - D_1a^I{}_{MK} \cdot \Gamma^K{}_{LQ} \cdot D_2x^Q \cdot g^{LM} + B^I{}_{MKN} \cdot D_1x^N \cdot \Gamma^K{}_{LQ} \cdot D_2x^Q \cdot g^{LM}) + \\
 & + P_K(M^I{}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M{}_I) - P_M(M^L{}_K) \cdot (D_1x^M \cdot D_2l^K{}_L) + \\
 & + M^L{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1l^M{}_I) - M^I{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1l^M{}_I \cdot D_2l^K{}_L) + \\
 & + W^{NL}{}_K(M^I{}_M) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1l^M{}_I) - W^{PI}{}_M(M^L{}_K) \cdot (D_1a^M{}_{IP} \cdot D_2l^K{}_L) + \\
 & + M^L{}_M \cdot (D_2l^M{}_K \cdot D_1l^K{}_L + D_2a^M{}_{LK} \cdot D_1x^K + \Gamma^M{}_{LN} \cdot D_2l^N{}_K \cdot D_1x^K - \\
 & - D_2l^M{}_K \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1x^P - \Gamma^M{}_{KQ} \cdot D_1l^K{}_L \cdot D_2x^Q + (R^M{}_{LPQ} - B^M{}_{LPQ}) \cdot D_1x^P \cdot D_2x^Q + \\
 & + \Gamma^M{}_{LN} \cdot D_2a^N{}_{TK} \cdot D_1l^K{}_S \cdot g^{ST} - \Gamma^M{}_{LN} \cdot D_2a^N{}_{TK} \cdot \Gamma^K{}_{SQ} \cdot D_1x^Q \cdot g^{ST} - \Gamma^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2x^P \cdot D_1l^K{}_S \cdot g^{ST} + \\
 & + \Gamma^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2x^P \cdot \Gamma^K{}_{SQ} \cdot D_1x^Q \cdot g^{ST} + D_2a^M{}_{IK} \cdot D_1a^K{}_{NL} \cdot g^{NI} - D_2a^M{}_{IK} \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1x^P \cdot g^{NI} - \\
 & - B^M{}_{IKQ} \cdot D_2x^Q \cdot D_1a^K{}_{NL} \cdot g^{NI} + B^M{}_{IKQ} \cdot D_2x^Q \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1x^P \cdot g^{NI}) - \\
 & - M^L{}_M \cdot (D_2l^M{}_K \cdot D_1l^K{}_L + D_2a^M{}_{LK} \cdot D_1x^K + \Gamma^M{}_{LN} \cdot D_2l^N{}_K \cdot D_1x^K - \\
 & - D_2l^M{}_K \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1x^P - \Gamma^M{}_{KQ} \cdot D_1l^K{}_L \cdot D_2x^Q + (R^M{}_{LPQ} - B^M{}_{LPQ}) \cdot D_1x^P \cdot D_2x^Q + \\
 & + \Gamma^M{}_{LN} \cdot D_2a^N{}_{TK} \cdot D_1l^K{}_S \cdot g^{ST} - \Gamma^M{}_{LN} \cdot D_2a^N{}_{TK} \cdot \Gamma^K{}_{SQ} \cdot D_1x^Q \cdot g^{ST} - \Gamma^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2x^P \cdot D_1l^K{}_S \cdot g^{ST} + \\
 & + \Gamma^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot D_2x^P \cdot \Gamma^K{}_{SQ} \cdot D_1x^Q \cdot g^{ST} + D_2a^M{}_{IK} \cdot D_1a^K{}_{NL} \cdot g^{NI} - D_2a^M{}_{IK} \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1x^P \cdot g^{NI} - \\
 & - B^M{}_{IKQ} \cdot D_2x^Q \cdot D_1a^K{}_{NL} \cdot g^{NI} + B^M{}_{IKQ} \cdot D_2x^Q \cdot B^K{}_{NLP} \cdot D_1x^P \cdot g^{NI}) + \\
 & + P_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M{}_{IP}) - P_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1x^K \cdot D_2a^K{}_{LN}) + \\
 & + M^L{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2l^K{}_L \cdot D_1a^M{}_{IP}) - M^I{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1l^M{}_I \cdot D_2a^K{}_{LN}) + \\
 & + W^{NL}{}_K(W^{PI}{}_M) \cdot (D_2a^K{}_{LN} \cdot D_1a^M{}_{IP}) - W^{PI}{}_M(W^{NL}{}_K) \cdot (D_1a^M{}_{IP} \cdot D_2a^K{}_{LN}) + \\
 & + W^{LI}{}_M \cdot (D_2a^M{}_{IK} \cdot D_1l^K{}_L + D_2l^M{}_K \cdot D_1a^K{}_{IL} + \\
 & + (B^M{}_{ILN} \cdot D_2l^N{}_K \cdot D_1x^K - B^M{}_{IKN} \cdot D_2x^N \cdot D_1l^K{}_L - D_2l^M{}_K \cdot B^K{}_{ILP} \cdot D_1x^P) - \\
 & - (D_2a^M{}_{IK} \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1x^P + \Gamma^M{}_{KQ} \cdot D_2x^Q \cdot D_1a^K{}_{IL}) + R^M{}_{ILPQ} \cdot D_1x^P \cdot D_2x^Q + B^M{}_{ILN} \cdot D_2a^N{}_{MK} \cdot D_1l^K{}_L \cdot g^{LM} - \\
 & - B^M{}_{ILN} \cdot D_2a^N{}_{MK} \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1x^P \cdot g^{LM} - B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2x^Q \cdot D_1l^K{}_L \cdot g^{LM} + \\
 & + B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2x^Q \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1x^P \cdot g^{LM}) - W^{LI}{}_M \cdot (D_2a^M{}_{IK} \cdot D_1l^K{}_L + D_2l^M{}_K \cdot D_1a^K{}_{IL} + \\
 & + (B^M{}_{ILN} \cdot D_2l^N{}_K \cdot D_1x^K - B^M{}_{IKN} \cdot D_2x^N \cdot D_1l^K{}_L - D_2l^M{}_K \cdot B^K{}_{ILP} \cdot D_1x^P) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (D_2a^M{}_{IK} \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1x^P + \Gamma^M{}_{KQ} \cdot D_2x^Q \cdot D_1a^K{}_{IL}) + R^M{}_{ILPQ} \cdot D_1x^P \cdot D_2x^Q + \\
 & + B^M{}_{ILN} \cdot D_2a^N{}_{MK} \cdot D_1l^K{}_L \cdot g^{LM} - B^M{}_{ILN} \cdot D_2a^N{}_{MK} \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1x^P \cdot g^{LM} - \\
 & - B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2x^Q \cdot D_1l^K{}_L \cdot g^{LM} + B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot D_2x^Q \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot D_1x^P \cdot g^{LM}) = 0.
 \end{aligned}$$

После группировки слагаемых и переобозначения индексов получим

$$\begin{aligned}
& \left( P_K(P_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + \right. \\
& \quad + P_I \cdot T^I_{MK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_I \cdot T^I_{KM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + \\
& \quad + P_I \cdot B^I_{QNK} \cdot \Gamma^N_{LM} \cdot g^{LQ} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - P_I \cdot B^I_{NQM} \cdot \Gamma^Q_{LK} \cdot g^{LN} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + \\
& \quad + M^L_P \cdot (R^P_{LMK} - B^P_{LMK}) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + M^L_Q \cdot \Gamma^Q_{LN} \cdot B^N_{TPK} \cdot \Gamma^P_{SM} \cdot g^{ST} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + \\
& \quad + M^L_P \cdot B^P_{IQK} \cdot B^Q_{NLM} \cdot g^{NI} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - M^L_Q \cdot (R^Q_{LKM} - B^Q_{LKM}) \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - \\
& \quad - M^L_P \cdot \Gamma^P_{LN} \cdot B^N_{TQM} \cdot \Gamma^Q_{SK} \cdot g^{ST} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - M^L_Q \cdot B^Q_{IPM} \cdot B^P_{NLK} \cdot g^{NI} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + \\
& \quad + W^{LI}_P \cdot R^P_{ILMK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) + W^{TI}_S \cdot B^S_{ITN} \cdot B^N_{PQK} \cdot \Gamma^Q_{LM} \cdot g^{LP} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - \\
& \quad - W^{LQ}_I \cdot R^Q_{ILKM} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) - W^{TI}_S \cdot B^S_{ITN} \cdot B^N_{QPM} \cdot \Gamma^P_{LK} \cdot g^{LQ} \cdot (D_2x^K \cdot D_1x^M) \Big) + \\
& + \left( M^L_K(P_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + P_K \cdot \delta^L_M \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + P_I \cdot B^I_{NKM} \cdot g^{LN} \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) - \right. \\
& \quad - P_M(M^L_K) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + M^P_Q \cdot \Gamma^Q_{PK} \cdot \delta^L_M \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) - \\
& \quad - M^P_K \cdot \Gamma^L_{PM} \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + M^L_Q \cdot \Gamma^Q_{KM} \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + \\
& \quad + M^S_P \cdot \Gamma^P_{SN} \cdot B^N_{TKM} \cdot g^{LT} \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + W^{LI}_N \cdot B^N_{ILK} \cdot \delta^L_M \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) - \\
& \quad - W^{PI}_K \cdot B^L_{IPM} \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + \\
& \quad + W^{LI}_N \cdot B^N_{IKM} \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) + W^{TI}_S \cdot B^S_{ITN} \cdot B^N_{QKM} \cdot g^{LQ} \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1x^M) \Big) + \\
& + \left( -M^I_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - P_L \cdot B^L_{NMK} \cdot g^{IN} \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - P_M \cdot \delta^I_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) + \right. \\
& \quad + P_K(M^I_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - M^I_Q \cdot \Gamma^Q_{MK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) + -M^L_P \cdot \Gamma^P_{LN} \cdot B^N_{TMK} \cdot g^{IT} \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - \\
& \quad - M^L_N \cdot \Gamma^N_{LM} \cdot \delta^I_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) + M^L_M \cdot \Gamma^I_{LK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - W^{IL}_N \cdot B^N_{LMK} \cdot (\delta_2x^K \cdot \delta_1l^M_I) - \\
& \quad - W^{TL}_S \cdot B^S_{LTN} \cdot B^N_{QMK} \cdot g^{IQ} \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) - W^{LT}_N \cdot B^N_{TLM} \cdot \delta^I_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) + \\
& \quad + W^{LP}_M \cdot B^I_{PLK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1l^M_I) \Big) + \\
& + \left( M^L_K(M^I_M) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) - M^I_M(M^L_K) \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) + M^I_K \cdot \delta^L_M \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) - \right. \\
& \quad - M^L_M \cdot \delta^I_K \cdot (D_2l^K_L \cdot D_1l^M_I) \Big) + \\
& + \left( W^{NL}_K(P_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - P_K \cdot A^N_{QM} \cdot g^{QL} \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) + M^L_K \cdot \delta^N_M \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - \right. \\
& \quad - M^T_Q \cdot \Gamma^Q_{TK} \cdot \Gamma^N_{SM} \cdot g^{SL} \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - M^I_K \cdot B^N_{PIM} \cdot g^{PL} \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) + \\
& \quad + M^N_Q \cdot B^Q_{IKM} \cdot g^{LI} \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - \\
& \quad - P_M(W^{NL}_K) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - W^{IL}_K \cdot \Gamma^N_{IM} \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - \\
& \quad - W^{TI}_S \cdot B^S_{ITK} \cdot \Gamma^N_{PM} \cdot g^{PL} \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) - W^{NL}_Q \cdot A^Q_{KM} \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1x^M) \Big) + \\
& + \left( -W^{PI}_M(P_K) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) + P_M \cdot \Gamma^P_{LK} \cdot g^{LI} \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) - \right. \\
& \quad - M^P_Q \cdot B^Q_{NMK} \cdot g^{IN} \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) - \\
& \quad - M^I_M \cdot \delta^P_K \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) + M^L_N \cdot \Gamma^N_{LM} \cdot \Gamma^P_{SK} \cdot g^{SI} \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) + \\
& \quad + M^L_M \cdot B^P_{NLK} \cdot g^{NI} \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) + \\
& \quad + P_K(W^{PI}_M) \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) + W^{PI}_Q \cdot \Gamma^Q_{MK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) + W^{LI}_M \cdot \Gamma^P_{LK} \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) + \\
& \quad + W^{TN}_S \cdot B^S_{NTM} \cdot \Gamma^P_{LK} \cdot g^{LI} \cdot (D_2x^K \cdot D_1a^M_{IP}) \Big) + \\
& + \left( P_K \cdot g^{IL} \cdot \delta^N_M \cdot (\delta_2a^K_{LN} \cdot \delta_1l^M_I) + W^{NL}_K(M^I_M) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) + \right. \\
& \quad + M^T_P \cdot \Gamma^P_{TK} \cdot g^{IL} \cdot \delta^N_M \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) - \\
& \quad - M^I_M(W^{NL}_K) \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) + W^{IL}_K \cdot \delta^N_M \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) + \\
& \quad + W^{TP}_S \cdot B^S_{PTK} \cdot g^{IL} \cdot \delta^N_M \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) - W^{NL}_M \cdot \delta^I_K \cdot (D_2a^K_{LN} \cdot D_1l^M_I) \Big) +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \left( -P_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 a^M_{IP}) - W^{PI}_M (M^L_K) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 a^M_{IP}) - \right. \\
 & \quad - M^S_N \cdot \Gamma^N_{SM} \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 a^M_{IP}) + \\
 & \quad + M^L_K (W^{PI}_M) \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 a^M_{IP}) + W^{PI}_K \cdot \delta^L_M \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 a^M_{IP}) - W^{LI}_M \cdot \delta^P_K \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 a^M_{IP}) - \\
 & \quad \left. - W^{TN}_S \cdot B^S_{NTM} \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K \cdot (D_2 l^K_L \cdot D_1 a^M_{IP}) \right) + \\
 & + \left( M^P_K \cdot g^{IL} \cdot \delta^N_M \cdot (D_2 a^K_{LN} \cdot D_1 a^M_{IP}) - M^N_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K \cdot (D_2 a^K_{LN} \cdot D_1 a^M_{IP}) + \right. \\
 & \quad \left. + W^{NL}_K (W^{PI}_M) \cdot (D_2 a^K_{LN} \cdot D_1 a^M_{IP}) - W^{PI}_M (W^{NL}_K) \cdot (D_2 a^K_{LN} \cdot D_1 a^M_{IP}) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда следуют перестановочные соотношения операторов дифференцирования второй кинематической алгебры в поле внешней симметрии с общей таблицей умножения базисных векторов

$$\begin{aligned}
 [P_K(P_M)] &= P_I \cdot T^I_{[KM]} + P_I \cdot B^I_{NQ[M]} \cdot \Gamma^Q_{|L|K]} \cdot g^{LN} + M^L_Q \cdot (R^Q_{L[KM]} - B^Q_{L[KM]}) + \\
 & \quad + M^L_P \cdot \Gamma^P_{LN} \cdot B^N_{TQ[M]} \cdot \Gamma^Q_{|S|K]} \cdot g^{ST} + M^L_Q \cdot B^Q_{IP[M]} \cdot B^P_{|NL|K]} \cdot g^{NI} + \\
 & \quad + W^{LI}_Q \cdot R^Q_{IL[KM]} + W^{TI}_S \cdot B^S_{ITN} \cdot B^N_{QP[M]} \cdot \Gamma^P_{|L|K]} \cdot g^{LQ}, \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [M^L_K(P_M)] &= -P_K \cdot \delta^L_M - P_I \cdot B^I_{NKM} \cdot g^{LN} - \\
 & \quad - M^P_N \cdot (\Gamma^N_{PK} \cdot \delta^L_M - \Gamma^L_{PM} \cdot \delta^N_K + \Gamma^N_{KM} \cdot \delta^L_P) - M^S_P \cdot \Gamma^P_{SN} \cdot B^N_{TKM} \cdot g^{LT} - \\
 & \quad - (W^{PT}_N \cdot B^N_{TPK} \cdot \delta^L_M - W^{PT}_K \cdot B^L_{TPM} + W^{LT}_N \cdot B^N_{TKM}) - W^{TI}_S \cdot B^S_{ITN} \cdot B^N_{QKM} \cdot g^{LQ}, \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [P_K(M^I_M)] &= P_M \cdot \delta^I_K + P_L \cdot B^L_{NMK} \cdot g^{IN} + \\
 & \quad + M^P_N \cdot (\Gamma^N_{PM} \cdot \delta^I_K - \Gamma^I_{PK} \cdot \delta^N_M + \Gamma^N_{MK} \cdot \delta^I_P) + M^L_P \cdot \Gamma^P_{LN} \cdot B^N_{TMK} \cdot g^{IT} + \\
 & \quad + (W^{PT}_N \cdot B^N_{TPM} \cdot \delta^I_K - W^{PT}_M \cdot B^I_{TPK} + W^{IT}_N \cdot B^N_{TMK}) + W^{TL}_S \cdot B^S_{LTN} \cdot B^N_{QMK} \cdot g^{IQ}, \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$[M^L_K(M^I_M)] = M^L_M \cdot \delta^I_K - M^I_K \cdot \delta^L_M, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 [W^{NL}_K(P_M)] &= P_K \cdot \Gamma^N_{QM} \cdot g^{QL} - M^L_K \cdot \delta^N_M + M^T_Q \cdot \Gamma^Q_{TK} \cdot \Gamma^N_{SM} \cdot g^{SL} + \\
 & \quad + M^I_K \cdot B^N_{PIM} \cdot g^{PL} - M^N_Q \cdot B^Q_{IKM} \cdot g^{LI} + \\
 & \quad + W^{IL}_K \cdot \Gamma^N_{IM} + W^{NL}_Q \cdot \Gamma^Q_{KM} + W^{TI}_S \cdot B^S_{ITK} \cdot \Gamma^N_{PM} \cdot g^{PL}, \tag{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [P_K(W^{PI}_M)] &= -P_M \cdot A^P_{LK} \cdot g^{LI} + M^I_M \cdot \delta^P_K - M^L_N \cdot \Gamma^N_{LM} \cdot \Gamma^P_{SK} \cdot g^{SI} - \\
 & \quad - M^L_M \cdot B^P_{NLK} \cdot g^{NI} + M^P_Q \cdot B^Q_{NMK} \cdot g^{IN} - \\
 & \quad - W^{LI}_M \cdot \Gamma^P_{LK} - W^{PI}_Q \cdot \Gamma^Q_{MK} - W^{TN}_S \cdot B^S_{NTM} \cdot \Gamma^P_{LK} \cdot g^{LI}, \tag{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [W^{NL}_K(M^I_M)] &= -P_K \cdot g^{IL} \cdot \delta^N_M - M^T_P \cdot \Gamma^P_{TK} \cdot g^{IL} \cdot \delta^N_M + \\
 & \quad + W^{NL}_M \cdot \delta^I_K - W^{IL}_K \cdot \delta^N_M - W^{TP}_S \cdot B^S_{PTK} \cdot g^{IL} \cdot \delta^N_M, \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [M^L_K(W^{PI}_M)] &= P_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K + M^S_N \cdot \Gamma^N_{SM} \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K - \\
 & \quad - W^{PI}_K \cdot \delta^L_M + W^{LI}_M \cdot \delta^P_K + W^{TN}_S \cdot B^S_{NTM} \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K, \tag{25}
 \end{aligned}$$

$$[W^{NL}_K(W^{PI}_M)] = M^N_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P_K - M^P_K \cdot g^{IL} \cdot \delta^N_M, \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
 T^I_{[KM]} &= {}_lC^I_{[KM]} - \Gamma^I_{[KM]} \quad - \text{тензор кручения,} \\
 R^Q_{L[KM]} &= \Gamma^Q_{L[KM]} + \Gamma^Q_{P[M]} \cdot \Gamma^P_{|L|K]} + \Gamma^Q_{LP} \cdot T^P_{[KM]} + {}_lC^Q_{L[KM]} \quad - \text{тензор кривизны,} \\
 R^Q_{IL[KM]} &= B^Q_{IL[KM]} + B^Q_{IP[M]} \cdot \Gamma^P_{|L|K]} + \Gamma^Q_{P[M]} \cdot B^P_{|IL|K]} + B^Q_{ILP} \cdot T^P_{[KM]} + {}_lC^Q_{IL[KM]} \\
 & \quad - \text{тензор второй кривизны.}
 \end{aligned}$$

Рассмотренный общий случай сводится к предыдущему частному случаю, если положить

$$B^Q_{IP[M]} = 0, \quad {}_lC^Q_{ILKM} = 0$$

и пренебречь проекциями произведений базисных векторов на слагаемые, содержащие компоненты метрического тензора  $g^{IL}$ .

## 3. Частный случай 2

В дальнейшем нам понадобится другой частный случай, когда

$$B^Q_{IP[M]} \neq 0, \quad {}_iC^Q_{ILKM} \neq 0,$$

но проекции произведений базисных векторов на слагаемые, содержащие компоненты метрического тензора  $g^{IL}$  отсутствуют. Из формул (18) - (26), следуют перестановочные соотношения для рассматриваемого случая.

$$[P_K(P_M)] = P_I \cdot T^I_{[KM]} + M^L_Q \cdot (R^Q_{L[KM]} - B^Q_{L[KM]}) + W^{LI}_Q \cdot R^Q_{IL[KM]}, \quad (27)$$

$$[M^I_M(P_K)] = -P_M \cdot \delta^I_K - M^P_N \cdot G^N_{PM^I_K} - W^{PT}_N \cdot G^N_{TPM^I_K}, \quad (28)$$

$$[P_K(M^I_M)] = P_M \cdot \delta^I_K + M^P_N \cdot G^N_{PM^I_K} + W^{PT}_N \cdot G^N_{TPM^I_K}, \quad (29)$$

$$[M^L_K(M^I_M)] = M^L_M \cdot \delta^I_K - M^I_K \cdot \delta^L_M, \quad (30)$$

$$[W^{NL}_K(P_M)] = -M^L_K \cdot \delta^N_M + W^{IL}_K \cdot \Gamma^N_{IM} + W^{NL}_Q \cdot \Gamma^Q_{KM}, \quad (31)$$

$$[P_K(W^{PI}_M)] = M^I_M \cdot \delta^P_K - W^{LI}_M \cdot \Gamma^P_{LK} - W^{PI}_Q \cdot \Gamma^Q_{MK}, \quad (32)$$

$$[W^{NL}_K(M^I_M)] = W^{NL}_M \cdot \delta^I_K - W^{IL}_K \cdot \delta^N_M, \quad (33)$$

$$[M^L_K(W^{PI}_M)] = -W^{PI}_K \cdot \delta^L_M + W^{LI}_M \cdot \delta^P_K, \quad (34)$$

$$[W^{NL}_K(W^{PI}_M)] = 0, \quad (35)$$

где

$$T^I_{[KM]} = {}_iC^I_{[KM]} - \Gamma^I_{[KM]} \quad \text{— тензор кручения,}$$

$$G^N_{PM^I_K} = \Gamma^N_{PM} \cdot \delta^I_K - \Gamma^I_{PK} \cdot \delta^N_M + \Gamma^N_{MK} \cdot \delta^I_P,$$

$$R^Q_{L[KM]} = \Gamma^Q_{L[KM]} + \Gamma^Q_{P[M} \cdot \Gamma^P_{|L|K]} + \Gamma^Q_{LP} \cdot T^P_{[KM]} + {}_iC^Q_{L[KM]} \quad \text{— тензор кривизны,}$$

$$G^N_{TPM^I_K} = B^N_{TPM} \cdot \delta^I_K - B^I_{TPK} \cdot \delta^N_M + B^N_{TMK} \cdot \delta^I_P,$$

$$R^Q_{IL[KM]} = B^Q_{IL[KM]} + B^Q_{IP[M} \cdot \Gamma^P_{|L|K]} + \Gamma^Q_{P[M} \cdot B^P_{|IL|K]} + B^Q_{ILP} \cdot T^P_{[KM]} + {}_iC^Q_{IL[KM]} \\ \text{— тензор второй кривизны.}$$

Здесь учтено, что

$$W^{PT}_N \cdot B^N_{TPM} \cdot \delta^I_K - W^{PT}_M \cdot B^I_{TPK} + W^{IT}_N \cdot B^N_{TMK} = \\ = W^{PT}_N \cdot (B^N_{TPM} \cdot \delta^I_K - B^I_{TPK} \cdot \delta^N_M + B^N_{TMK} \cdot \delta^I_P) = W^{PT}_N \cdot G^N_{TPM^I_K}.$$

Далее используем полученные перестановочные соотношения для формулировки уравнений динамики.

## Глава 6.4 Уравнения динамики III. Учет перестановочных соотношений

### I. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В этом Разделе приведем перестановочные соотношения, полученные в Главе 6.3, в том виде и в той последовательности, в которых они будут использованы далее при выводе уравнений динамики.

#### 1. Первое приближение

Напомним, что уравнения динамики физического объекта в первом приближении сводятся к уравнению динамики для импульса этого объекта.

##### 1.1. В уравнениях динамики для импульса физического объекта

Далее воспользуемся перестановочным соотношением, полученными в Главе 6.3 (формула (27)), в следующем виде:

$$[P_I(P_R)] = P_E \cdot T^E_{[IR]}, \quad (1)$$

где

$$T^E_{[IR]} = {}_I C^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}.$$

#### 2. Второе приближение

Напомним, что уравнения динамики физического объекта во втором приближении сводятся к уравнениям динамики для импульса и момента этого объекта.

##### 2.1. В уравнениях динамики для импульса физического объекта

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями, полученными в Главе 6.3 (формула (7)), в следующем виде:

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_E \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E \cdot R^E_{F[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^F_E \cdot G^E_{FR}{}^S{}_I, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} T^E_{[IR]} &= {}_I C^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}, \\ G^E_{FR}{}^S{}_I &= \Gamma^E_{FR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{FI} \cdot \delta^E_R + \Gamma^E_{RI} \cdot \delta^S_F, \\ R^E_{F[IR]} &= \Gamma^E_{F[IR]} + \Gamma^E_{P[R]} \cdot \Gamma^P_{[F|I]} + \Gamma^E_{FP} \cdot T^P_{[IR]} + {}_I C^E_{F[IR]}. \end{aligned}$$

##### 2.2. В уравнениях динамики для момента физического объекта

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями, полученными в Главе 6.3 (формула (7)), в следующем виде:

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^G_H \cdot G^H_{GI}{}^P{}_R, \\ [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$G^M_{GI} P_R = \Gamma^M_{GI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{GR} \cdot \delta^M_I + \Gamma^M_{IR} \cdot \delta^P_G.$$

### 3. Общий случай

#### 3.1. В уравнениях динамики для импульса физического объекта

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями, полученными в Главе 6.3 (формулы (27), (29), (32)), в следующем виде:

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_E \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E \cdot R^E_{FG[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^F_E \cdot G^E_{FR} S_I + W^{GF}_E \cdot G^E_{FGR} S_I, \\ [P_I(W^{TS}_R)] &= M^S_R \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E \cdot \Gamma^E_{RI}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} T^E_{[IR]} &= {}_i C^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}, \\ G^E_{FR} S_I &= \Gamma^E_{FR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{FI} \cdot \delta^E_R + \Gamma^E_{RI} \cdot \delta^S_F, \\ R^E_{F[IR]} &= \Gamma^E_{F[IR]} + \Gamma^E_{P[R]} \cdot \Gamma^P_{[F]I} + \Gamma^E_{FP} \cdot T^P_{[IR]} + {}_i C^E_{F[IR]}, \\ G^E_{FGR} S_I &= B^E_{FGR} \cdot \delta^S_I - B^S_{FGI} \cdot \delta^E_R + B^E_{FRI} \cdot \delta^S_G, \\ R^E_{FG[IR]} &= B^E_{FG[IR]} + B^E_{FH[R]} \cdot \Gamma^H_{[G]I} + \Gamma^E_{H[R]} \cdot B^H_{[FG]I} + B^E_{FGH} \cdot T^H_{[IR]} + {}_i C^E_{FG[IR]}. \end{aligned}$$

#### 3.2. В уравнениях динамики для момента физического объекта

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями, полученными в Главе 6.3 (формулы (28), (30), (34)), в следующем виде:

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^G_H \cdot G^H_{GI} P_R - W^{GF}_H \cdot G^H_{FGI} P_R, \\ [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \\ [M^P_I(W^{TS}_R)] &= -W^{TS}_I \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R \cdot \delta^T_I, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} G^H_{GI} P_R &= \Gamma^H_{GI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{GR} \cdot \delta^H_I + \Gamma^H_{IR} \cdot \delta^P_G, \\ G^H_{FGI} P_R &= B^H_{FGI} \cdot \delta^P_R - B^P_{FGR} \cdot \delta^H_I + B^H_{FIR} \cdot \delta^P_G. \end{aligned}$$

#### 3.3. В уравнениях динамики для второго момента физического объекта

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями, полученными в Главе 6.3 (формулы (31), (33), (35)), в следующем виде:

$$\begin{aligned} [W^{QP}_I(P_R)] &= -M^P_I \cdot \delta^Q_R + W^{HP}_I \cdot \Gamma^Q_{HR} + W^{QP}_H \cdot \Gamma^H_{IR}, \\ [W^{QP}_I(M^S_R)] &= W^{QP}_R \cdot \delta^S_I - W^{SP}_I \cdot \delta^Q_R, \\ [W^{QP}_I(W^{TS}_R)] &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Перейдем к формированию уравнений динамики для динамических параметров фундаментального, промежуточного и второго промежуточного объектов с учетом перестановочных соотношений, полученных в Главе 6.3. В методическом плане полезно сначала рассмотреть уравнения динамики для простых частных случаев – в первом и втором приближении, а затем перейти к более сложному общему случаю.

## II. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Напомним, что уравнения динамики фундаментального объекта в первом приближении сводятся к уравнению динамики сдвига для импульса этого объекта.

### 1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Исходим из уравнения динамики сдвига для импульса фундаментального объекта, полученного в в Разделе III.1 Главы 6.2 (формула (66)). Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial p^L_I(x_0)}{\partial x_0^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S, p)}{\partial S^L} \cdot p^L_I - \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, P_R] S^L \right).$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (1)

$$[P_I(P_R)] = P_E \cdot T^E_{[IR]},$$

где

$$T^E_{[IR]} = {}_i C^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}.$$

В результате получим уравнение динамики сдвига для импульса фундаментального объекта в первом приближении

$$\frac{\partial p^L_I(x_0)}{\partial x_0^L} = - \frac{\partial \mathcal{P}}{Dx^I} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S^L} \cdot p^L_I - p^L_E \cdot T^E_{[IR]} \cdot \frac{Dx^R}{\partial x_0^L}. \quad (7)$$

## III. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

### 1. Уравнения динамики сдвига. Поле отсутствует

#### 1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Исходим из уравнения динамики сдвига для импульса фундаментального объекта во втором приближении, полученного в Разделе IV.1.1 Главы 6.2 (формула (67)). Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial p_I(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p_I - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P] S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, M] S \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме:

$$\frac{\partial p^L_I(x_0)}{\partial x_0^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L} \cdot p^L_I - \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot [P_I(P_R)] S^L - \frac{Dl^R_S}{\partial x_0^L} \cdot [P_I(M^S_R)] S^L \right). \quad (8)$$

Воспользуемся частным случаем перестановочных соотношений (2), когда коэффициенты связности равны нулю:

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_E \cdot {}_i C^E_{[IR]} + M^F_E \cdot {}_i C^E_{F[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^L_I(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L} \cdot p^L_I - \right. \\ &\left. - \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot P_E(S^L) \cdot {}_i C^E_{[IR]} - \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot M^F_E(S^L) \cdot {}_i C^E_{F[IR]} - \frac{Dl^R_S}{\partial x_0^L} \cdot P_R(S^L) \cdot \delta^S_I \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для импульса фундаментального объекта во втором приближении в окончательном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^L_I(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L} \cdot p^L_I - \right. \\ & \left. + \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot p^L_E \cdot {}_l C^E_{[IR]} + \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot m^{LF}_E \cdot {}_l C^E_{F[IR]} + \frac{Dl^R_S}{\partial x_0^L} \cdot p^L_R \cdot \delta^S_I \right). \end{aligned} \quad (9)$$

### 1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

Исходим из уравнения динамики сдвига для момента фундаментального объекта во втором приближении, полученного в в Разделе IV.1.2 Главы 6.2 (формула 68). Оно имеет вид следующий вид:

$$\frac{\partial m^P_I(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot m^P_I - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, M]S \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^{LP}_I(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L} \cdot m^{LP}_I - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I(P_R)]S^L - \frac{Dl^R_S}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I(M^S_R)]S^L \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Воспользуемся частным случаем перестановочных соотношений (3), когда коэффициенты связности равны нулю

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R, \\ [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^{LP}_I(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L} \cdot m^{LP}_I - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot (-P_I(S^L) \cdot \delta^P_R) - \frac{Dl^R_S}{\partial x_0^L} \cdot (M^P_R(S^L) \cdot \delta^S_I - M^S_I(S^L) \cdot \delta^P_R) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для момента фундаментального объекта во втором приближении в окончательном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^{LP}_I(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L} \cdot m^{LP}_I + \right. \\ & \left. + \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot (+p^L_I \cdot \delta^P_R) - \frac{Dl^R_S}{\partial x_0^L} \cdot (m^{LP}_R \cdot \delta^S_I + m^{LS}_I \cdot \delta^P_R) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

## 2. Уравнения динамики сдвига в поле внешней симметрии

### 2.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Для вывода уравнения динамики сдвига для импульса фундаментального объекта в поле внешней симметрии в уравнении (8) используем перестановочные соотношения (2) в полном объеме

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_E \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E \cdot R^E_{F[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^F_E \cdot G^E_{FR} S_I, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^E_{[IR]} &= {}_l C^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}, \\ G^E_{FR} S_I &= \Gamma^E_{FR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{FI} \cdot \delta^E_R + \Gamma^E_{RI} \cdot \delta^S_F, \\ R^E_{F[IR]} &= \Gamma^E_{F[IR]} + \Gamma^E_{P[R]} \cdot \Gamma^P_{[F[I]} + \Gamma^E_{FP} \cdot T^P_{[IR]} + {}_l C^E_{F[IR]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^L_I(x_0)}{\partial x_0^L} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L} \cdot p^L_I - \right. \\ &\left. - \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot (P_E(S^L) \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E(S^L) \cdot R^E_{F[IR]}) - \frac{Dl^R_S}{\partial x_0^L} \cdot (P_R(S^L) \cdot \delta^S_I + M^F_E(S^L) \cdot G^E_{FR} S_I) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для импульса фундаментального объекта в поле внешней симметрии во втором приближении в окончательном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^L_I(x_0)}{\partial x_0^L} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L} \cdot p^L_I + \right. \\ &\left. + \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot (p^L_E \cdot T^E_{[IR]} + m^{LF}_E \cdot R^E_{F[IR]}) + \frac{Dl^R_S}{\partial x_0^L} \cdot (p^L_R \cdot \delta^S_I + m^{LF}_E \cdot G^E_{FR} S_I) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

### 2.2. Уравнение динамики сдвига для момента

Уравнение динамики сдвига для момента фундаментального объекта в поле внешней симметрии во втором приближении получим, подставляя в уравнение (10) перестановочные соотношения (3) в полном объеме

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^G_H \cdot G^H_{GI} P_R, \\ [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \end{aligned}$$

где

$$G^M_{GI} P_R = \Gamma^M_{GI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{GR} \cdot \delta^M_I + \Gamma^M_{IR} \cdot \delta^P_G.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^{LP}_I(x_0), l(x_0)}{\partial x_0^L} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L} \cdot m^{LP}_I - \right. \\ &\left. - \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot (-P_I(S^L) \cdot \delta^P_R - M^G_H(S^L) \cdot G^H_{GI} P_R) - \frac{Dl^R_S}{\partial x_0^L} \cdot (M^P_R(S^L) \cdot \delta^S_I - M^S_I(S^L) \cdot \delta^P_R) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для момента фундаментального объекта в поле внешней симметрии во втором приближении в окончательном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^{LP}_I(x_0), l(x_0)}{\partial x_0^L} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L} \cdot m^{LP}_I + \right. \\ &\left. + \frac{Dx^R}{\partial x_0^L} \cdot (-p^L_I \cdot \delta^P_R - m^{LG}_H \cdot G^H_{GI} P_R) + \frac{Dl^R_S}{\partial x_0^L} \cdot (m^{LP}_R \cdot \delta^S_I - m^{LS}_I \cdot \delta^P_R) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

### 3. Уравнения динамики линейного преобразования

#### 3.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

Исходным для дальнейших преобразований является уравнение динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта во втором приближении, полученное в Разделе IV.2.1 Главы 6.2 (формула (71)):

$$\frac{\partial p_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p_I - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, M]S \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{KI}^L(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L_K} \cdot p_{KI}^L - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, P_R]S^L_K - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, M^S_R]S^L_K \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Необходимо отметить, что это уравнение следует считать *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам фундаментального объекта

$$S, \quad p, \quad m \quad \text{или в индексной форме} \quad S^L_K, \quad p^L_{KI}, \quad m^L_{K^P_I}.$$

Отсюда следует, что вывод *окончательного* уравнения динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта во втором приближении должен включать в себя два этапа. На первом этапе необходимо перейти от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта

$$S, \quad p, \quad m \quad \text{или в индексной форме} \quad S^N, \quad p^N_I, \quad m^{NP}_I.$$

На втором этапе необходимо учесть перестановочные соотношения (2).

Начнем с первого этапа. Связь между непосредственными и вспомогательными динамическими параметрами дается соотношениями (5), (7) и (8) Главы 6.1:

$$S^L_K = C^L_{KN} \cdot S^N, \quad p^L_{KI} = C^L_{KN} \cdot p^N_I, \quad m^L_{K^P_I} = C^L_{KN} \cdot m^{NP}_I.$$

Подставим приведенные соотношения в вспомогательное уравнение (14). Получим уравнение динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта во втором приближении, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта:

$$\begin{aligned} C^L_{KN} \cdot \frac{\partial p^N_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^N} \cdot p^N_I - \right. \\ & \left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, P_R]S^N - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, M^S_R]S^N \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что это уравнение можно получить, не прибегая к вспомогательным динамическим параметрам, а использовать метод Гамильтона напрямую по отношению к непосредственным динамическим параметрам. В качестве примера приведем такой вывод. Для этого сначала запишем в индексной форме исходное соотношение (16) Главы 6.2

$$\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx^K} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^I} \cdot p^I_K + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_L} \cdot \frac{\partial p^I_L(x, l)}{Dx^K} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IM}_L} \cdot \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dx^K} = 0.$$

Далее учтем, что

$$\frac{\partial p^I_L(x, l)}{Dx^K} = \frac{\partial p^I_K(x, l)}{Dx^L} - [P_K, P_L]S^I$$



и

$$\frac{\partial m^{IM_L}(x, l)}{Dx^K} = \frac{\partial p^K(x, l)}{Dl^L_M} - [P_K, M^M_L]S^I.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx^K} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^I} \cdot p^K + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_L} \cdot \frac{\partial p^K(x, l)}{Dx^L} - \\ & - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_L} \cdot [P_K, P_L]S^I + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IM_L}} \cdot \frac{\partial p^K(x, l)}{Dl^L_M} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IM_L}} \cdot [P_K, M^M_L]S^I = 0. \end{aligned}$$

Далее отождествим сумму слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_L} \cdot \frac{\partial p^K(x, l)}{Dx^L} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IM_L}} \cdot \frac{\partial p^K(x, l)}{Dl^L_M}$$

и выражение

$$C^P_{QI} \cdot \left( \frac{\partial p^K(x, l)}{Dx^L} \cdot \frac{Dx^L}{\partial l^P_Q} + \frac{\partial p^K(x, l)}{Dl^L_M} \cdot \frac{Dl^L_M}{\partial l^P_Q} \right),$$

то есть, потребуем, чтобы выполнялось <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_L} \cdot \frac{\partial p^K(x, l)}{Dx^L} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IM_L}} \cdot \frac{\partial p^K(x, l)}{Dl^L_M} \equiv \\ & \equiv C^P_{QI} \cdot \left( \frac{\partial p^K(x, l)}{Dx^L} \cdot \frac{Dx^L}{\partial l^P_Q} + \frac{\partial p^K(x, l)}{Dl^L_M} \cdot \frac{Dl^L_M}{\partial l^P_Q} \right) = C^P_{QI} \cdot \frac{\partial p^K(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^P_Q}. \end{aligned}$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} C^P_{QI} \cdot \frac{\partial p^K}{\partial l^P_Q} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx^K} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^I} \cdot p^K - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_L} \cdot [P_K, P_L]S^I - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IM_L}} \cdot [P_K, M^M_L]S^I \right), \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_L} &= C^P_{QI} \cdot \frac{Dx^L}{\partial l^P_Q}, \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IM_L}} &= C^P_{QI} \cdot \frac{Dl^L_M}{\partial l^P_Q}. \end{aligned}$$

Подставляя два последних соотношения в первое, получим уравнение динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта во втором приближении записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта:

$$\begin{aligned} C^P_{QI} \cdot \frac{\partial p^K}{\partial l^P_Q} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx^K} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^I} \cdot p^K - \right. \\ & \left. - C^P_{QI} \cdot \frac{Dx^L}{\partial l^P_Q} \cdot [P_K, P_L]S^I - C^P_{QI} \cdot \frac{Dl^L_M}{\partial l^P_Q} \cdot [P_K, M^M_L]S^I \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (15) с точностью до переобозначения индексов.

<sup>1</sup> Напомним, что

$$m_0 = -C^P_{QI} \cdot \frac{dS^I(z(l_0))}{dl^P_Q}.$$

Обратимся теперь к второму этапу вывода окончательного уравнения. Он состоит в том, чтобы подставить в уравнение (15) перестановочные соотношения (2)

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_E \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E \cdot R^E_{F[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^F_E \cdot G^E_{FR^S_I}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^E_{[IR]} &= {}_l C^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}, \\ G^E_{FR^S_I} &= \Gamma^E_{FR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{FI} \cdot \delta^E_R + \Gamma^E_{RI} \cdot \delta^S_F, \\ R^E_{F[IR]} &= \Gamma^E_{F[IR]} + \Gamma^E_{P[R]} \cdot \Gamma^P_{[F|I]} + \Gamma^E_{FP} \cdot T^P_{[IR]} + {}_l C^E_{F[IR]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^L_{KN} \cdot \frac{\partial p^N_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^N} \cdot p^N_I - \right. \\ &- C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (P_E(S^N) \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E(S^N) \cdot R^E_{F[IR]}) - \\ &\left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (P_R(S^N) \cdot \delta^S_I + M^F_E(S^N) \cdot G^E_{FR^S_I}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта во втором приближении в окончательном виде

$$\begin{aligned} C^L_{KN} \cdot \frac{\partial p^N_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^N} \cdot p^N_I + \right. \\ &\left. + C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (p^N_E \cdot T^E_{[IR]} + m^{NF}_E \cdot R^E_{F[IR]}) + C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (p^N_R \cdot \delta^S_I + m^{NF}_E \cdot G^E_{FR^S_I}) \right) \quad (17) \end{aligned}$$

#### 4. Уравнение динамики линейного преобразования для момента

Исходным для дальнейших преобразований является уравнение динамики линейного преобразования для момента фундаментального объекта во втором приближении, полученное в Разделе IV.2.2 Главы 6.2 (формула (72)):

$$\frac{\partial m^P_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot m^P_I - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M]S \right).$$

Запишем это уравнение в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^{L_P I}(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^L_K} \cdot m^{L_P I} - \right. \\ &\left. - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, P_R]S^L_K - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M^S_R]S^L_K \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что это уравнение следует считать *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам фундаментального объекта

$$S, \quad p, \quad m \quad \text{или в индексной форме} \quad S^L_K, \quad p^L_{KM}, \quad m^{L_P I}.$$

Отсюда следует, что вывод *окончательного* уравнения динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта во втором приближении должен включать в себя два этапа. На первом этапе необходимо перейти от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта

$$S, p, m \text{ или в индексной форме } S^N, p^N_I, m^{NP}_I.$$

На втором этапе необходимо учесть перестановочные соотношения (3)

Начнем с первого этапа. Связь между непосредственными и вспомогательными динамическими параметрами дается соотношениями (5), (7) и (8) Главы 6.1:

$$S^L_K = C^L_{KN} \cdot S^N, \quad p^L_{KI} = C^L_{KN} \cdot p^N_I, \quad m^L_{K^P_I} = C^L_{KN} \cdot m^{NP}_I.$$

Подставим приведенные соотношения в вспомогательное уравнение (18). Получим уравнение динамики линейного преобразования для момента фундаментального объекта во втором приближении, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта:

$$C^L_{KN} \cdot \frac{\partial m^{NP}_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^L_{0K}} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^N} \cdot m^{NP}_I - C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, P_R] S^N - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M^S_R] S^N \right). \quad (19)$$

Заметим, что это уравнение можно получить, не прибегая к вспомогательным динамическим параметрам, а использовать метод Гамильтона напрямую по отношению к непосредственным динамическим параметрам. В качестве примера приведем такой вывод. Для этого сначала запишем в индексной форме исходное соотношение (17) Главы 6.2

$$\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl^L_M} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^I} \cdot m^{IM}_L + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_K} \cdot \frac{\partial p^I_K(x, l)}{Dl^L_M} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IN}_R} \cdot \frac{\partial m^{IN}_R(x, l)}{Dl^L_M} = 0.$$

Далее учтем, что

$$\frac{\partial p^I_K(x, l)}{Dl^L_M} = \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dx^K} - [M^M_L, P_K] S^I$$

и

$$\frac{\partial m^{IN}_R(x, l)}{Dl^L_M} = \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dl^R_N} - [M^M_L, M^N_R] S^I.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl^L_M} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^I} \cdot m^{IM}_L + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_K} \cdot \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dx^K} - \\ & - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_K} \cdot [M^M_L, P_K] S^I + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IN}_R} \cdot \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dl^R_N} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IN}_R} \cdot [M^M_L, M^N_R] S^I = 0. \end{aligned}$$

Далее в соответствии с методом Гамильтона отождествим сумму слагаемых

$$\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_K} \cdot \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dx^K} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IN}_R} \cdot \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dl^R_N}$$

и выражение

$$C^P_{QI} \cdot \left( \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dx^K} \cdot \frac{Dx^K}{\partial l^P_Q} + \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dl^R_N} \cdot \frac{Dl^R_N}{\partial l^P_Q} \right),$$

то есть, потребуем, чтобы выполнялось

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_K} \cdot \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dx^K} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IN}_R} \cdot \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dl^R_N} \equiv \\ & \equiv C^P_{QI} \cdot \left( \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dx^K} \cdot \frac{Dx^K}{\partial l^P_Q} + \frac{\partial m^{IM}_L(x, l)}{Dl^R_N} \cdot \frac{Dl^R_N}{\partial l^P_Q} \right) = C^P_{QI} \cdot \frac{\partial m^{IM}_L(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^P_Q}. \end{aligned}$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} C^P_{QI} \cdot \frac{\partial m^{IM}_L(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0^P Q} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl^L_M} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^I} \cdot m^{IM}_L - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_K} \cdot [M^M_L, P_K] S^I - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IN}_R} \cdot [M^M_L, M^N_R] S^I \right), \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial p^I_K} &= C^P_{QI} \cdot \frac{Dx^K}{\partial l_0^P Q}, \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial m^{IN}_R} &= C^P_{QI} \cdot \frac{Dl^R_N}{\partial l_0^P Q}. \end{aligned}$$

Подставляя два последних соотношения в первое, получим уравнение динамики линейного преобразования для момента фундаментального объекта во втором приближении записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта:

$$\begin{aligned} C^P_{QI} \cdot \frac{\partial m^{IM}_L(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0^P Q} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl^L_M} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^I} \cdot m^{IM}_L - \right. \\ &\quad \left. - C^P_{QI} \cdot \frac{Dx^K}{\partial l_0^P Q} \cdot [M^M_L, P_K] S^I - C^P_{QI} \cdot \frac{Dl^R_N}{\partial l_0^P Q} \cdot [M^M_L, M^N_R] S^I \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (19) с точностью до переобозначения индексов.

Обратимся теперь к второму этапу вывода окончательного уравнения. Он состоит в том, чтобы подставить в уравнение (19) перестановочные соотношения (3)

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^G_H \cdot G^H_{GI} P_R, \\ [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \end{aligned}$$

где

$$G^M_{GI} P_R = \Gamma^M_{GI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{GR} \cdot \delta^M_I + \Gamma^M_{IR} \cdot \delta^P_G.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^L_{KN} \cdot \frac{\partial m^{NP}_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0^L K} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl^L_P} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^N} \cdot m^{NP}_I - \right. \\ &\quad - C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_0^L K} \cdot (-P_I(S^N) \cdot \delta^P_R - M^G_H(S^N) \cdot G^H_{GI} P_R) \\ &\quad \left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_0} \cdot (M^P_R(S^N) \cdot \delta^S_I - M^S_I(S^N) \cdot \delta^P_R) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следуют уравнения динамики линейного преобразования для момента фундаментального объекта во втором приближении в окончательном виде

$$\begin{aligned} C^L_{KN} \cdot \frac{\partial m^{NP}_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0^L K} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{Dl^L_P} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, S, p, m)}{\partial S^N} \cdot m^{NP}_I + \right. \\ &\quad + C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_0^L K} \cdot (-p^N_I \cdot \delta^P_R - m^{NG}_H \cdot G^H_{GI} P_R) \\ &\quad \left. + C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_0} \cdot (m^{NP}_R \cdot \delta^S_I - m^{NS}_I \cdot \delta^P_R) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

## IV. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

## 1. Уравнения динамики сдвига

Уравнения динамики сдвига фундаментального объекта уже сформулированы по отношению к непосредственным динамическим параметрам этого объекта:

$$S^K, \quad p^K_M, \quad m^{KL}_M, \quad w^{KNL}_M.$$

Поэтому дальнейшее преобразование указанных уравнений сводится к учету перестановочных соотношений.

## 1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Исходим из уравнения динамики сдвига для импульса фундаментального объекта, полученного в Разделе V.1.1 Главы 6.2 (формула (73)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot p_I - \right. \\ & \left. - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, M]S - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, W]S \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^L_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x^L_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^L} \cdot p^L_I - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x^L_0} \cdot [P_I, P_R]S^L - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x^L_0} \cdot [P_I, M^S_R]S^L - \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x^L_0} \cdot [P_I, W^{TS}_R]S^L \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (4)

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_E \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E \cdot R^E_{FG[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^F_E \cdot G^E_{FR}{}^S{}_I + W^{GF}_E \cdot G^E_{FGR}{}^S{}_I, \\ [P_I(W^{TS}_R)] &= M^S_R \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E \cdot \Gamma^E_{RI}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^E_{[IR]} &= {}_iC^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}, \\ G^E_{FR}{}^S{}_I &= \Gamma^E_{FR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{FI} \cdot \delta^E_R + \Gamma^E_{RI} \cdot \delta^S_F, \\ R^E_{F[IR]} &= \Gamma^E_{F[IR]} + \Gamma^E_{P[R]} \cdot \Gamma^P_{[F]I]} + \Gamma^E_{FP} \cdot T^P_{[IR]} + {}_iC^E_{F[IR]}, \\ G^E_{FGR}{}^S{}_I &= B^E_{FGR} \cdot \delta^S_I - B^S_{FGI} \cdot \delta^E_R + B^E_{FRI} \cdot \delta^S_G, \\ R^E_{FG[IR]} &= B^E_{FG[IR]} + B^E_{FH[R]} \cdot \Gamma^H_{[G]I} + \Gamma^E_{H[R]} \cdot B^H_{[FG]I} + B^E_{FGH} \cdot T^H_{[IR]} + {}_iC^E_{FG[IR]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^L_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x^L_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^L} \cdot p^L_I - \right. \\ & - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x^L_0} \cdot (P_E(S^L) \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E(S^L) \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E(S^L) \cdot R^E_{FG[IR]}) - \\ & - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x^L_0} \cdot (P_R(S^L) \cdot \delta^S_I + M^F_E(S^L) \cdot G^E_{FR}{}^S{}_I + W^{GF}_E(S^L) \cdot G^E_{FGR}{}^S{}_I) - \\ & \left. - \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x^L_0} \cdot (M^S_R(S^L) \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R(S^L) \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E(S^L) \cdot \Gamma^E_{RI}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для импульса фундаментального объекта в общем случае (в третьем приближении) в окончательном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^L_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^L} \cdot p^L_I + \right. \\ & + \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (p^L_E \cdot T^E_{[IR]} + m^{LF}_E \cdot R^E_{F[IR]} + w^{LGF}_E \cdot R^E_{FG[IR]}) + \\ & + \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (p^L_R \cdot \delta^S_I + m^{LF}_E \cdot G^E_{FR} S^S_I + w^{LGF}_E \cdot G^E_{FGR} S^S_I) + \\ & \left. + \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (m^{LS}_R \cdot \delta^T_I - w^{LGS}_R \cdot \Gamma^T_{GI} - w^{LTS}_E \cdot \Gamma^E_{RI}) \right). \end{aligned} \quad (23)$$

### 1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

Исходим из уравнения динамики сдвига для момента фундаментального объекта, полученного в Разделе V.1.2 Главы 6.2 (формула (74)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^P_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot m^P_I - \right. \\ & \left. - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, M]S - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, W]S \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^{LP}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^L} \cdot m^{LP}_I - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, P_R]S^L - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, M^S_R]S^L - \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, W^{TS}_R]S^L \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (5)

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^G_H \cdot G^H_{GI} P_R - W^{GF}_H \cdot G^H_{FGI} P_R, \\ [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \\ [M^P_I(W^{TS}_R)] &= -W^{TS}_I \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R \cdot \delta^T_I, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G^H_{GI} P_R &= \Gamma^H_{GI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{GR} \cdot \delta^H_I + \Gamma^H_{IR} \cdot \delta^P_G, \\ G^H_{FGI} P_R &= B^H_{FGI} \cdot \delta^P_R - B^P_{FGR} \cdot \delta^H_I + B^H_{FIR} \cdot \delta^P_G. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^{LP}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^L} \cdot m^{LP}_I - \right. \\ & - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-P_I(S^L) \cdot \delta^P_R - M^G_H(S^L) \cdot G^H_{GI} P_R - W^{GF}_H(S^L) \cdot G^H_{FGI} P_R) - \\ & - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (M^P_R(S^L) \cdot \delta^S_I - M^S_I(S^L) \cdot \delta^P_R) - \\ & \left. - \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-W^{TS}_I(S^L) \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R(S^L) \cdot \delta^T_I) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для момента фундаментального объекта в окончательном виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m^{LP}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^L_P} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^L} \cdot m^{LP}_I + \right. \\
& + \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-p^L_I \cdot \delta^P_R - m^{LG}_H \cdot G^H_{GI}{}^P{}_R - w^{LGF}_H \cdot G^H_{FGI}{}^P{}_R) + \\
& + \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (m^{LP}_R \cdot \delta^S_I - m^{LS}_I \cdot \delta^P_R) + \\
& \left. + \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-w^{LTS}_I \cdot \delta^P_R + w^{LPS}_R \cdot \delta^T_I) \right). \quad (25)
\end{aligned}$$

### 1.3. Уравнение динамики сдвига для второго момента

Исходим из уравнения динамики сдвига для второго момента фундаментального объекта, полученного в Разделе V.1.3 Главы 6.2 (формула (75)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{QP}_I(x_0)}{\partial x_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^L_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot w^{QP}_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, P]S - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, M]S - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, W]S \right).
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение для фундаментального объекта полностью в индексной форме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{LQP}_I(x_0)}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^L_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^L} \cdot w^{LQP}_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, P_R]S^L - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, M^S_R]S^L - \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, W^{TS}_R]S^L \right). \quad (26)
\end{aligned}$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (6)

$$\begin{aligned}
[W^{QP}_I(P_R)] &= -M^P_I \cdot \delta^Q_R + W^{HP}_I \cdot \Gamma^Q_{HR} + W^{QP}_H \cdot \Gamma^H_{IR}, \\
[W^{QP}_I(M^S_R)] &= W^{QP}_R \cdot \delta^S_I - W^{SP}_I \cdot \delta^Q_R, \\
[W^{QP}_I(W^{TS}_R)] &= 0.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{LQP}_I(x_0)}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^L_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^L} \cdot w^{LQP}_I - \right. \\
& - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-M^P_I(S^L) \cdot \delta^Q_R + W^{HP}_I(S^L) \cdot \Gamma^Q_{HR} + W^{QP}_H(S^L) \cdot \Gamma^H_{IR}) - \\
& \left. - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (W^{QP}_R(S^L) \cdot \delta^S_M - W^{SP}_M(S^L) \cdot \delta^Q_R) \right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для второго момента фундаментального объекта в окончательном

виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{LQP_I}(x_0)}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^L_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^L} \cdot w^{LQP_I} + \right. \\ & + \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-m^{LP_I} \cdot \delta^Q_R + w^{LHP_I} \cdot \Gamma^Q_{HR} + w^{LQP_H} \cdot \Gamma^H_{IR}) + \\ & \left. + \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (w^{LQP_R} \cdot \delta^S_I - w^{LSP_I} \cdot \delta^Q_R) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

## 2. Уравнения динамики линейного преобразования

Исходными уравнениями для дальнейших преобразований являются уравнения динамики линейного преобразования фундаментального объекта, полученные в Разделе V.2 Главы 6.2. Необходимо отметить, что эти уравнения следует считать *вспомогательными*, так как они сформулированы по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам фундаментального объекта

$$S, p, m, w \text{ или в индексной форме } S^L_K, p^L_{KI}, m^L_{K^P_I}, w^{L_{K^Q P}_I}.$$

Отсюда следует, что вывод *окончательных* уравнений динамики линейного преобразования для динамических параметров фундаментального объекта должен включать в себя два этапа. На первом этапе необходимо перейти от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта

$$S, p, m, w \text{ или в индексной форме } S^N, p^N_I, m^{NP_I}, w^{NQP_I}.$$

Связь между непосредственными и вспомогательными динамическими параметрами дается соотношениями (5), (7), (8) и (9) Главы 6.1:

$$S^L_K = C^L_{KN} \cdot S^N, \quad p^L_{KI} = C^L_{KN} \cdot p^N_I, \quad m^L_{K^P_I} = C^L_{KN} \cdot m^{NP_I}, \quad w^{L_{K^Q P}_I} = C^L_{KN} \cdot w^{NQP_I}. \quad (28)$$

На втором этапе необходимо учесть перестановочные соотношения, полученные в Главе 6.3.

### 2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

Исходим из уравнения динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта, полученного в Разделе V.2.1 Главы 6.2 (формула (78)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^M} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot p_M - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_M, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_M, M]S - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_M, W]S \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^L_{KI}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^L_K} \cdot p^L_{KI} - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_0^L} \cdot [P_I, P_R]S^L_K - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_0^L} \cdot [P_I, M^S_R]S^L_K - \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l_0^L} \cdot [P_I, W^{TS}_R]S^L_K \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам фундаментального объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта в соответствии



с соотношениями (28). Получим уравнение динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта:

$$C^L_{KN} \cdot \frac{\partial p^N_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot p^N_I - \right. \\ \left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [P_I, P_R] S^N - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [P_I, M^S_R] S^N - C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [P_I, W^{TS}_R] S^N \right). \quad (30)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (4)

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_E \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E \cdot R^E_{FG[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^F_E \cdot G^E_{FR} S^I + W^{GF}_E \cdot G^E_{FGR} S^I, \\ [P_I(W^{TS}_R)] &= M^S_R \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E \cdot \Gamma^E_{RI}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^E_{[IR]} &= {}_l C^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}, \\ G^E_{FR} S^I &= \Gamma^E_{FR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{FI} \cdot \delta^E_R + \Gamma^E_{RI} \cdot \delta^S_F, \\ R^E_{F[IR]} &= \Gamma^E_{F[IR]} + \Gamma^E_{P[R} \cdot \Gamma^P_{|F|I]} + \Gamma^E_{FP} \cdot T^P_{[IR]} + {}_l C^E_{F[IR]}, \\ G^E_{FGR} S^I &= B^E_{FGR} \cdot \delta^S_I - B^S_{FGI} \cdot \delta^E_R + B^E_{FRI} \cdot \delta^S_G, \\ R^E_{FG[IR]} &= B^E_{FG[IR]} + B^E_{FH[R} \cdot \Gamma^H_{|G|I]} + \Gamma^E_{H[R} \cdot B^H_{|FG|I]} + B^E_{FGH} \cdot T^H_{[IR]} + {}_l C^E_{FG[IR]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$C^L_{KN} \cdot \frac{\partial p^N_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot p^N_I - \right. \\ \left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (P_E(S^N) \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E(S^N) \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E(S^N) \cdot R^E_{FG[IR]}) - \right. \\ \left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (P_R(S^N) \cdot \delta^S_I + M^F_E(S^N) \cdot G^E_{FR} S^I + W^{GF}_E(S^N) \cdot G^E_{FGR} S^I) - \right. \\ \left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (M^S_R(S^N) \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R(S^N) \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E(S^N) \cdot \Gamma^E_{RI}) \right).$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта в окончательном виде:

$$C^L_{KN} \cdot \frac{\partial p^N_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot p^N_I + \right. \\ \left. + C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (p^N_E \cdot T^E_{[IR]} + m^{NF}_E \cdot R^E_{F[IR]} + w^{NGF}_E \cdot R^E_{FG[IR]}) + \right. \\ \left. + C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (p^N_R \cdot \delta^S_I + m^{NF}_E \cdot G^E_{FR} S^I + w^{NGF}_E \cdot G^E_{FGR} S^I) + \right. \\ \left. + C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (m^{NS}_R \cdot \delta^T_I - w^{NGS}_R \cdot \Gamma^T_{GI} - w^{NTS}_E \cdot \Gamma^E_{RI}) \right). \quad (31)$$

## 2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента

Исходим из уравнения динамики линейного преобразования для момента фундаментального объекта, полученного в Разделе V.2.2 Главы 6.2 (формула (79)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^P_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} m^P_{I-} \right. \\ & \left. - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M]S - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, W]S \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^{L_K P}_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^{L_K}} m^{L_K P}_{I-} \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, P_R]S^{L_K} - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, M^S_R]S^{L_K} - \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, W^{TS}_R]S^{L_K} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам фундаментального объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта в соответствии с соотношениями (28). Получим уравнение динамики линейного преобразования для момента фундаментального объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта:

$$\begin{aligned} C^{L}_{KN} \cdot \frac{\partial m^{NP}_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} m^{NP}_{I-} \right. \\ & - C^{L}_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, P_R]S^N - C^{L}_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, M^S_R]S^N - \\ & \left. - C^{L}_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, W^{TS}_R]S^N \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (5)

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^G_H \cdot G^H_{GI}{}^P{}_R - W^{GF}_H \cdot G^H_{FGI}{}^P{}_R, \\ [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \\ [M^P_I(W^{TS}_R)] &= -W^{TS}_I \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R \cdot \delta^T_I, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G^H_{GI}{}^P{}_R &= \Gamma^H_{GI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{GR} \cdot \delta^H_I + \Gamma^H_{IR} \cdot \delta^P_G, \\ G^H_{FGI}{}^P{}_R &= B^H_{FGI} \cdot \delta^P_R - B^P_{FGR} \cdot \delta^H_I + B^H_{FIR} \cdot \delta^P_G. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^{L}_{KN} \cdot \frac{\partial m^{NP}_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} m^{NP}_{I-} \right. \\ & - C^{L}_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-P_I(S^N) \cdot \delta^P_R - M^G_H(S^N) \cdot G^H_{GI}{}^P{}_R - W^{GF}_H(S^N) \cdot G^H_{FGI}{}^P{}_R) - \\ & - C^{L}_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (M^P_R(S^N) \cdot \delta^S_I - M^S_I(S^N) \cdot \delta^P_R) - \\ & \left. - C^{L}_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-W^{TS}_I(S^N) \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R(S^N) \cdot \delta^T_I) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для момента фундаментального объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
C^L_{KN} \cdot \frac{\partial m^{NP_I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} m^{NP_I} + \right. \\
&+ C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-p^P_I \cdot \delta^P_R - m^{NG_H} \cdot G^H_{GI}{}^P{}_R - w^{NGF_H} \cdot G^H_{FGI}{}^P{}_R) + \\
&+ C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (m^{NP_R} \cdot \delta^S_I - m^{NS_I} \cdot \delta^P_R) + \\
&\left. + C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-w^{NTS_I} \cdot \delta^P_R + w^{NPS_R} \cdot \delta^T_I) \right). \quad (34)
\end{aligned}$$

### 2.3. Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента

Исходим из уравнения динамики линейного преобразования для второго момента фундаментального объекта, полученного в Разделе V.2.3 Главы 6.2 (формула (80)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{QP_I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot w^{QP_I} - \right. \\
&\left. - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP_I}, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP_I}, M]S - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP_I}, W]S \right).
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^L_{KQP_I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^L_K} \cdot w^L_{KQP_I} - \right. \\
&\left. - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [W^{QP_I}, P_R]S^L_K - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [W^{QP_I}, M^S_R]S^L_K - \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [W^{QP_I}, W^{TS_R}]S^L_K \right). \quad (35)
\end{aligned}$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам фундаментального объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта в соответствии с соотношениями (28). Получим уравнение динамики линейного преобразования для второго момента фундаментального объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта:

$$\begin{aligned}
C^L_{KN} \cdot \frac{\partial w^{NQP_I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot w^{NQP_I} - \right. \\
&- C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [W^{QP_I}, P_R]S^N - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [W^{QP_I}, M^S_R]S^N - \\
&\left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [W^{QP_I}, W^{TS_R}]S^N \right). \quad (36)
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (6)

$$\begin{aligned}
[W^{QP_I}(P_R)] &= -M^P_I \cdot \delta^Q_R + W^{HP_I} \cdot \Gamma^Q_{HR} + W^{QP_H} \cdot \Gamma^H_{IR}, \\
[W^{QP_I}(M^S_R)] &= W^{QP_R} \cdot \delta^S_I - W^{SP_I} \cdot \delta^Q_R, \\
[W^{QP_I}(W^{TS_R})] &= 0.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$C^L_{KN} \cdot \frac{\partial w^{NQP_I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial a^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot w^{NQP_I} - \right. \\ \left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-M^P_I(S^N) \cdot \delta^Q_R + W^{HP_I}(S^N) \cdot \Gamma^Q_{HR} + W^{QP_H}(S^N) \cdot \Gamma^H_{IR}) - \right. \\ \left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (W^{QP_R}(S^N) \cdot \delta^S_I - W^{SP_I}(S^N) \cdot \delta^Q_R) \right).$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для второго момента фундаментального объекта в окончательном виде:

$$C^L_{KN} \cdot \frac{\partial w^{NQP_I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial a^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot w^{NQP_I} + \right. \\ \left. + C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-m^{NP_I} \cdot \delta^Q_R + w^{NHP_I} \cdot \Gamma^Q_{HR} + w^{NQP_H} \cdot \Gamma^H_{IR}) + \right. \\ \left. + C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (w^{NQP_R} \cdot \delta^S_I - w^{NSP_I} \cdot \delta^Q_R) \right). \quad (37)$$

### 3. Уравнения динамики второго линейного преобразования

Исходными уравнениями для дальнейших преобразований являются уравнения динамики второго линейного преобразования фундаментального объекта, полученные в Разделе V.3 Главы 6.2. Необходимо отметить, что эти уравнения следует считать *вспомогательными*, так как они сформулированы по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам фундаментального объекта

$$S, \quad p, \quad m, \quad w \quad \text{или в индексной форме} \quad S^L_{KM}, \quad p^L_{KMI}, \quad m^L_{KMP_I}, \quad w^L_{KMQP_I}.$$

Отсюда следует, что вывод *окончательных* уравнений динамики второго линейного преобразования для динамических параметров фундаментального объекта должен включать в себя два этапа. На первом этапе необходимо перейти от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта

$$S, \quad p, \quad m, \quad w \quad \text{или в индексной форме} \quad S^N, \quad p^N_I, \quad m^{NP_I}, \quad w^{NQP_I}.$$

Связь между непосредственными и вспомогательными динамическими параметрами дается соотношениями (10), (12), (13) и (14) Главы 6.1:

$$S^L_{KM} = C^L_{KMN} \cdot S^N, \quad p^L_{KMI} = C^L_{KMN} \cdot p^N_I, \quad m^L_{KMP_I} = C^L_{KMN} \cdot m^{NP_I}, \quad w^L_{KMQP_I} = C^L_{KMN} \cdot w^{NQP_I}. \quad (38)$$

На втором этапе необходимо учесть перестановочные соотношения, полученные в Главе 6.3.

#### 3.1. Уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса

Исходим из уравнения динамики второго линейного преобразования для импульса фундаментального объекта, полученного в Разделе V.3.1 Главы 6.2 (формула (83)):

$$\frac{\partial P_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial x^I} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot P_I - \right. \\ \left. - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, P]S - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, M]S - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, W]S \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^L_{KMI}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, P, M, W)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, P, M, W)}{\partial S^L_{KM}} \cdot p^L_{KMI} - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [P_I, P_S] S^L_{KM} - \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [P_I, M^R_S] S^L_{KM} - \frac{Da^S_{RT}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [P_I, W^{TR}_S] S^L_{KM} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам фундаментального объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта в соответствии с соотношениями (38). Получим уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса фундаментального объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта:

$$\begin{aligned} C^L_{KMN} \cdot \frac{\partial p^N_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot p^N_I - \right. \\ & - C^L_{KMN} \cdot \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [P_I, P_S] S^N - C^L_{KMN} \cdot \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [P_I, M^R_S] S^N - \\ & \left. - C^L_{KMN} \cdot \frac{Da^S_{RT}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [P_I, W^{TR}_S] S^N \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (4)

$$\begin{aligned} [P_I(P_S)] &= P_H \cdot T^H_{[IS]} + M^G_H \cdot R^H_{G[IS]} + W^{HP}_G \cdot R^G_{PH[IS]}, \\ [P_I(M^R_S)] &= P_S \cdot \delta^R_I + M^G_P \cdot G^P_{GS}{}^R{}_I + W^{JP}_G \cdot G^G_{PJS}{}^R{}_I, \\ [P_I(W^{TR}_S)] &= M^R_S \cdot \delta^T_I - W^{GR}_S \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TR}_G \cdot \Gamma^G_{SI}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^H_{[IS]} &= {}_l C^H_{[IS]} - \Gamma^H_{[IS]}, \\ G^P_{GS}{}^R{}_I &= \Gamma^P_{GS} \cdot \delta^R_I - \Gamma^R_{GI} \cdot \delta^P_S + \Gamma^P_{SI} \cdot \delta^R_G, \\ R^H_{G[IS]} &= \Gamma^H_{G[IS]} + \Gamma^H_{P[S} \cdot \Gamma^P_{|G|I]} + \Gamma^H_{GP} \cdot T^P_{[IS]} + {}_l C^H_{G[IS]}, \\ G^G_{PJS}{}^R{}_I &= B^G_{PJS} \cdot \delta^R_I - B^R_{PJI} \cdot \delta^G_S + B^G_{PSI} \cdot \delta^R_J, \\ R^G_{PH[IS]} &= B^G_{PH[IS]} + B^G_{PT[S} \cdot \Gamma^T_{|H|I]} + \Gamma^G_{T[S} \cdot B^T_{|PH|I]} + B^G_{PHT} \cdot T^T_{[IS]} + {}_l C^G_{PH[IS]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^L_{KMN} \cdot \frac{\partial p^N_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot p^N_I - \right. \\ & - C^L_{KMN} \cdot \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (P_H(S^N) \cdot T^H_{[IS]} + M^G_H(S^N) \cdot R^H_{G[IS]} + W^{HP}_G(S^N) \cdot R^G_{PH[IS]}) - \\ & - C^L_{KMN} \cdot \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (P_S(S^N) \cdot \delta^R_I + M^G_P(S^N) \cdot G^P_{GS}{}^R{}_I + W^{JP}_G(S^N) \cdot G^G_{PJS}{}^R{}_I) - \\ & \left. - C^L_{KMN} \cdot \frac{Da^S_{RT}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (M^R_S(S^N) \cdot \delta^T_I - W^{GR}_S(S^N) \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TR}_G(S^N) \cdot \Gamma^G_{SI}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса фундаментального

объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
C^L_{KMN} \cdot \frac{\partial p^N_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot p^N_I + \right. \\
& + C^L_{KMN} \cdot \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (p^N_H \cdot T^H_{[IS]} + m^{NG}_H \cdot R^H_{G[IS]} + w^{NHP}_G \cdot R^G_{PH[IS]}) + \\
& + C^L_{KMN} \cdot \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (p^N_S \cdot \delta^R_I + m^{NG}_P \cdot G^P_{GS}{}^R{}_I + w^{NJP}_G \cdot G^G_{PJS}{}^R{}_I) + \\
& \left. + C^L_{KMN} \cdot \frac{Da^S_{RT}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (m^{NR}_S \cdot \delta^T_I - w^{NGR}_S \cdot \Gamma^T_{GI} - w^{NTR}_G \cdot \Gamma^G_{SI}) \right). \quad (41)
\end{aligned}$$

### 3.2. Уравнение динамики второго линейного преобразования для момента

Исходим из уравнения динамики второго линейного преобразования для момента фундаментального объекта, полученного в Разделе V.3.2 Главы 6.2 (формула (84)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M^P_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, P, M, W)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, P, M, W)}{\partial S} M^P_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P_I, P]S - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P_I, M]S - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P_I, W]S \right).
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M^L_{KM}{}^P_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, P, M, W)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, P, M, W)}{\partial S^L_{KM}} M^L_{KM}{}^P_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, P_S]S^L_{KM} - \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, M^R_S]S^L_{KM} - \frac{Da^S_{RT}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, W^{TR}_S]S^L_{KM} \right). \quad (42)
\end{aligned}$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам фундаментального объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта в соответствии с соотношениями (38). Получим уравнение динамики второго линейного преобразования для момента фундаментального объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта:

$$\begin{aligned}
C^L_{KMN} \cdot \frac{\partial m^{NP}_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} m^{NP}_I - \right. \\
& - C^L_{KMN} \cdot \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, P_S]S^N - C^L_{KMN} \cdot \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, M^R_S]S^N - \\
& \left. - C^L_{KMN} \cdot \frac{Da^S_{RT}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, W^{TR}_S]S^N \right). \quad (43)
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (5):

$$\begin{aligned}
[M^P_I(P_S)] &= -P_I \cdot \delta^P_S - M^G_H \cdot G^H_{GI}{}^P{}_S - W^{HJ}_G \cdot G^G_{JHI}{}^P{}_S, \\
[M^P_I(M^R_S)] &= M^P_S \cdot \delta^R_I - M^R_I \cdot \delta^P_S, \\
[M^P_I(W^{TR}_S)] &= -W^{TR}_I \cdot \delta^P_S + W^{PR}_S \cdot \delta^T_I,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G^H_{GI}{}^P{}_S &= \Gamma^H_{GI} \cdot \delta^P_S - \Gamma^P_{GS} \cdot \delta^H_I + \Gamma^H_{IS} \cdot \delta^P_G, \\
G^G_{JHI}{}^P{}_S &= B^G_{JHI} \cdot \delta^P_S - B^P_{JHS} \cdot \delta^G_I + B^G_{JIS} \cdot \delta^P_H.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
& C^L_{KMN} \cdot \frac{\partial m^{NP}_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} m^{NP}_I - \right. \\
& - C^L_{KMN} \cdot \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (-P_I(S^N) \cdot \delta^P_S - M^G_H(S^N) \cdot G^H_{GI}{}^P{}_S - W^{HJ}_G(S^N) \cdot G^G_{JHI}{}^P{}_S) - \\
& - C^L_{KMN} \cdot \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (M^P_S(S^N) \cdot \delta^R_I - M^R_I(S^N) \cdot \delta^P_S) - \\
& \left. - C^L_{KMN} \cdot \frac{Da^S_{RT}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (-W^{TR}_I(S^N) \cdot \delta^P_S + W^{PR}_S(S^N) \cdot \delta^T_I) \right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики второго линейного преобразования для момента фундаментального объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
& C^L_{KMN} \cdot \frac{\partial m^{NP}_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} m^{NP}_I + \right. \\
& + C^L_{KMN} \cdot \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (-p^N_I \cdot \delta^P_S - m^{NG}_H \cdot G^H_{GI}{}^P{}_S - w^{NHJ}_G \cdot G^G_{JHI}{}^P{}_S) + \\
& + C^L_{KMN} \cdot \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (m^{NP}_S \cdot \delta^R_I - m^{NR}_I \cdot \delta^P_S) + \\
& \left. + C^L_{KMN} \cdot \frac{Da^S_{RT}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (-w^{NR}_I \cdot \delta^P_S + w^{NPR}_S \cdot \delta^T_I) \right). \quad (44)
\end{aligned}$$

### 3.3. Уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента

Исходим из уравнения динамики второго линейного преобразования для второго момента фундаментального объекта, полученного в Разделе V.3.3 Главы 6.2 (формула (85)):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w^{QP}_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, P, M, W)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, P, M, W)}{\partial S} \cdot w^{QP}_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP}_I, P]S - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP}_I, M]S - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP}_I, W]S \right).
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w^{L_{KM}QP}_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, P, M, W)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, P, M, W)}{\partial S^L_{KM}} \cdot w^{L_{KM}QP}_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [W^{QP}_I, P_S]S^L_{KM} - \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [W^{QP}_I, M^R_S]S^L_{KM} - \frac{Da^S_{RT}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [W^{QP}_I, W^{TR}_S]S^L_{KM} \right). \quad (45)
\end{aligned}$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам фундаментального объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам фундаментального объекта в соответствии с соотношениями (38). Получим уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента фундаментального объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам фунда-

ментального объекта:

$$\begin{aligned}
C^L_{KMN} \cdot \frac{\partial w^{NQP_I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot w^{NQP_I} - \right. \\
&- C^L_{KMN} \cdot \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [W^{QP_I}, P_S] S^N - C^L_{KMN} \cdot \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [W^{QP_I}, M^R_S] S^N - \\
&\left. - C^L_{KMN} \cdot \frac{Da^S_{RT}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [W^{QP_I}, W^{TR_S}] S^N \right). \tag{46}
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (6)

$$\begin{aligned}
[W^{QP_I}(P_S)] &= -M^P_I \cdot \delta^Q_S + W^{TP_I} \cdot \Gamma^Q_{TS} + W^{QP_T} \cdot \Gamma^T_{IS}, \\
[W^{QP_I}(M^R_S)] &= W^{QP_S} \cdot \delta^R_I - W^{RP_I} \cdot \delta^Q_S, \\
[W^{QP_I}(W^{RT_S})] &= 0.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
C^L_{KMN} \cdot \frac{\partial w^{NQP_I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot w^{NQP_I} - \right. \\
&- C^L_{KMN} \cdot \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (-M^P_I(S^N) \cdot \delta^Q_S + W^{TP_I}(S^N) \cdot \Gamma^Q_{TS} + W^{QP_T}(S^N) \cdot \Gamma^T_{IS}) - \\
&\left. - C^L_{KMN} \cdot \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (W^{QP_S}(S^N) \cdot \delta^R_I - W^{RP_I}(S^N) \cdot \delta^Q_S) \right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента фундаментального объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
C^L_{KMN} \cdot \frac{\partial w^{NQP_I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S^N} \cdot w^{NQP_I} + \right. \\
&+ C^L_{KMN} \cdot \frac{Dx^S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (-m^{NP_I} \cdot \delta^Q_S + w^{NTP_I} \cdot \Gamma^Q_{TS} + w^{NQP_T} \cdot \Gamma^T_{IS}) + \\
&\left. + C^L_{KMN} \cdot \frac{Dl^S_R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (w^{NQP_S} \cdot \delta^R_I - w^{NRP_I} \cdot \delta^Q_S) \right). \tag{47}
\end{aligned}$$

## V. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Уравнения динамики промежуточного объекта в первом приближении сводятся к уравнению динамики сдвига для импульса этого объекта.

### 1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Исходим из уравнения динамики сдвига для импульса промежуточного объекта в первом приближении, полученного в Разделе VI.1 Главы 6.2:

$$\frac{\partial p^K_I(x_0)}{\partial x_0^K} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, S_1, p_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, S_1, p_1)}{\partial S_1^N} \cdot p^N_I - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^K} \cdot [P_I, P_R] S_1^K \right). \tag{48}$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта в соответствии с соотношениями:

$$S_1^K = C^{KP}_N \cdot S^N_P, \quad p^K_I = C^{KP}_N \cdot p^N_{PI}.$$



Получим уравнение динамики сдвига для импульса промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта:

$$C^{KP}_N \cdot \frac{\partial p^N_{PI}(x_0)}{\partial x_0^K} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, S_1, p_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, S_1, p_1)}{\partial S^N_P} \cdot p^N_{PI} - C^{KP}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^K} \cdot [P_I, P_R] S^N_P \right). \quad (49)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (1)

$$[P_I(P_R)] = P_E \cdot T^E_{[IR]}.$$

В результате получим уравнение динамики сдвига для импульса промежуточного объекта в первом приближении

$$C^{KP}_N \cdot \frac{\partial p^N_{PI}(x_0)}{\partial x_0^K} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, S_1, p_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, S_1, p_1)}{\partial S^N_P} \cdot p^N_{PI} + C^{KP}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^K} \cdot p^N_{PE} \cdot T^E_{[IR]} \right). \quad (50)$$

## VI. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

### 1. Уравнения динамики сдвига

Исходными уравнениями для дальнейших преобразований являются уравнения динамики сдвига промежуточного объекта во втором приближении, полученные в Разделе VII.1 Главы 6.2. Необходимо отметить, что эти уравнения следует считать *вспомогательными*, так как они сформулированы по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта

$$S_1, \quad p_1, \quad m_1, \quad \text{или в индексной форме} \quad S^L_1, \quad p^L_{1I}, \quad m^L_{1P}.$$

Отсюда следует, что вывод *окончательных* уравнений динамики сдвига для динамических параметров промежуточного объекта во втором приближении должен включать в себя два этапа. На первом этапе необходимо перейти от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта

$$S_1, \quad p_1, \quad m_1, \quad \text{или в индексной форме} \quad S^N_K, \quad p^N_{KI}, \quad m^N_{K^P}.$$

Связь между непосредственными и вспомогательными динамическими параметрами дается соотношениями (48), (50), (51) Главы 6.1:

$$S^L_1 = C^{LK}_N \cdot S^N_K, \quad p^L_{1I} = C^{LK}_N \cdot p^N_{KI}, \quad m^L_{1P} = C^{LK}_N \cdot m^N_{K^P}. \quad (51)$$

На втором этапе необходимо учесть перестановочные соотношения, полученные в Главе 6.3.

#### 1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Исходим из уравнения динамики сдвига для импульса промежуточного объекта во втором приближении, полученного в Разделе VII.1.1 Главы 6.2 (формула (89)). Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial p_{1I}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S_1} \cdot p_{1I} - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P] S_1 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, M] S_1 \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме:

$$\frac{\partial p^L_{1I}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^L_1} \cdot p^L_{1I} - \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, P_Q] S^L_1 - \frac{Dl^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, M^P_Q] S^L_1 \right). \quad (52)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (51). Получим уравнение динамики сдвига для импульса промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта:

$$C^{LK}_N \cdot \frac{\partial p^{NK}_I(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^{NK}} \cdot p^{NK}_I - \right. \\ \left. - C^{LK}_N \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, P_Q] S^{NK} - C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^Q_P(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, M^P_Q] S^{NK} \right). \quad (53)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (2)

$$[P_I(P_Q)] = P_P \cdot T^P_{[IQ]} + M^P_S \cdot R^S_{P[IQ]}, \\ [P_I(M^P_Q)] = P_Q \cdot \delta^P_I + M^R_S \cdot G^S_{RQ}{}^P{}_I,$$

где

$$T^P_{[IQ]} = {}_i C^P_{[IQ]} - \Gamma^P_{[IQ]}, \\ G^S_{RQ}{}^P{}_I = \Gamma^S_{RQ} \cdot \delta^P_I - \Gamma^P_{RI} \cdot \delta^S_Q + \Gamma^S_{QI} \cdot \delta^P_R, \\ R^S_{P[IQ]} = \Gamma^S_{P[IQ]} + \Gamma^S_{T[Q]} \cdot \Gamma^T_{|P|I} + \Gamma^S_{PT} \cdot T^T_{[IQ]} + {}_i C^S_{P[IQ]}.$$

В результате получим

$$C^{LK}_N \cdot \frac{\partial p^{NK}_I(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^{NK}} \cdot p^{NK}_I - \right. \\ \left. - C^{LK}_N \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (P_P(S^{NK}) \cdot T^P_{[IQ]} + M^P_S(S^{NK}) \cdot R^S_{P[IQ]}) - \right. \\ \left. - C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^Q_P(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (P_Q(S^{NK}) \cdot \delta^P_I + M^R_S(S^{NK}) \cdot G^S_{RQ}{}^P{}_I) \right).$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для импульса промежуточного объекта во втором приближении в окончательном виде:

$$C^{LK}_N \cdot \frac{\partial p^{NK}_I(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^{NK}} \cdot p^{NK}_I + \right. \\ \left. + C^{LK}_N \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (p^{NK}_P \cdot T^P_{[IQ]} + m^{N_P} S \cdot R^S_{P[IQ]}) + \right. \\ \left. + C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^Q_P(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (p^{NK}_Q \cdot \delta^P_I + m^{N_R} S \cdot G^S_{RQ}{}^P{}_I) \right). \quad (54)$$

### 1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

Исходим из уравнения динамики сдвига для момента промежуточного объекта во втором приближении, полученного в Разделе VII.1.2 Главы 6.2 (формула (90)). Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial m^P_I(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S_1} \cdot m^P_I - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, P] S_1 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, M] S_1 \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1^{LP_I}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S_1^L} \cdot m_1^{LP_I} - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, P_Q] S_1^L - \frac{Dl^Q_R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, M^R_Q] S_1^L \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (51). Получим уравнение динамики сдвига для момента промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта:

$$\begin{aligned} C^{LK_N} \cdot \frac{\partial m^{N_{K^P}I}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^{N_K}} \cdot m^{N_{K^P}I} - \right. \\ & \left. - C^{LK_N} \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, P_Q] S^{N_K} - C^{LK_N} \cdot \frac{Dl^Q_R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, M^R_Q] S^{N_K} \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (3)

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_Q)] &= -P_I \cdot \delta^P_Q - M^T_S \cdot G^S_{TI^P} Q, \\ [M^P_I(M^R_Q)] &= M^P_Q \cdot \delta^R_I - M^R_I \cdot \delta^P_Q, \end{aligned}$$

где

$$G^S_{TI^P} Q = \Gamma^S_{TI} \cdot \delta^P_Q - \Gamma^P_{TQ} \cdot \delta^S_I + \Gamma^S_{IQ} \cdot \delta^P_T.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^{LK_N} \cdot \frac{\partial m^{N_{K^P}I}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^{N_K}} \cdot m^{N_{K^P}I} - \right. \\ & - C^{LK_N} \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-P_I(S^{N_K}) \cdot \delta^P_Q - M^T_S(S^{N_K}) \cdot G^S_{TI^P} Q) - \\ & \left. - C^{LK_N} \cdot \frac{Dl^Q_R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (M^P_Q S^{N_K} \cdot \delta^R_I - M^R_I S^{N_K} \cdot \delta^P_Q) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для момента промежуточного объекта во втором приближении в окончательном виде:

$$\begin{aligned} C^{LK_N} \cdot \frac{\partial m^{N_{K^P}I}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^{N_K}} \cdot m^{N_{K^P}I} + \right. \\ & + C^{LK_N} \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-p^N_{KI} \cdot \delta^P_Q - m^{N_{K^T}S} \cdot G^S_{TI^P} Q) + \\ & \left. + C^{LK_N} \cdot \frac{Dl^Q_R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (m^{N_{K^P}Q} \cdot \delta^R_I - m^{N_{K^R}I} \cdot \delta^P_Q) \right). \end{aligned} \quad (57)$$

## 2. Уравнения динамики линейного преобразования

Уравнения динамики линейного преобразования промежуточного объекта уже сформулированы по отношению к непосредственным динамическим параметрам этого объекта так как в соответствии с соотношениями (53), (55), (56) Главы 6.1 имеем:

$$S^L_{1K} \equiv S^L_K, \quad p^L_{1KI} \equiv p^L_{KI}, \quad m^L_{1K^P}I \equiv m^L_{K^P}I. \quad (58)$$

Поэтому дальнейшее преобразование указанных уравнений сводится к учету перестановочных соотношений.

## 2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

Исходным для дальнейших преобразований является уравнение динамики линейного преобразования для импульса промежуточного объекта во втором приближении, полученное в Разделе VII.2.1 Главы 6.2 (формула (93)):

$$\frac{\partial p_{1I}(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dx^M} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S_1} \cdot p_{1I} - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, P]S_1 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, M]S_1 \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме и учтем соотношения (58)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{KI}^L(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^L_K} \cdot p_{KI}^L - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^Q(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, P_Q]S^L_K - \frac{Dl^Q_P(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, M^P_Q]S^L_K \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (2)

$$\begin{aligned} [P_I(P_Q)] &= P_P \cdot T^P_{[IQ]} + M^P_S \cdot R^S_{P[IQ]}, \\ [P_I(M^P_Q)] &= P_Q \cdot \delta^P_I + M^R_S \cdot G^S_{RQ}{}^P_I, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^P_{[IQ]} &= {}_iC^P_{[IQ]} - \Gamma^P_{[IQ]}, \\ G^S_{RQ}{}^P_I &= \Gamma^S_{RQ} \cdot \delta^P_I - \Gamma^P_{RI} \cdot \delta^S_Q + \Gamma^S_{QI} \cdot \delta^P_R, \\ R^S_{P[IQ]} &= \Gamma^S_{P[IQ]} + \Gamma^S_{T[Q]} \cdot \Gamma^T_{|P|I} + \Gamma^S_{PT} \cdot T^T_{[IQ]} + {}_iC^S_{P[IQ]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{KI}^L(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^L_K} \cdot p_{KI}^L - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^Q(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot (P_P(S^L_K) \cdot T^P_{[IQ]} + M^P_S(S^L_K) \cdot R^S_{P[IQ]}) - \frac{Dl^Q_P(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot (P_Q(S^L_K) \cdot \delta^P_I + M^R_S(S^L_K) \cdot G^S_{RQ}{}^P_I) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для импульса промежуточного объекта во втором приближении в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{KI}^L(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^L_K} \cdot p_{KI}^L + \right. \\ & \left. + \frac{Dx^Q(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot (p_{KP}^L \cdot T^P_{[IQ]} + m_{K^P_S}^L \cdot R^S_{P[IQ]}) + \frac{Dl^Q_P(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot (p_{KQ}^L \cdot \delta^P_I + m_{K^R_S}^L \cdot G^S_{RQ}{}^P_I) \right). \end{aligned} \quad (60)$$

## 2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента

Исходным для дальнейших преобразований является уравнение динамики линейного преобразования для момента промежуточного объекта во втором приближении, полученное в Разделе VII.2.2 Главы 6.2 (формула (94)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{1I}^P(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dl^P} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S_1} \cdot m_{1I}^P - \right. \\ & \left. - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P]S_1 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M]S_1 \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме и учтем соотношения (58)

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{K^P I}^L(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^L_K} \cdot m_{K^P I}^L - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^Q(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [M^P_I, P_Q] S^L_K - \frac{Dl^Q_P(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [M^P_I, M^P_Q] S^L_K \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (3):

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_Q)] &= -P_I \cdot \delta^P_Q - M^T_S \cdot G^S_{TI^P Q}, \\ [M^P_I(M^R_Q)] &= M^P_Q \cdot \delta^R_I - M^R_I \cdot \delta^P_Q, \end{aligned}$$

где

$$G^S_{TI^P Q} = \Gamma^S_{TI} \cdot \delta^P_Q - \Gamma^P_{TQ} \cdot \delta^S_I + \Gamma^S_{IQ} \cdot \delta^P_T.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{K^P I}^L(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^L_K} \cdot m_{K^P I}^L - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^Q(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot (-P_I(S^L_K) \cdot \delta^P_Q - M^T_S(S^L_K) \cdot G^S_{TI^P Q}) - \frac{Dl^Q_P(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot (M^P_Q(S^L_K) \cdot \delta^R_I - M^R_I(S^L_K) \cdot \delta^P_Q) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для момента промежуточного объекта во втором приближении в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{K^P I}^L(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, S_1, p_1, m_1)}{\partial S^L_K} \cdot m_{K^P I}^L + \right. \\ & \left. + \frac{Dx^Q(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot (-p^L_{KI} \cdot \delta^P_Q - m^L_{K^T S} \cdot G^S_{TI^P Q}) + \frac{Dl^Q_P(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot (m^L_{K^P Q} \cdot \delta^R_I - m^L_{K^R I}(S^L_K) \cdot \delta^P_Q) \right). \end{aligned} \quad (62)$$

## VII. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

### 1. Уравнения динамики сдвига

Исходными уравнениями для дальнейших преобразований являются уравнения динамики сдвига промежуточного объекта, полученные в Разделе VIII.1 Главы 6.2. Необходимо отметить, что эти уравнения следует считать *вспомогательными*, так как они сформулированы по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта

$$S_1, \quad p_1, \quad m_1, \quad w_1, \quad \text{или в индексной форме} \quad S_1^L, \quad p_{1I}^L, \quad m_1^{LP}, \quad w_1^{LQP}.$$

Отсюда следует, что вывод *окончательных* уравнений динамики сдвига для динамических параметров промежуточного объекта должен включать в себя два этапа. На первом этапе необходимо перейти от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта

$$S_1, \quad p_1, \quad m_1, \quad w_1, \quad \text{или в индексной форме} \quad S^N_K, \quad p^N_{KI}, \quad m^N_{K^P I}, \quad w^N_{K^Q P}.$$

Связь между непосредственными и вспомогательными динамическими параметрами дается соотношениями (48), (50), (51), (52) Главы 6.1:

$$S_1^L = C^{LK}_N \cdot S^N_K, \quad p_{1I}^L = C^{LK}_N \cdot p^N_{KI}, \quad m_1^{LP} = C^{LK}_N \cdot m^N_{K^P I}, \quad w_1^{LQP} = C^{LK}_N \cdot w^N_{K^Q P}. \quad (63)$$

На втором этапе необходимо учесть перестановочные соотношения, полученные в Главе 6.3.

## 1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Исходим из уравнения динамики сдвига для импульса промежуточного объекта, полученного в Разделе VIII.1.1 Главы 6.2 (формула (97)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}_{1I}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{w}_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{w}_1)}{\partial \mathbf{S}_1} \cdot \mathbf{p}_{1I} - \right. \\ & \left. - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P] \mathbf{S}_1 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, M] \mathbf{S}_1 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, W] \mathbf{S}_1 \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}_{1I}^L(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{w}_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{w}_1)}{\partial \mathbf{S}_1^L} \cdot \mathbf{p}_{1I}^L - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P_Q] \mathbf{S}_1^L - \frac{Dl^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, M^P_Q] \mathbf{S}_1^L - \frac{Da^Q_{RP}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, W^{PR}_Q] \mathbf{S}_1^L \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (63). Получим уравнение динамики сдвига для импульса промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта:

$$\begin{aligned} C^{LK}_N \cdot \frac{\partial p^{NKI}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{w}_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{w}_1)}{\partial S^{NK}} \cdot p^{NKI} - \right. \\ & \left. - C^{LK}_N \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P_Q] S^{NK} - C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^Q_P(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, M^P_Q] S^{NK} - C^{LK}_N \cdot \frac{Da^Q_{RP}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, W^{PR}_Q] S^{NK} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (4)

$$\begin{aligned} [P_I(P_Q)] &= P_P \cdot T^P_{[IQ]} + M^P_S \cdot R^S_{P[IQ]} + W^{TP}_S \cdot R^S_{PT[IQ]}, \\ [P_I(M^P_Q)] &= P_Q \cdot \delta^P_I + M^R_S \cdot G^S_{RQ}{}^P_I + W^{TR}_S \cdot G^S_{RTQ}{}^P_I, \\ [P_I(W^{PR}_Q)] &= M^R_Q \cdot \delta^P_I - W^{TR}_Q \cdot \Gamma^P_{TI} - W^{PR}_T \cdot \Gamma^T_{QI}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^P_{[IQ]} &= {}_i C^P_{[IQ]} - \Gamma^P_{[IQ]}, \\ G^S_{RQ}{}^P_I &= \Gamma^S_{RQ} \cdot \delta^P_I - \Gamma^P_{RI} \cdot \delta^S_Q + \Gamma^S_{QI} \cdot \delta^P_R, \\ R^S_{P[IQ]} &= \Gamma^S_{P[IQ]} + \Gamma^S_{T[Q]} \cdot \Gamma^T_{|P|I} + \Gamma^S_{PT} \cdot T^T_{[IQ]} + {}_i C^S_{P[IQ]}, \\ G^S_{RTQ}{}^P_I &= B^S_{RTQ} \cdot \delta^P_I - B^P_{RTI} \cdot \delta^S_Q + B^S_{RQI} \cdot \delta^P_T, \\ R^S_{PT[IQ]} &= B^S_{PT[IQ]} + B^S_{PB[Q]} \cdot \Gamma^B_{|T|I} + \Gamma^S_{B[Q]} \cdot B^B_{|PT|I} + B^S_{PTB} \cdot T^B_{[IQ]} + {}_i C^S_{PT[IQ]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^{LK}_N \cdot \frac{\partial p^{NKI}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{w}_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, \mathbf{S}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{w}_1)}{\partial S^{NK}} \cdot p^{NKI} - \right. \\ & - C^{LK}_N \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0} \cdot (P_P(S^{NK}) \cdot T^P_{[IQ]} + M^P_S(S^{NK}) \cdot R^S_{P[IQ]} + W^{TP}_S(S^{NK}) \cdot R^S_{PT[IQ]}) - \\ & - C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^Q_P(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (P_Q(S^{NK}) \cdot \delta^P_I + M^R_S(S^{NK}) \cdot G^S_{RQ}{}^P_I + W^{TR}_S(S^{NK}) \cdot G^S_{RTQ}{}^P_I) - \\ & \left. - C^{LK}_N \cdot \frac{Da^Q_{RP}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (M^R_Q(S^{NK}) \cdot \delta^P_I - W^{TR}_Q(S^{NK}) \cdot \Gamma^P_{TI} - W^{PR}_T(S^{NK}) \cdot \Gamma^T_{QI}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для импульса промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
& C^{LK}_N \cdot \frac{\partial p^{NK_I}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^{N_K}} \cdot p^{N_{KI}} + \right. \\
& + C^{LK}_N \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0} \cdot (p^{N_{KP}} \cdot T^P_{[IQ]} + m^{N_{KS}} \cdot R^S_{P[IQ]} + w^{N_{KT}} \cdot R^S_{PT[IQ]}) + \\
& + C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^Q_P(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (p^{N_{KQ}} \cdot \delta^P_I + m^{N_{KS}} \cdot G^S_{RQ^P_I} + w^{N_{KT}} \cdot G^S_{RTQ^P_I}) + \\
& \left. + C^{LK}_N \cdot \frac{Da^Q_{RP}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (m^{N_{KR}} \cdot \delta^P_I - w^{N_{KT}} \cdot \Gamma^P_{TI} - w^{N_{KT}} \cdot \Gamma^T_{QI}) \right). \quad (66)
\end{aligned}$$

### 1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

Исходим из уравнения динамики сдвига для момента промежуточного объекта, полученного в Разделе VIII.1.2 Главы 6.2 (формула (98)):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial m^P_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S_1} \cdot m^P_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, P]S_1 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, M]S_1 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, W]S_1 \right).
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial m^{LP}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^L_1} \cdot m^{LP}_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, P_Q]S^L_1 - \frac{Dl^Q_R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, M^R_Q]S^L_1 - \frac{Da^Q_{RS}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, W^{SR}_Q]S^L_1 \right). \quad (67)
\end{aligned}$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (63). Получим уравнение динамики сдвига для момента промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта:

$$\begin{aligned}
& C^{LK}_N \cdot \frac{\partial m^{N_{KI}}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^{N_K}} \cdot m^{N_{KI}} - \right. \\
& \left. - C^{LK}_N \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, P_Q]S^{N_K} - C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^Q_R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, M^R_Q]S^{N_K} - C^{LK}_N \cdot \frac{Da^Q_{RS}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, W^{SR}_Q]S^{N_K} \right). \quad (68)
\end{aligned}$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (5)

$$\begin{aligned}
[M^P_I(P_Q)] &= -P_I \cdot \delta^P_Q - M^R_S \cdot G^S_{RI^P_Q} - W^{ST}_R \cdot G^R_{TSI^P_Q}, \\
[M^P_I(M^R_Q)] &= M^P_Q \cdot \delta^R_I - M^R_I \cdot \delta^P_Q, \\
[M^P_I(W^{SR}_Q)] &= -W^{SR}_I \cdot \delta^P_Q + W^{PR}_Q \cdot \delta^S_I,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G^S_{RI^P_Q} &= \Gamma^S_{RI} \cdot \delta^P_Q - \Gamma^P_{RQ} \cdot \delta^S_I + \Gamma^S_{IQ} \cdot \delta^P_R, \\
G^R_{TSI^P_Q} &= B^R_{TSI} \cdot \delta^P_Q - B^P_{TSQ} \cdot \delta^R_I + B^R_{TIQ} \cdot \delta^P_S.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
C^{LK}_N \cdot \frac{\partial m^{NKP}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_K} \cdot m^{NKP}_I - \right. \\
& - C^{LK}_N \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-P_I(S^N_K) \cdot \delta^P_Q - M^R_S(S^N_K) \cdot G^S_{RI}{}^P_Q - W^{ST}_R(S^N_K) \cdot G^R_{TSI}{}^P_Q) - \\
& - C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^Q_R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (M^P_Q(S^N_K) \cdot \delta^R_I - M^R_I(S^N_K) \cdot \delta^P_Q) - \\
& \left. - C^{LK}_N \cdot \frac{Da^Q_{RS}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-W^{SR}_I(S^N_K) \cdot \delta^P_Q + W^{PR}_Q(S^N_K) \cdot \delta^S_I) \right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для момента промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
C^{LK}_N \cdot \frac{\partial m^{NKP}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_K} \cdot m^{NKP}_I + \right. \\
& + C^{LK}_N \cdot \frac{Dx^Q(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-p^{NKI} \cdot \delta^P_Q - m^{NKR}_S \cdot G^S_{RI}{}^P_Q - w^{NKS}_{TR} \cdot G^R_{TSI}{}^P_Q) + \\
& + C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^Q_R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (m^{NKP}_Q \cdot \delta^R_I - m^{NKR}_I \cdot \delta^P_Q) + \\
& \left. + C^{LK}_N \cdot \frac{Da^Q_{RS}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-w^{NKS}_{RI} \cdot \delta^P_Q + w^{NKR}_{PQ} \cdot \delta^S_I) \right). \tag{69}
\end{aligned}$$

### 1.3. Уравнение динамики сдвига для второго момента

Исходим из уравнения динамики сдвига для второго момента промежуточного объекта, полученного в Разделе VIII.1.3 Главы 6.2 (формула (99)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{QP}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S_1} \cdot w^{QP}_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, P]S_1 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, M]S_1 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, W]S_1 \right).
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{LQP}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^L_1} \cdot w^{LQP}_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, P_R]S^L_1 - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, M^S_R]S^L_1 - \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, W^{TS}_R]S^L_1 \right). \tag{70}
\end{aligned}$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (63). Получим уравнение динамики сдвига для второго момента промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта:

$$\begin{aligned}
C^{LK}_N \cdot \frac{\partial w^{NKP}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_K} \cdot w^{NKP}_I - \right. \\
& - C^{LK}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, P_R]S^N_K - C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, M^S_R]S^N_K - \\
& \left. - C^{LK}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, W^{TS}_R]S^N_K \right). \tag{71}
\end{aligned}$$



Вспользуемся перестановочными соотношениями (6)

$$\begin{aligned} [W^{QP_I}(P_R)] &= -M^P_I \cdot \delta^Q_R + W^{TP_I} \cdot \Gamma^Q_{TR} + W^{QP_S} \cdot \Gamma^S_{IR}, \\ [W^{QP_I}(M^S_R)] &= W^{QP_R} \cdot \delta^S_I - W^{SP_I} \cdot \delta^Q_R, \\ [W^{QP_I}(W^{TS_R})] &= 0. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^{LK_N} \cdot \frac{\partial w^N_{K^{QP_I}}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_K} \cdot w^N_{K^{QP_I}} - \right. \\ &- C^{LK_N} \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-M^P_I(S^N_K) \cdot \delta^Q_R + W^{TP_I}(S^N_K) \cdot \Gamma^Q_{TR} + W^{QP_S}(S^N_K) \cdot \Gamma^S_{IR}) - \\ &\left. - C^{LK_N} \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (W^{QP_R}(S^N_K) \cdot \delta^S_I - W^{SP_I}(S^N_K) \cdot \delta^Q_R) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для второго момента промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned} C^{LK_N} \cdot \frac{\partial w^N_{K^{QP_I}}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_K} \cdot w^N_{K^{QP_I}} + \right. \\ &+ C^{LK_N} \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-m^N_{K^P_I} \cdot \delta^Q_R + w^N_{K^{TP_I}} \cdot \Gamma^Q_{TR} + w^N_{K^{QP_S}} \cdot \Gamma^S_{IR}) + \\ &\left. + C^{LK_N} \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (w^N_{K^{QP_R}} \cdot \delta^S_I - w^N_{K^{SP_I}} \cdot \delta^Q_R) \right). \end{aligned} \quad (72)$$

## 2. Уравнение динамики линейного преобразования

Уравнения динамики линейного преобразования промежуточного объекта уже сформулированы по отношению к непосредственным динамическим параметрам этого объекта так как в соответствии с соотношениями (53), (55), (56), (57) Главы 6.1 имеем:

$$S^L_{1K} \equiv S^L_K, \quad p^L_{1KI} \equiv p^L_{KI}, \quad m^L_{1K^P_I} \equiv m^L_{K^P_I}, \quad w^L_{1K^{QP_I}} \equiv w^L_{K^{QP_I}}. \quad (73)$$

Поэтому дальнейшее преобразование указанных уравнений сводится к учету перестановочных соотношений.

### 2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

Исходным для дальнейших преобразований является уравнение динамики линейного преобразования для импульса промежуточного объекта, полученное в Разделе VIII.2.1 Главы 6.2 (формула (102)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{1M}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dx^M} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S_1} \cdot p_{1M} - \right. \\ &\left. - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_M, P]S_1 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_M, M]S_1 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_M, W]S_1 \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме и учтем соотношения (73)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{K_{TM}}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial (l_0)^{K_T}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dx^M} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^{K_T}} \cdot p^{K_{TM}} - \right. \\ &\left. - \frac{Dx^Q}{\partial (l_0)^{K_T}} \cdot [P_M(P_Q)]S^{K_T} - \frac{Dl^Q_I}{\partial (l_0)^{K_T}} \cdot [P_M(M^I_Q)]S^{K_T} - \frac{Da^Q_{LI}}{\partial (l_0)^{K_T}} \cdot [P_M(W^{IL_Q})]S^{K_T} \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (4)

$$\begin{aligned} [P_M(P_Q)] &= P_I \cdot T^I_{[MQ]} + M^N_I \cdot R^I_{N[MQ]} + W^{IL}_N \cdot R^N_{LI[MQ]}, \\ [P_M(M^I_Q)] &= P_Q \cdot \delta^I_M + M^N_P \cdot G^P_{NQ}{}^I_M + W^{LP}_N \cdot G^N_{PLQ}{}^I_M, \\ [P_M(W^{IL}_Q)] &= M^L_Q \cdot \delta^I_M - W^{NL}_Q \cdot \Gamma^I_{NM} - W^{IL}_N \cdot \Gamma^N_{QM}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^I_{[MQ]} &= {}_iC^I_{[MQ]} - \Gamma^I_{[MQ]}, \\ G^P_{NQ}{}^I_M &= \Gamma^P_{NQ} \cdot \delta^I_M - \Gamma^I_{NM} \cdot \delta^P_Q + \Gamma^P_{QM} \cdot \delta^I_N, \\ R^I_{N[MQ]} &= \Gamma^I_{N[MQ]} + \Gamma^I_{P[Q]} \cdot \Gamma^P_{|N|M]} + \Gamma^I_{NP} \cdot T^P_{[MQ]} + {}_iC^I_{N[MQ]}, \\ G^N_{PLQ}{}^I_M &= B^N_{PLQ} \cdot \delta^I_M - B^I_{PLM} \cdot \delta^N_Q + B^N_{PQM} \cdot \delta^I_L, \\ R^N_{LI[MQ]} &= B^N_{LI[MQ]} + B^N_{LT[Q]} \cdot \Gamma^T_{|I|M]} + \Gamma^N_{T[Q]} \cdot B^T_{|LI|M]} + B^N_{LIT} \cdot T^T_{[MQ]} + {}_iC^N_{LI[MQ]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^K_{TM}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial (l_0)^{K_T}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dx^M} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^{K_T}} \cdot p^K_{TM} - \right. \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial (l_0)^{K_T}} \cdot (P_I(S^{K_T}) \cdot T^I_{[MQ]} + M^N_I(S^{K_T}) \cdot R^I_{N[MQ]} + W^{IL}_N(S^{K_T}) \cdot R^N_{LI[MQ]}) - \\ &- \frac{Dl^Q_I}{\partial (l_0)^{K_T}} \cdot (P_Q(S^{K_T}) \cdot \delta^I_M + M^N_P(S^{K_T}) \cdot G^P_{NQ}{}^I_M + W^{LP}_N(S^{K_T}) \cdot G^N_{PLQ}{}^I_M) - \\ &\left. - \frac{Da^Q_{LI}}{\partial (l_0)^{K_T}} \cdot (M^L_Q(S^{K_T}) \cdot \delta^I_M - W^{NL}_Q(S^{K_T}) \cdot \Gamma^I_{NM} - W^{IL}_N(S^{K_T}) \cdot \Gamma^N_{QM}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для импульса промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^K_{TM}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial (l_0)^{K_T}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dx^M} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^{K_T}} \cdot p^K_{TM} + \right. \\ &+ \frac{Dx^Q}{\partial (l_0)^{K_T}} \cdot (p^K_{TI} \cdot T^I_{[MQ]} + m^{K_T N}_I \cdot R^I_{N[MQ]} + w^{K_T IL}_N \cdot R^N_{LI[MQ]}) + \\ &+ \frac{Dl^Q_I}{\partial (l_0)^{K_T}} \cdot (p^K_{TQ} \cdot \delta^I_M + m^{K_T N}_P \cdot G^P_{NQ}{}^I_M + w^{K_T LP}_N \cdot G^N_{PLQ}{}^I_M) + \\ &\left. + \frac{Da^Q_{LI}}{\partial (l_0)^{K_T}} \cdot (m^{K_T L}_Q \cdot \delta^I_M - w^{K_T NL}_Q \cdot \Gamma^I_{NM} - w^{K_T IL}_N \cdot \Gamma^N_{QM}) \right). \end{aligned} \quad (75)$$

## 2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента

Исходным для дальнейших преобразований является уравнение динамики линейного преобразования для момента промежуточного объекта, полученное в Разделе VIII.2.2 Главы 6.2 (формула (103)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^L_{1M}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dl^M_L} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S_1} \cdot m^L_{1M} - \right. \\ &\left. - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^L_M, P]S - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^L_M, M]S - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^L_M, W]S \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме и учтем соотношения (73)

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^K_T{}^L_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial(l_0)^{K_T}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dl^M_L} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^K_T} \cdot m^K_T{}^L_M - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^Q}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot [M^L_M(P_Q)]S^K_T - \frac{Dl^Q_I}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot [M^L_M(M^I_Q)]S^K_T - \frac{Da^Q_{NI}}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot [M^L_M(W^{IN}_Q)]S^K_T \right). \end{aligned} \quad (76)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (5)

$$\begin{aligned} [M^L_M(P_Q)] &= -P_M \cdot \delta^L_Q - M^N_I \cdot G^I_{NM}{}^L_Q - W^{IP}_N \cdot G^N_{PIM}{}^L_Q, \\ [M^L_M(M^I_Q)] &= M^L_Q \cdot \delta^I_M - M^I_M \cdot \delta^L_Q, \\ [M^L_M(W^{IN}_Q)] &= -W^{IN}_M \cdot \delta^L_Q + W^{LN}_Q \cdot \delta^I_M, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G^I_{NM}{}^L_Q &= \Gamma^I_{NM} \cdot \delta^L_Q - \Gamma^L_{NQ} \cdot \delta^I_M + \Gamma^I_{MQ} \cdot \delta^L_N, \\ G^N_{PIM}{}^L_Q &= B^N_{PIM} \cdot \delta^L_Q - B^L_{PIQ} \cdot \delta^N_M + B^N_{PMQ} \cdot \delta^L_I. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^K_T{}^L_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial(l_0)^{K_T}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dl^M_L} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^K_T} \cdot m^K_T{}^L_M - \right. \\ & - \frac{Dx^Q}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot (-P_M(S^K_T) \cdot \delta^L_Q - M^N_I(S^K_T) \cdot G^I_{NM}{}^L_Q - W^{IP}_N(S^K_T) \cdot G^N_{PIM}{}^L_Q) - \\ & - \frac{Dl^Q_I}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot (M^L_Q(S^K_T) \cdot \delta^I_M - M^I_M(S^K_T) \cdot \delta^L_Q) - \\ & \left. - \frac{Da^Q_{NI}}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot (-W^{IN}_M(S^K_T) \cdot \delta^L_Q + W^{LN}_Q(S^K_T) \cdot \delta^I_M) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для момента промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^K_T{}^L_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial(l_0)^{K_T}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dl^M_L} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^K_T} \cdot m^K_T{}^L_M + \right. \\ & + \frac{Dx^Q}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot (-p^{K_{TM}} \cdot \delta^L_Q - m^{K_{TI}} \cdot G^I_{NM}{}^L_Q - w^{K_{TI}P}_N \cdot G^N_{PIM}{}^L_Q) + \\ & \left. + \frac{Dl^Q_I}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot (m^{K_{TL}}_Q \cdot \delta^I_M - m^{K_{TI}}_M \cdot \delta^L_Q) + \frac{Da^Q_{NI}}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot (-w^{K_{TI}N}_M \cdot \delta^L_Q + w^{K_{TLN}}_Q \cdot \delta^I_M) \right). \end{aligned} \quad (77)$$

### 2.3. Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента

Исходным для дальнейших преобразований является уравнение динамики линейного преобразования для второго момента промежуточного объекта, полученное в Разделе VIII.2.3 Главы 6.2 (формула (104)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{NL}_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Da^M_{LN}} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S_1} \cdot w^{NL}_M - \right. \\ & \left. - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{NL}_M, P]S_1 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{NL}_M, M]S_1 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{NL}_M, W]S_1 \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме и учтем соотношения (73)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{K_T N L}_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial(l_0)^{K_T}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{D a^M_{L N}} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^{K_T}} \cdot w^{K_T N L}_M - \right. \\ & \left. - \frac{D x^Q}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot [W^{N L}_M(P_Q)] S^{K_T} - \frac{D l^Q_I}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot [W^{N L}_M(M^I_Q)] S^{K_T} - \frac{D a^Q_{P I}}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot [W^{N L}_M(W^{I P}_Q)] S^{K_T} \right). \end{aligned} \quad (78)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (6)

$$\begin{aligned} [W^{N L}_M(P_Q)] &= -M^L_M \cdot \delta^N_Q + W^{I L}_M \cdot \Gamma^N_{I Q} + W^{N L}_P \cdot \Gamma^P_{M Q}, \\ [W^{N L}_M(M^I_Q)] &= W^{N L}_Q \cdot \delta^I_M - W^{I L}_M \cdot \delta^N_Q, \\ [W^{N L}_M(W^{I P}_Q)] &= 0. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{K_T N L}_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial(l_0)^{K_T}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{D a^M_{L N}} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^{K_T}} \cdot w^{K_T N L}_M - \right. \\ & - \frac{D x^Q}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot (-M^L_M(S^{K_T}) \cdot \delta^N_Q + W^{I L}_M(S^{K_T}) \cdot \Gamma^N_{I Q} + W^{N L}_P(S^{K_T}) \cdot \Gamma^P_{M Q}) - \\ & \left. - \frac{D l^Q_I}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot (W^{N L}_Q(S^{K_T}) \cdot \delta^I_M - W^{I L}_M(S^{K_T}) \cdot \delta^N_Q) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для второго момента промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{K_T N L}_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial(l_0)^{K_T}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{D a^M_{L N}} - \frac{\partial \mathcal{M}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^{K_T}} \cdot w^{K_T N L}_M + \right. \\ & \left. + \frac{D x^Q}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot (-m^{K_T L}_M \cdot \delta^N_Q + w^{K_T I L}_M \cdot \Gamma^N_{I Q} + w^{K_T N L}_P \cdot \Gamma^P_{M Q}) + \frac{D l^Q_I}{\partial(l_0)^{K_T}} \cdot (w^{K_T N L}_Q \cdot \delta^I_M - w^{K_T I L}_M \cdot \delta^N_Q) \right). \end{aligned} \quad (79)$$

### 3. Уравнения динамики второго линейного преобразования

Исходными уравнениями для дальнейших преобразований являются уравнения динамики второго линейного преобразования промежуточного объекта, полученные в Разделе VIII.3 Главы 6.2. Необходимо отметить, что эти уравнения следует считать *вспомогательными*, так как они сформулированы по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта

$$S_1, \quad p_1, \quad m_1, \quad w_1 \quad \text{или в индексной форме} \quad S^L_{1 K M}, \quad p^L_{1 K M I}, \quad m^L_{1 K M}{}^P{}_I, \quad w^L_{1 K M}{}^{Q P}{}_I.$$

Отсюда следует, что вывод *окончательных* уравнений динамики второго линейного преобразования для динамических параметров промежуточного объекта должен включать в себя два этапа. На первом этапе необходимо перейти от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта

$$S_1, \quad p_1, \quad m_1, \quad w_1 \quad \text{или в индексной форме} \quad S^K_M, \quad p^K_{M I}, \quad m^K_M{}^P{}_I, \quad w^K_M{}^{Q P}{}_I.$$

Связь между непосредственными и вспомогательными динамическими параметрами дается соотношениями (58), (60), (61) и (62) Главы 6.1:

$$\begin{aligned} S^L_{1 K M} &= C^L_{K N} \cdot S^N_M, \quad p^L_{1 K M I} = C^L_{K N} \cdot p^N_{M I}, \\ m^L_{1 K M}{}^P{}_I &= C^L_{K N} \cdot m^N_M{}^P{}_I, \quad w^L_{1 K M}{}^{Q P}{}_I = C^L_{K N} \cdot w^N_M{}^{Q P}{}_I. \end{aligned} \quad (80)$$

На втором этапе необходимо учесть перестановочные соотношения, полученные в Главе 6.3.

## 3.1. Уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса

Исходим из уравнения динамики второго линейного преобразования для импульса промежуточного объекта, полученного в Разделе VIII.3.1 Главы 6.2 (формула (107)):

$$\frac{\partial P_{1I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{\partial S_1} \cdot P_{1I} - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, P]S_1 - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, M]S_1 - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, W]S_1 \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\frac{\partial P_{1KMI}^L(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_{0KM}^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{\partial S_{1KM}^L} \cdot P_{1KMI}^L - \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [P_I, P_R]S_{1KM}^L - \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [P_I, M^S_R]S_{1KM}^L - \frac{Da^R_{ST}(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [P_I, W^{TS}_R]S_{1KM}^L \right). \quad (81)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (80). Получим уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта:

$$C^L_{KN} \cdot \frac{\partial p^N_{MI}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_{0KM}^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_M} \cdot p^N_{MI} - C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [P_I, P_R]S^N_M - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [P_I, M^S_R]S^N_M - C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [P_I, W^{TS}_R]S^N_M \right). \quad (82)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (4)

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_E \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E \cdot R^E_{FG[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^F_E \cdot G^E_{FR} S^S_I + W^{GF}_E \cdot G^E_{FGR} S^S_I, \\ [P_I(W^{TS}_R)] &= M^S_R \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E \cdot \Gamma^E_{RI}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^E_{[IR]} &= {}_i C^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}, \\ G^E_{FR} S^S_I &= \Gamma^E_{FR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{FI} \cdot \delta^E_R + \Gamma^E_{RI} \cdot \delta^S_F, \\ R^E_{F[IR]} &= \Gamma^E_{F[IR]} + \Gamma^E_{P[R]} \cdot \Gamma^P_{[F]I} + \Gamma^E_{FP} \cdot T^P_{[IR]} + {}_i C^E_{F[IR]}, \\ G^E_{FGR} S^S_I &= B^E_{FGR} \cdot \delta^S_I - B^S_{FGI} \cdot \delta^E_R + B^E_{FRI} \cdot \delta^S_G, \\ R^E_{FG[IR]} &= B^E_{FG[IR]} + B^E_{FH[R]} \cdot \Gamma^H_{[G]I} + \Gamma^E_{H[R]} \cdot B^H_{[FG]I} + B^E_{FGH} \cdot T^H_{[IR]} + {}_i C^E_{FG[IR]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
C^L_{KN} \cdot \frac{\partial p^N_{MI}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_M} \cdot p^N_{MI} - \right. \\
& - C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (P_E(S^N_M) \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E(S^N_M) \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E(S^N_M) \cdot R^E_{FG[IR]}) - \\
& - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (P_R(S^N_M) \cdot \delta^S_I + M^F_E(S^N_M) \cdot G^E_{FR}{}^S_I + W^{GF}_E(S^N_M) \cdot G^E_{FGR}{}^S_I) - \\
& \left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (M^S_R(S^N_M) \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R(S^N_M) \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E(S^N_M) \cdot \Gamma^E_{RI}) \right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
C^L_{KN} \cdot \frac{\partial p^N_{MI}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_M} \cdot p^N_{MI} + \right. \\
& + C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (p^N_{ME} \cdot T^E_{[IR]} + m^N_{M^F_E} \cdot R^E_{F[IR]} + W^N_{M^{GF}_E} \cdot R^E_{FG[IR]}) + \\
& + C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (p^N_{MR} \cdot \delta^S_I + m^N_{M^F_E} \cdot G^E_{FR}{}^S_I + w^N_{M^{GF}_E} \cdot G^E_{FGR}{}^S_I) + \\
& \left. + C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (m^N_{M^S_R} \cdot \delta^T_I - w^N_{M^{GS}_R} \cdot \Gamma^T_{GI} - w^N_{M^{TS}_E} \cdot \Gamma^E_{RI}) \right). \quad (83)
\end{aligned}$$

### 3.2. Уравнение динамики второго линейного преобразования для момента

Исходим из уравнения динамики второго линейного преобразования для момента промежуточного объекта, полученного в Разделе VIII.3.2 Главы 6.2 (формула (108)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M^P_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{\partial S_1} M^P_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P_I, P]S_1 - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P_I, M]S_1 - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [M^P_I, W]S_1 \right).
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M^L_{1KM}{}^P_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{\partial S^L_{1KM}} M^L_{1KM}{}^P_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, P_R]S^L_{1KM} - \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, M^S_R]S^L_{1KM} - \frac{Da^R_{ST}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, W^{TS}_R]S^L_{1KM} \right). \quad (84)
\end{aligned}$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (80). Получим уравнение динамики второго линейного преобразования для момента промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам промежуточного

объекта:

$$\begin{aligned}
C^L_{KN} \cdot \frac{\partial m^N_{M^P I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_M} \cdot m^N_{M^P I} - \right. \\
&- C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, P_R] S^N_M - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, M^S_R] S^N_M - \\
&\left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, W^{TS}_R] S^N_M \right). \tag{85}
\end{aligned}$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (5)

$$\begin{aligned}
[M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^G_H \cdot G^H_{GI} P_R - W^{GF}_H \cdot G^H_{FGI} P_R, \\
[M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \\
[M^P_I(W^{TS}_R)] &= -W^{TS}_I \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R \cdot \delta^T_I,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G^M_{GI} P_R &= \Gamma^M_{GI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{GR} \cdot \delta^M_I + \Gamma^M_{IR} \cdot \delta^P_G, \\
G^H_{FGI} P_R &= B^H_{FGI} \cdot \delta^P_R - B^P_{FGR} \cdot \delta^H_I + B^H_{FIR} \cdot \delta^P_G.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
C^L_{KN} \cdot \frac{\partial m^N_{M^P I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_M} \cdot m^N_{M^P I} - \right. \\
&- C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (-P_I(S^N_M) \cdot \delta^P_R - M^G_H(S^N_M) \cdot G^H_{GI} P_R - W^{GF}_H(S^N_M) \cdot G^H_{FGI} P_R) - \\
&- C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (M^P_R(S^N_M) \cdot \delta^S_I - M^S_I(S^N_M) \cdot \delta^P_R) - \\
&\left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (-W^{TS}_I(S^N_M) \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R(S^N_M) \cdot \delta^T_I) \right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики второго линейного преобразования для момента промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
C^L_{KN} \cdot \frac{\partial m^N_{M^P I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_M} \cdot m^N_{M^P I} + \right. \\
&+ C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (-p^N_{MI} \cdot \delta^P_R - m^N_{M^G H} \cdot G^H_{GI} P_R - w^N_{M^G H} \cdot G^H_{FGI} P_R) + \\
&+ C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (m^N_{M^P R} \cdot \delta^S_I - m^N_{M^S I} \cdot \delta^P_R) + \\
&\left. + C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(a_0)}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (-w^N_{M^TS I} \cdot \delta^P_R + w^N_{M^PS R} \cdot \delta^T_I) \right). \tag{86}
\end{aligned}$$

### 3.3. Уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента

Исходим из уравнения динамики второго линейного преобразования для второго момента промежуточного объекта, полученного в Разделе VIII.3.3 Главы 6.2 (формула (109)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{QP}_I(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{\partial S_1} \cdot w^{QP}_I - \right. \\
&\left. - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP}_I, P] S_1 - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP}_I, M] S_1 - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [W^{QP}_I, W] S_1 \right).
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{1KM}^{LQP}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_{0KM}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{Da_{PQ}^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, P_1, M_1, W_1)}{\partial S_{1KM}^L} \cdot w_{1KM}^{LQP} - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [W^{QP}_I, P_R] S_{1KM}^L - \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [W^{QP}_I, M^S_R] S_{1KM}^L - \frac{Da^R_{ST}(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [W^{QP}_I, W^{TS}_R] S_{1KM}^L \right). \end{aligned} \quad (87)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (80). Получим уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта:

$$\begin{aligned} C^L_{KN} \cdot \frac{\partial w^N_{M^{QP}_I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_{0KM}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Da_{PQ}^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_M} \cdot w^N_{M^{QP}_I} - \right. \\ & - C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [W^{QP}_I, P_R] S^N_M - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [W^{QP}_I, M^S_R] S^N_M - \\ & \left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Da^R_{ST}(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot [W^{QP}_I, W^{TS}_R] S^N_M \right). \end{aligned} \quad (88)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (6)

$$\begin{aligned} [W^{QP}_I(P_R)] &= -M^P_I \cdot \delta^Q_R + W^{IP}_I \cdot \Gamma^Q_{IR} + W^{QP}_H \cdot \Gamma^H_{IR}, \\ [W^{QP}_M(M^S_R)] &= W^{QP}_R \cdot \delta^S_M - W^{SP}_M \cdot \delta^Q_R, \\ [W^{QP}_I(W^{TS}_R)] &= 0. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^L_{KN} \cdot \frac{\partial w^N_{M^{QP}_I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_{0KM}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Da_{PQ}^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_M} \cdot w^N_{M^{QP}_I} - \right. \\ & - C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot (-M^P_I(S^N_M) \cdot \delta^Q_R + W^{IP}_I(S^N_M) \cdot \Gamma^Q_{IR} + W^{QP}_H(S^N_M) \cdot \Gamma^H_{IR}) - \\ & \left. - C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot (W^{QP}_R(S^N_M) \cdot \delta^S_M - W^{SP}_M(S^N_M) \cdot \delta^Q_R) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned} C^L_{KN} \cdot \frac{\partial w^N_{M^{QP}_I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_{0KM}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{Da_{PQ}^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_1(x, l, a, S_1, p_1, m_1, w_1)}{\partial S^N_M} \cdot w^N_{M^{QP}_I} + \right. \\ & + C^L_{KN} \cdot \frac{Dx^R(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot (-m^N_{M^P_I} \cdot \delta^Q_R + w^N_{M^{IP}_I} \cdot \Gamma^Q_{IR} + w^N_{M^{QP}_H} \cdot \Gamma^H_{IR}) + \\ & \left. + C^L_{KN} \cdot \frac{Dl^R_S(a_0)}{\partial a_{0KM}^L} \cdot (w^N_{M^{QP}_R} \cdot \delta^S_M - w^N_{M^{SP}_M} \cdot \delta^Q_R) \right). \end{aligned} \quad (89)$$

### VIII. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВТОРОГО ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Уравнения динамики второго промежуточного объекта в первом приближении сводятся к уравнению динамики сдвига для импульса этого объекта.



## 1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Исходим из уравнения динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта в первом приближении полученного в Разделе IX.1 Главы 6.2:

$$\frac{\partial p_{2I}^K(x_0)}{\partial x_0^K} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, S_2, p_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S_2, p_2)}{\partial S_2^K} \cdot p_{2I}^K - \frac{Dx^L(x_0)}{\partial x_0^K} \cdot [P_I, P_L] S_2^K \right). \quad (90)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам промежуточного объекта в соответствии с соотношениями:

$$S_2^K = C^{KQP}_N \cdot S^N_{PQ}, \quad p_{2I}^K = C^{KQP}_N \cdot p^N_{PQI}.$$

Получим уравнение динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам этого объекта:

$$C^{KQP}_N \cdot \frac{\partial p^N_{PQI}(x_0)}{\partial x_0^K} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, S_2, p_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S_2, p_2)}{\partial S^N_{PQ}} \cdot p^N_{PQI} - C^{KQP}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^K} \cdot [P_I, P_R] S^N_{PQ} \right). \quad (91)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (1)

$$[P_I(P_R)] = P_E \cdot T^E_{[IR]}.$$

В результате получим уравнение динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта в первом приближении

$$C^{KQP}_N \cdot \frac{\partial p^N_{PQI}(x_0)}{\partial x_0^K} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}(x, S_2, p_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}(x, S_2, p_2)}{\partial S^N_{PQ}} \cdot p^N_{PQI} + C^{KQP}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^K} \cdot p^N_{PQE} \cdot T^E_{[IR]} \right). \quad (92)$$

## IX. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВТОРОГО ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

## 1. Уравнения динамики сдвига

Исходными уравнениями для дальнейших преобразований являются уравнения динамики сдвига второго промежуточного объекта во втором приближении, полученные в Разделе X.1 Главы 6.2. Необходимо отметить, что эти уравнения следует считать *вспомогательными*, так как они сформулированы по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта

$$S_2, \quad p_2, \quad m_2, \quad \text{или в индексной форме } S_2^L, \quad p_{2I}^L, \quad m_{2I}^{LP}.$$

Отсюда следует, что вывод *окончательных* уравнений динамики сдвига для динамических параметров второго промежуточного объекта во втором приближении должен включать в себя два этапа. На первом этапе необходимо перейти от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта

$$S_2, \quad p_2, \quad m_2, \quad \text{или в индексной форме } S^{NA}_{AB}, \quad p^{NA}_{ABI}, \quad m^{NA}_{AB}{}^P{}_I.$$

Связь между непосредственными и вспомогательными динамическими параметрами дается соотношениями (95), (97), (98) Главы 6.1:

$$S_2^L = C^{LBA}_N \cdot S^{NA}_{AB}, \quad p_{2I}^L = C^{LBA}_N \cdot p^{NA}_{ABI}, \quad m_{2I}^{LP} = C^{LBA}_N \cdot m^{NA}_{AB}{}^P{}_I. \quad (93)$$

На втором этапе необходимо учесть перестановочные соотношения, полученные в Главе 6.3.

## 1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Исходим из уравнения динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта во втором приближении, полученного в Разделе X.1.1 Главы 6.2 (формула (112)). Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial p_{2I}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S_2} \cdot p_{2I} - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P]S_2 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, M]S_2 \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{2I}^L(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S_2^L} \cdot p_{2I}^L - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, P_R]S_2^L - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, M^S_R]S_2^L \right). \end{aligned} \quad (94)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (93). Получим уравнение динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта во втором приближении, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта:

$$\begin{aligned} C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial p^N_{ABI}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S^N_{AB}} \cdot p^N_{ABI} - \right. \\ & \left. - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, P_R]S^N_{AB} - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, M^S_R]S^N_{AB} \right). \end{aligned} \quad (95)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (2)

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_H \cdot T^H_{[IR]} + M^H_F \cdot R^F_{H[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^H_F \cdot G^F_{HR^S_I}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^H_{[IR]} &= {}_l C^H_{[IR]} - \Gamma^H_{[IR]}, \\ G^F_{HR^S_I} &= \Gamma^F_{HR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{HI} \cdot \delta^F_R + \Gamma^F_{RI} \cdot \delta^S_H, \\ R^F_{H[IR]} &= \Gamma^F_{H[IR]} + \Gamma^F_{G[R]} \cdot \Gamma^G_{[H|I]} + \Gamma^F_{HG} \cdot T^G_{[IR]} + {}_l C^F_{H[IR]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial p^N_{ABI}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S^N_{AB}} \cdot p^N_{ABI} - \right. \\ & - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (P_H(S^N_{AB}) \cdot T^H_{[IR]} + M^H_F(S^N_{AB}) \cdot R^F_{H[IR]}) - \\ & \left. - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (P_R(S^N_{AB}) \cdot \delta^S_I + M^H_F(S^N_{AB}) \cdot G^F_{HR^S_I}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта во втором приближении

$$\begin{aligned} C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial p^N_{ABI}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S^N_{AB}} \cdot p^N_{ABI} + \right. \\ & + C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (p^N_{ABH} \cdot T^H_{[IR]} + m^N_{AB} M^H_F \cdot R^F_{H[IR]}) + \\ & \left. + C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (p^N_{ABR} \cdot \delta^S_I + m^N_{AB} M^H_F \cdot G^F_{HR^S_I}) \right). \end{aligned} \quad (96)$$

## 1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

Исходим из уравнения динамики сдвига для момента второго промежуточного объекта во втором приближении, полученного в Разделе X.1.2 Главы 6.2 (формула (113)). Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial m_{2I}^P(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{\partial \mathbf{S}_2} \cdot \mathbf{m}_{2I}^P - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, P] \mathbf{S}_2 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, M] \mathbf{S}_2 \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{2I}^P(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{\partial \mathbf{S}_2^L} \cdot \mathbf{m}_{2I}^P - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, P_R] \mathbf{S}_2^L - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, M^S_R] \mathbf{S}_2^L \right). \end{aligned} \quad (97)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (93). Получим уравнение динамики сдвига для момента второго промежуточного объекта во втором приближении, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта:

$$\begin{aligned} C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial m^N_{AB^P I}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{\partial \mathbf{S}^N_{AB}} \cdot m^N_{AB^P I} - \right. \\ & \left. - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, P_R] \mathbf{S}^N_{AB} - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, M^S_R] \mathbf{S}^N_{AB} \right). \end{aligned} \quad (98)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (3)

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^T_S \cdot G^S_{TI^P R}, \\ [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \end{aligned}$$

где

$$G^S_{TI^P R} = \Gamma^S_{TI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{TR} \cdot \delta^S_I + \Gamma^S_{IR} \cdot \delta^P_T.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial m^N_{AB^P I}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{\partial \mathbf{S}^N_{AB}} \cdot m^N_{AB^P I} - \right. \\ & - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-P_I(\mathbf{S}^N_{AB}) \cdot \delta^P_R - M^T_S(\mathbf{S}^N_{AB}) \cdot G^S_{TI^P R}) - \\ & \left. - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (M^P_R(\mathbf{S}^N_{AB}) \cdot \delta^S_I - M^S_I(\mathbf{S}^N_{AB}) \cdot \delta^P_R) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для момента второго промежуточного объекта во втором приближении

$$\begin{aligned} C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial m^N_{AB^P I}(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, \mathbf{S}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2)}{\partial \mathbf{S}^N_{AB}} \cdot m^N_{AB^P I} + \right. \\ & + C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-p^N_{ABI} \cdot \delta^P_R - m^N_{AB^T S} \cdot G^S_{TI^P R}) + \\ & \left. + C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (m^N_{AB^P R} \cdot \delta^S_I - m^N_{AB^S I} \cdot \delta^P_R) \right). \end{aligned} \quad (99)$$

## 2. Уравнения динамики линейного преобразования

Исходными уравнениями для дальнейших преобразований являются уравнения динамики линейного преобразования второго промежуточного объекта во втором приближении, полученные в Разделе X.2 Главы 6.2. Необходимо отметить, что эти уравнения следует считать *вспомогательными*, так как они сформулированы по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта

$$S_2, p_2, m_2, \text{ или в индексной форме } S_{2K}^L, p_{2KI}^L, m_{2K}^L p_I.$$

Отсюда следует, что вывод *окончательных* уравнений динамики линейного преобразования для динамических параметров второго промежуточного объекта во втором приближении должен включать в себя два этапа. На первом этапе необходимо перейти от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта

$$S_2, p_2, m_2, \text{ или в индексной форме } S_{AK}^N, p_{AKI}^N, m_{AK}^N p_I.$$

Связь между непосредственными и вспомогательными динамическими параметрами дается соотношениями (100), (102), (103) Главы 6.1:

$$S_{2K}^L = C^{LA}_N \cdot S_{AK}^N, \quad p_{2KI}^L = C^{LA}_N \cdot p_{AKI}^N, \quad m_{2K}^L p_I = C^{LA}_N \cdot m_{AK}^N p_I. \quad (100)$$

На втором этапе необходимо учесть перестановочные соотношения, полученные в Главе 6.3.

### 2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

Исходим из уравнения динамики линейного преобразования для импульса второго промежуточного объекта во втором приближении, полученного в Разделе X.2.1 Главы 6.2 (формула (116)). Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial p_{2I}(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S_2} \cdot p_{2I} - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, P] S_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, M] S_2 \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{2KI}^L(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S_{2K}^L} \cdot p_{2KI}^L - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, P_R] S_{2K}^L - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, M^S_R] S_{2K}^L \right). \end{aligned} \quad (101)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (100). Получим уравнение динамики линейного преобразования для импульса второго промежуточного объекта во втором приближении, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта:

$$\begin{aligned} C^{LA}_N \cdot \frac{\partial p_{AKI}^N(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S_{AK}^N} \cdot p_{AKI}^N - \right. \\ & \left. - C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, P_R] S_{AK}^N - C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, M^S_R] S_{AK}^N \right). \end{aligned} \quad (102)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (2)

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_H \cdot T^H_{[IR]} + M^H_F \cdot R^F_{H[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^H_F \cdot G^F_{HR} S_I, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^H_{[IR]} &= {}_i C^H_{[IR]} - \Gamma^H_{[IR]}, \\ G^F_{HR} S_I &= \Gamma^F_{HR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{HI} \cdot \delta^F_R + \Gamma^F_{RI} \cdot \delta^S_H, \\ R^F_{H[IR]} &= \Gamma^F_{H[IR]} + \Gamma^F_{G[R]} \cdot \Gamma^G_{[H|I]} + \Gamma^F_{HG} \cdot T^G_{[IR]} + {}_i C^F_{H[IR]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^{LA}_N \cdot \frac{\partial p^N_{AKI}(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S^N_{AK}} \cdot p^N_{AKI} - \right. \\ &- C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (P_H(S^N_{AK}) \cdot T^H_{[IR]} + M^H_F(S^N_{AK}) \cdot R^F_{H[IR]}) - \\ &\left. - C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (P_R(S^N_{AK}) \cdot \delta^S_I + M^H_F(S^N_{AK}) \cdot G^F_{HR} S_I) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для импульса второго промежуточного объекта во втором приближении

$$\begin{aligned} C^{LA}_N \cdot \frac{\partial p^N_{AKI}(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S^N_{AK}} \cdot p^N_{AKI} + \right. \\ &+ C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (p^N_{AKH} \cdot T^H_{[IR]} + m^N_{AK}{}^H{}_F \cdot R^F_{H[IR]}) + \\ &\left. + C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (p^N_{AKR}(S^N_{AK}) \cdot \delta^S_I + m^N_{AK}{}^H{}_F \cdot G^F_{HR} S_I) \right). \end{aligned} \quad (103)$$

## 2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента

Исходим из уравнения динамики линейного преобразования для момента второго промежуточного объекта во втором приближении, полученного в Разделе X.2.2 Главы 6.2 (формула (117)). Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^P_{2I}(x(l_0), l(l_0))}{\partial l_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S_2} \cdot m^P_{2I} - \right. \\ &\left. \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P] S_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M] S_2 \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^L_{2K}{}^P{}_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S^L_{2K}} \cdot m^L_{2K}{}^P{}_I - \right. \\ &\left. - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, P_R] S^L_{2K} - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, M^S_R] S^L_{2K} \right). \end{aligned} \quad (104)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (100). Получим уравнение динамики линейного преобразования для момента второго промежуточного объекта во втором приближении, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта:

$$\begin{aligned} C^{LA}_N \cdot \frac{\partial m^N_{AK}{}^P{}_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S^N_{AK}} \cdot m^N_{AK}{}^P{}_I - \right. \\ &\left. - C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, P_R] S^N_{AK} - C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, M^S_R] S^N_{AK} \right). \end{aligned} \quad (105)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (3)

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^T_S \cdot G^S_{TI} P_R, \\ [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \end{aligned}$$

где

$$G^S_{TI} P_R = \Gamma^S_{TI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{TR} \cdot \delta^S_I + \Gamma^S_{IR} \cdot \delta^P_T.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^{LA}_N \cdot \frac{\partial m^N_{AK} P_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dl^L_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S^N_{AK}} \cdot m^N_{AK} P_I - \right. \\ &- C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-P_I(S^N_{AK}) \cdot \delta^P_R - M^T_S(S^N_{AK}) \cdot G^S_{TI} P_R) S^N_{AK} - \\ &\left. - C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (M^P_R(S^N_{AK}) \cdot \delta^S_I - M^S_I(S^N_{AK}) \cdot \delta^P_R) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для момента второго промежуточного объекта во втором приближении в окончательном виде

$$\begin{aligned} C^{LA}_N \cdot \frac{\partial m^N_{AK} P_I(x(l_0), l(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{Dl^L_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, S_2, p_2, m_2)}{\partial S^N_{AK}} \cdot m^N_{AK} P_I + \right. \\ &+ C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-p^N_{AKI} \cdot \delta^P_R - m^N_{AK} T_S \cdot G^S_{TI} P_R) + \\ &\left. + C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (m^N_{AK} P_R \cdot \delta^S_I - m^N_{AK} S_I \cdot \delta^P_R) \right). \end{aligned} \quad (106)$$

## Х. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВТОРОГО ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОБЪЕКТА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

### 1. Уравнения динамики сдвига

Исходными уравнениями для дальнейших преобразований являются уравнения динамики сдвига промежуточного объекта, полученные в Разделе XI.1 Главы 6.2. Необходимо отметить, что эти уравнения следует считать *вспомогательными*, так как они сформулированы по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта

$$S_2, \quad p_2, \quad m_2, \quad w_2, \quad \text{или в индексной форме } S^L_2, \quad p^L_{2I}, \quad m^{LP}_2, \quad w^{LQP}_2.$$

Отсюда следует, что вывод *окончательных* уравнений динамики сдвига для динамических параметров второго промежуточного объекта должен включать в себя два этапа. На первом этапе необходимо перейти от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта

$$S_2, \quad p_2, \quad m_2, \quad w_2, \quad \text{или в индексной форме } S^N_{AB}, \quad p^N_{ABI}, \quad m^N_{AB} P_I, \quad w^N_{AB} QP_I.$$

Связь между непосредственными и вспомогательными динамическими параметрами дается соотношениями (48), (50), (51), (52) Главы 6.1:

$$S^L_2 = C^{LBA}_N \cdot S^N_{AB}, \quad p^L_{2I} = C^{LBA}_N \cdot p^N_{ABI}, \quad m^{LP}_2 = C^{LBA}_N \cdot m^N_{AB} P_I, \quad w^{LQP}_2 = C^{LBA}_N \cdot w^N_{AB} QP_I. \quad (107)$$

На втором этапе необходимо учесть перестановочные соотношения, полученные в Главе 6.3.

## 1.1. Уравнение динамики сдвига для импульса

Исходим из уравнения динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта, полученного в Разделе XI.1.1 Главы 6.2 (формула (120)):

$$\frac{\partial p_{2I}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_2} \cdot p_{2I} - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, P]S_2 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, M]S_2 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [P_I, W]S_2 \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{2I}^L(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_2^L} \cdot p_{2I}^L - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, P]S_2^L - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, M^S_R]S_2^L - \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, W^{TS}_R]S_2^L \right). \end{aligned} \quad (108)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (107). Получим уравнение динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта:

$$\begin{aligned} C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial p^N_{ABI}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^N_{AB}} \cdot p^N_{ABI} - \right. \\ & - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, P_R]S^N_{AB} - C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, M^S_R]S^N_{AB} - \\ & \left. - C^{LBA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [P_I, W^{TS}_R]S^N_{AB} \right). \end{aligned} \quad (109)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (4)

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_E \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E \cdot R^E_{FG[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^F_E \cdot G^E_{FR}S^S_I + W^{GF}_E \cdot G^E_{FGR}S^S_I, \\ [P_I(W^{TS}_R)] &= M^S_R \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E \cdot \Gamma^E_{RI}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T^E_{[IR]} &= {}_l C^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}, \\ G^E_{FR}S^S_I &= \Gamma^E_{FR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{FI} \cdot \delta^E_R + \Gamma^E_{RI} \cdot \delta^S_F, \\ R^E_{F[IR]} &= \Gamma^E_{F[IR]} + \Gamma^E_{P[R]} \cdot \Gamma^P_{[F]I} + \Gamma^E_{FP} \cdot T^P_{[IR]} + {}_l C^E_{F[IR]}, \\ G^E_{FGR}S^S_I &= B^E_{FGR} \cdot \delta^S_I - B^S_{FGI} \cdot \delta^E_R + B^E_{FRI} \cdot \delta^S_G, \\ R^E_{FG[IR]} &= B^E_{FG[IR]} + B^E_{FH[R]} \cdot \Gamma^H_{[G]I} + \Gamma^E_{H[R]} \cdot B^H_{[FG]I} + B^E_{FGH} \cdot T^H_{[IR]} + {}_l C^E_{FG[IR]}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial p^N_{ABI}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^{N}_{AB}} \cdot p^N_{ABI} - \right. \\
& - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (P_E(S^N_{AB}) \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E(S^N_{AB}) \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E(S^N_{AB}) \cdot R^E_{FG[IR]}) - \\
& C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (P_R(S^N_{AB}) \cdot \delta^S_I + M^F_E(S^N_{AB}) \cdot G^E_{FR}{}^S_I + W^{GF}_E(S^N_{AB}) \cdot G^E_{FGR}{}^S_I) - \\
& \left. - C^{LBA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (M^S_R(S^N_{AB}) \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R(S^N_{AB}) \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E(S^N_{AB}) \cdot \Gamma^E_{RI}) \right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для импульса второго промежуточного объекта в окончательном виде

$$\begin{aligned}
C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial p^N_{ABI}(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^{N}_{AB}} \cdot p^N_{ABI} + \right. \\
& + C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (p^N_{ABE} \cdot T^E_{[IR]} + m^N_{AB}{}^F_E \cdot R^E_{F[IR]} + w^N_{AB}{}^{GF}_E \cdot R^E_{FG[IR]}) + \\
& + C^{LK}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (p^N_{ABR} \cdot \delta^S_I + m^N_{AB}{}^F_E \cdot G^E_{FR}{}^S_I + w^N_{AB}{}^{GF}_E \cdot G^E_{FGR}{}^S_I) + \\
& \left. + C^{LBA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (m^N_{AB}{}^S_R \cdot \delta^T_I - w^N_{AB}{}^{GS}_R \cdot \Gamma^T_{GI} - w^N_{AB}{}^{TS}_E \cdot \Gamma^E_{RI}) \right). \quad (110)
\end{aligned}$$

### 1.2. Уравнение динамики сдвига для момента

Исходим из уравнения динамики сдвига для момента второго промежуточного объекта, полученного в Разделе XI.1.2 Главы 6.2 (формула (121)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m^P_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_2} \cdot m^P_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, P]S_2 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, M]S_2 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [M^P_I, W]S_2 \right).
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m^{LP}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^L_2} \cdot m^{LP}_I - \right. \\
& \left. - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, P_R]S^L_2 - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, M^S_R]S^L_2 - \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, W^{TS}_R]S^L_2 \right). \quad (111)
\end{aligned}$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (107). Получим уравнение динамики сдвига для момента второго промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного



объекта:

$$\begin{aligned}
 C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial m^{NAB^P}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^{NAB}} \cdot m^{NAB^P}_I - \right. \\
 & - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, P_R] S^{NAB} - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, M^S_R] S^{NAB} - \\
 & \left. - C^{LBA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [M^P_I, W^{TS}_R] S^{NAB} \right). \tag{112}
 \end{aligned}$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (5)

$$\begin{aligned}
 [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^G_H \cdot G^H_{GI}{}^P{}_R - W^{GF}_H \cdot G^H_{FGI}{}^P{}_R, \\
 [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \\
 [M^P_I(W^{TS}_R)] &= -W^{TS}_I \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R \cdot \delta^T_I,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 G^M_{GI}{}^P{}_R &= \Gamma^M_{GI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{GR} \cdot \delta^M_I + \Gamma^M_{IR} \cdot \delta^P_G, \\
 G^H_{FGI}{}^P{}_R &= B^H_{FGI} \cdot \delta^P_R - B^P_{FGR} \cdot \delta^H_I + B^H_{FIR} \cdot \delta^P_G.
 \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
 C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial m^{NAB^P}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^{NAB}} \cdot m^{NAB^P}_I - \right. \\
 & - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-P_I(S^{NAB}) \cdot \delta^P_R - M^G_H(S^{NAB}) \cdot G^H_{GI}{}^P{}_R - W^{GF}_H(S^{NAB}) \cdot G^H_{FGI}{}^P{}_R) - \\
 & - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (M^P_R(S^{NAB}) \cdot \delta^S_I - M^S_I(S^{NAB}) \cdot \delta^P_R) - \\
 & \left. - C^{LBA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-W^{TS}_I(S^{NAB}) \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R(S^{NAB}) \cdot \delta^T_I) \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для момента второго промежуточного объекта в окончательном виде

$$\begin{aligned}
 C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial m^{NAB^P}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^{NAB}} \cdot m^{NAB^P}_I + \right. \\
 & + C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-p^N_{ABI} \cdot \delta^P_R - m^{NAB^G}_H \cdot G^H_{GI}{}^P{}_R - w^{NAB^{GF}}_H \cdot G^H_{FGI}{}^P{}_R) + \\
 & + C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (m^{NAB^P}_R \cdot \delta^S_I - m^{NAB^S}_I \cdot \delta^P_R) + \\
 & \left. + C^{LBA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-w^{NAB^{TS}}_I \cdot \delta^P_R + w^{NAB^{PS}}_R \cdot \delta^T_I) \right). \tag{113}
 \end{aligned}$$

### 1.3. Уравнение динамики сдвига для второго момента

Исходим из уравнения динамики сдвига для второго момента второго промежуточного объекта, полученного в Разделе XI.1.3 Главы 6.2 (формула (122)):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w_2^{QP}_I(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_2} \cdot w_2^{QP}_I - \right. \\
 & \left. - \frac{Dx(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, P] S_2 - \frac{Dl(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, M] S_2 - \frac{Da(x_0)}{\partial x_0} \cdot [W^{QP}_I, W] S_2 \right).
 \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2^{LQP}}{\partial x_0^L} \frac{\partial w_2^{LQP}}{\partial x_0^L} (x(x_0), l(x_0), a(x_0)) = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial a^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_2^L} \cdot w_2^{LQP} \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, P_R] S_2^L - \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, M^S_R] S_2^L - \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, W^{TS}_R] S_2^L \right). \end{aligned} \quad (114)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (107). Получим уравнение динамики сдвига для второго момента второго промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта:

$$\begin{aligned} C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial w^{NABQP}}{\partial x_0^L} (x(x_0), l(x_0), a(x_0)) = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial a^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^{NAB}} \cdot w^{NABQP} \right. \\ & - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, P_R] S^{NAB} - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, M^S_R] S^{NAB} - \\ & \left. - C^{LBA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot [W^{QP}_I, W^{TS}_R] S^{NAB} \right). \end{aligned} \quad (115)$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (6)

$$\begin{aligned} [W^{QP}_I(P_R)] &= -M^P_I \cdot \delta^Q_R + W^{IP}_I \cdot \Gamma^Q_{IR} + W^{QP}_H \cdot \Gamma^H_{IR}, \\ [W^{QP}_M(M^S_R)] &= W^{QP}_R \cdot \delta^S_M - W^{SP}_M \cdot \delta^Q_R, \\ [W^{QP}_I(W^{TS}_R)] &= 0. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial w^{NABQP}}{\partial x_0^L} (x(x_0), l(x_0), a(x_0)) = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial a^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^{NAB}} \cdot w^{NABQP} \right. \\ & - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-M^P_I(S^{NAB}) \cdot \delta^Q_R + W^{IP}_I(S^{NAB}) \cdot \Gamma^Q_{IR} + W^{QP}_H(S^{NAB}) \cdot \Gamma^H_{IR}) - \\ & \left. - C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (W^{QP}_R(S^{NAB}) \cdot \delta^S_M - W^{SP}_M(S^{NAB}) \cdot \delta^Q_R) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики сдвига для второго момента второго промежуточного объекта в окончательном виде

$$\begin{aligned} C^{LBA}_N \cdot \frac{\partial w^{NABQP}}{\partial x_0^L} (x(x_0), l(x_0), a(x_0)) = & - \left( \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial a^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{P}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^{NAB}} \cdot w^{NABQP} \right. \\ & + C^{LBA}_N \cdot \frac{Dx^R(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (-m^{NABP}_I \cdot \delta^Q_R + w^{NABIP}_I \cdot \Gamma^Q_{IR} + w^{NABQP}_H \cdot \Gamma^H_{IR}) + \\ & \left. + C^{LBA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(x_0)}{\partial x_0^L} \cdot (w^{NABQP}_R \cdot \delta^S_M - w^{NABSP}_M \cdot \delta^Q_R) \right). \end{aligned} \quad (116)$$

## 2. Уравнения динамики линейного преобразования

Исходными уравнениями для дальнейших преобразований являются уравнения динамики линейного преобразования второго промежуточного объекта, полученные в Разделе XI.2 Главы 6.2. Необходимо отметить, что

эти уравнения следует считать *вспомогательными*, так как они сформулированы по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта

$$S_2, p_2, m_2, w_2 \text{ или в индексной форме } S_{2K}^L, p_{2KI}^L, m_{2K}^{LP}, w_{2K}^{QP}.$$

Отсюда следует, что вывод *окончательных* уравнений динамики линейного преобразования для динамических параметров второго промежуточного объекта должен включать в себя два этапа. На первом этапе необходимо перейти от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта

$$S_2, p_2, m_2, w_2 \text{ или в индексной форме } S_{AK}^N, p_{AKI}^N, m_{AK}^{NP}, w_{AK}^{QP}.$$

Связь между непосредственными и вспомогательными динамическими параметрами дается соотношениями (100), (102), (103) и (104) Главы 6.1:

$$S_{2K}^L = C_{N}^{LA} \cdot S_{AK}^N, p_{2KI}^L = C_{N}^{LA} \cdot p_{AKI}^N, m_{2K}^{LP} = C_{N}^{LA} \cdot m_{AK}^{NP}, w_{2K}^{QP} = C_{N}^{LA} \cdot w_{AK}^{QP}. \quad (117)$$

На втором этапе необходимо учесть перестановочные соотношения, полученные в Главе 6.3.

### 2.1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

Исходим из уравнения динамики линейного преобразования для импульса второго промежуточного объекта, полученного в Разделе XI.2.1 Главы 6.2 (формула (125)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{2I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial x^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_2} \cdot p_{2I} - \right. \\ & \left. \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, P]S_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, M]S_2 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [P_I, W]S_2 \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{2KI}^L(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial x^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_{2K}^L} \cdot p_{2KI}^L - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, P_R]S_{2K}^L - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, M^S_R]S_{2K}^L - \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, W^{TS}_R]S_{2K}^L \right). \quad (118) \end{aligned}$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (117). Получим уравнение динамики линейного преобразования для импульса второго промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта:

$$\begin{aligned} C_{N}^{LA} \cdot \frac{\partial p_{AKI}^N(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial x^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_{AK}^N} \cdot p_{AKI}^N - \right. \\ & - C_{N}^{LA} \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, P_R]S_{AK}^N - C_{N}^{LA} \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, M^S_R]S_{AK}^N - \\ & \left. - C_{N}^{LA} \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [P_I, W^{TS}_R]S_{AK}^N \right). \quad (119) \end{aligned}$$

Воспользуемся перестановочными соотношениями (4)

$$\begin{aligned} [P_I(P_R)] &= P_E \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E \cdot R^E_{FG[IR]}, \\ [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^F_E \cdot G^E_{FR} S^S_I + W^{GF}_E \cdot G^E_{FGR} S^S_I, \\ [P_I(W^{TS}_R)] &= M^S_R \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E \cdot \Gamma^E_{RI}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
T^E_{[IR]} &= {}_l C^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}, \\
G^E_{FR} S_I &= \Gamma^E_{FR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{FI} \cdot \delta^E_R + \Gamma^E_{RI} \cdot \delta^S_F, \\
R^E_{F[IR]} &= \Gamma^E_{F[IR]} + \Gamma^E_{P[R]} \cdot \Gamma^P_{[F|I]} + \Gamma^E_{FP} \cdot T^P_{[IR]} + {}_l C^E_{F[IR]}, \\
G^E_{FGR} S_I &= B^E_{FGR} \cdot \delta^S_I - B^S_{FGI} \cdot \delta^E_R + B^E_{FRI} \cdot \delta^S_G, \\
R^E_{FG[IR]} &= B^E_{FG[IR]} + B^E_{FH[R]} \cdot \Gamma^H_{[G|I]} + \Gamma^E_{H[R]} \cdot B^H_{[FG|I]} + B^E_{FGH} \cdot T^H_{[IR]} + {}_l C^E_{FG[IR]}.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
C^{LA}_N \cdot \frac{\partial p^N_{AKI}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^N_{AK}} \cdot p^N_{AKI} - \right. \\
&- C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (P_E(S^N_{AK}) \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E(S^N_{AK}) \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E(S^N_{AK}) \cdot R^E_{FG[IR]}) - \\
&- C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (P_R(S^N_{AK}) \cdot \delta^S_I + M^F_E(S^N_{AK}) \cdot G^E_{FR} S_I + W^{GF}_E(S^N_{AK}) \cdot G^E_{FGR} S_I) - \\
&\left. - C^{LA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (M^S_R(S^N_{AK}) \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R(S^N_{AK}) \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E(S^N_{AK}) \cdot \Gamma^E_{RI}) \right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для импульса второго промежуточного объекта в окончательном виде

$$\begin{aligned}
C^{LA}_N \cdot \frac{\partial p^N_{AKI}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^N_{AK}} \cdot p^N_{AKI} + \right. \\
&+ C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (p^N_{AKE} \cdot T^E_{[IR]} + m^N_{AK}{}^F E \cdot R^E_{F[IR]} + w^N_{AK}{}^{GF} E \cdot R^E_{FG[IR]}) + \\
&+ C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (p^N_{AKR} \cdot \delta^S_I + m^N_{AK}{}^F E \cdot G^E_{FR} S_I + w^N_{AK}{}^{GF} E \cdot G^E_{FGR} S_I) + \\
&\left. + C^{LA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (m^N_{AK}{}^S R \cdot \delta^T_I - w^N_{AK}{}^{GS} R \cdot \Gamma^T_{GI} - w^N_{AK}{}^{TS} E \cdot \Gamma^E_{RI}) \right). \quad (120)
\end{aligned}$$

## 2.2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента

Исходим из уравнения динамики линейного преобразования для момента второго промежуточного объекта, полученного в Разделе XI.2.2 Главы 6.2 (формула (126)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m^P_{2I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_2} m^P_{2I} - \right. \\
&\left. \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P] S_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M] S_2 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, W] S_2 \right).
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m^L_{2K}{}^P I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^L_{2K}} m^L_{2K}{}^P I - \right. \\
&\left. - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, P_R] S^L_{2K} - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, M^S_R] S^L_{2K} - \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, W^{TS}_R] S^L_{2K} \right). \quad (121)
\end{aligned}$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (117). Получим уравнение динамики линейного преобразования для момента второго промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта:

$$\begin{aligned}
 C^{LA}_N \cdot \frac{\partial m^N_{AK^P_I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial l^L_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^N_{AK}} m^N_{AK^P_I} - \right. \\
 - C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, P_R] S^N_{AK} - C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, M^S_R] S^N_{AK} - \\
 \left. - C^{LA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot [M^P_I, W^{TS}_R] S^N_{AK} \right). \tag{122}
 \end{aligned}$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (5)

$$\begin{aligned}
 [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^G_H \cdot G^H_{GI} P_R - W^{GF}_H \cdot G^H_{FGI} P_R, \\
 [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \\
 [M^P_I(W^{TS}_R)] &= -W^{TS}_I \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R \cdot \delta^T_I,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 G^M_{GI} P_R &= \Gamma^M_{GI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{GR} \cdot \delta^M_I + \Gamma^M_{IR} \cdot \delta^P_G, \\
 G^H_{FGI} P_R &= B^H_{FGI} \cdot \delta^P_R - B^P_{FGR} \cdot \delta^H_I + B^H_{FIR} \cdot \delta^P_G.
 \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
 C^{LA}_N \cdot \frac{\partial m^N_{AK^P_I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial l^L_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^N_{AK}} m^N_{AK^P_I} - \right. \\
 - C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-P_I(S^N_{AK}) \cdot \delta^P_R - M^G_H(S^N_{AK}) \cdot G^H_{GI} P_R - W^{GF}_H(S^N_{AK}) \cdot G^H_{FGI} P_R) - \\
 - C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (M^P_R(S^N_{AK}) \cdot \delta^S_I - M^S_I(S^N_{AK}) \cdot \delta^P_R) - \\
 \left. - C^{LA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-W^{TS}_I(S^N_{AK}) \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R(S^N_{AK}) \cdot \delta^T_I) \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для момента второго промежуточного объекта в окончательном виде

$$\begin{aligned}
 C^{LA}_N \cdot \frac{\partial m^N_{AK^P_I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial l^L_P} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^N_{AK}} m^N_{AK^P_I} + \right. \\
 + C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-P^N_{AKI} \cdot \delta^P_R - M^N_{AK^G_H} \cdot G^H_{GI} P_R - W^N_{AK^{GF}_H} \cdot G^H_{FGI} P_R) + \\
 + C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (M^N_{AK^P_R} \cdot \delta^S_I - M^N_{AK^S_I} \cdot \delta^P_R) + \\
 \left. + C^{LA}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-W^N_{AK^{TS}_I} \cdot \delta^P_R + W^N_{AK^{PS}_R} \cdot \delta^T_I) \right). \tag{123}
 \end{aligned}$$

## 2.3. Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента

Исходим из уравнения динамики линейного преобразования для второго момента второго промежуточного объекта, полученного в Разделе XI.2.2 Главы 6.2 (формула (127)):

$$\frac{\partial w_2^{QP}{}_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Da^{IPQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_2} \cdot w_2^{QP}{}_I - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}{}_I, P]S_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}{}_I, M]S_2 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}{}_I, W]S_2 \right).$$

Запишем это уравнение полностью в индексной форме

$$\frac{\partial w_{2K}^{LQP}{}_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Da^{IPQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_{2K}^L} \cdot w_{2K}^{LQP}{}_I - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [W^{QP}{}_I, P_R]S_{2K}^L - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [W^{QP}{}_I, M^S_R]S_{2K}^L - \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [W^{QP}{}_I, W^{TS}_R]S_{2K}^L \right). \quad (124)$$

Это уравнение является *вспомогательным*, так как оно сформулировано по отношению к *вспомогательным* динамическим параметрам второго промежуточного объекта. Поэтому далее перейдем от вспомогательных динамических параметров к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта в соответствии с соотношениями (117). Получим уравнение динамики линейного преобразования для второго момента второго промежуточного объекта, записанное по отношению к непосредственным динамическим параметрам второго промежуточного объекта:

$$C^{LA}{}_N \cdot \frac{\partial w^N_{AK}{}^{QP}{}_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Da^{IPQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^N_{AK}} \cdot w^N_{AK}{}^{QP}{}_I - C^{LA}{}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [W^{QP}{}_I, P_R]S^N_{AK} - C^{LA}{}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [W^{QP}{}_I, M^S_R]S^N_{AK} - C^{LA}{}_N \cdot \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot [W^{QP}{}_I, W^{TS}_R]S^N_{AK} \right). \quad (125)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (6)

$$\begin{aligned} [W^{QP}{}_I(P_R)] &= -M^P{}_I \cdot \delta^Q{}_R + W^{IP}{}_I \cdot \Gamma^Q{}_{IR} + W^{QP}{}_H \cdot \Gamma^H{}_{IR}, \\ [W^{QP}{}_M(M^S_R)] &= W^{QP}{}_R \cdot \delta^S{}_M - W^{SP}{}_M \cdot \delta^Q{}_R, \\ [W^{QP}{}_I(W^{TS}_R)] &= 0. \end{aligned}$$

В результате получим

$$C^{LA}{}_N \cdot \frac{\partial w^N_{AK}{}^{QP}{}_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_{0K}^L} = - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Da^{IPQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^N_{AK}} \cdot w^N_{AK}{}^{QP}{}_I - C^{LA}{}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot (-M^P{}_I(S^N_{AK}) \cdot \delta^Q{}_R + W^{IP}{}_I(S^N_{AK}) \cdot \Gamma^Q{}_{IR} + W^{QP}{}_H(S^N_{AK}) \cdot \Gamma^H{}_{IR}) - C^{LA}{}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0K}^L} \cdot (W^{QP}{}_R(S^N_{AK}) \cdot \delta^S{}_M - W^{SP}{}_M(S^N_{AK}) \cdot \delta^Q{}_R) \right).$$

Отсюда следует уравнение динамики линейного преобразования для второго момента второго промежуточ-

ного объекта в окончательном виде

$$\begin{aligned}
 C^{LA}_N \cdot \frac{\partial w^{NAKQP}_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0K}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{M}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^{NAK}} \cdot w^{NAKQP}_I + \right. \\
 + C^{LA}_N \cdot \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (-m^{NAKPI} \cdot \delta^Q_R + w^{NAKIP}_I \cdot \Gamma^Q_{IR} + w^{NAKQP}_H \cdot \Gamma^H_{IR}) &+ \\
 + C^{LA}_N \cdot \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0K}} \cdot (w^{NAKQP}_R \cdot \delta^S_M - w^{NAKSP}_M \cdot \delta^Q_R) &\left. \right). \quad (126)
 \end{aligned}$$

### 3. Уравнения динамики второго линейного преобразования

Уравнения динамики второго линейного преобразования второго промежуточного объекта уже сформулированы по отношению к непосредственным динамическим параметрам этого объекта так как в соответствии с соотношениями (105), (107), (108), (109) Главы 6.1 имеем:

$$S^L_{2KM} \equiv S^L_{KM}, \quad P^L_{2KMI} \equiv P^L_{KMI}, \quad M^L_{2KM} \equiv m^L_{KM}, \quad W^L_{2KM} \equiv w^L_{KM}. \quad (127)$$

Поэтому дальнейшее преобразование указанных уравнений сводится к учету перестановочных соотношений.

#### 3.1. Уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса

Исходим из уравнения динамики второго линейного преобразования для импульса второго промежуточного объекта, полученного в Разделе XI.3.1 Главы 6.2 (формула (130)):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_{2I}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a_0} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, P_2, M_2, W_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, P_2, M_2, W_2)}{\partial S_2} \cdot P_{2I} - \right. \\
 - \frac{Dx(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, P]S_2 - \frac{Dl(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, M]S_2 - \frac{Da(a_0)}{\partial a_0} \cdot [P_I, W]S_2 &\left. \right).
 \end{aligned}$$

Запишем это соотношение полностью в индексной форме и учтем соотношения (127)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p^L_{KMI}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^L_{KM}} \cdot p^L_{KMI} - \right. \\
 - \frac{Dx^R}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [P_I(P_R)]S^L_{KM} - \frac{Dl^R_S}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [P_I(M^S_R)]S^L_{KM} - \frac{Da^R_{ST}}{\partial a^L_{0KM}} \cdot [P_I(W^{TS}_R)]S^L_{KM} &\left. \right). \quad (128)
 \end{aligned}$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (4)

$$\begin{aligned}
 [P_I(P_R)] &= P_E \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E \cdot R^E_{FG[IR]}, \\
 [P_I(M^S_R)] &= P_R \cdot \delta^S_I + M^F_E \cdot G^E_{FR} S^S_I + W^{GF}_E \cdot G^E_{FGR} S^S_I, \\
 [P_I(W^{TS}_R)] &= M^S_R \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E \cdot \Gamma^E_{RI},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 T^E_{[IR]} &= {}_i C^E_{[IR]} - \Gamma^E_{[IR]}, \\
 G^E_{FR} S^S_I &= \Gamma^E_{FR} \cdot \delta^S_I - \Gamma^S_{FI} \cdot \delta^E_R + \Gamma^E_{RI} \cdot \delta^S_F, \\
 R^E_{F[IR]} &= \Gamma^E_{F[IR]} + \Gamma^E_{P[R]} \cdot \Gamma^P_{[FI]} + \Gamma^E_{FP} \cdot T^P_{[IR]} + {}_i C^E_{F[IR]}, \\
 G^E_{FGR} S^S_I &= B^E_{FGR} \cdot \delta^S_I - B^S_{FGI} \cdot \delta^E_R + B^E_{FRI} \cdot \delta^S_G, \\
 R^E_{FG[IR]} &= B^E_{FG[IR]} + B^E_{FH[R]} \cdot \Gamma^H_{[GI]} + \Gamma^E_{H[R]} \cdot B^H_{[FGI]} + B^E_{FGH} \cdot T^H_{[IR]} + {}_i C^E_{FG[IR]}.
 \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^L_{KMI}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^L_{KM}} \cdot p^L_{KMI} - \right. \\ & - \frac{Dx^R}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (P_E(S^L_{KM}) \cdot T^E_{[IR]} + M^F_E(S^L_{KM}) \cdot R^E_{F[IR]} + W^{GF}_E(S^L_{KM}) \cdot R^E_{FG[IR]}) - \\ & - \frac{Dl^R_S}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (P_R(S^L_{KM}) \cdot \delta^S_I + M^F_E(S^L_{KM}) \cdot G^E_{FR} S^S_I + W^{GF}_E(S^L_{KM}) \cdot G^E_{FGR} S^S_I) - \\ & \left. - \frac{Da^R_{ST}}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (M^S_R(S^L_{KM}) \cdot \delta^T_I - W^{GS}_R(S^L_{KM}) \cdot \Gamma^T_{GI} - W^{TS}_E(S^L_{KM}) \cdot \Gamma^E_{RI}) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса второго промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^L_{KMI}(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial a^L_{0KM}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dx^I} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^L_{KM}} \cdot p^L_{KMI} + \right. \\ & + \frac{Dx^R}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (p^L_{KME} \cdot T^E_{[IR]} + m^L_{KM} F^E \cdot R^E_{F[IR]} + w^L_{KM} G^E \cdot R^E_{FG[IR]}) + \\ & + \frac{Dl^R_S}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (p^L_{KMR}) \cdot \delta^S_I + m^L_{KM} F^E \cdot G^E_{FR} S^S_I + w^L_{KM} G^E \cdot G^E_{FGR} S^S_I) + \\ & \left. + \frac{Da^R_{ST}}{\partial a^L_{0KM}} \cdot (m^L_{KM} S^R \cdot \delta^T_I - w^L_{KM} G^S_R \cdot \Gamma^T_{GI} - w^L_{KM} T^S_E \cdot \Gamma^E_{RI}) \right). \end{aligned} \quad (129)$$

### 3.2. Уравнение динамики второго линейного преобразования для момента

Исходим из уравнения динамики второго линейного преобразования для момента второго промежуточного объекта, полученного в Разделе XI.3.2 Главы 6.2 (формула (131)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^P_{2I}(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, P_2, M_2, W_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, P_2, M_2, W_2)}{\partial S_1} m^P_{2I} - \right. \\ & \left. - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, P] S_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, M] S_2 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [M^P_I, W] S_2 \right). \end{aligned}$$

Запишем это соотношение полностью в индексной форме и учтем соотношения (127)

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^L_{KM} P_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l^L_{0KM}} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dl^I_P} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S^L_{KM}} m^L_{KM} P_I - \right. \\ & \left. - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, P_R] S^L_{KM} - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, M^S_R] S^L_{KM} - \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l^L_{0KM}} \cdot [M^P_I, W^{TS}_R] S^L_{KM} \right). \end{aligned} \quad (130)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (5)

$$\begin{aligned} [M^P_I(P_R)] &= -P_I \cdot \delta^P_R - M^G_H \cdot G^H_{GI} P_R - W^{GF}_H \cdot G^H_{FGI} P_R, \\ [M^P_I(M^S_R)] &= M^P_R \cdot \delta^S_I - M^S_I \cdot \delta^P_R, \\ [M^P_I(W^{TS}_R)] &= -W^{TS}_I \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R \cdot \delta^T_I, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G^M_{GI} P_R &= \Gamma^M_{GI} \cdot \delta^P_R - \Gamma^P_{GR} \cdot \delta^M_I + \Gamma^M_{IR} \cdot \delta^P_G, \\ G^H_{FGI} P_R &= B^H_{FGI} \cdot \delta^P_R - B^P_{FGR} \cdot \delta^H_I + B^H_{FIR} \cdot \delta^P_G. \end{aligned}$$



В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{KM}^L P_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_{0KM}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dl^I P} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_{KM}^L} m_{KM}^L P_I - \right. \\ & - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0KM}^L} \cdot (-P_I(S_{KM}^L) \cdot \delta^P_R - M^G_H(S_{KM}^L) \cdot G^H_{GI} P_R - W^{GF}_H(S_{KM}^L) \cdot G^H_{FGI} P_R) - \\ & - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0KM}^L} \cdot (M^P_R(S_{KM}^L) \cdot \delta^S_I - M^S_I(S_{KM}^L) \cdot \delta^P_R) - \\ & \left. - \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l_{0KM}^L} \cdot (-W^{TS}_I(S_{KM}^L) \cdot \delta^P_R + W^{PS}_R(S_{KM}^L) \cdot \delta^T_I) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики второго линейного преобразования для момента второго промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{KM}^L P_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_{0KM}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Dl^I P} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_{KM}^L} m_{KM}^L P_I + \right. \\ & + \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0KM}^L} \cdot (-p^L_{KMI} \cdot \delta^P_R - m^L_{KM} G^H \cdot G^H_{GI} P_R - w^L_{KM} G^F_H \cdot G^H_{FGI} P_R) + \\ & + \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0KM}^L} \cdot (m^L_{KM} P_R \cdot \delta^S_I - m^L_{KM} S_I \cdot \delta^P_R) + \\ & \left. + \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l_{0KM}^L} \cdot (-w^L_{KM} TS_I \cdot \delta^P_R + w^L_{KM} PS_R \cdot \delta^T_I) \right). \end{aligned} \quad (131)$$

### 3.3. Уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента

Исходим из уравнения динамики второго линейного преобразования для второго момента второго промежуточного объекта, полученного в Разделе XI.3.3 Главы 6.2 (формула (132)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2^{QP}_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, P_2, M_2, W_2)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, P_2, M_2, W_2)}{\partial S_2} \cdot w_2^{QP}_I - \right. \\ & \left. - \frac{Dx(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}_I, P] S_2 - \frac{Dl(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}_I, M] S_2 - \frac{Da(l_0)}{\partial l_0} \cdot [W^{QP}_I, W] S_2 \right). \end{aligned}$$

Запишем это соотношение полностью в индексной форме и учтем соотношения (127)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{KM}^L QP_I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_{0KM}^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Da^I_{PQ}} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_{KM}^L} \cdot w_{KM}^L QP_I - \right. \\ & - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_{0KM}^L} \cdot [W^{QP}_I, P_R] S_{KM}^L - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_{0KM}^L} \cdot [W^{QP}_I, M^S_R] S_{KM}^L - \frac{Da^R_{ST}(l_0)}{\partial l_{0KM}^L} \cdot [W^{QP}_I, W^{TS}_R] S_{KM}^L \left. \right). \end{aligned} \quad (132)$$

Далее воспользуемся перестановочными соотношениями (6)

$$\begin{aligned} [W^{QP}_I(P_R)] &= -M^P_I \cdot \delta^Q_R + W^{IP}_I \cdot \Gamma^Q_{IR} + W^{QP}_H \cdot \Gamma^H_{IR}, \\ [W^{QP}_M(M^S_R)] &= W^{QP}_R \cdot \delta^S_M - W^{SP}_M \cdot \delta^Q_R, \\ [W^{QP}_I(W^{TS}_R)] &= 0. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{KM}^{LQP} I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Da^{I_{PQ}}} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_{KM}^L} \cdot w_{KM}^{LQP} I - \right. \\ & - \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_0^L} \cdot (-M^P_I(S_{KM}^L) \cdot \delta^Q_R + W^{IP}_I(S_{KM}^L) \cdot \Gamma^Q_{IR} + W^{QP}_H(S_{KM}^L) \cdot \Gamma^H_{IR}) - \\ & \left. - \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_0^L} \cdot (W^{QP}_R(S_{KM}^L) \cdot \delta^S_M - W^{SP}_M(S_{KM}^L) \cdot \delta^Q_R) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента второго промежуточного объекта в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{KM}^{LQP} I(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial l_0^L} = & - \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{Da^{I_{PQ}}} - \frac{\partial \mathcal{W}_2(x, l, a, S_2, p_2, m_2, w_2)}{\partial S_{KM}^L} \cdot w_{KM}^{LQP} I + \right. \\ & + \frac{Dx^R(l_0)}{\partial l_0^L} \cdot (-m_{KM}^L P_I \cdot \delta^Q_R + w_{KM}^L IP_I \cdot \Gamma^Q_{IR} + w_{KM}^L QP_H \cdot \Gamma^H_{IR}) + \\ & \left. + \frac{Dl^R_S(l_0)}{\partial l_0^L} \cdot (w_{KM}^L QP_R \cdot \delta^S_M - w_{KM}^L SP_M \cdot \delta^Q_R) \right). \end{aligned} \quad (133)$$

## XI. УСЛОВИЕ СОВМЕСТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

Условие совместности уравнений динамики – это не что иное, как условие интегрируемости дифференциального уравнения

$$dS(z) = -p \cdot Dz,$$

а именно

$$d_2 d_1 S(z) - d_1 d_2 S(z) = 0,$$

записанное с использованием уравнений динамики.

Прежде, чем рассмотреть условие совместности уравнений динамики, выведем уравнения динамики, используя обобщенную кинематическую переменную, обобщенное действие и обобщенный импульс. Как и прежде, введем обобщенную кинематическую переменную  $z^\alpha \sim (x, l, a)$ . Кроме того, введем обобщенное действие<sup>2</sup>

$$S^\epsilon \sim (S^I, S^I_K, S^I_{KL}).$$

Соответственно обобщенный импульс определяется следующим образом

$$\begin{aligned} p^\epsilon_\alpha(z) = & - \frac{\partial S^\epsilon(z)}{Dz^\alpha} \sim \left( -\frac{\partial S(x, l, a)}{Dx}, -\frac{\partial S(x, l, a)}{Dl}, -\frac{\partial S(x, l, a)}{Da} \right) \sim \\ & \sim (p(z), m(z), w(z)) \sim \left( -P(S(x, l, a)), -M(S(x, l, a)), -W(S(x, l, a)) \right). \end{aligned}$$

Для переменных  $z^\alpha$ ,  $S^\epsilon(z)$ ,  $p^\epsilon_\alpha(z)$  имеют место преобразования

$$\begin{aligned} z^\alpha(z_0) &= Z^\alpha(z_0), \\ S^\epsilon(z) &= \mathcal{S}^\epsilon(z, S(z)), \\ p^\epsilon_\alpha(z) &= \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S(z), p(z)). \end{aligned}$$

<sup>2</sup> В частном случае обобщенное действие  $S^\alpha$  включает в себя действие фундаментальных частиц и промежуточных частиц первого и второго рода

При выводе уравнений динамики будем исходить из условия

$$\frac{Dp^\epsilon_\alpha(z)}{Dz^\beta} = 0. \quad (134)$$

Заметим, что это условие сильнее условий, которые использовалось в предыдущем Разделе. Отсюда

$$\frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{Dz^\beta} - \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial S^\delta} \cdot p^\delta_\beta(z) + \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial p^\delta_\gamma} \cdot \frac{\partial p^\delta_\gamma(z)}{Dz^\beta} = 0.$$

В этом выражении используем перестановку

$$\frac{\partial p^\delta_\gamma(z)}{Dz^\beta} = \frac{\partial p^\delta_\beta(z)}{Dz^\gamma} - [P_\gamma, P_\beta] S^\delta(z).$$

Получим

$$\frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{Dz^\beta} - \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial S^\delta} \cdot p^\delta_\beta(z) + \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial p^\delta_\gamma} \cdot \frac{\partial p^\delta_\beta(z)}{Dz^\gamma} - \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial p^\delta_\gamma} \cdot [P_\gamma, P_\beta] S^\delta(z) = 0.$$

Рассматривая это выражение как тождество

$$\frac{Dz^\gamma(z_0)}{\partial z_0^\alpha} \cdot \frac{\partial p^\delta_\beta(z)}{Dz^\gamma} - \frac{\partial p^\delta_\beta(z_0)}{\partial z_0^\alpha} = 0,$$

получим уравнения динамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^\delta_\beta(z_0)}{\partial z_0^\alpha} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{Dz^\beta} - \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial S^\delta} \cdot p^\delta_\beta(z) - \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial p^\delta_\gamma} \cdot [P_\gamma, P_\beta] S^\delta(z) \right), \\ \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial p^\delta_\gamma} &= \frac{Dz^\gamma(z_0)}{\partial z_0^\alpha} \delta^\epsilon_\delta. \end{aligned} \quad (135)$$

Точнее нужно сказать так: полученные уравнения динамики соответствуют "сильному" условию (22). Если условие (22) ослабить, выполнив свертку по индексам  $\epsilon$  и  $\alpha$ , то есть, исходить из условия

$$\frac{Dp^\alpha_\alpha(z)}{Dz^\beta} = 0, \quad (136)$$

то уравнения динамики приобретают вид, близкий к тому, который рассматривался в предыдущих Разделах,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^\alpha_\beta(z_0)}{\partial z_0^\alpha} &= - \left( \frac{\partial \mathcal{P}^\alpha_\alpha(z, S, p)}{Dz^\beta} - \frac{\partial \mathcal{P}^\alpha_\alpha(z, S, p)}{\partial S^\delta} \cdot p^\delta_\beta(z) - \frac{\partial \mathcal{P}^\alpha_\alpha(z, S, p)}{\partial p^\delta_\gamma} \cdot [P_\gamma, P_\beta] S^\delta(z) \right), \\ \frac{\partial \mathcal{P}^\alpha_\alpha(z, S, p)}{\partial p^\delta_\gamma} &= \frac{Dz^\gamma(z_0)}{\partial z_0^\delta}. \end{aligned} \quad (137)$$

Точнее нужно сказать так: ранее вместо одного условия (22) использовались три условия

$$\frac{Dp(z)}{Dz^\beta} = 0, \quad \frac{Dm(z)}{Dz^\beta} = 0, \quad \frac{Dw(z)}{Dz^\beta} = 0.$$

Перейдем теперь к выводу условия совместности уравнений динамики. Исходным является условие интегрируемости дифференциального уравнения

$$dS^\epsilon(z) = -p^\epsilon_\gamma \cdot Dz^\gamma :$$

$$d_2 d_1 S^\epsilon(z) - d_1 d_2 S^\epsilon(z) = 0. \quad (138)$$

Откуда

$$d_2(p^\epsilon_\gamma \cdot D_1 z^\gamma) - d_1(p^\epsilon_\gamma \cdot D_2 z^\gamma) = 0$$

или

$$d_2(p^\epsilon_\gamma) \cdot D_1 z^\gamma - d_1(p^\epsilon_\gamma) \cdot D_2 z^\gamma + p^\epsilon_\gamma \cdot (d_2 D_1 z^\gamma - d_1 D_2 z^\gamma) = 0$$

или

$$d_2(p^\epsilon_\gamma) \cdot D_1 z^\gamma - d_1(p^\epsilon_\gamma) \cdot D_2 z^\gamma = p^\epsilon_\gamma \cdot (d_1 \wedge D_2 z^\gamma). \quad (139)$$

Заметим, что из условия интегрируемости (26) и уравнений структуры следуют перестановочные соотношения в следующем виде:

$$[P_\delta, P_\mu] S^\epsilon(z) = p^\epsilon_\gamma \cdot R^\gamma_{[\mu\delta]}. \quad (140)$$

Учитывая при преобразовании правой части уравнения структуры в следующей форме:

$$d_1 \wedge D_2 z^\gamma = R^\gamma_{[\mu\nu]} \cdot (D_1 z^\nu \cdot D_2 z^\mu)$$

и переходя в выражении (26) от дифференциалов к производным, получим

$$\frac{Dz^\gamma(z_0)}{\partial z_0^\alpha} \cdot \frac{\partial p^\epsilon_\gamma(z_0)}{\partial z_0^\beta} - \frac{Dz^\gamma(z_0)}{\partial z_0^\beta} \cdot \frac{\partial p^\epsilon_\gamma(z_0)}{\partial z_0^\alpha} = p^\epsilon_\gamma \cdot R^\gamma_{[\mu\nu]} \cdot \frac{Dz^\nu(z_0)}{\partial z_0^\alpha} \cdot \frac{Dz^\mu(z_0)}{\partial z_0^\beta}.$$

Если теперь левую часть уравнения преобразовать с помощью уравнений динамики (23), то получим соотношения, которые назовем *условием совместности уравнений динамики*:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{P}(z, S, p)}{\partial p^\beta_\gamma} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{Dz^\gamma} - \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial S^\delta} \cdot p^\delta_\gamma(z) - \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial p^\kappa_\delta} \cdot [P_\delta, P_\gamma] S^\kappa(z) \right) - \\ & - \frac{\partial \mathcal{P}(z, S, p)}{\partial p^\alpha_\gamma} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\beta(z, S, p)}{Dz^\gamma} - \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\beta(z, S, p)}{\partial S^\delta} \cdot p^\delta_\gamma(z) - \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\beta(z, S, p)}{\partial p^\kappa_\delta} \cdot [P_\delta, P_\gamma] S^\kappa(z) \right) = \\ & = p^\epsilon_\gamma \cdot R^\gamma_{[\mu\nu]} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}(z, S, p)}{\partial p^\alpha_\nu} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}(z, S, p)}{\partial p^\beta_\mu}. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\kappa_\kappa$ . Используя перестановочные соотношения (28), условие совместности можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{P}(z, S, p)}{\partial p^\beta_\gamma} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{Dz^\gamma} - \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial S^\delta} \cdot p^\delta_\gamma(z) + \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\alpha(z, S, p)}{\partial p^\kappa_\delta} \cdot p^\kappa_\lambda \cdot R^\lambda_{[\delta\gamma]} \right) - \\ & - \frac{\partial \mathcal{P}(z, S, p)}{\partial p^\alpha_\gamma} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\beta(z, S, p)}{Dz^\gamma} - \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\beta(z, S, p)}{\partial S^\delta} \cdot p^\delta_\gamma(z) + \frac{\partial \mathcal{P}^\epsilon_\beta(z, S, p)}{\partial p^\kappa_\delta} \cdot p^\kappa_\lambda \cdot R^\lambda_{[\delta\gamma]} \right) = \\ & = p^\epsilon_\gamma \cdot R^\gamma_{[\mu\nu]} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}(z, S, p)}{\partial p^\alpha_\nu} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}(z, S, p)}{\partial p^\beta_\mu}. \end{aligned}$$

## Глава 6.5 Уравнения динамики IV. Частные случаи

Рассмотрим более подробно уравнения динамики. При этом ограничимся уравнениями динамики для фундаментального объекта, имея в виду, что уравнения динамики для промежуточных объектов анализируются аналогичным образом. Для фундаментальных объектов и подобных им физических объектов и их частных случаев координаты вектора действия, по отношению к которому формулируются уравнения динамики, подобны координатам обобщенного пространства-времени.

### I. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СДВИГА

Уравнения динамики сдвига определяют зависимости импульса, момента и второго момента фундаментального объекта от координат обобщенного пространства-времени.

#### 1. Уравнение динамики сдвига для импульса в поле внешней симметрии

Уравнение динамики сдвига для импульса фундаментального объекта приведено в Главе 6.4 (формула (23)).

В общем случае (для третьего приближения) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= -\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^M} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot p_M - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot \left( p_I \cdot T^I_{[MQ]} + m^N_I \cdot R^I_{N[MQ]} + w^{IL}_N \cdot R^N_{LI[MQ]} \right) - \\ &- \frac{Dl^Q_I}{\partial x_0} \cdot \left( p_Q \cdot \delta^I_M + m^N_P \cdot G^P_{NQ}{}^I{}_M + w^{LP}_N \cdot G^N_{PLQ}{}^I{}_M \right) - \\ &- \frac{Da^Q_{LI}}{\partial x_0} \cdot \left( m^L_Q \cdot \delta^I_M - w^{NL}_Q \cdot \Gamma^I_{NM} - w^{IL}_N \cdot \Gamma^N_{QM} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены. Например,

$$\frac{\partial p_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = \frac{\partial p^K_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0^K}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} T^I_{[MQ]} &= C^I_{[MQ]} - \Gamma^I_{[MQ]}, \\ G^P_{NQ}{}^I{}_M &= \Gamma^P_{NQ} \cdot \delta^I_M - \Gamma^I_{NM} \cdot \delta^P_Q + \Gamma^P_{QM} \cdot \delta^I_N, \\ R^I_{N[MQ]} &= \Gamma^I_{N[MQ]} + \Gamma^I_{P[Q]} \cdot \Gamma^P_{|N|M]} + \Gamma^I_{NP} \cdot T^P_{[MQ]} + C^I_{N[MQ]}, \\ G^N_{PLQ}{}^I{}_M &= \Gamma^N_{PLQ} \cdot \delta^I_M - \Gamma^I_{PLM} \cdot \delta^N_Q + \Gamma^N_{PQM} \cdot \delta^I_L, \\ R^N_{LI[MQ]} &= \Gamma^N_{LI[MQ]} + \Gamma^N_{LT[Q]} \cdot \Gamma^T_{|I|M]} + \Gamma^N_{T[Q]} \cdot \Gamma^T_{|LI|M]} + \Gamma^N_{LIT} \cdot T^T_{[MQ]} + C^N_{LI[MQ]}. \end{aligned}$$

В частном случае (для второго приближения) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_M(x(x_0), l(x_0))}{\partial x_0} &= -\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx^M} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p_M - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot \left( p_I \cdot T^I_{[MQ]} + m^N_I \cdot R^I_{N[MQ]} \right) - \frac{Dl^Q_I}{\partial x_0} \cdot \left( p_Q \cdot \delta^I_M + m^N_P \cdot G^P_{NQ}{}^I{}_M \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} T^I_{[MQ]} &= C^I_{[MQ]} - \Gamma^I_{[MQ]}, \\ G^P_{NQ}{}^I{}_M &= \Gamma^P_{NQ} \cdot \delta^I_M - \Gamma^I_{NM} \cdot \delta^P_Q + \Gamma^P_{QM} \cdot \delta^I_N, \\ R^I_{N[MQ]} &= \Gamma^I_{N[MQ]} + \Gamma^I_{P[Q]} \cdot \Gamma^P_{|N|M]} + \Gamma^I_{NP} \cdot T^P_{[MQ]} + C^I_{N[MQ]}. \end{aligned}$$

## 1.1. Частные случаи

Рассмотрим последовательно роль каждого из слагаемых в правой части уравнений (1) и (2).  
1. Рассмотрим первое уравнение, в котором правая часть ограничена первым слагаемым

$$\frac{\partial p_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m, w)}{Dx^M}.$$

Это уравнение в частном случае, когда координаты  $x^I$  сводятся к трем пространственным координатам  $x^a$ , координаты  $x_0$  сводятся к координате времени, а действие имеет одну времени-подобную компоненту, записывается следующим образом

$$\frac{\partial p_a(t)}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{H}(x, l, S, p, m, w)}{Dx^a},$$

где введено переобозначение  $\mathcal{H} = \mathcal{P}$ . А это уравнение есть не что иное, как уравнение Гамильтона, рассмотренное в Разделе I Главы 6.2.

2. Выделим из правой части уравнений (1) и (2) второе слагаемое и запишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial p_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot p_M.$$

Приведенное уравнение представляет собой задачу на собственные значения оператора

$$\frac{\partial}{\partial x_0}.$$

Таким образом, следует считать, что второе слагаемое в уравнениях (1) и (2) ответственно за квантовые явления в распределении импульса физического объекта в обобщенном пространстве-времени.

3. Обратимся к третьему слагаемому в правой части уравнений (1) и (2) и запишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial p_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = - \frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot p_I \cdot T^I_{[MQ]}. \quad (3)$$

Пусть в частном случае координаты  $x^I$  сводятся к координатам четырехмерного пространства-времени  $x^i$ , координаты  $x_0$  сводятся к пространственно-временному инварианту – интервалу  $s$ , а действие имеет одну компоненту, подобную пространственно-временному интервалу. Тогда вышеуказанное уравнение приобретает вид уравнения движения точечной частицы

$$\frac{\partial p_i(s)}{\partial s} = -p_k \cdot T^k_{[in]} \cdot \frac{dx^n}{ds}.$$

Для точечной массивной частицы импульс пропорционален скорости движения частицы

$$p_i(s) = m \cdot \frac{dx_i}{ds} = m \cdot v_i(s),$$

где  $m$  – масса частицы. Уравнение движения приобретает вид

$$\frac{\partial v_i(s)}{\partial s} = -v_k \cdot T^k_{[in]} \cdot v^n.$$

Отсюда видно, что уравнение движения не зависит от массы частицы. Таким образом, следует считать, что благодаря слагаемому

$$\frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot p_I \cdot T^I_{[MQ]}$$

уравнение (3) оказывается пригодным для описания движения фундаментального объекта в гравитационном поле с кручением.

4. Рассмотрим следующее слагаемое

$$-\frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot m^N_I \cdot R^I_{N[MQ]} \cdot \quad (4)$$

Рассмотрим частный случай, когда координаты  $x^I$  сводятся к координатам трехмерного пространства  $x^a$ , координаты  $x_0$  сводятся к пространственно-временному инварианту – интервалу  $s$ , а действие имеет одну компоненту, подобную пространственно-временному интервалу. Тогда вышеуказанное слагаемое приобретает вид

$$-\frac{dx^b}{ds} \cdot m^d_c \cdot F^c_{d[ab]} \cdot$$

Здесь латинские индексы принимают значения 1, 2, 3. Заметим, что величина

$$\frac{\partial S}{\partial l^d_c} = m^d_c$$

представляет собой общепринятый момент импульса в том случае, если преобразования  $l^c_d$  представляют собой левые повороты. Слагаемое (4) соответствует представлению о сильной гравитации, развитому в Главе 5.6.

Отсюда общее соображение относительно рассматриваемого слагаемого состоит в том, что оно описывает взаимодействие движущегося заряда(момента) с полем внутренней симметрии.

5. Пятое слагаемое

$$-\frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot w^{IL}_N \cdot R^N_{LI[MQ]} \cdot$$

по своей структуре похоже на предыдущее. И можно считать, что оно также описывает взаимодействие второго момента движущегося фундаментального объекта с полем внешней симметрии.

Сделаем несколько общих замечаний относительно слагаемого

$$-\frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot \left( p_I \cdot T^I_{[MQ]} + m^N_I \cdot R^I_{N[MQ]} + w^{IL}_N \cdot R^N_{LI[MQ]} \right) \quad (5)$$

в целом. Производная  $\frac{Dx^Q}{\partial x_0}$  описывает движение фундаментального объекта, частным случаем которого являются бусты, повороты, дилатации. Поэтому рассматривая слагаемое (5), будем говорить о  $\frac{Dx^Q}{\partial x_0}$ -движении фундаментального объекта. Используя эту терминологию, нужно сказать так: слагаемое (5) уравнения динамики импульса (1) обусловлено взаимодействием фундаментального объекта с полем внешней симметрии при  $\frac{Dx^Q}{\partial x_0}$ -движении фундаментального объекта.

6. Обратимся к слагаемому

$$-\frac{Dl^Q_I}{\partial x_0} \cdot \left( p_Q \cdot \delta^I_M + m^N_P \cdot G^P_{NQ} \cdot G^I_M + w^{LP}_N \cdot G^N_{PLQ} \cdot G^I_M \right). \quad (6)$$

Производная  $\frac{Dl^Q_I}{\partial x_0}$  описывает движение фундаментального объекта, частным случаем которого являются движение с ускорением, вращения. Поэтому рассматривая слагаемое (6), будем говорить о  $\frac{Dl^Q_I}{\partial x_0}$ -движении фундаментального объекта. Используя эту терминологию, нужно сказать так: слагаемое (6) уравнения динамики импульса (1) обусловлено взаимодействием фундаментального объекта с полем внешней симметрии при  $\frac{Dl^Q_I}{\partial x_0}$ -движении фундаментального объекта. В частности, к этому слагаемому относится реакция на излучение поля внешней симметрии ускоренно движущимся фундаментальным объектом.

7. Рассмотрим последнее слагаемое

$$-\frac{Da^Q_{LI}}{\partial x_0} \cdot \left( m^L_Q \cdot \delta^I_M - w^{NL}_Q \cdot \Gamma^I_{NM} - w^{IL}_N \cdot \Gamma^N_{QM} \right). \quad (7)$$

Производная  $\frac{Da^Q_{LI}}{\partial x_0}$  описывает движение фундаментального объекта, частным случаем которого являются движение с вторым ускорением, ускоренные вращения. Поэтому рассматривая слагаемое (7), будем говорить о  $\frac{Da^Q_{LI}}{\partial x_0}$ -движении фундаментального объекта. Используя эту терминологию, нужно сказать так: слагаемое (7) уравнения динамики импульса (1) обусловлено взаимодействием фундаментального объекта с полем внешней симметрии при  $\frac{Da^Q_{LI}}{\partial x_0}$ -движении фундаментального объекта.

На этом закончим обсуждение слагаемых правой части уравнения динамики импульса в поле внешней симметрии.

## 2. Уравнение динамики сдвига для импульса в поле внутренней симметрии

В этом Разделе рассматривается уравнение динамики сдвига для импульса фундаментального объекта, приведенное в Главах 6.1, 6.3, – но для случая, когда фундаментальный объект взаимодействует с полем внутренней симметрии. В частном случае к уравнению этого типа относится уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле.

В общем случае (для третьего приближения) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= -\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m, w)}{Dx^M} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot p_M - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot \left( Q_I \cdot F^I_{[MQ]} + I^N_I \cdot F^I_{N[MQ]} + J^{IL}_N \cdot F^N_{LI[MQ]} \right) - \\ &- \frac{Dl^{Q_I}}{\partial x_0} \cdot \left( Q_Q \cdot \delta^I_M + I^N_P \cdot G^P_{NQ}{}^I_M + J^{LP}_N \cdot G^N_{PLQ}{}^I_M \right) - \\ &- \frac{Da^{Q_{LI}}}{\partial x_0} \cdot \left( I^L_Q \cdot \delta^I_M - J^{NL}_Q \cdot A^I_{NM} - J^{IL}_N \cdot A^N_{QM} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F^I_{[MQ]} &= C^I_{[MQ]} - A^I_{[MQ]}, \\ G^P_{NQ}{}^I_M &= A^P_{NQ} \cdot \delta^I_M - A^I_{NM} \cdot \delta^P_Q + A^P_{QM} \cdot \delta^I_N, \\ F^I_{N[MQ]} &= A^I_{N[MQ]} + A^I_{P[Q]} \cdot A^P_{|N|M]} + A^I_{NP} \cdot F^P_{[MQ]} + C^I_{N[MQ]}, \\ G^N_{PLQ}{}^I_M &= B^N_{PLQ} \cdot \delta^I_M - B^I_{PLM} \cdot \delta^N_Q + B^N_{PQM} \cdot \delta^I_L, \\ F^N_{LI[MQ]} &= B^N_{LI[MQ]} + B^N_{LT[Q]} \cdot A^T_{|I|M]} + A^N_{T[Q]} \cdot B^T_{|LI|M]} + B^N_{LIT} \cdot F^T_{[MQ]} + C^N_{LI[MQ]}. \end{aligned}$$

Для второго приближения имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= -\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{Dx^M} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, S, p, m)}{\partial S} \cdot p_M - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot \left( Q_I \cdot F^I_{[MQ]} + I^N_I \cdot F^I_{N[MQ]} \right) - \frac{Dl^{Q_I}}{\partial x_0} \cdot \left( Q_Q \cdot \delta^I_M + I^N_P \cdot G^P_{NQ}{}^I_M \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F^I_{[MQ]} &= C^I_{[MQ]} - A^I_{[MQ]}, \\ G^P_{NQ}{}^I_M &= A^P_{NQ} \cdot \delta^I_M - A^I_{NM} \cdot \delta^P_Q + A^P_{QM} \cdot \delta^I_N, \\ F^I_{N[MQ]} &= A^I_{N[MQ]} + A^I_{P[Q]} \cdot A^P_{|N|M]} + A^I_{NP} \cdot F^P_{[MQ]} + C^I_{N[MQ]}. \end{aligned}$$

### 2.1. Частные случаи

Рассмотрим последовательно роль каждого из слагаемых в правой части уравнений (8) и (9).

1. Роль первого и второго слагаемых в правой части уравнений (8) и (9) совпадает с той, которая присуща аналогичным слагаемым в уравнениях (1) и (2) и рассматривалась в предыдущем Разделе.

2. Обратимся к слагаемому

$$-\frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot \left( Q_I \cdot F^I_{[MQ]} + I^N_I \cdot F^I_{N[MQ]} + J^{IL}_N \cdot F^N_{LI[MQ]} \right). \quad (10)$$

Это слагаемое обусловлено взаимодействием фундаментального объекта с полем внутренней симметрии при  $\frac{Dx^Q}{\partial x_0}$ -движении фундаментального объекта. Выделим из выражения (10) первое слагаемое

$$-\frac{Dx^Q}{\partial x^K_0} \cdot Q^K_I \cdot F^I_{[MQ]} \quad (11)$$



и рассмотрим его частный случай, соответствующий взаимодействию фундаментального объекта с электромагнитным полем. Для этого положим, что координаты  $x^M$  сводятся к координатам пространства-времени СТО  $x^m$ , а координаты  $x^Q$  и  $x^{K_0}$  сводятся к пространственно-временному интервалу  $s$ . Тогда

$$Q^K_I = \frac{\partial S^K}{DX^I} \quad \text{сводится к} \quad \frac{\partial S}{DX^I},$$

где действие  $S$  имеет одну компоненту, подобную пространственно-временному интервалу. Кроме того, положим, что  $X^I$  сводится к правому повороту в плоскости  $12 - X^{12}$ . В результате

$$Q^K_I \quad \text{сводится к} \quad \frac{\partial S}{DX^{12}} = Q_{12},$$

а

$$-F^I_{[MQ]} \quad \text{сводится к потенциалам электромагнитного поля} \quad A^{12}_m.$$

В результате слагаемое (11) сводится к  $Q_{12} \cdot A^{12}_m$  – слагаемому, соответствующему представлению о слабом электромагнетизме, развитому в Главе 5.6.

Выделим из выражения (10) второе слагаемое

$$-\frac{Dx^Q}{\partial x^{K_0}} \cdot I^{KN}_I \cdot F^I_{N[MQ]} \tag{12}$$

и рассмотрим его частный случай, когда фундаментальный объект взаимодействует с электромагнитным полем. Для этого положим, что координаты  $x^Q$  сводятся к координатам пространства-времени СТО  $x^q$ , координаты  $x^{K_0}$  сводятся к пространственно-временному интервалу  $s$ , а действие имеет одну компоненту, подобную пространственно-временному интервалу. Тогда вышеуказанное слагаемое приобретает вид

$$-\frac{Dx^q}{ds} \cdot I^N_I \cdot F^I_{N[mq]},$$

а ток

$$I^{KN}_I = \frac{\partial S^K}{DL^I_N} \quad \text{сводится к} \quad \frac{\partial S}{DL^I_N}.$$

Кроме того, положим, что правое линейное преобразование  $L^I_N$  сводится к повороту в плоскости  $12 - L^{12}$ . В результате ток

$$I^{KN}_I \quad \text{сводится к электрическому заряду} \quad \frac{\partial S}{DL^{12}} = q_{12} \equiv q, \tag{13}$$

тензор поля внутренней симметрии

$$F^I_{N[MQ]} \quad \text{сводится к тензору электромагнитного поля} \quad F_{[mq]},$$

а слагаемое (12) представляет собой силу Лоренца

$$q \cdot F_{[mq]} \frac{dx^q}{ds}.$$

Рассуждая аналогичным образом, по отношению к полю внутренней симметрии, источником которого является многокомпонентный заряд  $q^\alpha$ , получим обобщение формулы Лоренца

$$q^\alpha \cdot F^\alpha_{[mq]} \frac{dx^q}{ds},$$

где  $F^\alpha_{[mq]}$  - тензор Янга-Миллса.

Третье слагаемое в выражении (10)

$$-\frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot J^{IL}_N \cdot F^N_{LI[MQ]}$$

по своей структуре похоже на предыдущее. И можно считать, что оно аналогично описывает взаимодействие второго тока движущегося фундаментального объекта с полем внутренней симметрии.

3. Обратимся к слагаемому

$$-\frac{Dl^Q_I}{\partial x_0} \cdot \left( Q_Q \cdot \delta^I_M + I^N_P \cdot G^P_{NQ} I^I_M + J^{LP}_N \cdot G^N_{PLQ} I^I_M \right) \quad (14)$$

уравнения (8). Это слагаемое обусловлено взаимодействием фундаментального объекта с полем внутренней симметрии при  $\frac{Dl^Q_I}{\partial x_0}$ -движении фундаментального объекта.

Остановимся на втором слагаемом в выражении (14)

$$-\frac{Dl^Q_I}{\partial x^{K_0}} \cdot I^{KN}_P \cdot G^P_{NQ} I^I_M. \quad (15)$$

Здесь

$$G^P_{NQ} I^I_M = A^P_{NQ} \cdot \delta^I_M - A^I_{NM} \cdot \delta^P_Q + A^P_{QM} \cdot \delta^I_N,$$

поэтому рассматриваемое слагаемое включает в себя три. Для понимания существа дела остановимся только на первом из них, то есть рассмотрим следующее выражение

$$-I^{KN}_P \cdot A^P_{NQ} \cdot \frac{Dl^Q_M}{\partial x^{K_0}}.$$

Рассмотрим частный случай этого выражения, когда речь идет о взаимодействии фундаментального объекта с электромагнитным полем. Пусть координаты  $x^M$  сводятся к координатам трехмерного пространства  $x^a$  и времени  $t$ , координаты  $x^{K_0}$  сводятся к координате времени, а действие имеет одну компоненту, подобную времени. Кроме того, учтем, что ток  $I^{KN}_P$  представляет собой электрический заряд  $q_{12}$  (см. соотношение (13)) Тогда вышеуказанное слагаемое в частном случае приобретает вид

$$q_{12} \cdot A^{12}_q \cdot \frac{Dl^q_a}{\partial t}.$$

Здесь индекс  $a$  принимает значения 1,2,3, индекс  $q$  принимает значения 1,2,3,4. В рассматриваемом случае потенциал  $A^{12}_i$  это потенциал электромагнитного поля, включающий в себя компоненты

- потенциал электрического поля

$$\varphi = A^{12}_4$$

- и потенциал магнитного поля

$$A_b = A^{12}_b.$$

В результате рассматриваемое слагаемое приобретает вид

$$q \cdot \varphi \cdot \frac{dl^4_a}{dt} + q \cdot A_b \cdot \frac{dl^b_a}{dt}.$$

Выражение

$$\frac{dl^4_a}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx_a}{dt} = a_a$$

это ускорение, с которым движется заряд, а выражение

$$\frac{dl^b_a}{dt} = \Omega^b_a$$

это угловая скорость, с которой вращается заряд, если положить, что преобразование  $l^b_a$  это поворот в плоскости  $ab$ .

Таким образом, при ускоренном движении электрического заряда в электромагнитном поле на него помимо силы Лоренца действует сила, пропорциональная ускорению и потенциалу электрического поля

$$q \cdot \varphi \cdot a_a .$$

Этот вывод согласуется с результатом Раздела 4.2 Главы 5.3, заключающемся в том, что в ускоренной системе отсчета к тензору электромагнитного поля добавляется слагаемое, пропорциональное произведению ускорения на электрический потенциал.

При вращении электрического заряда в электромагнитном поле на него действует сила, пропорциональная угловой скорости и потенциалу магнитного поля

$$q \cdot A_b \cdot \Omega_a^b .$$

Отсюда общее соображение относительно слагаемого (15) состоит в том, что оно описывает взаимодействие движущегося ускоренно или вращающегося заряда с полем внутренней симметрии.

4. Обратимся к слагаемому

$$-\frac{Da^{Q_{LI}}}{\partial x_0} \cdot \left( I^L_Q \cdot \delta^I_M - J^{NL}_Q \cdot A^I_{NM} - J^{IL}_N \cdot A^N_{QM} \right) \quad (16)$$

уравнения (8). Это слагаемое обусловлено взаимодействием фундаментального объекта с полем внутренней симметрии при  $\frac{Da^{Q_{LI}}}{\partial x_0}$ -движении фундаментального объекта.

На этом закончим обсуждение слагаемых правой части уравнения (8).

### 3. Уравнение динамики сдвига для момента в поле внешней симметрии

Уравнение динамики сдвига для момента фундаментального объекта в поле внешней симметрии приведено в Главе 6.4 (формула (25)).

В общем случае (для третьего приближения) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^L_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= -\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^M_L} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot m^L_M - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot \left( -p_M \cdot \delta^L_Q - m^N_I \cdot G^I_{NM}{}^L_Q - w^{IP}_N \cdot G^N_{PIM}{}^L_Q \right) - \\ &- \frac{Dl^Q_I}{\partial x_0} \cdot \left( m^L_Q \cdot \delta^I_M - m^I_M \cdot \delta^L_Q \right) - \frac{Da^{Q_{NI}}}{\partial x_0} \cdot \left( -w^{IN}_M \cdot \delta^L_Q + w^{LN}_Q \cdot \delta^I_M \right). \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} G^I_{NM}{}^L_Q &= \Gamma^I_{NM} \cdot \delta^L_Q - \Gamma^L_{NQ} \cdot \delta^I_M + \Gamma^I_{MQ} \cdot \delta^L_N, \\ G^N_{PIM}{}^L_Q &= \Gamma^N_{PIM} \cdot \delta^L_Q - \Gamma^L_{PIQ} \cdot \delta^N_M + \Gamma^N_{PMQ} \cdot \delta^L_I, \end{aligned}$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

Для второго приближения имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^L_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= -\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m)}{Dl^M_L} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m)}{\partial S} \cdot m^L_M - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot \left( -p_M \cdot \delta^L_Q - m^N_I \cdot G^I_{NM}{}^L_Q \right) - \frac{Dl^Q_I}{\partial x_0} \cdot \left( m^L_Q \cdot \delta^I_M - m^I_M \cdot \delta^L_Q \right). \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$G^I_{NM}{}^L_Q = \Gamma^I_{NM} \cdot \delta^L_Q - \Gamma^L_{NQ} \cdot \delta^I_M + \Gamma^I_{MQ} \cdot \delta^L_N .$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

## 3.1. Частные случаи

При отсутствии взаимодействия фундаментального объекта с полем уравнение динамики момента записывается следующим образом:

$$\frac{\partial m^L_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = -\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m)}{Dl^M_L} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m)}{\partial S} \cdot m^L_M - \frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot (-p_M \cdot \delta^L_Q) - \frac{Dl^Q_I}{\partial x_0} \cdot (m^L_Q \cdot \delta^I_M - m^I_M \cdot \delta^L_Q) - \frac{Da^Q_{NI}}{\partial x_0} \cdot (-w^{IN}_M \cdot \delta^L_Q + w^{LN}_Q \cdot \delta^I_M). \quad (19)$$

Это уравнение следует назвать уравнение динамики момента *свободного* фундаментального объекта. Рассмотрим последовательно роль каждого из слагаемых в правой части уравнений (19).

1. Рассмотрим уравнение (19), в котором правая часть ограничена первым слагаемым

$$\frac{\partial m^L_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = -\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m)}{Dl^M_L}.$$

Это уравнение в частном случае, когда координаты  $x^I$  сводятся к трем пространственным координатам  $x^a$ , координаты  $x_0$  сводятся к координате времени, а действие имеет одну времени-подобную компоненту, записывается следующим образом

$$\frac{\partial m^a_b(t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}(x, l, a, S, p, m)}{Dl^b_a},$$

где введено обозначение  $\mathcal{H} = \mathcal{P}$ . А это уравнение есть не что иное, как уравнение Гамильтона, рассмотренное в Разделе I Глпвы 6.1.

2. Выделим из правой части уравнений (19) второе слагаемое и запишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial m^L_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = -\frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m)}{\partial S} \cdot m^L_M.$$

Приведенное уравнение представляет собой задачу на собственные значения оператора

$$\frac{\partial}{\partial x_0}.$$

Таким образом, следует считать, что второе слагаемое в уравнении (19) ответственно за квантовые явления в распределении момента физического объекта в обобщенном пространстве-времени.

3. Обратимся к третьему слагаемому в правой части уравнений (19)

$$-\frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot (-p_M \cdot \delta^L_Q).$$

Это слагаемое обусловлено  $\frac{Dx^Q}{\partial x_0}$ -движением свободного фундаментального объекта.

4. Обратимся к четвертому слагаемому в правой части уравнений (19)

$$-\frac{Dl^Q_I}{\partial x_0} \cdot (m^L_Q \cdot \delta^I_M - m^I_M \cdot \delta^L_Q).$$

Это слагаемое обусловлено  $\frac{Dl^Q_I}{\partial x_0}$ -движением свободного фундаментального объекта. Для выяснения роли этого слагаемого проанализируем его следующий частный случай уравнения динамики момента:

$$\frac{\partial m^L_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} = -\frac{Dl^Q_I}{\partial x_0} \cdot (m^L_Q \cdot \delta^I_M - m^I_M \cdot \delta^L_Q).$$

Рассмотрим частный случай этого уравнения, когда координаты  $x^I$  сводятся к трем пространственным координатам  $x^a$ , координаты  $x_0$  сводятся к координате времени, а действие имеет одну времени-подобную компоненту. Имеем

$$\frac{dm^a_b(t)}{dt} = -\frac{dl^c_b}{dt} \cdot m^a_c + \frac{dl^a_d}{dt} \cdot m^d_b.$$

Полагая, что преобразование  $l^c_b$  - это поворот в плоскости  $cd$ , имеем

$$\frac{dl^c_b}{dt} = \Omega^c_b - \text{угловая скорость вращения в плоскости } cd.$$

В этом обозначении рассматриваемое уравнение приобретает вид

$$\frac{dm^a_b(t)}{dt} = \Omega^a_d \cdot m^d_b - m^a_c \cdot \Omega^c_b.$$

Разложим это уравнение на компоненты по трем плоскостям (12), (23), (31). При этом учтем, что для поворотов

$$m^a_b = -m^b_a, \quad \Omega^a_b = -\Omega^b_a.$$

Получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dm^1_2(t)}{dt} &= \Omega^1_3 \cdot m^3_2 - m^1_3 \cdot \Omega^3_2 \\ \frac{dm^2_3(t)}{dt} &= \Omega^2_1 \cdot m^1_3 - m^2_1 \cdot \Omega^1_3 \\ \frac{dm^3_1(t)}{dt} &= \Omega^3_2 \cdot m^2_1 - m^3_2 \cdot \Omega^2_1. \end{aligned}$$

Полагая, что поворот в указанных плоскостях есть поворот вокруг главных осей инерции, имеем

$$m^1_2 = J' \Omega^1_2, \quad m^2_3 = J'' \Omega^2_3, \quad m^3_1 = J''' \Omega^3_1.$$

Здесь через  $J$  обозначены главные моменты инерции. С учетом этих соотношений система уравнений приобретает вид

$$\begin{aligned} J' \frac{d\Omega^1_2(t)}{dt} &= (J'' - J''') \Omega^1_3 \cdot \Omega^3_2, \\ J'' \frac{d\Omega^2_3(t)}{dt} &= (J''' - J') \Omega^2_1 \cdot \Omega^1_3, \\ J''' \frac{d\Omega^3_1(t)}{dt} &= (J' - J'') \Omega^3_2 \cdot \Omega^2_1. \end{aligned}$$

В результате получены уравнения Эйлера для свободного вращения твердого тела с закрепленной точкой.

#### 4. Уравнение динамики сдвига для второго момента

Уравнение динамики сдвига для второго момента фундаментального объекта в поле внешней симметрии приведено в Главе 6.4 (формула (27)).

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{NL}_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^{MLN}} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot w^{NL}_M - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot \left( -m^L_M \cdot \delta^N_Q + w^{IL}_M \cdot \Gamma^N_{IQ} + w^{NL}_P \cdot \Gamma^P_{MQ} \right) - \frac{Dl^Q_I}{\partial x_0} \cdot \left( w^{NL}_Q \cdot \delta^I_M - w^{IL}_M \cdot \delta^N_Q \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены. Уравнение динамики сдвига для второго момента свободного фундаментального объекта записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{NL}_M(x(x_0), l(x_0), a(x_0))}{\partial x_0} &= - \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^{MLN}} + \frac{\partial \mathcal{P}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot w^{NL}_M - \\ &- \frac{Dx^Q}{\partial x_0} \cdot \left( -m^L_M \cdot \delta^N_Q \right) - \frac{Dl^Q_I}{\partial x_0} \cdot \left( w^{NL}_Q \cdot \delta^I_M - w^{IL}_M \cdot \delta^N_Q \right). \end{aligned}$$

## II. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Уравнения динамики линейного преобразования определяют зависимости импульса, момента и второго момента фундаментального объекта от координат линейного преобразования (поворотов, дилатаций, бустов) обобщенного пространства-времени. При записи уравнений динамики линейного преобразования

1) необходимо учитывать что

$$\frac{Dx}{\partial l_0} = 0, \quad \frac{Dl}{\partial l_0} = \delta \quad \text{или} \quad \frac{Dl^I_K}{\partial l_0^{M_N}} = \delta^I_M \cdot \delta^N_K, \quad \frac{Da}{\partial l_0} = 0, \quad (21)$$

(см. Глава 6.1. Раздел I.1);

2) удобно использовать следующие переобозначения:

$$C^{L_{KI}} \frac{D}{\partial (l_0)^{L_K}} \rightarrow \frac{D}{\partial (l_0)^I}, \quad C^{L_{KI}} \frac{\partial}{\partial (l_0)^{L_K}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial (l_0)^I}, \quad (22)$$

(относительно постоянных  $C^{L_{KI}}$  см. Глава 6.1. Раздел II.1).

### 1. Уравнение динамики линейного преобразования для импульса

Уравнение динамики линейного преобразования для импульса фундаментального объекта в поле внешней симметрии приведено в Главе 6.4 (формула (31)).

С учетом соотношений (21) и обозначений (22) в общем случае (для третьего приближения) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial (l_0)} &= - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^M} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot p_M - \\ &- \frac{Dl^Q_I}{\partial (l_0)} \cdot \left( p_Q \cdot \delta^I_M + m^N_P \cdot G^P_{NQ} \cdot G^I_M + w^{LP}_N \cdot G^N_{PLQ} \cdot G^I_M \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} G^P_{NQ} \cdot G^I_M &= \Gamma^P_{NQ} \cdot \delta^I_M - \Gamma^I_{NM} \cdot \delta^P_Q + \Gamma^P_{QM} \cdot \delta^I_N, \\ G^N_{PLQ} \cdot G^I_M &= \Gamma^N_{PLQ} \cdot \delta^I_M - \Gamma^I_{PLM} \cdot \delta^N_Q + \Gamma^N_{PQM} \cdot \delta^I_L. \end{aligned}$$

Здесь для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

Для второго приближения имеем:

$$\frac{\partial p_M(x(l_0), l(l_0))}{\partial (l_0)} = - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m)}{Dx^M} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m)}{\partial S} \cdot p_M - \frac{Dl^Q_I}{\partial (l_0)} \cdot \left( p_Q \cdot \delta^I_M + m^N_P \cdot G^P_{NQ} \cdot G^I_M \right) \quad (24)$$

Для импульса свободного фундаментального объекта уравнение динамики линейного преобразования (23) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial p_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial (l_0)} = - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^M} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot p_M - \frac{Dl^Q_M}{\partial (l_0)} \cdot p_Q. \quad (25)$$

### 2. Уравнение динамики линейного преобразования для момента

Уравнение динамики линейного преобразования для момента фундаментального объекта приведено в Главе 6.4 (формула (34)).

С учетом соотношений (21) и обозначений (22) в общем случае (для третьего приближения) имеем:

$$\frac{\partial m^L_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial (l_0)} = - \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^M_L} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot m^L_M - \frac{Dl^Q_I}{\partial (l_0)} \cdot \left( m^L_Q \cdot \delta^I_M - m^I_M \cdot \delta^L_Q \right), \quad (26)$$

где для удобства индексы суммирования, относящиеся к действию, опущены.

Интересно отметить, что динамика линейного преобразования для момента не зависит от поля, в котором находится фундаментальный объект.

### 3. Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента

Уравнение динамики линейного преобразования для второго момента фундаментального объекта приведено в Главе 6.4 (формула (37)). С учетом соотношений (21) и обозначений (22) имеем

$$\frac{\partial w^{NL}_M(x(l_0), l(l_0), a(l_0))}{\partial(l_0)} = -\frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^M_{LN}} + \frac{\partial \mathcal{M}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot w^{NL}_M - \frac{Dl^Q_I}{\partial(l_0)} \cdot (w^{NL}_Q \cdot \delta^I_M - w^{IL}_M \cdot \delta^N_Q). \quad (27)$$

Отсюда видно, что динамика второго момента также не зависит от поля, в котором находится фундаментальный объект.

## III. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВТОРОГО ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Уравнения динамики второго линейного преобразования определяют зависимости импульса, момента и второго момента фундаментального объекта от координат второго линейного преобразования (телесных поворотов, вращений, ускорений) обобщенного пространства-времени. При записи уравнений динамики второго линейного преобразования

1) необходимо учитывать что

$$\frac{Dx}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{Dl}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{Da}{\partial l_0} = \delta \quad \text{или} \quad \frac{Da^I_{KL}}{\partial a_0^M_{NP}} = \delta^I_M \cdot \delta^N_K \cdot \delta^P_L, \quad (28)$$

(см. Глава 6.1. Раздел I.1);

2) удобно использовать следующие переобозначения:

$$C^L_{KNI} \frac{D}{\partial(a_0)^{L_{KN}}} \rightarrow \frac{D}{\partial(a_0)^I}, \quad C^L_{KNI} \frac{\partial}{\partial(a_0)^{L_{KN}}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial(a_0)^I}, \quad (29)$$

(относительно постоянных  $C^L_{KNI}$  см. Глава 6.1. Раздел II.1).

### 1. Уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса

Уравнение динамики второго линейного преобразования для импульса фундаментального объекта приведено в Главе 6.4 (формула (41)). С учетом соотношений (28) и обозначений (29) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_M(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial(a_0)} &= -\frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dx^M} + \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot p_M - \\ &- \frac{Da^Q_{LI}}{\partial(a_0)} \cdot (m^L_Q \cdot \delta^I_M - w^{NL}_Q \cdot \Gamma^I_{NM} - w^{IL}_N \cdot \Gamma^N_{QM}). \end{aligned} \quad (30)$$

### 2. Уравнение динамики второго линейного преобразования для момента

Уравнение динамики второго линейного преобразования для момента фундаментального объекта приведено в Главе 6.4 (формула (44)). С учетом соотношений (28) и обозначений (29) имеем

$$\frac{\partial m^L_M(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial(a_0)} = -\frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Dl^M_L} + \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot m^L_M - \frac{Da^Q_{NI}}{\partial(a_0)} \cdot (-w^{IN}_M \cdot \delta^L_Q + w^{LN}_Q \cdot \delta^I_M). \quad (31)$$

### 3. Уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента

Уравнение динамики второго линейного преобразования для второго момента фундаментального объекта приведено в Главе 6.4 (формула (47)). С учетом соотношений (28) и обозначений (29) имеем

$$\frac{\partial w^{NL}_M(x(a_0), l(a_0), a(a_0))}{\partial(a_0)} = -\frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{Da^M_{LN}} + \frac{\partial \mathcal{W}(x, l, a, S, p, m, w)}{\partial S} \cdot w^{NL}_M.$$

## Послесловие

Эта книга заканчивается на полуслове. Она не имеет и не может иметь конца. Молодым людям, вставшим на путь самостоятельных исследований, я желаю успеха и хочу сказать, что конструктивное усовершенствование представлений о Физическом Мире связано не только с экспериментом, но и усилиями в поиске понятийной и математической гармонии и красоты.

А. Кецарис. Москва, февраль 2019.